Управление в социально-экономических системах

© 2022 г. **М.И. ГЕРАСЬКИН, д-р экон. наук (innovation@ssau.ru)**
(Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева)

РЕФЛЕКСИВНЫЙ АНАЛИЗ РАВНОВЕСИЙ В ИГРЕ ТРИПОЛИИ ПРИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЯХ ИЗДЕРЖЕК АГЕНТОВ

Рассматривается проблема определения информационных равновесий на рынке триполии при наличии лидера (лидеров) по Штакельбергу с учетом рефлексивного поведения всех агентов рынка в случае совпадения рангов рефлексии при линейных функциях спроса и издержек агентов. Сформированы модели рефлексивных игр, выведены формулы расчета информационных равновесий, исследованы предположительные вариации. Описание полной группы рефлексивных представлений трех агентов дало возможность выделить рефлексивные коалиции, т.е. группы ментально однотипных агентов, и показать, что такие коалиции выгодны, поскольку самые высокие выигрыши получают агенты, выдвигающие одинаковые представления о стратегиях окружения. Доказаны свойства предположительных вариаций (отрицательность и ограниченность суммы), присущие любой агрегативной игре, в которой функция полезности есть комбинация линейных функций цены и затрат.

Ключевые слова: олигополия, лидер по Штакельбергу, рефлексивная игра, равновесие по Нэшу, телекоммуникационный рынок.

DOI: 10.31857/S0005231022030084

1. Введение

В игре олигополии выигрыш агента зависит от стратегий других агентов, т.е. окружения; под окружением агента понимается совокупность остальных агентов рынка (игроков). Решение этой игры в виде равновесия Нэша [1] базируется на выдвижении гипотез о поведении окружения [2, 3], т.е. его стратегиях, которые формализуются в виде предположительных вариаций, характеризующих предполагаемое агентом ответное изменение объема выпуска контрагента, оптимизирующее критерий последнего при выбранном действии первого. Наряду с этим используется рефлексивный анализ [4], при котором исследуется многообразие представлений агента 1) о стратегиях окружения, 2) о представлениях окружения о стратегии агента; 3) о представлениях окружения о представлении агента о стратегиях окружения и т.д. В этом ряду номер представления называется рангом [5].

Модель рефлексивной игры является инструментом описания информированности агентов, с помощью которого экзогенно заданная информированность сводится к множеству возможных игр с полной информированностью. Поэтому решением рефлексивной игры является информационное равновесие [6].

Рефлексия в играх олигополистов относительно мало исследована. Моделирование поведения агентов олигополии в модели рынка с постоянной ценой и линейными функциями издержек доказало устойчивость симметричного распределения рынка [7]. Другие компьютерные эксперименты [8–10] показали возможность появления лидеров по Штакельбергу, но наиболее распространенным результатом игр были сговоры.

Моделирование рефлексивных игр олигополистов исследовалось в постановке Курно–Штакельберга для первых двух рангов стратегической рефлексии [11]. Информационные равновесия анализировались при информационной рефлексии о значениях экзогенного параметра функции полезности [12], а также о параметрах функций издержек окружения [13]. Рассматривались [14] динамические рефлексивные игры в модели Штакельберга и анализировалось временное влияние информационного преимущества на эффективность агентов. Оценивалась эффективность лидерства по Штакельбергу по сравнению с представлением агента о рынке как о совершенной конкуренции [15]. Исследовалось [16] наличие лидеров и последователей в линейной модели олигополии, гетерогенной по виду функций полезности агентов (прибыль, выручка, рентабельность). В модели олигополии с нелинейными функциями издержек агентов исследовалось [17] взаимодействие ведомых агентов и лидеров по Штакельбергу, имеющих различные ранги рефлексии. В модели дуополии с линейными функциями спроса и издержек при одинаковых предельных и постоянных издержках агентов найдены [18] информационные равновесия при наличии лидеров по Штакельбергу произвольного уровня в случае совпадающих рангов рефлексии. В линейной модели олигополии исследовался динамический процесс формирования равновесия Курно [19] и Штакельберга [20] и доказаны условия сходимости процесса к аттрактору. Рефлексивный анализ также использовался в моделях формирования команд [21].

Анализ трехагентной олигополии актуален для телекоммуникационных рынков, поскольку зачастую на таких рынках количество компаний мобильной связи равно трем, что подтверждают усредненные данные по 177 операторам мобильной связи из 45 стран мира [22]. В большинстве развивающихся стран на этих рынках менее четырех поставщиков услуг, около трети стран имеют менее трех поставщиков и 16% являются монопольными; только 18% стран имеют 5 или более операторов связи [23].

В данной статье исследуются равновесия на рынке триполии при различных предельных и постоянных издержках агентов в случае, если все агенты могут рефлексировать относительно стратегий окружения, имея нетождественные представления.

Оригинальность исследований в данной работе выражается в следующем. Во-первых, в отличие от ранее изученных моделей рефлексивных игр агентов олигополии, в которых рассматривалась рефлексия двух агентов [18] и рефлексия в случае совпадения представлений трех агентов [17], здесь исследуются ситуации с различными представлениями каждого из агентов. В результате описана полная группа рефлексивных представлений, что дало возможность выделить так называемые рефлексивные коалиции, т.е. группы ментально однотипных агентов. Во-вторых, если в модели с нелинейными функциями издержек [17] были найдены информационные равновесия по Нэшу только в случае первых двух рангов рефлексии, то здесь, на основе модели с линейными издержками, выведено аналитическое решение для произвольного ранга рефлексии. В-третьих, аналитическое решение позволило исследовать свойства игры с рефлексивными коалициями разных типов, для которых установлены пределы функции распределения выигрыша. В-четвертых, установлены свойства предположительных вариаций (отрицательность и ограниченность суммы), присущие любой агрегативной игре, в которой функция полезности есть комбинация линейных функций цены и затрат.

2. Методология

Рассматривается модель рынка олигополии, в которой задана обратная функция спроса в виде линейной функции общего объема предложения, функции издержек агентов линейные с различными для всех агентов коэффициентами предельных и постоянных издержек.

Агенты выбирают действия исходя из максимума своих функций полезности (прибыли)

$$\Pi_i\left(Q, Q_i\right) = P\left(Q\right) Q_i - C_i\left(Q_i\right), \quad Q_i \geq 0, \quad i \in N = \{1, \ldots, n\}, \tag{1}$$

при линейной обратной функции спроса

$$P\left(Q\right) = a - bQ, \quad a, b > 0, \tag{2}$$

где совокупный выпуск вычисляется по формуле

$$Q = \sum_{i \in N} Q_i, \tag{3}$$

и линейных функциях издержек

$$C_i(Q_i) = d_i + c_i Q_i, \quad c_i, d_i > 0, \quad c_i < a, \quad i \in N, \tag{4}$$

где Q_i, Π_i – выпуск и прибыль i-го агента; N – множество агентов рынка; n – количество агентов; P, Q – равновесная цена и суммарный объем рынка; c_i, d_i – коэффициенты функций издержек агентов, d_i интерпретируется как постоянные издержки, c_i – предельные издержки; a, b – коэффициенты обратной функции рыночного спроса.

Модели выбора оптимальных (обозначены символом «*») действий агентов с учетом условий (1)–(4) запишем в виде

$$Q_i^* = \arg\max_{Q_i \geq 0} \Pi_i\left(Q, Q_i\right) = \arg\max_{Q_i \geq 0} \Big\{ \left(a - bQ\right) Q_i - d_i - c_i Q_i \Big\}, \quad i \in N. \tag{5}$$

Равновесие Нэша в системе (5) представляет собой вектор оптимальных действий агентов при выбранных действиях окружения и определяется путем решения системы *уравнений реакций* следующего типа (при заданном векторе предположительных вариаций):

$$\frac{\partial \Pi_i\left(Q_i, \rho_{ij}\right)}{\partial Q_i} = 0, \quad i, j \in N, \tag{6}$$

где $\rho_{ij} = Q'_{jQ_i}$ – предположительная вариация в уравнении реакции i-го агента, т.е. предполагаемое изменение выпуска j-го агента в ответ на единичный прирост выпуска i-го агента.

Предположительные вариации зависят от представляемой иерархии агентов, которая имеет вид множества

$$M = \{M_0, M_1, \ldots, M_l\}, \tag{7}$$

где l – количество уровней лидерства агентов; M_m $(m = 0, \ldots, l)$ – множества агентов; M_0 – множество ведомых агентов; M_m $(m = 1, \ldots, l)$ – множество лидеров m-го уровня. Множество (7) есть разбиение множества агентов, удовлетворяющее ограничениям

$$M_m \cap M_j = \varnothing, \quad m \neq j, \quad M_0 \cup M_1 \cup \cdots \cup M_l = N = \{1, \ldots, n\}.$$

Возможны следующие модели поведения агентов, соответствующие различным уровням лидерства: ведомый агент (последователь), выбирающий стратегию независимо от стратегий окружения; лидер по Штакельбергу первого уровня, выбирающий стратегию исходя из предположения о том, что окружение реагирует как ведомый агент; лидер по Штакельбергу второго уровня, выбирающий стратегию исходя из предположения о том, что окружение реагирует как лидер по Штакельбергу первого уровня, и т.д.

С учетом терминологии [17] F-стратегией (стратегией ведомого агента) считается выбор агентом действия по (5) без учета действий окружения согласно гипотезе Курно (Cournot, 1960), в результате агент имеет уровень M_0; L-стратегия, т.е. стратегия лидера по Штакельбергу [3], – это выбор действия по модели (5) в предположении, что окружение придерживается F-стратегии, в результате агент имеет уровень M_1.

Формально уровни лидерства определяются следующим образом. Нулевой уровень, соответствующий ведомому η_0-му агенту, имеет место, если в η_0-м уравнении системы (6) полагается $\rho^0_{\eta_0 j} = 0$ $\forall j \in N \backslash \eta_0$, где верхний индекс предположительной вариации обозначает уровень лидерства m. Первый уровень лидерства η_1-го агента возникает, если в η_1-м уравнении системы (6) вариации $\rho^1_{\eta_1 j}$ вычисляются дифференцированием по Q_{η_1} остальных

$(N-1)$ уравнений (6), в которых полагается $\rho_{ij}^0 = 0\ \forall j \in N\backslash i$. Произвольный m-й уровень лидерства η_m-го агента возникает, если в η_m-м уравнении системы (6) вариации $\rho_{\eta_m j}^m$ вычисляются дифференцированием по Q_{η_m} остальных $(N-1)$ уравнений (6), в которых полагается $\rho_{ij} = \rho_{ij}^{m-1} \forall j \in N\backslash i$.

Отметим различие между терминами «ранг рефлексии» и «уровень лидерства по Штакельбергу». Понятие «уровень лидерства по Штакельбергу» является расширением пионерской идеи Г. Штакельберга [3], который описал модель поведения лидера в дуополии, базирующуюся на *известной* предположительной вариации последователя[1]. По аналогии в триполии называем некоторого агента лидером второго уровня, если ему *известно*, что хотя бы один из остальных агентов имеет модель поведения лидера. Как видно из определения множества (7), термин «уровень лидерства» синонимичен конкретной модели поведения агентов, приводящей к информационному равновесию, определяемому из уравнений (6). Поэтому структура множества уровней лидерства непосредственно вытекает из информированности агентов о стратегическом поведении окружения. Следовательно, информированность является фундаментальной проблемой, без решения которой множество уровней лидерства не может быть определено.

С другой стороны, анализируется игра триполии в условиях априорной неинформированности агентов о стратегиях окружения путем описания представляемых каждым агентом стратегий (представлений), оптимальных по критерию (5). Таким образом, вводится согласно трактовке [5] множество всевозможных структур информированности агентов, которое состоит из их представлений F или L на определенной глубине рефлексии (т.е. на конкретном ранге). Поэтому ранг рефлексии агента наряду с его представлением характеризуют его информированность, которая, в свою очередь, обусловливает его уровень лидерства. Обобщенно, уровень лидерства m агента есть некоторая функция двух аргументов — представления (F или L) и ранга рефлексии r этого агента. Например, если агент i имеет представление об F-стратегии окружения на ранге рефлексии $r = 1$ («я думаю о нем»), то его уровень лидерства $m = 1$; если на том же ранге рефлексии агент i имеет представление об L-стратегии окружения, то его уровень лидерства $m = 2$; при $r = 2$ («я думаю, что он думает обо мне») уровни лидерства в этих случаях будут равны $m = 2$ и $m = 3$ соответственно, что строго будет показано ниже.

Следовательно, ранг рефлексии не зависит от оптимальности стратегии агента по критерию (5), а является характеристикой объектов его представления, т.е. фантомных агентов окружения, существующих во мнении данного агента. Обозначим представление i-го агента об агентах окружения $(-i)$ символом $G_{i(-i)}$, а фантомных агентов пронумеруем в следующей последовательности: j_1 – агент j, представляемый i-м агентом (такое представление обозначим как G_{j_1}); i_2 – агент i, представляемый агентом j по мнению i-го

[1] Заметим, что Генрих фон Штакельберг описал взаимодействие последователя (follower) и доминирующего продавца (supplier dominates), а термин «лидер» укоренился позднее [24].

агента (представление обозначим как $G_{j_1 i_2}$); j_3 – агент j, представляемый i-м агентом в сознании j-го агента по мнению i-го агента (представление обозначим как $G_{j_1 i_2 j_3}$), и т.д. Тогда по аналогии с определением [5, раздел 2.1] дадим формальное определение ранга рефлексии: это длина (т.е. число r) последовательности фантомных агентов в следующем рефлексивном представлении:

$$G^r_{i(-i)} = \Big\{G_{j_1 i_2 j_3 \ldots i_r}\ \forall r = 2k \vee G_{j_1 i_2 j_3 \ldots j_r}\ \forall r = 2k+1,\ j_1, i_2, j_3, \ldots, i_r, j_r \in N\Big\},$$
$$i \in N, \quad k \in \aleph.$$

Используется следующий подход к анализу рефлексивного поведения агентов.

На первом этапе исследуются представления агентов о стратегиях окружения на первом ранге рефлексии, т.е. представления типа «агент думает, что окружение следует F-стратегии или L-стратегии». Такие представления можно назвать элементарными, поскольку они ограничивают мышление окружения первым рангом рефлексии: окружение либо игнорирует действия агента (F-стратегия), либо само выбирает оптимум (L-стратегия), считая, что агент игнорирует окружение. Поэтому на данном этапе агент не может представить окружение с уровнем выше M_1; например, представление об окружении как о лидере типа M_2 означало бы, что окружение думает, что агент выбрал оптимум, т.е. окружение имеет второй ранг рефлексии.

На втором этапе такая совокупность представлений экстраполируется на произвольный ранг рефлексии, т.е. на каждом ранге рефлексии представления агента выглядят, как на первом, а их цикличность («я думаю о нем», «я думаю, что он думает обо мне» и т.д.) учитывается через ранг. В результате можно вычислить уровень лидерства в иерархии (7), который приобретает каждый агент.

Обозначим представляемые i-м агентом стратегии окружения (т.е. всех агентов, кроме i-го) символом $G^r_{i(-i)}$, где первый нижний индекс обозначает рефлексирующего агента, второй нижний индекс показывает агента окружения, а верхний индекс обозначает ранг рефлексии. В случае трех агентов (табл. 1) система представлений о стратегиях окружения может иметь три варианта: $G^r_{i(-i)} = \{F, F\}$, $G^r_{i(-i)} = \{L, L\}$, $G^r_{i(-i)} = \{F, L\}$.

Поскольку рассматривается ситуация с различными представлениями $G^r_{i(-i)}$ всех агентов, то представляемая иерархия (7) индивидуальна для каждого агента, т.е. в общем игровая обстановка выражается тремя множествами (7). Для их обобщенной записи введем функцию представлений на первом ранге рефлексии $G[\tau]$, зависящую от порядкового номера τ пары агентов, один из которых представляет стратегию другого; содержательно, для первого из данной пары агентов функция $G[\tau]$ равна его уровню лидерства m относительно второго агента в этой паре. Функция $G[\tau]$, как будет показано ниже, вычисляется на основе следующей функции представлений на r-м ранге рефлексии.

Таблица 1. Характеристика возможных сочетаний представлений

t	$G^r_{1(-1)}$	$G^r_{2(-2)}$	$G^r_{3(-3)}$	Описание случая
1	FF (LL)	FF (LL)	FF (LL)	Все $n = 3$ агентов представляют одинаковую стратегию окружения F (или L)
2	FF (LL)	FF (LL)	LL (FF)	Два агента (i_1-й и i_2-й) имеют одинаковые представления о стратегии окружения FF (или LL), а i_3-й агент – также одинаковые, но противоположные первым двум агентам, представления LL (или FF)
3	FF (LL) (FF) (LL)	FF (LL) (FF) (LL)	FL (LF) (LF) (FL)	Два агента (i_1-й и i_2-й) имеют одинаковые представления о стратегии окружения FF (или LL), а i_3-й агент – различные представления FL, LF о j_1-м и j_2-м агентах
4	FF (LL) (FF) (LL)	LL (FF) (LL) (FF)	FL (LF) (LF) (FL)	Два агента (i_1-й и i_2-й) имеют противоположные представления о стратегии окружения (об одном агенте FF, о другом LL), а i_3-й агент – различные представления FL, LF
5	FF (LL) (FF) (LL)	FL (LF) (LF) (FL)	FL (LF) (LF) (FL)	Один агент (i_1-й) имеет одинаковые представления о стратегии окружения FF (или LL), а два других агента ($\tilde{i}$-е) – различные представления FL, LF
6	FL (LF)	FL (LF)	FL (LF)	Все $n = 3$ агентов имеют различные представления о стратегиях окружения FL, LF

Определение 1. Функция представлений агентов на r-м ранге рефлексии $g^r\left[\tau\left(i,j\right)\right]$ ставит в соответствие представление i-го агента о стратегии j-го агента порядковому номеру τ пары агентов $(i,j) \in N$

$$g^r\left[\tau\left(i,j\right)\right] = \begin{cases} 0, & \text{если } G^r_{ij} = F, \\ 1, & \text{если } G^r_{ij} = L, \end{cases} \qquad \tau\left(i,j\right) \neq \hat{\tau}, \quad i,j \in N, \quad i \neq j, \tag{8}$$

где порядковый номер τ пары рефлексирующих агентов $(i,j) \in N$ равен

$$\tau\left(i,j\right) = j + n\left(i-1\right), \tag{9}$$

случай $\hat{\tau} = \tau\left(i=j\right) = j\left(1+n\right) - n$ соответствует саморефлексивным представлениям, исключенным из рассмотрения; $G^r_{i(-i)}$ — представление i-го агента о стратегии окружения; символ «$-i$» обозначает окружение.

Номер $\tau\left(i,j\right)$ однозначно определяет пару $(i,j) \in N$, поскольку если $(k-1)\,n < \tau\left(i,j\right) \leq kn$, то из (9) следует, что $i = k$, $j = \tau\left(i,j\right) - k$.

Например, на рис. 1 показаны виды функции (8), описывающие игровые случаи, в которых а) все агенты имеют L-представление о стратегиях окружения; б) все агенты имеют L-представление о стратегии третьего агента и F-представление о стратегии первого и второго агентов; в) все агенты имеют L-представление о стратегии первого агента и F-представление о стратегии второго и третьего агентов.

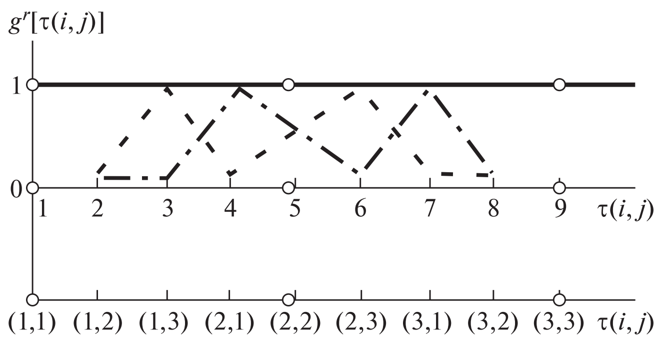

Рис. 1. Графическая интерпретация функции представлений агентов:

а) —— $g^r = 1 \; \forall i, j \in N$, *б*) – – – $g^r = \begin{cases} 1, \; \tau = 3 + n\,(i-1)\,, \\ 0, \; \tau \neq 3 + n\,(i-1)\,, \end{cases}$

в) – · – $g^r = \begin{cases} 1, \; \tau = 1 + n\,(i-1)\,, \\ 0, \; \tau \neq 1 + n\,(i-1)\,. \end{cases}$

Как было показано [17], на основе анализа наилучших ответов множество возможных функций рефлексивных представлений агентов (8) может быть приведено к набору множеств уровней лидерства (7), формализованному в виде функции $G\,[\tau]$. Тем самым рефлексивная игра сводится к множеству игр с полной информированностью вида

$$\Gamma = \Big\langle N, \{Q_i, i \in N\}\,, \{\Pi_i, i \in N\}\,, G\,[\tau]\,\Big\rangle. \tag{10}$$

Поставим задачу нахождения всех информационных равновесий в игре (10) на произвольных, но совпадающих рангах рефлексии всех агентов.

3. Результаты

Для нахождения решения игры (10) в виде информационного равновесия необходимо определить функцию $G\,[\tau]$. Способ нахождения функции $G\,[\tau]$ по заданной функции (8) формулируется в виде следующего утверждения, доказательство которого приведено в Приложении.

Утверждение 1. *Если представления агентов на r-м ранге рефлексии описываются функцией* (8), *то функция представлений агентов на первом ранге рефлексии вычисляется по формуле*

$$G\,[\tau] = g^r\,[\tau\,(i,j)] + r, \quad i, j \in N. \tag{11}$$

Совокупность возможных сочетаний представлений (случаев), обозначенных символом «t», возникающих в рефлексивной игре трех агентов (см. табл. 1), опишем в виде следующего утверждения.

Утверждение 2. *В рефлексивной игре трех агентов система их представлений на r-м ранге рефлексии описывается функцией* $g_t^r\,[\tau\,(i,j)]$, $i, j \in N$

одного из следующих видов

$$(12\text{-}1)\quad g_1^r[\tau] = 0 \vee 1, \quad i,j \in N, \quad i \neq j,$$

$$(12\text{-}2)\quad \begin{aligned} & g_2^r[\tau] = \left\{0 \vee 1, \tau = j + n\left(\tilde{i} - 1\right), \tilde{i} = i_1, i_2\right\} \wedge \\ & \wedge \left\{1 \vee 0, \tau = j + n\left(i_3 - 1\right), i_3 \in N \backslash \tilde{i}\right\}, \end{aligned}$$

$$(12\text{-}3)\quad \begin{aligned} & g_3^r[\tau] = \left\{0 \vee 1, \tau = j + n\left(\tilde{i} - 1\right), \tilde{i} = i_1, i_2\right\} \wedge \\ & \wedge \left\{0, \tau = j_1 + n\left(i_3 - 1\right) \wedge 1, \tau = j_2 + n\left(i_3 - 1\right), i_3 \in N \backslash \tilde{i}, j_1, j_2 \neq i_3\right\}, \end{aligned}$$

$$(12\text{-}4)\quad \begin{aligned} & g_4^r[\tau] = \{0 \vee 1, \tau = j + n(i_1 - 1)\} \wedge \{1 \wedge 0, \tau = j + n(i_2 - 1)\} \wedge \\ & \wedge \{(0 \vee 1, \tau = j_1 + n(i_3 - 1)) \vee (1 \vee 0, \tau = j_2 + n(i_3 - 1)), \\ & \qquad i_3 \in N \backslash (j_1, j_2)\}, \end{aligned}$$

$$(12\text{-}5)\quad \begin{aligned} & g_5^r[\tau] = \{0 \vee 1, \tau = j + n(i_1 - 1)\} \wedge \left\{\left(0 \vee 1, \tau = j_1 + n\left(\tilde{i} - 1\right)\right) \wedge \right. \\ & \left. \wedge \left(1 \vee 0, \tau = j_2 + n\left(\tilde{i} - 1\right)\right), \tilde{i} \in N \backslash (j_1, j_2)\right\}, \end{aligned}$$

$$(12\text{-}6)\quad \begin{aligned} & g_6^r[\tau] = \{0 \vee 1, \tau = j_1 + n(i - 1)\} \wedge \{1 \vee 0, \tau = j_2 + n(i - 1)\}, \\ & \qquad\qquad i \in N \backslash (j_1, j_2). \end{aligned}$$

Далее использовано обозначение: $\gamma_{\theta tr}$ – предположительная вариация окружения в уравнении реакции θ-го агента для t-го случая на r-м ранге рефлексии.

Утверждение 3. *Информационное равновесие в игре трех рефлексирующих агентов* (10) *для случаев* (12) *определяется по формулам*

$$(13\text{-}1)\quad Q_\theta = \frac{\alpha_\theta \left(3 + 2\sum\limits_{j \in N \backslash \theta} \gamma_{jtr} + \prod\limits_{j \in N \backslash \theta} \gamma_{jtr}\right) - \sum\limits_{j \in N \backslash \theta} \alpha_j \left(1 + \gamma_{jtr}\right)}{4 + 3\sum\limits_{j \in N} \gamma_{jtr} + 2\sum\limits_{\theta \in N} \prod\limits_{j \in N \backslash \theta} \gamma_{jtr} + \prod\limits_{j \in N} \gamma_{jtr}}, \quad \theta \in N,$$

где $\alpha_\theta = \frac{a - c_\theta}{b}$, $\theta \in N$, *параметр* $\gamma_{\theta tr}$ *является элементом следующей матрицы:*

$$(13\text{-}2)\qquad (\gamma_{\theta tr},\, \theta = 1,2,3,\, t = 1,\ldots,6) = \begin{pmatrix} \gamma_r^\varphi & \gamma_r^\varphi & \gamma_r^\varphi & \gamma_r^\varphi & \gamma_r^\varphi & \dfrac{\gamma_r^{01}}{2} \\ \gamma_r^\varphi & \gamma_r^\varphi & \gamma_r^\varphi & \gamma_r^{\bar{\varphi}} & \dfrac{\gamma_r^{01}}{2} & \dfrac{\gamma_r^{01}}{2} \\ \gamma_r^\varphi & \gamma_r^{\bar{\varphi}} & \dfrac{\gamma_r^{01}}{2} & \dfrac{\gamma_r^{01}}{2} & \dfrac{\gamma_r^{01}}{2} & \dfrac{\gamma_r^{01}}{2} \end{pmatrix},$$

$$\varphi \in \mu = \{0,1\}, \quad \bar{\varphi} \in \mu \backslash \varphi,$$

элементы которой вычисляются по формулам

$$
\gamma_r^0 = -\frac{1}{3+2\gamma_{r-1}^0},
$$
$$
\gamma_0^0 = 0,
$$
$$
\text{(13-3)} \qquad \gamma_r^1 = -\frac{1}{3+2\gamma_r^0},
$$
$$
\gamma_r^{01} = -\frac{2\left(1+\gamma_r^0+\gamma_{r-1}^0\right)}{4\left(1+\gamma_{r-1}^0\right)\left(1+\gamma_r^0\right)},
$$

символом $\varphi = 0$ обозначено представление θ-го агента о L-стратегии окружения, символом $\varphi = 1$ — представление агента θ-го о F-стратегии окружения, символом μ — множество этих вариантов.

Утверждение 2 определяет следующий алгоритм расчета информационных равновесий для различных рефлексивных случаев и рангов рефлексии. Во-первых, для рассматриваемого случая t формируется вариант функции представления θ-го агента (12) либо для L-стратегии (т.е. рассматривается первый член $g_t^r[\tau] = 0$ дизъюнкции (12), следовательно, $\varphi = 0$), либо для F-стратегии (т.е. рассматривается второй член $g_t^r[\tau] = 1$ дизъюнкции (12), следовательно, $\varphi = 1$). Во-вторых, выбирается предположительная вариация θ-го агента $\gamma_{\theta tr}$, соответствующая θ-му элементу t-го столбца матрицы (13-2), и этот элемент вычисляется по формулам (13-3), где γ_r^0 соответствует $\varphi = 0$ и γ_r^1 соответствует $\varphi = 1$. В-третьих, θ-й компонент вектора информационного равновесия действий агентов вычисляется по формулам (13-1), т.е. определяются возможные состояния равновесия при произвольном ранге рефлексии всех агентов.

Далее, в общем случае линейной модели олигополии с произвольным числом агентов, исследуем предположительные вариации в уравнениях реакции (6). Введем следующие обозначения: для i-го агента множество агентов окружения обозначим через E; количество агентов окружения обозначено через e, т.е. $e = n-1$; сумма предположительных вариаций окружения i-го агента на r-м ранге обозначена через $S_i^r = \sum\limits_{l \in N \setminus i} \rho_{il}^r$. В этом случае следующее утверждение описывает особенности предположительных вариаций.

Утверждение 4. *В системе* (6) *для модели олигополии* (5) *с линейными функциями спроса и издержек в уравнении i-го агента при ранге r*

а) *предположительные вариации для l-го агента рассчитываются по формуле*

$$
\text{(14-1)} \qquad \rho_{il}^r = -\frac{\Delta_{il}^r}{\Delta_i^r}, \quad l \in E, \quad e = n-1,
$$
$$
\textit{если} \quad \sum_{j\in E} \frac{1}{z_j^r} \neq 1 \quad \textit{и} \quad z_j^r \neq 0 \ \forall j \in E,
$$

где

$$\Delta_i^r = \prod_{j=1\backslash i}^{e} z_j^r + \sum_{\gamma=1\backslash i}^{e} \prod_{j=1\backslash(\gamma,i)}^{e} z_j^r,$$

$$\Delta_{il}^r = \prod_{j=1\backslash(l,i)}^{e} z_j^r, \quad z_j^r = 1 + S_j^{r-1},$$

$$S_i^r = \sum_{l\in N\backslash i} \rho_{il}^r, \quad S_i^0 = 0;$$

b) *сумма предположительных вариаций окружения рассчитывается по формуле*

$$S_i^r = -\frac{1}{s_i^r + 1}, \quad s_i^r = \frac{1}{\sum\limits_{j\in E} \frac{1}{z_j^r}}, \quad i \in N, \tag{14-2}$$

эта сумма отрицательна и ограничена по модулю:

$$S_i^r < 0, \quad |S_i^r| < 1 \ \forall e \geq 1; \tag{14-3}$$

c) *предположительная вариация l-го агента отрицательна*:

$$\rho_{il}^r < 0, \quad l \in E. \tag{14-4}$$

Таким образом, сформулированы следующие особенности поведения агентов в модели линейной олигополии. Оптимальная реакция агента на предполагаемое увеличение действия окружения — это сокращение его собственного действия, т.е. предположительные вариации отрицательны. Такое поведение обусловлено убывающей кривой спроса на рынке олигополии. Следовательно, увеличение действий окружения побуждает агента к реакции, которая приводит к росту рыночной цены. В ответ на единичное приращение действия агента все агенты сокращают свои действия, но суммарно не более чем на единицу. Следовательно, сокращение действия каждого агента меньше единицы; кроме того, если количество агентов на рынке растет, то

Таблица 2. Коэффициенты функций издержек агентов и параметр $\Delta\alpha$

Коэффициент	Агент 1 (ПАО «МТС»)	Агент 2 (ПАО «Мегафон»)	Агент 3 (ПАО «Вымпелком»)
c, тыс. руб/ мин	0,0005	0,0003	0,0006
d, млрд. руб	20,42	86,11	49,61
α, млн. мин	1 496 536	1 496 716	1 496 470
$\Delta\alpha$, %	–0,003%	0,010%	–0,007%

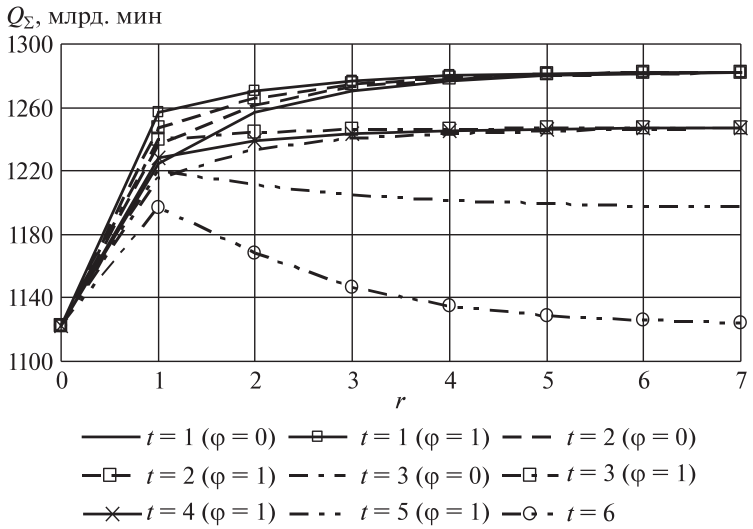

Рис. 2. Суммарное действие агентов (млрд. мин.) в зависимости от ранга рефлексии.

для каждого агента это сокращение уменьшается. Эти особенности описывают поведение агентов в любой агрегативной игре [25–27], если функции полезности игроков представляют собой комбинации линейных функций цены и затрат.

Рассмотрим модельный пример расчета информационных равновесий рынка олигополии на основе данных, полученных [28] для телекоммуникационного рынка России. Коэффициенты регрессионных моделей функции спроса (2) равны $a = 2{,}09$ руб, $b = 0{,}0000001$ руб/млн. мин; коэффициенты функций издержек агентов (4) приведены в табл. 2. В табл. 2 рассчитаны отклонения $\Delta\alpha$ значений параметра α от среднего значения, незначительность которых показывает, что для данного рынка различие в равновесных значениях выигрышей определяется, главным образом, значениями параметра $\gamma_{\theta tr}$. Поэтому при дальнейшем моделировании будем анализировать игровые случаи (табл. 1) для некоторого, соответствующего нумерации табл. 2, расположения агентов по выбранным ими стратегиям, игнорируя варианты с другими комбинациями агентов.

На рис. 2 показаны значения суммарного действия агентов при информационных равновесиях Q_Σ для различных игровых случаев ($t = 1, \ldots, 6$) в зависимости от ранга рефлексии агентов, рассчитанные по формулам (13).

На рис. 3, 4 приведены значения показателя структуры равновесных действий в зависимости от ранга рефлексии агентов, рассчитанные по формуле $\psi_i = \frac{Q_i}{Q_\Sigma}$, $i \in N$; в дальнейшем будем считать, что ψ_i характеризует *относительный выигрыш* агента, поскольку по (1) полезность (прибыль) агента пропорциональна его выпуску при данном значении $P\left(Q_\Sigma\right)$, которое в равновесии согласно (2) одинаково для всех агентов, и затраты агентов также пропорциональны их выпуску.

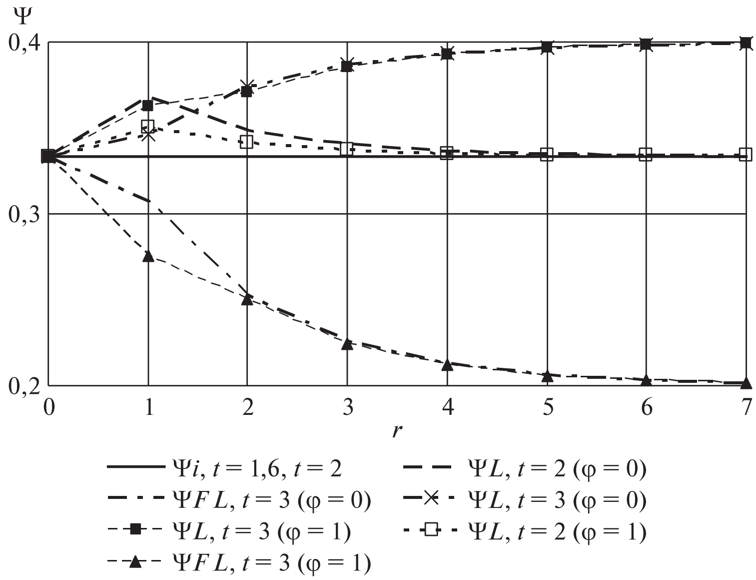

Рис. 3. Структура выигрыша в зависимости от ранга рефлексии ($t = 1, 2, 3, 6$).

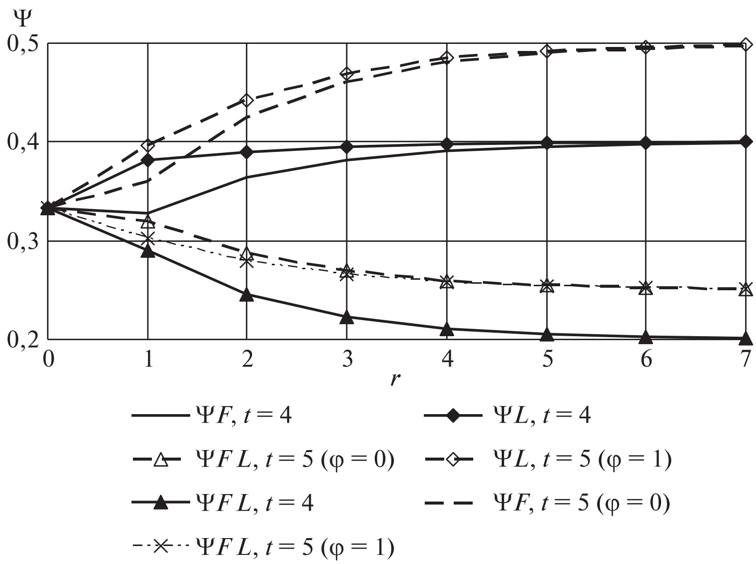

Рис. 4. Структура выигрыша в зависимости от ранга рефлексии ($t = 4, 5$).

4. Обсуждение

Как видно из (12), в игре трех агентов могут возникать группы (пары или тройки) агентов, имеющих одинаковые представления о стратегиях окружения или представляемые окружением как игроки с одинаковыми стратегиями. Такие группы агентов по аналогии с терминологией кооперативных игр будем называть «рефлексивными коалициями» (РК), поскольку их существование приводит к одинаковым выигрышам для членов этих групп. В рассмотренных случаях $t = 1, \ldots, 6$ количество агентов, вовлеченных в РК, уменьшается с ростом номера t.

Анализ рис. 2 показывает, что если агенты имеют представление о L-стратегии окружения, то игровые случаи упорядочены по значению $Q_{\Sigma t}$ следующим образом:

$$Q_{\Sigma t'} > Q_{\Sigma t''}, \quad t' < t'',$$

т.е. чем больше агентов входят в РК, тем выше суммарное действие агентов, следовательно, по (2) ниже равновесная цена, значит, выше конкуренция. Если же агенты имеют представление о F-стратегии окружения, то порядок принимает вид

$$Q_{\Sigma 2} > Q_{\Sigma 1} > Q_{\Sigma 4} > Q_{\Sigma 3} > Q_{\Sigma 5} > Q_{\Sigma 6}$$

вследствие того, что наличие агента с представлением об L-стратегии окружения при $t = 2, 4$ приводит к более конкурентным состояниям, чем при $t = 1, 3$ при отсутствии такового.

Во-вторых, представление о L-стратегии окружения во всех случаях приводит к большему суммарному действию, чем представление о F-стратегии:

$$Q_{\Sigma t}^{\varphi=1} > Q_{\Sigma t}^{\varphi=0}.$$

В-третьих, влияние повышения ранга рефлексии агентов на суммарное действие зависит от количества агентов, вовлеченных в РК:

$$\frac{\partial Q_{\Sigma t}}{\partial r} \begin{cases} > 0, & t = 1, \ldots, 4, \\ < 0, & t = 5, 6. \end{cases}$$

Анализ рис. 3, 4 приводит к следующим выводам. Во-первых, распределение выигрыша не зависит от ранга рефлексии и равномерно между агентами при полной РК ($t = 1$) и при отсутствии РК ($t = 6$), а именно

$$\psi_{it} = 1/3 \ \forall i \in N, \quad t = 1, 6.$$

В остальных случаях распределение выигрыша зависит от ранга рефлексии, но в пределе равно

$$\lim_{r \to \infty} \psi_{Lt}(r) = \begin{cases} 1/3, & t = 2, \\ 0{,}4, & t = 3, 4, \\ 0{,}5, & t = 5, \end{cases}$$

$$\lim_{r \to \infty} \psi_{Ft}(r) = \begin{cases} 0{,}4, & t = 4, \\ 0{,}5, & t = 5, \end{cases}$$

$$\lim_{r \to \infty} \psi_{FLt}(r) = \begin{cases} 0{,}2, & t = 3, 4, \\ 0{,}25, & t = 5, \end{cases}$$

Таблица 3. Анализ рефлексии агентов телекоммуникационного рынка России

Агент	Факт, 2018 г.		Модель, $t = 4$	
	Q_i, млрд. мин	Ψ_i	Ψ_i	$\Delta\Psi_i$
ПАО «МТС»	380	0,43	0,39	10%
ПАО «Мегафон»	287	0,33	0,36	–11%
ПАО «Вымпелком»	210	0,24	0,25	–3%

следовательно, самые высокие выигрыши получают агенты, выдвигающие одинаковое (либо L, либо F) представление о стратегии окружения, достигающее половины общего выигрыша. Во-вторых, расширение состава РК, за исключением случая $t = 1$, приводит к сокращению доли L-агента, F-агента и FL-агента

$$\psi_{L5} > \psi_{L4} > \psi_{L3} > \psi_{L2} > \psi_{it},$$
$$\psi_{F5} > \psi_{F4} > \psi_{F2} > \psi_{it} > \psi_{FL5} > \psi_{FL4} > \psi_{FL3}, \quad t = 1, 6.$$

Сопоставление структуры выигрыша при $t = 4$, $r = 2$ и структуры рынка России в 2016 г. (табл. 3) показывает, что реальный рынок по типу и глубине рефлексии отличен не более чем на 7% от этого случая. Это означает, что агенты рассуждают следующим образом: ПАО «МТС» думает, что окружение считает остальных агентов (и его, в том числе) придерживающимися L-стратегии, агент ПАО «Мегафон» думает, что окружение считает остальных агентов (и его, в том числе) придерживающимися F-стратегии, агент ПАО «Вымпелком» думает, что окружение считает одного контрагента придерживающимся L-стратегии, а другого — F-стратегии. Поэтому в информационном равновесии согласно (11) ПАО «МТС» является лидером третьего уровня, ПАО «Мегафон» — лидером второго уровня, ПАО «Вымпелком» — лидером третьего (или второго) уровня по отношению к различным контрагентам. Эта эмпирическая закономерность в целом согласуется с ранее полученными оценками [17] глубины рефлексии агентов телекоммуникационного рынка России с использованием нелинейных моделей издержек, но дает более детализированную информацию, поскольку в нелинейном случае информационные равновесия были получены только для $r = 1, 2$.

Практически установленная эмпирическая закономерность может быть использована агентами следующим образом. ПАО «МТС» не может улучшить своего выигрыша, поскольку больший выигрыш он может получить только в случае $t = 5$, который не соответствует рефлексии ПАО «Мегафон». ПАО «Мегафон» и ПАО «Вымпелком», располагая этой информацией о контрагентах, становятся информированными, как лидер в случае $t = 3$, что позволит повысить их относительный выигрыш до $\psi_{L3} = 0{,}37$. Однако такое произойдет, только если каждый из них имеет это знание по отдельности; если же они информированы об этом совместно, то реализуется случай $t = 1$, когда у всех агентов относительный выигрыш составит $\psi_i = 0{,}33$, $i \in N$, что выгодно только для ПАО «Вымпелком».

5. Заключение

Исследована проблема поиска информационных равновесий в рефлексивной игре трех агентов рынка олигополии с учетом рефлексивного поведения всех агентов рынка, имеющих одинаковую глубину рефлексии, а также различия их функций издержек. Рефлексия агентов формализована в виде функции представлений на произвольном ранге рефлексии, для которой разработан способ нахождения множества уровней лидерства по Штакельбергу, позволяющего описать игру агентов в виде системы линейных уравнений реакций. Рефлексивные представления агентов сгруппированы в виде набора игровых случаев, среди которых в большей или меньшей степени проявляются совпадения представлений агентов об окружении — рефлексивные коалиции. Получено аналитическое решение системы уравнений реакций, определяющее информационное равновесие через матрицу предположительных вариаций, выражающую заданную функцию рефлексивных представлений агентов.

Моделирование информационных равновесий в зависимости от ранга рефлексии показало существенное влияние рефлексивных коалиций, во-первых, на суммарное действие агентов, во-вторых, на неравномерность распределения выигрыша между агентами. Сопоставление найденных равновесий с распределением реального телекоммуникационного рынка РФ показало, что на рынке при отсутствии рефлексивных коалиций сложилась иерархия представлений агентов типа «LL, FF, FL», т.е. один агент представляет окружения лидерами, другой — ведомыми, а третий имеет дифференцированное представление о контрагентах.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Поскольку представления агентов на первом ранге рефлексии при известных преставлениях агентов на r-м ранге определяются по формуле [18]

$$G^1_{i(-i)} = (M_{m+r-1})\ \forall G^r_{i(-i)} = (M_m)\,, \quad i \in N,$$

то функция представлений на первом ранге рефлексии равна $g^r\left[\tau\left(i,j\right)\right] + r - 1$. По наилучшему ответу [18] $BR_i\left(G^1_{i(-i)}\right) \in M_{m+1},\ \forall G^1_{i(-i)} = (M_m)$, найденному при каждом значении этой функции, получим функцию (11).

Доказательство утверждения 2. Количество возможных вариантов представлений каждого агента об агентах окружения равно 4 (количество размещений из двух F, L по два), это варианты FF, LL, FL, FL. Поскольку каждый из n агентов может иметь любой из этих вариантов, то по основной формуле комбинаторики [29]

$$T = 4^n = 4^3 = 64,$$

где T – суммарное количество видов функции (14) в игре трех агентов.

Покажем, что 1) суммарное количество видов функции (8), описанных формулами (12), равно T; 2) представления, описанные формулами (12), не повторяются, т.е.

$$\exists \bar{\tau} : g^r_{t'}[\bar{\tau}] \neq g^r_{t''}[\bar{\tau}], \quad t' \neq t'', \quad \bar{\tau} \in N^2 \backslash \hat{\tau}.$$

При $t = 1$ представления двух типов FF или LL одинаковы у всех агентов обо всех агентах, поэтому $T_1 = 2$.

При $t = 2$ у каждого из $n = 3$ агентов может быть два варианта представлений (FF или LL), причем у двух агентов из трех представления повторяются, поэтому из $k = 3$ объектов (aa, aa, $\bar{a}\bar{a}$, $a = F$, L[2]) количество перестановок $P^m_k = \frac{k!}{m!}$ с $m = 2$ повторениями равно $P^2_3 = \frac{3!}{2!} = 3$. С учетом двух вариантов (FF или LL) получим $T_2 = 2P^2_3 = 6$. Сравнение (12-1) и (12-2) показывает, что $g^r_1[\bar{\tau}] \neq g^r_2[\bar{\tau}]$ при $\bar{\tau} = j + n(i_3 - 1)$.

При $t = 3, 4, 5, 6$ анализ проводится аналогично. Суммирование $\sum\limits_{t=1}^{6} T_t = 64$ подтверждает, что системой (12-1)–(12-6) описаны все возможные представления.

Доказательство утверждения 3. Система (6) для задачи (5) записывается в виде $a - bQ - bQ_i\left(1 + \sum\limits_{j \in N\backslash i} \rho_{ij}\right) - c_i = 0$, $i \in N$, т.е. при $\alpha_i = \frac{a-c_i}{b}$

$$f_i = \left(2 + \sum_{j \in N\backslash i} \rho_{ij}\right) Q_i + \sum_{j \in N\backslash i} Q_j - \alpha_i = 0, \quad i \in N. \tag{П.1}$$

Для нахождения вариаций ρ_{ij} решается система уравнений [30] следующего вида:

$$\sum_{j \in N\backslash i} \frac{\partial f_k}{\partial Q_j} \rho_{ij} + \frac{\partial f_k}{\partial Q_i} = 0, \quad k \in N\backslash i. \tag{П.2}$$

В случае $t = 1$ при $g^r_1[\tau] = 0$ согласно (11) функция представлений имеет вид $G[\tau] = r$. При $r = 1$ для каждого i-го агента система (П.1) имеет вид

$$f_i = \begin{cases} \left(2 + \sum\limits_{\lambda \in N\backslash i} \rho_{i\lambda}\right) Q_i + \sum\limits_{\lambda \in N\backslash i} Q_\lambda - \alpha_i = 0, & i \neq k, \\ 2Q_i + \sum\limits_{\lambda \in N\backslash i} Q_\lambda - \alpha_i = 0, & i = k \in N, \end{cases} \tag{П.3}$$

что приводит к системе (П.2) вида

$$2\rho_{i\eta} + \rho_{i\varsigma} + 1 = 0, \quad \rho_{i\varsigma} + 2\rho_{i\eta} + 1 = 0, \quad \eta, \varsigma \in N\backslash i,$$

[2] Символом $\bar{a}$ обозначен объект «не a».

имеющей следующее решение:

$$\gamma_1^0 = \rho_{i\eta} = \rho_{i\varsigma} = -\frac{1}{3}, \quad \eta, \varsigma \in N \backslash i,$$

здесь и далее в обозначении $\gamma_{\theta tr}$ опущены индексы θ, t, нижний индекс означает ранг рефлексии r, верхний индекс равен значению функции $g_t^r[\tau]$.

При $r = 2$ для каждого i-го агента система (П.1) имеет вид

$$f_i = \begin{cases} \left(2 + \sum\limits_{\lambda \in N \backslash i} \rho_{i\lambda}\right) Q_i + \sum\limits_{\lambda \in N \backslash i} Q_\lambda - \alpha_i = 0, \quad i \neq k, \\ \left(2 + 2\gamma_1^0\right) Q_i + \sum\limits_{\lambda \in N \backslash i} Q_\lambda - \alpha_i = 0, \quad i = k \in N, \end{cases} \tag{П.4}$$

поэтому получается следующая система (П.2)

$$2\left(1 + \gamma_1^0\right) \rho_{i\eta} + \rho_{i\varsigma} + 1 = 0, \quad \rho_{i\varsigma} + 2\left(1 + \gamma_1^0\right) \rho_{i\eta} + 1 = 0, \quad \eta, \varsigma \in N \backslash i,$$

имеющая решение

$$\gamma_2^0 = \rho_{i\varsigma} = \rho_{i\eta} = -\frac{1}{3 + 2\gamma_1^0}. \tag{П.5}$$

На r-м ранге рефлексии система (П.1) имеет вид

$$f_i = \begin{cases} 2\left(1 + \gamma_r^0\right) Q_i + \sum\limits_{\lambda \in N \backslash i} Q_\lambda - \alpha_i = 0, \quad i \neq k, \\ 2\left(1 + \gamma_{r-1}^0\right) Q_i + \sum\limits_{\lambda \in N \backslash i} Q_\lambda - \alpha_i = 0, \quad i = k \in N, \end{cases} \tag{П.6}$$

что по индукции дает

$$\gamma_r^0 = -\frac{1}{3 + 2\gamma_{r-1}^0}, \quad \gamma_0^0 = 0. \tag{П.7}$$

В случае $t = 1$ при $g_1^r[\tau] = 1$ согласно (11) функция представлений имеет вид $G[\tau] = r + 1$. При $r = 1$ для каждого i-го агента система (П.1) имеет вид (П.4), решение которой по аналогии с (П.5) следующее:

$$\gamma_1^1 = \rho_{i\varsigma} = \rho_{i\eta} = -\frac{1}{3 + 2\gamma_1^0}.$$

На r-м ранге рефлексии система (П.1) имеет вид, аналогичный (П.6),

$$f_i = \begin{cases} 2\left(1 + \gamma_r^1\right) Q_i + \sum\limits_{\lambda \in N \backslash i} Q_\lambda - \alpha_i = 0, \quad i \neq k, \\ 2\left(1 + \gamma_r^0\right) Q_i + \sum\limits_{\lambda \in N \backslash i} Q_\lambda - \alpha_i = 0, \quad i = k \in N, \end{cases} \tag{П.6$'$}$$

что по индукции дает

$$\gamma_r^1 = -\frac{1}{3+2\gamma_r^0}. \tag{П.8}$$

В случаях $t = 2, 3, 4, 5, 6$ проводятся аналогичные рассуждения. Обобщая эти случаи, получим, что равновесие определяется из системы уравнений $2(1+\gamma_{\theta tr})Q_\theta + \sum\limits_{j\in N\setminus\theta} Q_j - \alpha_\theta = 0,\ \theta \in N$, которая по методу Крамера имеет решение (13-1).

Доказательство утверждения 4. Предположительные вариации в уравнении (П.1) для i-го агента (далее i-е вариации) вычисляются из решения системы (П.2), которая записывается согласно уравнениям (6) для других агентов. Введем следующее обозначение: $\sigma_i^r = 2 + S_i^r$, где верхний индекс обозначает ранг рефлексии. Тогда систему (П.2) можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered} \sigma_1^{r-1}\rho_{i1}^r + \rho_{i2}^r + \ldots + \rho_{ie}^r = -1, \\ \rho_{i1}^r + \sigma_2^{r-1}\rho_{i2}^r + \ldots + \rho_{ie}^r = -1, \\ \ldots \\ \rho_{i1}^r + \rho_{i2}^r + \ldots + \sigma_e^{r-1}\rho_{ie}^r = -1. \end{gathered} \tag{П.9}$$

Выведем общую формулу главного определителя этой системы при $e = 3$. Преобразуем элементы первой строки как суммы двух слагаемых $(\sigma_1 - 1) + 1$, $0 + 1$, $0 + 1$; затем разлагаем полученный определитель на сумму двух определителей по этой строке; далее повторяем эти преобразования со второй и третьей строками соответственно. В итоге получим:

$$\begin{gathered} \Delta_i = (\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1)(\sigma_3 - 1) + (\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1) + \\ + (\sigma_1 - 1)(\sigma_3 - 1) + (\sigma_2 - 1)(\sigma_3 - 1). \end{gathered}$$

В общем случае определителя порядка e, как и в предыдущем случае, разложим этот определитель по первой строке. Отсюда получаем равенство

$$\Delta_i^{(e)} = (\sigma_1 - 1)\,\Delta_i^{(e-1)} + (\sigma_2 - 1)(\sigma_3 - 1)\ldots(\sigma_e - 1),$$

где $\Delta_i^{(e-1)}$ – определитель матрицы $(e-1)$-го порядка

$$A^{(e-1)} = (a_{lj} = \sigma_{j+1}\ \forall l = j,\ \sigma_{lj} = 1\ \forall l \neq j,\ l, j = 1, \ldots, e-1),$$

которая получается путем исключения первой строки и первого столбца из матрицы e-го порядка $A^{(e)}$; верхний индекс в круглых скобках указывает порядок определителя или матрицы. Поэтому по индукции для произвольного порядка e главный определитель системы (П.9) имеет следующую общую формулу:

$$\Delta_i = \prod_{j=1\setminus i}^{e}\left(\sigma_j^{r-1} - 1\right) + \sum_{\gamma=1\setminus i}^{e}\ \prod_{j=1\setminus(\gamma,i)}^{e}\left(\sigma_j^{r-1} - 1\right).$$

Найдем вспомогательный определитель для системы (П.9). При $e = 3$ для $l = 1$ вычитаем (-1) из первого столбца; затем вычитаем первую строку из второй и третьей; в результате получаем определитель диагональной матрицы:

$$\Delta_{i1}^r = -\left(\sigma_2 - 1\right)\left(\sigma_3 - 1\right).$$

По индукции если для $e = \eta - 1$, $l = \nu - 1$, то формула этого определителя следующая: $\Delta_{i,\nu-1}^r = -\left(\sigma_1 - 1\right)\ldots\left(\sigma_{\nu-2} - 1\right)\left(\sigma_\nu - 1\right)\ldots\left(\sigma_{\eta-1} - 1\right)$. Следовательно, при $e = \eta$, $l = \eta$ эта формула имеет вид $\Delta_{i\nu}^r = -\left(\sigma_1 - 1\right)\ldots$ $\left(\sigma_{\nu-1} - 1\right)\left(\sigma_{\nu+1} - 1\right)\ldots\left(\sigma_\eta - 1\right)$. Поэтому в общем случае вспомогательный определитель вычисляется по формуле $\Delta_{il}^r = \prod\limits_{j=1\backslash(l,i)}^{e}\left(\sigma_j^{r-1} - 1\right)$. Если обозначить $z_j^r = \sigma_j^{r-1} - 1 = 1 + S_i^{r-1}$, то получим формулу (14-1).

Система (П.9) имеет единственное решение (теорема Крамера [30]), если главный определитель $\Delta_i^r \neq 0$, т.е.

$$\frac{\Delta_i^r}{\sum\limits_{j\in E} z_j^r} = 1 - \sum_{j\in E}\frac{1}{z_j^r},$$

когда $z_j^r \neq 0\ \forall j \in E$.

Суммирование формул (14-1) по всем агентам окружения i-го агента приводит к формуле (14-2). Если $r = 1$, то формула (14-2) дает: $s_i^1 = \frac{1}{e}$, $S_i^1 = -\frac{e}{e+1} < 0$, $\left|S_i^1\right| < 1$. Если $r = 2$, то формула (14-2) дает: $s_i^2 > 0$, $S_i^2 < 0$, $\left|S_i^2\right| < 1$. По индукции если $\left|S_i^{r-1}\right| < 1$, то $\left|S_i^r\right| < 1$. Кроме того, по индукции получаем, что $z_j^r \in (0, 1)$. Формула (14-1) дает

$$\rho_{il}^r = -\frac{1}{z_l^r + 1 + \sum\limits_{j=1\backslash(l,i)}^{e}\dfrac{z_l^r}{z_j^r}} = -\frac{1}{z_l^r\left(1 + \sum\limits_{j=1\backslash(l,i)}^{e}\dfrac{1}{z_j^r}\right) + 1}.$$

Принимая во внимание $z_j^r \in (0, 1)$, это подтверждает (14-4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nash J.* Non-cooperative Games. Ann. Mathem. 1951. No. 54. P. 286–295.
2. *Cournot A.A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960 (Original 1838).
3. *Stackelberg H.* Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Bazin, Urch & Hill, Springer. 2011. (Original 1934).
4. *Lefebvre V.* Lectures on the Reflexive Games Theory. N.Y.: Leaf & Oaks Publishers, 2010.
5. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. London: CRC Press, 2014.

6. *Novikov D., Korepanov V., Chkhartishvili A.* Reflexion in mathematical models of decision-making // Int. J. Parall., Emergent and Distribut. Syst. 2018. No. 33 (3). P. 319–335.
7. *Nagel R.* Unraveling in guessing games: An experimental study // Amer. Econ. Rev. 1995. No. 85 (5). P. 1313–1326.
8. *Dixon H.D., Sbriglia P., Somma E.* Learning to collude: An experiment in convergence and equilibrium selection in oligopoly // Res. Econ. 2006. No. 60 (3). P. 155–167.
9. *Altavilla C., Luini L., Sbriglia P.* Social learning in market games // J. Econ. Behav. Organiz. 2006. No. 61 (4). P. 632–652.
10. *Nicklisch A.* Does collusive advertising facilitate collusive pricing? Evidence from experimental duopolies // Eur. J. Law Econ. 2012. No. 34 (3). P. 515–532.
11. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Mathematical Models of Informational and Strategic Reflexion: a Survey // Advan. Syst. Sci. Appl. 2014. No. 3. P. 254–277.
12. *Chkhartishvili A.G., Korepanov V.O.* Adding Informational Beliefs to the Players Strategic Thinking Model // IFAC-PapersOnLine. 2016. No. 49 (32). P. 19–23.
13. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Коллективное поведение в модели Штакельберга в условиях неполной информации // АиТ. 2017. № 9. С. 91–105.

    Algazin G.I., Algazina D.G. Collective behavior in the Stackelberg model under incomplete information // Autom. Remote Control. 2017. No. 78 (9). P. 1619–1630.
14. *Gilpatric S.M., Li Y.* Information Value under Demand Uncertainty and Endogenous Market Leadership // Econ. Inquiry. 2015. No. 53 (1). P. 589–603.
15. *Filatov A.Yu., Makolskaya Ya.S.* The equilibrium and socially effective number of firms in oligopoly: theory and empirics // VIII Moscow Int. Conf. Oper. Res. (ORM2016). 2016. P. 207–208.
16. *Chirco A., Colombo C., Scrimitore M.* Quantity competition, endogenous motives and behavioral heterogeneity // Theor. Dec. 2013. No. 74 (1). P. 55–74.
17. *Гераськин М.И.* Моделирование рефлексии в нелинейной модели трехагентной олигополии штакельберга для телекоммуникационного рынка России // АиТ. 2018. № 5. С. 83–106.

    Geraskin M.I. Modeling Reflexion in the Non-Linear Model of the Stakelberg Three-Agent Oligopoly for the Russian Telecommunication Market // Autom. Remote Control. 2018. No. 79 (5). P. 841–860.
18. *Geraskin M.I.* Game-theoretic analysis of Stackelberg oligopoly with arbitrary rank reflexive behavior of agents// Kyber. 2017. No. 46 (6). P. 1052–1067.
19. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // АиТ. 2020. № 2. С. 115–133.

    Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // Autom. Remote Control. 2020. No. 81 (2). P. 287–301.
20. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером // АиТ. 2020. № 7. С. 113–128.

    Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexion Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader // Autom. Remote Control. 2020. No. 81 (7). P. 1258–1270.
21. *Korepanov V.* Strategic Thinking Models for Team Building // Proc. 2019 1st Int. Conf. Control Syst. Mathem. Modell., Autom. Energy Eff., SUMMA 2019. 2019. No. 8947593. P. 185–187.

22. *Andini C., Cabral R.* How do mobile-voice operators compete? IVQR estimates // Appl. Econ. Lett. 2013. No. 20 (1). P. 18–22.

23. *Matheson T., Petit P.* Taxing telecommunications in developing countries // Int. Tax Public Finan. 2021. No. 28 (1). P. 248–280.

24. *Fellner W.* Competition Among the Few. New York: Alfred A. Knopf, 1949.

25. *Mallozzi L., Messalli R.* Multi-leader multi-follower model with aggregative uncertainty // Games. 2017. No. 8 (3). P. 25.

26. *Cornes R., Fiorini L.C., Maldonado W.L.* Expectational stability in aggregative games // J. Evolut. Econ. 2021. No. 31 (1). P. 235–249.

27. *Gerasimov K., Prosvirkin N.* System of control of effectiveness of enterprise cooperation in industrial cluster // Eur. Res. Stud. J. 2015. No. 18 (3). P. 263–270.

28. *Geraskin M.I.* Equilibria in the Stackelberg Oligopoly Reflexive Games with Different Marginal Costs of Agents // Int. Game Theory Rev. 2019. No. 21 (4). P. 1950002.

29. *Lint van J.H., Wilson R.M.* A Course in Combinatorics, 2nd Edition. Cambridge University Press, 2001.

30. *Korn G., Korn T.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. N.-Y.: McGraw-Hill Book Company, 1968.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 13.04.2021

После доработки 22.10.2021

Принята к публикации 20.11.2021