Автоматика и телемеханика, № 3, 2022

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2022 г. **В.Л. ХАЦКЕВИЧ, д-р техн. наук (vlkhats@mail.ru)**
(Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-Воздушная Академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Воронеж»)

СРЕДНИЕ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ НЕЧЕТКОЙ ИНФОРМАЦИИ

На основе средних систем нечетких чисел введен и изучен класс усредняющих функционалов для реализации задачи оценивания нечеткой информации. Показано, что они обладают рядом специальных свойств — идемпотентности, монотонности, непрерывности и др., характерных для скалярных агрегирующих функций.

Ключевые слова: нечеткие числа, усредняющие функционалы, оценивание нечеткой информации, агрегирование нечеткой информации.

DOI: 10.31857/S0005231022030096

1. Введение

Методы нечеткой математики представляют собой один из подходов к описанию понятия неопределенностей, возникающих в различных задачах математического моделирования (см., напр., [1–3]).

При агрегировании нечеткой информации широко используются так называемые t-нормы и t-конормы [3, гл. 3]. Другой широко распространенный подход состоит в привлечении взвешенного среднего, в более общей ситуации нечеткого интеграла Шоке [2, гл. 4; 4]. Отметим, что оба эти подхода связаны с построением результирующей (агрегирующей) функции принадлежности по заданным агрегируемым функциям принадлежности.

С другой стороны, в задачах агрегирования «четкой» информации важную роль играют функции агрегирования или агрегаторы [5–7], которые векторной оценке объекта $\bar{X} = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ – вещественные параметры, ставят в соответствие скалярную величину $A(\bar{X}) = A(x_1, \ldots, x_n)$, характеризующую объект в целом (обобщенную оценку). Они обладают рядом специальных свойств: идемпотентности, непрерывности, монотонности, симметричности и др. При этом идемпотентность понимается как $A\,(x, \ldots, x) = x$. Свойство монотонности означает, что $A(\bar{X}) \leq A(\bar{Y})$ для любых векторов $\bar{X} \leq \bar{Y}$, где последнее неравенство понимается покоординатно ($x_i \leq y_i,\ i = 1, \ldots, n$). Свойство симметричности состоит в том, что произвольная перестановка компонентов вектора $\bar{X}$ не меняет значение $A(\bar{X})$.

Важный класс функций агрегирования составляют разнообразные средние, в частности среднее арифметическое, среднее показательное, среднее геометрическое, среднее гармоническое [8, гл. 1].

В данной работе под оцениванием (агрегированием) нечеткой информации будем понимать обобщенную скалярную оценку совокупности нечетких параметров (нечеткой информации), характеризующих объект исследования. Фактически речь идет о свертке критериев в многокритериальной задаче, когда в качестве оценок критериев выступают нечеткие числа.

Целью настоящей работы является модификация метода агрегирующих функций (в частности средних) на нечеткие числа и обоснование адекватности такого подхода.

Для этого рассматриваются средние систем нечетких чисел и на их основе вводятся и изучаются усредняющие функционалы, решающие задачу оценивания (агрегирования) нечеткой информации.

Вводятся нелинейные средние систем нечетких чисел и изучаются связанные с ними нелинейные усредняющие функционалы оценивания нечеткой информации.

Будем рассматривать интервальное представление нечетких чисел [1]. А именно, каждому нечеткому числу $\widetilde{z}$ с функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{z}}(x)$ поставим в соответствие интервал α-уровня, который определяется соотношением

$$Z_\alpha = \left\{x \,|\, \mu_{\widetilde{z}}\left(x\right) \geq \alpha\right\}, \ \left(\alpha \in (0,1]\right), \ Z_0 = cl\left\{x \,|\, \mu_{\widetilde{z}}\left(x\right) > 0\right\},$$

где символ cl означает замыкание множества.

Будем считать, что все α-уровни нечеткого числа есть замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Множество таких нечетких чисел обозначим J.

Обозначим левую границу α-интервала через $z^-(\alpha)$, а правую — $z^+(\alpha)$. Иногда $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ называют соответственно левым и правым индексами нечеткого числа.

Равенства между нечеткими числами и арифметические операции над ними ниже понимаются в смысле интервального подхода.

2. Средние нечетких чисел. Регулярная дефазификация

Как известно [9], среднее значение нечеткого числа $\widetilde{z}$, используя интервальное представление, можно определить следующим способом:

(1)
$$m\left(\widetilde{z}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(z^-\left(\alpha\right) + z^+\left(\alpha\right)\right) d\alpha.$$

Отметим, что среднее (1) является аддитивным и однородным (квазилинейным). Это следует из определения интервальных действий над нечеткими числами. Однако линейным его назвать нельзя, поскольку множество нечетких чисел не обладает структурой линейного пространства.

Пример 1. Рассмотрим нечеткое треугольное число $\widetilde{z}$, характеризуемое тройкой (a, b, c) при $a < b < c$, определяющей функцию принадлежности

$$\mu_{\widetilde{z}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b]; \\ \dfrac{x-c}{b-c}, & \text{если } x \in [b, c]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Как известно, в этом случае нижняя и соответственно верхняя границы α-интервала имеют вид соответственно

$$z^{-}(\alpha) = (b-a)\,\alpha + a,\ \ z^{+}(\alpha) = -(c-b)\,\alpha + c.$$

Тогда среднее (1) для нечеткого треугольного числа подсчитывается по формуле $m(A) = \frac{1}{4}(a + 2b + c)$.

Предлагается определить нелинейное среднее нечеткого числа посредством заданной непрерывной строго монотонной функции $\varphi : R \to R$ по формуле

$$m_{\varphi}(\widetilde{z}) = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\left(\varphi\left(z^{-}(\alpha)\right) + \varphi\left(z^{+}(\alpha)\right)\right)d\alpha\right). \tag{2}$$

Например, случай $\varphi(x) = x^{p}$ $(p > 1)$ соответствует среднему степенному, $\varphi(x) = lg(x)$ – среднему геометрическому, $\varphi(x) = x^{-1}$ – среднему гармоническому.

Отметим, что выражение, являющееся аргументом функции φ^{-1} в определении (2), фактически является средним нечеткого числа $\varphi(\widetilde{z})$ (см. приведенную ниже лемму 2).

Пример 2. Для нечеткого треугольного числа $\widetilde{z} = (a, b, c)$ в случае степенной функции $\varphi_{p}(x) = x^{p}$ $(p \neq -1)$ функционал (2) подсчитывается по формуле

$$m_{p}(a, b, c) = \left(\frac{1}{2(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{b-a}\left(b^{p+1} - a^{p+1}\right) + \frac{1}{c-b}\left(c^{p+1} - b^{p+1}\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В случае $\varphi_{H}(x) = x^{-1}$ – по формуле

$$m_{H}(a, b, c) = 2\left(\frac{1}{b-a}ln\frac{b}{a} + \frac{1}{c-b}ln\frac{c}{b}\right)^{-1}.$$

Ниже будем писать $\widetilde{z} \prec \widetilde{w}$ для нечетких чисел $\widetilde{z}$ и $\widetilde{w}$, если [10, гл. 5] одновременно

$$z^{-}(\alpha) \leq w^{-}(\alpha),\ \ z^{+}(\alpha) \leq w^{+}(\alpha)\ \ (\forall\, \alpha \in (0, 1]). \tag{3}$$

Отметим, что (3) вводит отношение частичной упорядоченности на множестве нечетких чисел.

Обозначим через $\bar{z}$ четкое число, которое при дефазификации ставится в соответствие нечеткому числу $\widetilde{z}$. Дефазификацию называют регулярной при выполнении следующих условий:

1) если $\widetilde{z} \prec \widetilde{w}$, то $\bar{z} \le \bar{w}$ (монотонность);
2) если z – четкая величина (число), то $\bar{z} = z$ (согласованность);
3) если $\widetilde{z} \prec \widetilde{w}$, то $\overline{z+v} \le \overline{w+v}$ для любого нечеткого числа $\widetilde{v}$.

Согласно определению среднее (1) есть регулярная дефазификация. А также справедливо

Утверждение 1. *Пусть функция φ в определении нелинейного среднего* (2) *непрерывна и строго монотонна. Тогда* (2) *представляет собой регулярную дефазификацию $\widetilde{z}$.*

Средние (1) и (2) обладают определенными экстремальными свойствами. Они отмечены в работе [11].

3. Нечеткие средние систем нечетких чисел. Усредняющие линейные функционалы в задаче оценивания нечеткой информации

Пусть заданы вещественные числа $\beta_i \in R$ $(i = 1, \ldots, n)$ такие, что $\beta_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$. Рассмотрим взвешенное нечеткое среднее нечетких чисел $\widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_n$ [12, гл. 7; 13]

$$\widetilde{z}_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \widetilde{z}_i. \tag{4}$$

Обозначим через $z_i^-(\alpha)$ и $z_i^+(\alpha)$ соответственно левые и правые индексы нечетких чисел $\widetilde{z}_i$, фигурирующих в (4). Имеет место

Лемма 1. *Левый индекс нечеткого среднего $\widetilde{z}_{\text{ср}}$, определяемого формулой* (4), *равен $z_{\text{ср}}^-(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i^-(\alpha)$, а правый индекс — $z_{\text{ср}}^+(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i^+(\alpha)$.*

Эта лемма вытекает из определения интервальной арифметики нечетких чисел.

Рассмотрим совокупность J^n векторов с нечеткими компонентами (нечетких векторов) вида $\widetilde{Z} = (\widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_n)$, где $\widetilde{z}_i \in J$ $(i = 1, \ldots, n)$ — нечеткие числа. Их сумму и умножение на число будем понимать покоординатно. Неравенства нечетких векторов $\widetilde{Z} \prec \widetilde{W}$ также будем понимать покоординатно в смысле определения (3).

Введем в рассмотрение для $\widetilde{Z} \in J^n$ функционал $l_\beta(\widetilde{Z})$ как среднее (1) от нечеткого числа $\widetilde{z}_{\text{ср}}$, задаваемого формулой (4). Согласно лемме 1 он имеет вид

$$l_\beta(\widetilde{Z}) = m(\widetilde{z}_{\text{ср}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^1 \left(z_i^-(\alpha) + z_i^+(\alpha)\right) d\alpha. \tag{5}$$

У т в е р ж д е н и е 2. Усредняющий функционал (5) *аддитивен и однороден, т.е.*

$$l_\beta\big(\widetilde{Z}+\widetilde{W}\big)=l_\beta\big(\widetilde{Z}\big)+l_\beta\big(\widetilde{W}\big) \quad и \quad l_\beta\big(k\widetilde{Z}\big)=kl_\beta\big(\widetilde{Z}\big) \ \big(\forall \widetilde{Z},\widetilde{W}\in J^n;\ \forall k\in R\big).$$

Справедливость утверждения 2 вытекает из представления

$$l_\beta\big(\widetilde{Z}\big)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i m\left(\widetilde{z}_i\right), \tag{6}$$

а также аддитивности и однородности каждого выражения $m\left(\widetilde{z}_i\right)$.

Рассмотрим на множестве нечетких чисел метрику [14]

$$\rho\left(\widetilde{z},\widetilde{w}\right)=\sup_{0<\alpha\le 1}\max\left\{\left|z^+\left(\alpha\right)-w^+\left(\alpha\right)\right|,\ \left|z^-\left(\alpha\right)-w^-\left(\alpha\right)\right|\right\},$$

где $z^{\pm}(\alpha)$ и $w^{\pm}(\alpha)$ – правые и левые индексы нечетких чисел $\widetilde{z}$ и $\widetilde{w}$ соответственно.

Для нечетких векторов $\widetilde{Z},\widetilde{W}\in J^n$ с компонентами $\widetilde{z}_i,\widetilde{w}_i\in J$ $(i=1,\ldots,n)$ зададим метрику формулой $\rho_n\big(\widetilde{Z},\widetilde{W}\big)=\sum_{i=1}^n\rho(\widetilde{z}_i,\widetilde{w}_i)$.

Т е о р е м а 1. Усредняющий функционал, определяемый совокупностью β_i *на множестве* J^n *формулой* (5), *удовлетворяет следующим условиям регулярности*:

1) $l_\beta\left(\widetilde{z},\ldots,\widetilde{z}\right)=m(\widetilde{z})$, *где* $m(\widetilde{z})$ *определено формулой* (1) (*идемпотентность*);

2) *если* Z — *вектор с «четкими» вещественными компонентами, то* $l_\beta\left(Z\right)=z_{\text{ср}}$ (*согласованность*);

3) *если* $\widetilde{Z}\prec\widetilde{W}$, *то* $l_\beta\big(\widetilde{Z}\big)\le l_\beta\big(\widetilde{W}\big)$ (*монотонность*);

4) *функционал* $l_\beta : J^n\to R$ – *непрерывен* (*непрерывность*);

5) *если* $\widetilde{Z}\prec\widetilde{W}$, *то* $l_\beta\big(\widetilde{Z}+\widetilde{V}\big)\le l_\beta\big(\widetilde{W}+\widetilde{V}\big)$ *для любого* $\widetilde{V}\in J^n$ (*эффективность*).

Подчеркнем, что усредняющий функционал (5) служит для оценки нечеткой информации, заданной набором нечетких чисел $\widetilde{z}_1,\ldots,\widetilde{z}_n$ при фиксированном наборе весов β_i.

Свойства 1)–5) включают в себя как аналоги свойств операторов агрегаторов (см. введение), так и аналоги свойств регулярной операции дефазификации (см. п. 1).

Отметим экстремальное свойство функционала (5). Фиксируем нечеткий вектор $\widetilde{Z}\in J^n$ с компонентами $\widetilde{z}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ и набор чисел $\beta_i\ge 0$ $(i=1,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^n\beta_i=1)$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\beta_n(y)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\int_0^1\left(\left(z_i^-\left(\alpha\right)-y\right)^2+\left(z_i^+\left(\alpha\right)-y\right)^2\right)d\alpha\to\min\left(\forall y\in R\right). \tag{7}$$

Здесь $z_i^-\left(\alpha\right)$ и $z_i^+\left(\alpha\right)$ – соответственно левые и правые индексы нечетких чисел $\widetilde{z}_i$.

Утверждение 3. Число $l_\beta(\widetilde{Z})$ является решением экстремальной задачи (7), причем единственным.

Действительно, производная $\delta_n'(y)$ имеет следующий вид:

$$\delta_n'(y) = -2\sum_{i=1}^{n}\beta_i\int\limits_0^1\left(z_i^-(\alpha)+z_i^+(\alpha)-2y\right)d\alpha.$$

Приравнивая это выражение к нулю, согласно (5) получим $y = l_\beta(\widetilde{Z})$. При этом вторая производная $\delta_n''(y) = 4$. Так что выполнены достаточные условия минимума для функции $\delta_n(y)$.

Утверждение 3 является обобщением известного экстремального свойства среднего арифметического n вещественных чисел [8, гл. 1]. Оно обеспечивает определенную (взвешенную) равноудаленность результата оценивания (агрегирования) от исходных данных $\widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_n$.

Отметим, что в случае равенства всех весов $\beta_i = 1/n$ $(i = 1, \ldots, n)$ соответствующий функционал (5) обладает свойством симметричности, т.е. любая перестановка элементов вектора $\widetilde{Z}$ не меняет значения функционала.

Замечание 1. Можно показать, что близкие результаты справедливы, если вместо числовых весов β_i рассматривать весовые функции $\beta_i(\alpha)$ $(\alpha \in [0,1])$ со свойствами непрерывности и $\beta_i(\alpha) \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \beta_i(\alpha) = 1$, $\forall\alpha \in [0,1]$. Функционал (5) в этом случае приобретает вид

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sum_{i=1}^{n}\beta_i(\alpha)\left(z_i^-(\alpha)+z_i^+(\alpha)\right)d\alpha.$$

Это обобщение случая взвешенного среднего нечеткого числа [15].

Пример 3. Рассмотрим задачу агрегирования нечетких суждений экспертов. Пусть мнения n экспертов о некотором объекте заданы нечеткими треугольными числами $\widetilde{z}_i = (a_i, b_i, c_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и характеризуются функциями принадлежностей $\mu_i(x)$. Один из общепринятых подходов к решению данной задачи состоит [16] в использовании агрегирующей функции принадлежности вида $\mu(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i\mu_i(x)$, где весовые коэффициенты $\beta_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$.

Другой известный подход [16] предполагает использовать нечеткое взвешенное среднее с функцией принадлежности

$$\mu(x) = \sup_{\substack{x_1, x_2, \ldots, x_n \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i x_i = x}}\left(\min_i \mu_i(x_i)\right).$$

После этого производится дефазификация по методу центроидной дефазификации посредством формулы $\bar{z} = \frac{\int_b^a x\mu(x)dx}{\int_b^a \mu(x)dx}$, где $[a,b]$ – носитель нечеткого числа $\widetilde{z}$.

Наш подход в рассматриваемом случае для величины $\widetilde{z}_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \widetilde{z}_i$ дает нечеткое треугольное число, характеризуемое тройкой $\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i,\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i,\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i c_i \right)$. Дефазификация этого числа по формуле (5) с учетом (6) и примера 1 дает выражение $l_\beta \left(\widetilde{Z} \right) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \beta_i c_i$.

Эпи подходы дополняют друг друга, также как дефазификация нечеткого числа методом центроидной дефазификации и методом средних.

4. Нелинейные нечеткие средние и нелинейные усредняющие функционалы в задаче оценивания нечеткой информации

Перейдем к рассмотрению нелинейных нечетких средних систем нечетких чисел. Определим понятие функции от нечеткого числа, используя интервальный подход.

Пусть задана непрерывная строго монотонная вещественная функция $\varphi : R \to R$.

Сформулируем в удобном здесь виде результат из [17].

Лемма 2. Если $\widetilde{z}$ – нечеткое число с левым и правым индексами $z^- (\alpha)$ и $z^+ (\alpha)$ и $\varphi : R \to R$ непрерывная монотонно возрастающая функция, то $\varphi (z^- (\alpha))$ и $\varphi(z^+ (\alpha))$ – соответственно левый и правый индексы нечеткого числа $\varphi(\widetilde{z})$. Если $\varphi(x)$ – непрерывная монотонно убывающая функция, то $\varphi(z^+ (\alpha))$ и $\varphi(z^- (\alpha))$ – левый и правый индексы $\varphi(\widetilde{z})$ соответственно.

Пусть заданы нечеткие числа $\widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_n$, а также действительные числа $\beta_i \in R$ $(\beta_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1)$. Рассмотрим нелинейные нечеткие средние общего вида для заданной непрерывной строго монотонной функции $\varphi : R \to R$:

$$\widetilde{z}_\varphi = \varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(\widetilde{z}_i) \right). \tag{8}$$

Для системы вещественных чисел $z_1, \ldots, z_n$ формула (8) есть классическое определение нелинейного ассоциативного среднего общего вида [8, гл. 1].

Если в (8) $\varphi_p (x) = x^p$ $(p > 1)$ (или $0 < p < 1$), то получаем нечеткий аналог взвешенной средней степенной, если $\varphi_G (x) = \log_a x$ $(a > 1)$ – нечеткий аналог взвешенной средней геометрической, если $\varphi_H (x) = \frac{1}{x}$ – нечеткий аналог взвешенной средней гармонической.

В частности, как и в классической статистике, для описания аддитивных нечетких моделей можно использовать нечеткие средние арифметические, для описания мультипликативных нечетких моделей – нечеткие средние геометрические.

Отметим, что в случае определяющих функций φ_p и φ_G, учитывая их области определения, следует рассматривать совокупности положительных нечетких чисел $\widetilde{z}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ в том смысле, что $\widetilde{z}_i^- (\alpha) > 0$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Нелинейному нечеткому среднему (8) предлагается поставить в соответствие функционал $f_\varphi : J^n \to R$ по формуле

$$f_\varphi\left(\widetilde{Z}\right) = \varphi^{-1}\left(1/2\int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n \beta_i\left(\varphi_i\left(z^-(\alpha)\right) + \varphi_i\left(z^+(\alpha)\right)\right)d\alpha\right). \tag{9}$$

Справедлива

Теорема 2. Пусть $\varphi : R \to R$ – непрерывная и строго монотонная функция. Тогда для функционала (9) *выполнены следующие свойства регулярности*:

1) $f_\varphi(\widetilde{z}, \ldots, \widetilde{z}) = m_\varphi(\widetilde{z})$, *где* $m_\varphi(\widetilde{z})$ *определяется формулой* (2) (*идемпотентность*);

2) *если Z – вектор с «четкими» компонентами, то $f_\varphi(Z) = z_\varphi$, где z_φ определяется формулой, аналогичной* (8) *в вещественном случае* (*согласованность*);

3) *если* $\widetilde{Z} \prec \widetilde{W}$, *то* $f_\varphi\left(\widetilde{Z}\right) \le f_\varphi\left(\widetilde{W}\right)$ (*монотонность*);

4) *функционал* $f_\varphi : J^n \to R$ – *непрерывен* (*непрерывность*);

5) *если* $\widetilde{Z} \prec \widetilde{W}$, *то* $f_\varphi\left(\widetilde{Z} + \widetilde{V}\right) \le f_\varphi\left(\widetilde{W} + \widetilde{V}\right)$ *для любых* $\widetilde{V} \in J^n$ (*эффективность*).

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\delta_\varphi(y) = \sum_{i=1}^n \beta_i \int\limits_0^1 \left(\left(\varphi\left(z_i^+(\alpha)\right) - y\right)^2 + \left(\varphi\left(z_i^-(\alpha)\right) - y\right)^2\right)d\alpha \to \min\ \forall y \in R. \tag{10}$$

Утверждение 4. Для заданного нечеткого вектора $\widetilde{Z}$ число $\varphi(f_\varphi(\widetilde{Z}))$ является решением экстремальной задачи (10), *причем единственным.*

Доказательство аналогично утверждению 3 получается применением критерия минимума для дифференцируемой функции $\delta_\varphi(y)$.

Отметим, что в случае равенства всех весовых коэффициентов $\beta_i = 1/n$ любая перестановка компонент вектора $\widetilde{Z}$ не меняет значение соответствующего функционала (9) (симметричность).

Замечание 2. Наряду с функционалом (9) предлагается рассматривать функционал

$$f_\varphi\left(\widetilde{Z}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i\varphi_i\left(z^-(\alpha)\right)\right) + \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i\varphi_i\left(z^+(\alpha)\right)\right)\right)d\alpha. \tag{11}$$

Можно показать, что он обладает свойствами, аналогичными функционалу (9). Подчеркнем, что в (11) слагаемые, стоящие под знаком интеграла, являются индексами нечеткого среднего (8).

Пример 4. Пусть мнение экспертов описывается нечеткими треугольными числами $\widetilde{z}_i = (a_i, b_i, c_i)$ при $i = 1, \ldots, n$. Значение усредняющего функционала (9) для степенной функции $\varphi(x) = x^p$ с учетом примера 2 выписывается в виде:

при $p \neq -1$

$$f_\varphi\left(\widetilde{Z}\right) = \left(\frac{1}{2(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(\frac{1}{b_i - a_i}\left(b_i^{p+1} - a_i^{p+1}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{c_i - b_i}\left(c_i^{p+1} - b_i^{p+1}\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}};$$

при $p = -1$

$$f_\varphi\left(\widetilde{Z}\right) = 2\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(\frac{1}{b_i - a_i} ln \frac{b_i}{a_i} + \frac{1}{c_i - b_i} ln \frac{c_i}{b_i}\right)\right)^{-1}.$$

5. Заключение

Результаты утверждений 1–4 и теорем 1, 2 настоящей статьи, как представляется автору, ранее не отмечались. Они показывают естественность и адекватность применения введенных в статье усредняющих функционалов вида (5) и (9) в задаче оценивания нечеткой информации, определяемой набором нечетких чисел $\widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_n$ при заданных весах β_i.

Подход, предлагаемый в данной статье, близок к подходу Смоляка [10, гл. 4, 5], где рассмотрены аддитивные монотонные интегральные функционалы общего вида в качестве критериев эффективности инвестиционных проектов с нечеткими данными. Однако другие свойства, характерные для агрегаторов и приведенные в теоремах 1, 2 и утверждениях 1–4, в работе [10] не отмечаются.

Усредняющие функционалы (5) и (9) могут быть, в частности, использованы для оценки эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности (ср. [10, гл. 5; 18, гл. 11, 12]).

Наибольший интерес и перспективы развития представляет, на наш взгляд, раздел 4. Кроме того, перспективные направления дальнейшего развития обозначены в замечаниях 1, 2. Примеры 3, 4 иллюстрируют возможности практического применения предложенных методик. Они могут быть распространены, в частности, на случай трапецеидальных нечетких чисел.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1.

Рассмотрим случай монотонного возрастания функции φ. Проверим свойство 1). Если $\widetilde{z} \prec \widetilde{w}$, то согласно (3) и в силу монотонного возрастания функции φ при каждом $\alpha \in (0, 1]$ имеем

$$\varphi\left(z^-(\alpha)\right) + \varphi\left(z^+(\alpha)\right) \leq \varphi\left(w^-(\alpha)\right) + \varphi\left(w^+(\alpha)\right).$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\varphi\left(z^-(\alpha)\right)+\varphi\left(z^+(\alpha)\right)\right)d\alpha \le \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\varphi\left(w^-(\alpha)\right)+\varphi\left(w^+(\alpha)\right)\right)d\alpha.$$

Тогда свойство 1) следует из монотонного возрастания функции φ^{-1}.

Свойство 2) обусловлено тем, что четкая величина (число) трактуется как нечеткая, имеющая одинаковые индексы, совпадающие с этим числом.

Свойство 3) следует из того, что если $\widetilde{z} \prec \widetilde{w}$, то согласно определению интервального сложения и в силу (3) $\widetilde{z}+\widetilde{v} \prec \widetilde{w}+\widetilde{v}$ для $\forall \widetilde{v} \in J$. Остается воспользоваться свойством 1).

Аналогично рассматривается случай, когда функция φ монотонно убывает.

Доказательство теоремы 1.

Свойство 1) вытекает из представления (6).

Свойство 2) обусловлено тем, что для «четких» векторов Z левый и правый индексы его компонент z_i совпадают с z_i.

Покажем свойство 3). Заметим, что условие $\widetilde{Z} \prec \widetilde{W}$ означает, что $\widetilde{z}_i \prec \widetilde{w}_i$ $(i=1,\ldots,n)$. Тогда для любого $\alpha \in (0,1]$ имеем $\widetilde{z}_i^-(\alpha) \le \widetilde{w}_i^-(\alpha)$ и $\widetilde{z}_i^+(\alpha) \le$ $\le \widetilde{w}_i^+(\alpha)$. Поэтому для всех $i=1,\ldots,n$ можем записать

$$\int\limits_0^1 \left(\widetilde{z}_i^-(\alpha)+\widetilde{z}_i^+(\alpha)\right)d\alpha \le \int\limits_0^1 \left(\widetilde{w}_i^-(\alpha)+\widetilde{w}_i^+(\alpha)\right)d\alpha.$$

Умножая обе части этого неравенства на $\beta_i \ge 0$ и складывая полученные выражения по i от 1 до n, получим $l_\beta(\widetilde{Z}) \le l_\beta(\widetilde{W})$.

Свойство 4) (непрерывность) вытекает из следующего. Пусть нечеткие векторы $\widetilde{Z},\widetilde{W} \in J^n$ имеют компоненты $\widetilde{z}_i,\widetilde{w}_i \in J$ $(i=1,\ldots,n)$ соответственно. Тогда согласно (5) и определениям метрик ρ и ρ_n имеем

$$\left|l_\beta(\widetilde{Z})-l_\beta(\widetilde{W})\right| \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \beta_i \int\limits_0^1 \left(\left|z_i^-(\alpha)-w_i^-(\alpha)\right|+\left|z_i^+(\alpha)-w_i^+(\alpha)\right|\right)d\alpha \le$$
$$\le \sum_{i=1}^n \beta_i\rho\left(\widetilde{z}_i,\widetilde{w}_i\right) \le \rho_n\big(\widetilde{Z},\widetilde{W}\big).$$

Покажем свойство 5). По определению и на основании утверждения 2 $l_\beta\big(\widetilde{Z}+\widetilde{V}\big)=l_\beta\big(\widetilde{Z}\big)+l_\beta\big(\widetilde{V}\big)$. Тогда заключение свойства 5) приобретает вид $m\left(\widetilde{z}_{\text{ср}}\right)+m\left(\widetilde{v}_{\text{ср}}\right) \le m\left(\widetilde{w}_{\text{ср}}\right)+m\left(\widetilde{v}_{\text{ср}}\right)$. То есть $m\left(\widetilde{z}_{\text{ср}}\right) \le m\left(\widetilde{w}_{\text{ср}}\right)$. А это следует из условия $\widetilde{Z} \prec \widetilde{W}$ по свойству 3).

Доказательство теоремы 2.

Рассмотрим случай монотонного возрастания функции φ.

Свойства 1), 2) вытекают из определения (9).

Покажем свойство 3). Пусть $\widetilde{Z} \prec \widetilde{W}$. Тогда при всех $\alpha \in (0,1]$ справедливы неравенства $\widetilde{z}_i^-(\alpha) \le \widetilde{w}_i^-(\alpha)$ и $\widetilde{z}_i^+(\alpha) \le \widetilde{w}_i^+(\alpha)$ $(i = 1,\dots,n)$. Отсюда в силу монотонного возрастания функции φ имеем

$$\int_0^1 \left(\varphi\left(\widetilde{z}_i^-(\alpha)\right) + \varphi\left(\widetilde{z}_i^+(\alpha)\right)\right) d\alpha \le \int_0^1 \left(\varphi\left(\widetilde{w}_i^-(\alpha)\right) + \left(\widetilde{w}_i^+(\alpha)\right)\right) d\alpha.$$

Тогда поскольку $\beta_i > 0$, то

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^1 \left(\varphi\left(\widetilde{z}_i^-(\alpha)\right) + \varphi\left(\widetilde{z}_i^+(\alpha)\right)\right) d\alpha \le$$
$$\le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^1 \left(\varphi\left(\widetilde{w}_i^-(\alpha)\right) + \varphi\left(\widetilde{w}_i^+(\alpha)\right)\right) d\alpha.$$

Так как функция φ^{-1} монотонно возрастает вместе с φ, то это влечет свойство 3).

Свойство 4) в силу непрерывности функции φ проверяется рассуждениями, близкими к доказательству свойства непрерывности в теореме 1.

Поясним свойство 5). Оно обеспечивается тем, что если $\widetilde{Z} \prec \widetilde{W}$, то $\widetilde{Z} + \widetilde{V} \prec \prec \widetilde{W} + \widetilde{V}$ для любого $\widetilde{V} \in J^n$. Затем применяется свойство 3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. М.: Бином, 2015.
2. *Аверкин А.Н.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука, 1986.
3. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. М.: Радио и связь, 1990.
4. *Bustince H., Mesiar R., Fernandez J., et all.* d-Choquet integrals: Choquet integrals based on dissimilarities // Fuzzy Sets and Systems. V. 414. 2021. P. 1–27.
5. *Mesiar R., Kolesarova A., Calvo T., Komornakova M.* A Review of Aggregation Functions. Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models // Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer. 2008. V. 220. P. 121–144.
6. *Леденева Т.М., Подвальный С.Л.* Агрегирование информации в оценочных системах // Вестник ВГУ. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2016. № 4. С. 155–164.
7. *Lopez de Hierro A.F.R., Roldin C., Bustince H., et all.* Affine construction methodology of aggregation functions // Fuzzy Sets and Systems. V. 414. 2021. P. 146–164.
8. *Джини К.* Средние величины. М.: Статистика, 1970.
9. *Dubois D., Prade H.* The mean value of fuzzy number // Fuzzy Sets and Systems. 1987. V. 24. P. 279–300.

10. *Смоляк С.А.* Оценки эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности. М.: Наука, 2002.
11. *Хацкевич В.Л.* О средних значениях нечетких чисел и их систем // «Нечеткие системы и мягкие вычисления», НСМВ. 2021. Т. 16. № 1. С. 5–20.
12. *Nguyen H.T., Wu B.* Fundamentals of statistics with fuzzy data. Berlin: Springer, 2006.
13. *De la Rosa de Saa S., Lubiano M.A., Sinova B., Filzmoser P.* Location-free robust scale estimates for fuzzy data // IEEE Trans. on Fuzzy Systems. 2020. P. 1–14.
14. *Kaleva O., Seikkala S.* On fuzzy metric spaces // Fuzzy Sets and Systems. 1984. Vol. 12. P. 215–229.
15. *Fuller R., Majlender P.* On weighted possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers // Fuzzy Sets and Systems. 2003. V. 136. P. 363–374.
16. *Посадский А.И., Сивакова Т.В., Судаков В.А.* Агрегирование нечетких суждений экспертов // Препринт ИПМ № 101. Москва. 2019. С. 1–12.
17. *Nguyen H.T.* A Note on the Extension Principle for Fuzzy Sets // J. Math. Anal. Appl. 1978. V. 64. P. 369–380.
18. *Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А.* Оценка эффективности инвестиционных проектов: Теория и практика. М.: Поли Принт Сервис, 2015. 1300 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.П. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 18.05.2021

После доработки 21.10.2021

Принята к публикации 20.11.2021