Автоматика и телемеханика, № 3, 2022

Управление в социально-экономических системах

© 2022 г. Г.И. АЛГАЗИН, д-р физ.-мат. наук (algaz46@yandex.ru)
(Алтайский государственный университет, Барнаул),
Ю.Г. АЛГАЗИНА, канд. эконом. наук (algazina@inbox.ru)
(Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, Барнаул)

К АНАЛИТИЧЕСКОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ УСЛОВИЙ СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССОВ РЕФЛЕКСИВНОГО КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ В МОДЕЛЯХ ОЛИГОПОЛИИ

Представлено исследование динамик коллективного поведения взаимосвязанных рациональных агентов в условиях неполной информации. Доказываются утверждения, позволяющие унифицировать условия сходимости к равновесию для двух траекторий реакции агентов на ожидаемые действия окружения: 1) "классического" оптимизационного поведения, при котором агенты стараются выбрать оптимальные ответы, игнорируя возможные текущие "отрицательные состояния"; 2) поведения, гарантирующего каждому агенту движение в направлении к цели и неотрицательные текущие состояния. Показывается применение полученных результатов в моделях олигополии Курно и Штакельберга с рефлексивным поведением агентов. Получены достаточные условия сходимости процессов коллективного поведения в олигополии с произвольным числом лидеров по Штакельбергу.

Ключевые слова: рефлексивное коллективное поведение, равновесие, условия сходимости, модели олигополии, неполная информированность, аналитические результаты.

DOI: 10.31857/S0005231022030072

1. Введение

Значительное число математических работ посвящено рефлексивному поведению (см., например, [1, 2]) агентов с реакцией по Курно [3] и/или Штакельбергу [4] на действия окружения. "Классические" модели оптимизационного поведения, когда каждый агент в процессе принятия решений выбирает свой наилучший ответ на ожидаемые действия других агентов, часто сильно упрощены, недостаточно реалистичны, не учитывают их информированность, реальные условия и экономические ограничения (см., например, [1, 5–8]).

Однако с усложнением моделей более проблематичным становится аналитическое исследование условий существования равновесия, его единственности и сходимости к нему процесса принятия решений. Один из возможных подходов к этой проблеме состоит в поиске общих закономерностей функционирования систем на основе простых и усложненных моделей и универсализации аналитических решений (см., например, [9–11]).

В данной статье показывается возможность унификации условий сходимости для двух траекторий реакции рефлексирующих агентов на ожидаемые состояния окружения: 1) "классического" оптимизационного поведения, при котором агенты на каждом шаге процесса принятия решений стараются выбрать оптимальные ответы, игнорируя возможные текущие "отрицательные состояния"; 2) поведения, гарантирующего каждому агенту движение в направлении к цели и неотрицательные состояния на каждом шаге процесса. Это позволяет аналитические результаты об условиях сходимости для более простых моделей (первого случая траектории) обобщить на более сложные модели (траектории) поведения агентов.

Полученные результаты проиллюстрированы для рефлексивных моделей олигополии с линейными функциями затрат агентов и спроса с различной реакцией агентов на действия окружения: 1) все агенты рефлексируют по Курно; 2) один или несколько агентов рефлексирует по Штакельбергу, остальные — по Курно.

При этом в условиях допустимости ответов агентов на ожидаемые действия конкурентов рассматриваются случаи, когда учитываются и не учитываются такие экономические категории как конкурентоспособность и убыточность агентов.

2. Постановка задачи исследования

Пусть динамическая система состоит из n взаимосвязанных целенаправленных агентов и функционирует в дискретном времени. Состояние системы в момент времени t дается n-мерным вектором $q^t = \left(q_1^t, \ldots, q_i^t, \ldots, q_n^t\right)$, $i \in$ $\in N = \{1, \ldots, n\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, и текущее положение цели i-го агента $x_i(q_{-i}^t)$ зависит от состояний (действий) остальных агентов, где $q_{-i}^t = \left(q_1^t, \ldots, q_{i-1}^t,\right.$ $\left.q_{i+1}^t \ldots, q_n^t\right)$. Текущее положение цели агента — такое его действие, которое максимизировало бы его целевую функцию при условии, что в текущий момент времени остальные агенты выбрали бы те же действия, что и в предыдущий (см., например, [1, 9, 10]).

Определим *процесс* 1, если смена состояния системы при переходе от предыдущего момента времени t к последующему $(t+1)$, т.е. преобразование компонент вектора q^t в q^{t+1}, представляется в виде

$$q_i^{t+1} = x_i(q_{-i}^t), \quad i \in N, \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Требование неотрицательности состояний агентов, возникающее, например, с точки зрения экономических ограничений, может быть реализовано по формуле

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} x_i(q_{-i}^t), & x_i(q_{-i}^t) > 0; \\ 0, & x_i(q_{-i}^t) \le 0. \end{cases} \tag{2}$$

Определим итерационное преобразование (2) состояний агентов как *процесс* 2.

Определим *процесс* 3, когда смена состояний системы удовлетворяет аксиоме индикаторного поведения [9, 10] — в каждый момент времени каждый из агентов изменяет свое состояние, делая шаги в направлении текущего положения цели и следуя итерационной процедуре

$$q_i^{t+1} = q_i^t + \gamma_i^{t+1} \left(x_i \left(q_{-i}^t \right) - q_i^t \right). \tag{3}$$

Здесь $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$ — параметры, выбираемые агентами, определяют величины их шагов.

В *процессе* 4 учтено требование неотрицательности состояний агентов

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^t + \gamma_i^{t+1} \left(x_i \left(q_{-i}^t \right) - q_i^t \right), & x_i(q_{-i}^t) > 0; \\ 0, & x_i(q_{-i}^t) \le 0. \end{cases} \tag{4}$$

В (3) и (4) агент выбором параметра $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$ может делать "неполный шаг" от своего предыдущего состояния к текущему положению цели, а в (1) и (2) всегда делает полный шаг, полагая $\gamma_i^{t+1} \equiv 1$, тем самым выбирает свой наилучший ответ. Естественно, чтобы при $\gamma_i^{t+1} \equiv 1$ (3) переходило в (1), а (4) — в (2). Также в (4) и (2) агенту целесообразно, желая максимизировать свою целевую функцию, обнулять свой выпуск, если его текущее положение цели равно нулю или отрицательно. Подобным образом в процессах реализована идея градиентных методов оптимизации для поиска равновесий динамической системы.

Очевидно, что аналитическое исследование сходимости процесса 1 менее сложно, чем процесса 2, а процесса 3 — чем процесса 4. В разделе 4 приведены основные утверждения, позволяющие аналитические результаты об условиях сходимости процесса 1 обобщить на процесс 2, а процесса 3 — на процесс 4, а также представлены иллюстрации доказанных результатов для различных моделей олигопольного рынка.

3. Базовая модель олигополии

В качестве примера возможных приложений доказанных результатов будет рассмотрена классическая модель олигополии, состоящая из n конкурирующих объемами выпуска однородной продукции агентов с целевыми функциями

$$\Pi_i(p(Q), q_i) = p(Q)q_i - \phi_i(q_i) \to \max_{q_i}, \quad i \in N, \tag{5}$$

линейными функциями затрат

$$\phi_i(q_i) = f_i q_i + d_i, \quad i \in N, \tag{6}$$

и с линейной обратной функцией спроса вида

$$p(Q) = a - bQ. \tag{7}$$

Здесь: q_i — выпуск i-го агента, $Q = \sum_{i \in N} q_i$ — суммарный объем выпуска, f_i, d_i — предельные и постоянные издержки агентов, $p(Q)$ — единая рыночная цена, a, b — параметры спроса. Полагается, что весь выпуск реализуется, ограничения мощности и коалиции отсутствуют.

Пусть каждый агент может реагировать на действия окружения одним из двух способов: 1) рефлексировать по Курно; 2) рефлексировать по Штакельбергу.

Обозначим: N_c — множество агентов с реакцией по Курно, N_s — множество агентов с реакцией по Штакельбергу; $N_c \bigcup N_s = N$ и $N_c \bigcap N_s = \otimes$, $|N_c| = n_c$, $|N_s| = n_s$, $n_c + n_s = n$. Определим расчетные формулы для текущего положения цели (см., например, [3, 4, 12–15]).

Агент $i \in N_c$ с рефлексией по Курно, точно зная выпуски q^t_{-i} остальных агентов в предыдущий момент времени и не ожидая их изменения в текущий момент времени, рассчитывает текущее положение цели (оптимальный отклик) по формуле

$$x_i(q^t_{-i}) = \frac{h_i - Q^t_{-i}}{2}. \tag{8}$$

Агент $i \in N_s$ с рефлексией по Штакельбергу, зная выпуски q^t_{-i} остальных агентов в предыдущий момент времени и ожидая в текущий момент времени от них поведения по Курно, полагает, что в точности знает реакцию остальных агентов на свои действия, и рассчитывает текущее положение цели (оптимальный отклик) по формуле

$$x_i(q^t_{-i}) = \frac{n\left(h_i - Q^t_{-i}\right)}{1+n}. \tag{9}$$

Здесь обозначено: $h_i = \frac{a-f_i}{b}$, $Q^t_{-i} = \sum_{j \neq i} q^t_j$, $i, j \in N$.

Поясним вывод формул (8) и (9) для положения цели $x_i(q^t_{-i})$.

Оптимальный текущий выпуск агента можно определить из условия $\frac{\partial \Pi^t_i}{\partial q^t_i} = \frac{\partial p^t}{\partial q^t_i} q^t_i + p^t - \frac{\partial \phi}{\partial q^t_i} = 0$. Отсюда (полагая, что оптимальный выпуск не равен нулю) $\frac{\partial p^t}{\partial q^t_i} = \frac{1}{q^t_i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial q^t_i} - p^t\right)$. Из формулы цены (7) имеем $\frac{\partial p^t}{\partial q^t_i} = -b\frac{\partial Q^t}{\partial q^t_i}$. Тогда с учетом (6) и (7) имеем, что $b\frac{\partial Q^t}{\partial q^t_i} = -\frac{1}{q^t_i}(f_i - a + bQ^t)$ или $1 + \frac{\partial Q^t_{-i}}{\partial q^t_i} = \frac{1}{q^t_i} h_i - 1 - \frac{1}{q^t_i} Q^t_{-i}$.

Получаем окончательно, что $q^t_i = \frac{h_i - Q^t_{-i}}{2 + \frac{\partial Q^t_{-i}}{\partial q^t_i}}$ $(i \in N;\ t = 0, 1, 2, \dots)$.

Сначала рассмотрим применение полученной формулы к ведóмому агенту. Допустим, что i-й агент является ведомым. Согласно определению дифференциала имеем $dQ^t_{-i} = \sum_{j \in N} \frac{\partial Q^t_{-i}}{\partial q^t_j} dq^t_j$. По предположению Курно следует, что $dQ_{-i}^t = 0$. Тогда для i-го агента должны быть равны нулю не только dq_j^t $(j \neq i)$, но и $\frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t}$, так как в противном случае при $dq_i^t \neq 0$ будет $dQ_{-i}^t \neq 0$. Итак, $\frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t} = 0$, и имеем выражение $q_i^t = \frac{h_i - Q_{-i}^t}{2}$ $(i \in N_c)$ для оптимального текущего выпуска агента с реакцией по Курно на предполагаемые им выпуски конкурентов.

Теперь рассмотрим применение полученной формулы к агенту-лидеру. Допустим, что i-й агент является лидером. Из его предположения, что остальные агенты действуют как ведомые, следует, что $dq_j^t = 0$ и $dQ_{-j}^t = 0$ при $j \in N \setminus \{i\}$. Имеем $\frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t} = 0$, а также $q_j^t = \frac{h_j - Q_{-j}^t}{2}$, откуда получаем $\frac{\partial q_j^t}{\partial q_i^t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial Q_{-j}^t}{\partial q_i^t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial Q^t}{\partial q_i^t} + \frac{1}{2}\frac{\partial q_j^t}{\partial q_i^t} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t} + \frac{1}{2}\frac{\partial q_j^t}{\partial q_i^t}$ или $\frac{\partial q_j^t}{\partial q_i^t} = -1 - \frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t}$ при $j \in N \setminus \{i\}$. Суммируя левые и правые части последних равенств по $j \in N \setminus \{i\}$, получаем, что $\frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t} = -(n-1) - (n-1)\frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t}$, т.е. $\frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t} = -\frac{n-1}{n}$. Тогда $q_i^t = \frac{h_i - Q_{-i}^t}{2 - \frac{n-1}{n}}$ или $q_i^t = \frac{n\left(h_i - Q_{-i}^t\right)}{1+n}$ $(i \in N_s)$ — оптимальный текущий выпуск агента с реакцией по Штакельбергу на предполагаемые выпуски остальных агентов.

Поясним также отличие рефлексивной модели олигополии от классической игры Штакельберга и информированность агентов. Здесь выбор реальных действий всеми агентами осуществляется синхронно (одновременно). Подобный прием упрощает реальный процесс последовательных реакций. Он использован, например, в [8, 12] и, как отмечается в [8], адекватен в случае, когда достигнутое равновесие стабильно. В игре Штакельберга лидер первым делает ход, который становится известен другим агентам. Здесь агенты с реакцией по Курно не знают хода лидера, синхронного своему ходу. Более того, они не знают, что у них есть лидер (лидеры), полагая, что он, как и другие агенты, оставит свой объем выпуска неизменным (например, считая остальных агентов менее "интеллектуальными", чем они сами, или что оппоненты достигли равновесия и им не выгодно от него отклониться). Агенты, действующие по Курно, не знают, что другие такие агенты действуют так же.

Следуя [1], агенты, выбирающие действия по Курно, обладают низким ("нулевым") рангом рефлексии. Лидеры обладают более высоким ("первым") рангом рефлексии, считая всех остальных нерефлексирующими (агентами с нулевым рангом рефлексии), и в соответствии с этим предсказывают их выбор. Выбор лидеров будет ориентирован на наилучший ответ на ту обстановку, которая, по их мнению, должна сложиться. Предполагается, что все агенты не допускают существования агентов, имеющих такой же или более высокий ранг рефлексии, чем они сами.

Также все агенты точно знают собственные затраты и целевую функцию, собственную функцию реакции, включающую параметры спроса a и b, ранее произведенный выпуск другими агентами, но не располагают достоверной априорной информацией относительно ожидаемых объемов их выпуска, множеств допустимых действий, функций затрат и целевых функций конкурентов. Лидер также знает общее число агентов на рынке.

4. Методы исследования

Выведем формальные выражения для норм матриц перехода от t-го к $(t+1)$-му моменту времени в итерационных процессах (1)–(4) для базовой модели олигополии.

Сначала рассмотрим классическую модель индикаторного поведения (3).

Эту модель для агента с реакцией по Курно перепишем с учетом (8) в виде

$$q_i^{t+1} = q_i^t - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\left(2q_i^t + \sum_{j\neq i} q_j^t\right) + \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}h_i, \quad \gamma_i^{t+1} \in [0;1], \quad i \in N_c. \tag{10}$$

Модель индикаторного поведения агента с реакцией по Штакельбергу перепишем с учетом (9) в виде

$$q_i^{t+1} = q_i^t - \gamma_i^{t+1}\frac{n}{1+n}\left(q_i^t\frac{1+n}{n} + \sum_{j\neq i} q_j^t\right) + \gamma_i^{t+1}\frac{n}{1+n}h_i, \tag{11}$$
$$\gamma_i^{t+1} \in [0;1], \quad i \in N_s.$$

Здесь и далее для определенности будем считать, что первые n_s агентов действуют по Штакельбергу, остальные — по Курно и $q^t = (q_1^t, \ldots, q_{n_s}^t, q_{n_s+1}^t, \ldots, q_n^t)$.

Исследование сходимости к равновесию процесса (10)–(11) может быть сведено к итерационному решению системы линейных алгебраических уравнений. С целью упрощения записи выражений проведем замену переменных

$$\lambda_i^{t+1} = \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}, \quad i \in N_c; \quad \lambda_i^{t+1} = \gamma_i^{t+1}\frac{n}{1+n}, \quad i \in N_s. \tag{12}$$

Запишем (10)–(11) в эквивалентной матричной форме

$$q^{t+1} = q^t - \Lambda^{t+1}Aq^t + \Lambda^{t+1}h, \quad t = 0,1,2,\ldots, \tag{13}$$

где

$A = \begin{pmatrix} A_s & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & A_c \end{pmatrix}$ — клеточная матрица, т.е. квадратная матрица размера $n \times n$, вдоль диагонали которой идут квадратная подматрица A_s размера $n_s \times n_s$ и квадратная подматрица A_c размера $n_c \times n_c$;

$$A_s = \begin{pmatrix} (1+n)/n & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & (1+n)/n & \ldots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \ldots & (1+n)/n \end{pmatrix}, \; A_c = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \ldots & 2 \end{pmatrix};$$

$\Lambda^{t+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{t+1} & 0 & \ldots 0 \\ 0 & \lambda_2^{t+1} & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \lambda_n^{t+1} \end{pmatrix}$ — диагональная матрица параметров λ^{t+1}, задающих тот или иной итерационный процесс; $q^t = \left(q_1^t, q_2^t, \ldots, q_n^t\right)'$ — вектор-столбец в вещественном n-мерном пространстве R^n (где q' обозначает вектор-строку, транспонированную к q) и $h = \left(\frac{a-f_1}{b}, \frac{a-f_2}{b}, \ldots, \frac{a-f_n}{b}\right)'$.

Для модели олигополии с линейными функциями затрат агентов и линейной обратной функцией спроса равновесный выпуск $q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$ определяется как решение системы уравнений $Aq = h$ (см., например, [13]).

Поскольку матрица A имеет обратную матрицу, то существует единственное решение этой системы уравнений при любой правой части $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)'$.

Используя (13), $Aq^* = h$ и очевидное равенство $q^* = q^* - \Lambda^{t+1}Aq^* + \Lambda^{t+1}Aq^*$, получаем, что погрешность итерационного процесса $\partial^t = (\partial_1^t, \partial_2^t, \ldots, \partial_n^t)' = \left(q_1^t - q_1^*, q_2^t - q_2^*, \ldots, q_n^t - q_n^*\right)'$ удовлетворяет уравнению $\partial^{t+1} = \partial^t - \Lambda^{t+1}A\partial^t$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$, которое отличается от (13) только тем, что является однородным.

Положим

$$B^t = E - \Lambda^{t+1}A = \left(\begin{array}{c|c} B_s^t & 0 \\ \hline 0 & B_c^t \end{array}\right), \tag{14}$$

где $B_s^t = \begin{pmatrix} 1-(1+n)\lambda_1^{t+1}/n & -\lambda_1^{t+1} & \ldots & -\lambda_1^{t+1} \\ -\lambda_2^{t+1} & 1-(1+n)\lambda_2^{t+1}/n & \ldots & -\lambda_2^{t+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda_{n_s}^{t+1} & -\lambda_{n_s}^{t+1} & \ldots & 1-(1+n)\lambda_{n_s}^{t+1}/n \end{pmatrix}$ и

$$B_c^t = \begin{pmatrix} 1-2\lambda_{n_s+1}^{t+1} & -\lambda_{n_s+1}^{t+1} & \ldots & -\lambda_{n_s+1}^{t+1} \\ -\lambda_{n_s+2}^{t+1} & 1-2\lambda_{n_s+2}^{t+1} & \ldots & -\lambda_{n_s+2}^{t+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda_n^{t+1} & -\lambda_n^{t+1} & \ldots & 1-2\lambda_n^{t+1} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\partial^{t+1} = B^t\partial^t = \begin{pmatrix} \left(1-\lambda_1^{t+1}/n\right)\partial_1^t - \lambda_1^{t+1}\sum\limits_{i\in N_s}\partial_i^t \\ \ldots\ldots\ldots \\ \left(1-\lambda_{n_s}^{t+1}/n\right)\partial_{n_s}^t - \lambda_{n_s}^{t+1}\sum\limits_{i\in N_s}\partial_i^t \\ \ldots\ldots\ldots \\ \left(1-\lambda_{n_s+1}^{t+1}\right)\partial_{n_s+1}^t - \lambda_{n_s+1}^{t+1}\sum\limits_{i\in N_c}\partial_i^t \\ \ldots\ldots\ldots \\ \left(1-\lambda_n^{t+1}\right)\partial_n^t - \lambda_n^{t+1}\sum\limits_{i\in N_c}\partial_i^t \end{pmatrix}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Сходимость итерационного процесса (15) означает, что $\partial^t \to 0$ по норме при $t \to \infty$, и полностью определяется матрицей B^t — матрицей перехода от t-го к $(t+1)$-му моменту времени (см., например, [16]). Здесь E — единичная матрица.

Под нормой вектора x, обозначаемой как $\|x\|$, понимаем евклидову норму, которая определяется по формуле $\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$. Последовательность векторов $\left\{x^t\right\}_{t=0}^{\infty}$ сходится к равновесию x^* по норме при $t \to \infty$ (будем записывать как $x^t \to x^*$), если $\left\|x^t - x^*\right\| \to 0$ при $t \to \infty$. Норма вещественной матрицы B, имеющей n строк и n столбцов, является подчиненной евклидовой векторной норме и определяется как $\|B\| = \max\limits_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$, или как в следующей эквивалентной форме $\|B\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Bx\|$. Из определения нормы следует, что $\|Bx\| \leq \|B\| \cdot \|x\|$ для всех $B,\ x$ или $\|Bx\| \leq \|B\|$ для всех B, $\|x\| = 1$ [16].

Тогда

$$\left\|B^t\right\| = \max_{\|x^t\|=1} \left\|B^t x^t\right\| = \tag{16}$$

$$= \max_{\|x^t\|=1} \sqrt{\sum_{i \in N_s} \left[x_i^t - \lambda_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t\right)\right]^2 + \sum_{i \in N_c} \left[x_i^t - \lambda_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t\right)\right]^2},$$

где x^t — произвольный единичный вектор.

Перейдем к построению матрицы перехода для модели (4).

Обозначим: N_c^t — множество агентов с реакцией по Курно, для которых $x_i(q_{-i}^t) \leq 0$; N_s^t — множество агентов с реакцией по Штакельбергу, для которых $x_i(q_{-i}^t) \leq 0$.

Определим клеточную матрицу $\tilde{A}^t = \begin{pmatrix} \tilde{A}_s^t & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ 0 & \vdots & \tilde{A}_c^t \end{pmatrix}$, где на главной диагонали для $i \in N_s^t$ стоят числа “$\frac{1}{n}$”, для $i \in N_c^t$ стоят числа “1”, другие элементы в этих строках нулевые. Остальные элементы матриц $\tilde{A}^t$ и A совпадают.

Определим диагональную матрицу параметров $\tilde{\Lambda}^{t+1}$, в которой на главной диагонали для $i \in N_s^t$ стоят числа “n”, для $i \in N_c^t$ стоят числа “1”. Остальные элементы матриц $\tilde{\Lambda}^{t+1}$ и Λ^{t+1} совпадают.

Процесс 4 запишем в эквивалентной матричной форме

$$q^{t+1} = q^t - \tilde{\Lambda}^{t+1} \tilde{A}^t q^t + \tilde{\Lambda}^{t+1} h - \tilde{H}^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

где $\tilde{H}^t$ — вектор-столбец, в котором для $i \in N_s^t$ стоят величины “nh_i”, для $i \in N_c^t$ стоят величины “h_i”, остальные элементы нулевые.

Для оценки погрешности итерационного процесса (17) введем фиктивный процесс $q^* = q^* - \tilde{\Lambda}^{t+1}\, \tilde{A}^t q^* + \tilde{\Lambda}^{t+1}\, \tilde{A}^t q^* = q^* - \tilde{\Lambda}^{t+1}\, \tilde{A}^t q^t + \tilde{\Lambda}^{t+1}\, A q^* - \tilde{\Lambda}^{t+1} \left(A - \tilde{A}^t\right) q^*$, $t = 0, 1, 2, \ldots$

Разность между (17) и последним выражением с учетом $Aq^* = h$ дает уравнение для этой погрешности в виде

(18) $$\partial^{t+1} = \partial^t - \tilde{\Lambda}^{t+1}\tilde{A}^t\partial^t - \tilde{H}^t + \tilde{\Lambda}^{t+1}\left(A - \tilde{A}^t\right)q^*, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Отметим, что в (18) выражение $\left(-\tilde{H}^t + \tilde{\Lambda}^{t+1}\left(A - \tilde{A}^t\right)q^*\right)$ определяет вектор-столбец, в котором стоят величины " $-q_i^* - n\sum_{j\in N_c} q_j^*$ " для $i \in N_s^t$ и " $-q_i^* - \sum_{j\in N_s} q_j^*$ " для $i \in N_c^t$. Остальные элементы нулевые.

Положим

(19) $$\tilde{B}^t = E - \tilde{\Lambda}^{t+1}\tilde{A}^t.$$

По (18)–(19) имеем неравенство

(20) $$\partial^{t+1} \le \tilde{B}^t\partial^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Матрица $\tilde{B}^t$ и вектор-столбец $\tilde{B}^t\partial^t$ отличаются от B^t и $B^t\partial^t$ соответственно тем, что строки $i \in N_s^t \bigcup N_c^t$ — нулевые.

Тогда норма вещественной матрицы $\tilde{B}^t$, подчиненной евклидовой векторной норме, определяется выражением

(21) $$\left\|\tilde{B}^t\right\| = \max_{\|x^t\|=1}\left\|\tilde{B}^t x^t\right\| =$$

$$= \max_{\|x^t\|=1}\sqrt{\sum_{i\in N_s\setminus N_s^t}\left[x_i^t - \lambda_i^{t+1}\left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j\in N_s} x_j^t\right)\right]^2 + \sum_{i\in N_c\setminus N_c^t}\left[x_i^t - \lambda_i^{t+1}\left(x_i^t + \sum_{j\in N_c} x_j^t\right)\right]^2}.$$

Пример. На рынке 5 агентов. Пусть два агента реагируют по Штакельбергу и у одного из них (для определенности первого, $i = 1$) в момент времени t расчетное текущее положение цели оказалось неположительным. Пусть в тот же момент времени у одного из трех агентов, действующих по Курно (для определенности последнего, $i = 5$), также неположительное положение цели. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} 6/5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}^t = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6/50 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 00 & 1 & \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\Lambda}^{t+1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{t+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{t+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^{t+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}^t = \begin{pmatrix} 6h_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_5 \end{pmatrix},$$

$$
-\tilde{H}^t + \tilde{\Lambda}^{t+1}\left(A - \tilde{A}^t\right) q^* = \begin{pmatrix} -q_1^* - 5\sum\limits_{j=3}^{5} q_j^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q_5^* - \sum\limits_{j=1}^{2} q_j^* \end{pmatrix},
$$

$$
\tilde{B}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2^{t+1} & 1 - 6\lambda_2^{t+1}/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2\lambda_3^{t+1} & -\lambda_3^{t+1} & -\lambda_3^{t+1} \\ 0 & 0 & -\lambda_4^{t+1} & 1 - 2\lambda_4^{t+1} - \lambda_4^{t+1} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\tilde{B}^t \partial^t = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_2^t - \lambda_2^{t+1}\left(\dfrac{1}{5}\partial_2^t + \sum\limits_{j=1}^{2} \partial_j^t\right) \\ \partial_3^t - \lambda_3^{t+1}\left(\partial_3^t + \sum\limits_{j=3}^{5} \partial_j^t\right) \\ \partial_4^t - \lambda_4^{t+1}\left(\partial_4^t + \sum\limits_{j=3}^{5} \partial_j^t\right) \\ 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\left\|\tilde{B}^t\right\| = \max_{\|x^t\|=1} \sqrt{\left[x_2^t - \lambda_2^{t+1}\left(\frac{x_2^t}{5} + \sum_{j=1}^{2} x_j^t\right)\right]^2 + \sum_{i=3}^{4}\left[x_i^t - \lambda_i^{t+1}\left(x_i^t + \sum_{j=3}^{5} x_j^t\right)\right]^2}.
$$

5. Результаты и их обсуждение на рефлексивной модели олигополии

Наряду с изучением свойств матриц перехода процессов представим новые результаты об условиях сходимости процессов к положению равновесия.

В терминах нормы матрицы перехода B^t можно привести следующие достаточные условия сходимости процесса 3 с произвольным числом лидеров по Штакельбергу.

Лемма. Для сходимости к равновесию процесса (15) при любом начальном приближении q^0 достаточно выполнения условия

$$\left\|B^t\right\| < 1 \tag{22}$$

начиная с некоторого момента t_0.

Доказательство. Сходимость к решению q^* при любом начальном приближении q^0 следует из того, что для каждого $k > 0$

$$\left\|q^{t_0+k} - q^*\right\| = \left\|\partial^{t_0+k}\right\| \le \left\|B^{t_0+k-1}\right\| \cdot \left\|\partial^{t_0+k-1}\right\| \le$$

$$\le \left\|B^{t_0+k-1}\right\| \cdot \left\|B^{t_0+k-2}\right\| \cdot \left\|\partial^{t_0+k-2}\right\| \le$$

$$\le \left\|B^{t_0+k-1}\right\| \cdot \left\|B^{t_0+k-2}\right\| \cdot \ldots \cdot \left\|B^{t_0}\right\| \cdot \left\|\partial^{t_0}\right\|$$

и

$$\left\|q^{t_0+k} - q^*\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Лемма доказана.

Утверждение 1. $\left\|\tilde{B}^t\left(\lambda^{t+1}\right)\right\| \le \left\|B\left(\lambda^{t+1}\right)\right\|$ *для* $\lambda_i^{t+1} \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $i \in N_c$; $\lambda_i^{t+1} \in \left[0; \frac{n}{1+n}\right]$, $i \in N_s$; $t = 0, 1, 2, \ldots$

Доказательство этого утверждения приведено в Приложении.

Утверждение 2. Если начиная с некоторого момента t_0 $\left\|B^t\right\| < 1$, то процессы 3 и 4 сходятся при любом начальном приближении q^0.

Доказательство. Для процесса 4 по (20) $\left\|\partial^{t+1}\right\| \le \left\|\tilde{B}^t\right\| \cdot \left\|\partial^t\right\|$, по утверждению 1 имеем $\left\|\tilde{B}^t\right\| \le \left\|B^t\right\| < 1$. Справедливость утверждения 2 для обоих процессов следует из доказанной леммы. Утверждение 2 доказано.

Обозначим через $f(\lambda)$ подкоренное выражение в (16), т.е.

$$\begin{aligned} f(\lambda^{t+1}) = \sum_{i \in N_s} \left[x_i^t - \lambda_i^{t+1}\left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t\right)\right]^2 + \\ + \sum_{i \in N_c} \left[x_i^t - \lambda_i^{t+1}\left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t\right)\right]^2. \end{aligned} \tag{23}$$

В следующем утверждении приводятся свойства функции $f(\lambda^{t+1})$, которые могут быть полезны при выводе условий сходимости процессов.

Утверждение 3. Пусть векторы λ^{t+1}, $\vec{\lambda}^{t+1}$, $\overleftarrow{\lambda}^{t+1}$ такие, что $\lambda_i^{t+1} \in \left[\vec{\lambda}_i^{t+1}; \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\right]$, где $\left[\vec{\lambda}_i^{t+1}; \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\right] \subseteq \left[0; \frac{1}{2}\right]$, если $i \in N_c$, и $\left[\vec{\lambda}_i^{t+1}; \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\right] \subseteq \left[0; \frac{n}{1+n}\right]$, если $i \in N_s$.

Тогда функция $f(\lambda^{t+1})$:

а) выпукла вниз по каждой отдельной i-й компоненте на отрезке $\left[\vec{\lambda}_i^{t+1}; \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\right]$, т.е.

$$f\left(\lambda_1^{t+1}, \ldots, \lambda_{i-1}^{t+1}, \alpha_i^{t+1}\vec{\lambda}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}, \lambda_{i+1}^{t+1}, \ldots, \lambda_n^{t+1}\right) \leq$$
$$\leq \alpha_i^{t+1} f\left(\lambda_1^{t+1}, \ldots, \lambda_{i-1}^{t+1}, \vec{\lambda}_i^{t+1}, \lambda_{i+1}^{t+1}, \ldots, \lambda_n^{t+1}\right) +$$
$$+ \beta_i^{t+1} f\left(\lambda_1^{t+1}, \ldots, \lambda_{i-1}^{t+1}, \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}, \lambda_{i+1}^{t+1}, \ldots, \lambda_n^{t+1}\right),$$

если $\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1} \in [0;1]$ и $\alpha_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} = 1$;

б) выпукла вниз на n-мерном прямоугольном параллелепипеде

$$\left[\vec{\lambda}_1^{t+1}, \overleftarrow{\lambda}_1^{t+1}; \ldots; \vec{\lambda}_i^{t+1}, \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}; \ldots; \vec{\lambda}_n^{t+1}, \overleftarrow{\lambda}_n^{t+1}\right],$$

т.е.

$$f\left(\eta^{t+1}\vec{\lambda}^{t+1} + \mu^{t+1}\overleftarrow{\lambda}^{t+1}\right) \leq \eta^{t+1} f\left(\vec{\lambda}^{t+1}\right) + \mu^{t+1} f\left(\overleftarrow{\lambda}^{t+1}\right),$$

если $\eta^{t+1}, \mu^{t+1} \in [0;1]$ и $\eta^{t+1} + \mu^{t+1} = 1$;

в) удовлетворяет неравенству

$$f\left(\alpha_1^{t+1}\vec{\lambda}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_1^{t+1}, \ldots, \alpha_i^{t+1}\vec{\lambda}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}, \ldots, \alpha_n^{t+1}\vec{\lambda}_n^{t+1} + \beta_n^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_n^{t+1}\right) \leq$$
$$\leq \sum_{y_1 \in \left\{\alpha_1^{t+1}, \beta_1^{t+1}\right\}} \cdots \sum_{y_i \in \left\{\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1}\right\}} \cdots \sum_{y_n \in \left\{\alpha_n^{t+1}, \beta_n^{t+1}\right\}} y_1 \cdot \ldots \cdot y_i \cdot \ldots \cdot y_n \times$$
$$\times f\left(z_1^{t+1}, \ldots, z_i^{t+1}, \ldots, z_n^{t+1}\right), \tag{24}$$

где $\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1} \in [0;1]$, $\alpha_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} = 1$, $z_i^{t+1} = \begin{cases} \vec{\lambda}_i^{t+1}, & y_i = \alpha_i^{t+1}, \\ \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}, & y_i = \beta_i^{t+1}, \end{cases}$

$$\sum_{y_1 \in \left\{\alpha_1^{t+1}, \beta_1^{t+1}\right\}} \cdots \sum_{y_i \in \left\{\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1}\right\}} \cdots \sum_{y_n \in \left\{\alpha_n^{t+1}, \beta_n^{t+1}\right\}} y_1 \cdot \ldots \cdot y_i \cdot \ldots \cdot y_n = 1;$$

г) достигает максимума по крайней мере в одной из крайних точек n-мерного прямоугольного параллелепипеда

$$\left[\vec{\lambda}_1^{t+1}, \overleftarrow{\lambda}_1^{t+1}; \ldots; \vec{\lambda}_i^{t+1}, \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}; \ldots; \vec{\lambda}_n^{t+1}, \overleftarrow{\lambda}_n^{t+1}\right];$$

д) удовлетворяет неравенству

$$f\left(\alpha_1^{t+1}\vec{\lambda}_1^{t+1}+\beta_1^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_1^{t+1},\ldots,\alpha_i^{t+1}\vec{\lambda}_i^{t+1}+\beta_i^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_i^{t+1},\ldots,\alpha_n^{t+1}\vec{\lambda}_n^{t+1}+\beta_n^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_n^{t+1}\right)\leq$$

$$\begin{aligned}&\leq\sum_{i\in N_s}\alpha_i^{t+1}\left[x_i^t-\vec{\lambda}_i^{t+1}\left(\frac{x_i^t}{n}+\sum_{j\in N_s}x_j^t\right)\right]^2+\\ &+\sum_{i\in N_c}\alpha_i^{t+1}\left[x_i^t-\vec{\lambda}_i^{t+1}\left(x_i^t+\sum_{j\in N_c}x_j^t\right)\right]^2+\\ &+\sum_{i\in N_s}\beta_i^{t+1}\left[x_i^t-\overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\left(\frac{x_i^t}{n}+\sum_{j\in N_s}x_j^t\right)\right]^2+\\ &+\sum_{i\in N_c}\beta_i^{t+1}\left[x_i^t-\overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\left(x_i^t+\sum_{j\in N_c}x_j^t\right)\right]^2,\end{aligned}\tag{25}$$

где $\alpha_i^{t+1},\beta_i^{t+1}\in[0;1]$, $\alpha_i^{t+1}+\beta_i^{t+1}=1$.

Доказательство утверждения 3 приведено в Приложении.

5.1. Олигополия Курно

Рассмотрим применение результатов, ранее полученных в этом разделе, к сходимости процессов 1–4.

Определяя процесс 1, учтем, что его можно рассматривать как частный случай процесса 3. Для этого положим $\left[\vec{\lambda}_i^{t+1};\overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\right]=\left[0;\frac{1}{2}\right]$ и $\alpha_i^{t+1}=0$, $\beta_i^{t+1}=1$ $(\forall i\in N; t=0,1,2,\ldots)$, что по формуле замены переменных (12) соответствует выбору агентами значений параметров $\gamma_i=1$ $(\forall i\in N)$, т.е. их наилучшим ответам на действия конкурентов.

Тогда для процесса 1 неравенство (25) (с учетом соотношения $\sum_{i\in N}(x_i^t)^2=$ $=1$) принимает вид

$$\begin{aligned}f(\overleftarrow{\lambda}^{t+1})&\leq\sum_{i\in N}\left[x_i^t-\frac{1}{2}\left(x_i^t+\sum_{j\in N}x_j^t\right)\right]^2=\\ &=1-\left[\sum_{i\in N}\left(x_i^t\right)^2-\sum_{i\in N}\left(\frac{\sum\limits_{j\in N\setminus\{i\}}x_j^t}{2}\right)^2\right].\end{aligned}$$

Если симметрическая квадратичная форма $\sum\limits_{i\in N}\left(x_i^t\right)^2-\sum\limits_{i\in N}\left(\frac{\sum\limits_{j\in N\setminus\{i\}} x_j^t}{2}\right)^2$ является положительно определенной, то $f(\overleftarrow{\lambda}^{t+1})<1$ и $\left\|B^t\right\|<1$. Соответствующая этой квадратичной форме симметрическая матрица имеет вид $F=$
$$=\begin{pmatrix} 1-\frac{n-1}{4} & -\frac{n-2}{4} & \dots & -\frac{n-2}{4} \\ -\frac{n-2}{4} & 1-\frac{n-1}{4} & \dots & -\frac{n-2}{4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{n-2}{4} & -\frac{n-2}{4} & \dots & 1-\frac{n-1}{4} \end{pmatrix}.$$

Используем следующий известный результат (см., например, [17]): действительная квадратичная форма является положительно определенной в том и только в том случае, если определители всех главных (угловых) миноров соответствующей ей матрицы положительны (или, что равносильно, если матрица положительно определена).

Имеем, что при $n=2$ определители главных миноров матрицы F положительны. При $n=3$ определитель главного минора 3-го порядка равен нулю, при $n=4$ определитель главного минора 2-го порядка отрицателен, при $n\geq 5$ определитель главного минора 1-го порядка неположителен, т.е. только для дуополии F является положительно определенной. Поэтому если $n=2$, то $\left\|B^t\right\|<1$ и по утверждению 1 $\left\|\tilde{B}^t\right\|\leq\left\|B^t\right\|$, а по утверждению 2 процессы 1, 2 сходятся.

Это полностью согласуется с известными результатами, полученными другими методами [14, 15, 18, 19], в том числе и только экспериментами (см., например, [13]), что *в олигополии Курно* (5)–(8) *процессы* 1 *и* 2: а) *сходятся при* $n=2$ *при любых начальных условиях*, б) *при* $n\geq 3$ расходятся.

Рассмотрим процесс 3.

Положим $\left[\overrightarrow{\lambda}_i^{t+1};\overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\right]=\left[0;\frac{1}{1+n}\right]$, что по (12) соответствует значениям параметров $\overleftarrow{\gamma}_i^{t+1}=2\overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}=\frac{2}{1+n}$ $(\forall i\in N;\ t=0,1,2,\ldots)$. Выбор такого диапазона объясняется тем, что для него есть доказанные результаты [14].

Для процесса 3, принимая во внимание $\sum_{i\in N}\left(x_i^t\right)^2=1$, неравенство (25) принимает вид

$$f\left(\frac{\beta_1^{t+1}}{1+n},\ldots,\frac{\beta_i^{t+1}}{1+n},\ldots,\frac{\beta_n^{t+1}}{1+n}\right)\leq$$
$$\leq\sum_{i\in N}\left(1-\beta_i^{t+1}\right)\left(x_i^t\right)^2+\sum_{i\in N}\beta_i^{t+1}\left[x_i^t-\frac{1}{1+n}\left(x_i^t+\sum_{j\in N}x_j^t\right)\right]^2=$$
$$=1-\left[\sum_{i\in N}\beta_i^{t+1}\left(x_i^t\right)^2-\sum_{i\in N}\beta_i^{t+1}\left(\frac{(n-1)x_i^t-\sum\limits_{j\in N\setminus\{i\}}x_j^t}{1+n}\right)^2\right].$$

Элементы симметрической матрицы F^t, соответствующей квадратичной форме $\sum_{i\in N}\beta_i^{t+1}\left(x_i^t\right)^2-\sum_{i\in N}\beta_i^{t+1}\left(\frac{(n-1)x_i^t-\sum_{j\in N\backslash\{i\}}x_j^t}{1+n}\right)^2$, имеют вид:

$$f_{ii}^t=\beta_i^{t+1}-\frac{(n-1)^2\beta_i^{t+1}}{(1+n)^2}-\frac{\sum\limits_{k\in N\backslash\{i\}}\beta_k^{t+1}}{(1+n)^2}=\frac{4n\beta_i^{t+1}}{(1+n)^2}-\frac{\sum\limits_{k\in N\backslash\{i\}}\beta_k^{t+1}}{(1+n)^2},$$

$$f_{ij}^t=\frac{(n-1)\left(\beta_i^{t+1}+\beta_j^{t+1}\right)}{(1+n)^2}-\frac{\sum\limits_{k\in N\backslash\{i,j\}}\beta_k^{t+1}}{(1+n)^2}\quad(i,j\in N;\ i\neq j)\,.$$

Если определители всех главных миноров матрицы F^t положительны, то квадратичная форма положительно определена и $\left\|B^t\right\|<1$, а процессы 3 и 4 сходятся.

Для $n=2$ матрица F^t имеет вид $F^t=\begin{pmatrix}\frac{8\beta_1^{t+1}-\beta_2^{t+1}}{9} & \frac{\beta_1^{t+1}+\beta_2^{t+1}}{9}\\ \frac{\beta_2^{t+1}+\beta_1^{t+1}}{9} & \frac{8\beta_2^{t+1}-\beta_1^{t+1}}{9}\end{pmatrix}$.

Эта матрица положительно определена, если $8\beta_1^{t+1}-\beta_2^{t+1}>0$ и $\begin{vmatrix}8\beta_1^{t+1}-\beta_2^{t+1} & \beta_1^{t+1}+\beta_2^{t+1}\\ \beta_2^{t+1}+\beta_1^{t+1} & 8\beta_2^{t+1}-\beta_1^{t+1}\end{vmatrix}=9\left[7\beta_1^{t+1}\beta_2^{t+1}-\left(\beta_1^{t+1}\right)^2-\left(\beta_2^{t+1}\right)^2\right]>0$. Пусть $\beta_1^{t+1}\neq0$. Имеем общее решение двух этих неравенств в виде $\frac{\beta_2^{t+1}}{\beta_1^{t+1}}<\frac{7+\sqrt{45}}{2}\approx$ $\approx6{,}85$. Поскольку агенты однородные, то и $\frac{\beta_1^{t+1}}{\beta_2^{t+1}}<6{,}85$. Таким образом, если $\frac{\beta_2^{t+1}}{\beta_1^{t+1}}$ и $\frac{\beta_1^{t+1}}{\beta_2^{t+1}}$ меньше, чем 6,85, то процессы 3 и 4 сходятся к равновесию. Это согласуется с результатами публикации [14], но в данном случае применяемый здесь метод: 1) с одной стороны, дает меньшую общность, поскольку по [14] процессы сходятся в диапазоне $\gamma_1^{t+1},\gamma_2^{t+1}\in\left(0;\frac{2}{3}\right)$, т.е. $\forall\beta_1^{t+1},\beta_2^{t+1}\in(0;1)$; 2) но, с другой стороны, дает новые точки сходимости $\gamma_1^{t+1}=\frac{2}{3}\vee\gamma_2^{t+1}=\frac{2}{3}$, т.е. когда $\beta_1^{t+1}=1\vee\beta_2^{t+1}=1$.

Особенности условий сходимости процессов при использовании норм, по мнению авторов, обусловлены тем обстоятельством, что если одни агенты выбирают параметры λ (соответственно и β) равными или близкими к нулю, а другие — ближе к верхней границе диапазона, то заведомо $\left\|B^t\right\|>1$. Поясним на следующем примере. Пусть $n=2$ и $\lambda_1=0$, $\lambda_2\neq0$. Тогда, полагая $x_1^t=1$, $x_2^t=0$, по (16) имеем

$$\left\|B^t\right\|=\max_{\|x^t\|=1}\sqrt{\left(x_1^t\right)^2+\left[x_2^t-\lambda_2\left(x_2^t+x_1^t+x_2^t\right)\right]^2}\geq\sqrt{1+(\lambda_2)^2}>1.$$

В этом, видимо, проявляется определенная ограниченность методов, основанных на нормах.

Сначала рассмотрим процесс 1, полагая $\left[\vec{\lambda}_i^{t+1}; \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\right] = \left[0; \frac{n}{1+n}\right]$ для $i \in N_s$ и $\left[\vec{\lambda}_i^{t+1}; \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\right] = \left[0; \frac{1}{2}\right]$ для $i \in N_c$, а также $\alpha_i^{t+1} = 0$, $\beta_i^{t+1} = 1$ $\quad (\forall i \in N; \;\; t = 0, 1, 2, \ldots)$, что по формуле замены переменных (12) соответствует выбору агентами значений параметров $\gamma_i = 1$ $(\forall i \in N)$, т.е. их наилучшим ответам на действия конкурентов.

Тогда неравенство (25) принимает вид

$$f(\overleftarrow{\lambda}^{t+1}) \leq 1 - \left[\sum_{i \in N} \left(x_i^t\right)^2 - \left(\frac{n}{1+n}\right)^2 \sum_{i \in N_s} \left(\sum_{j \in N_s \setminus \{i\}} x_j^t\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4} \sum_{i \in N_c} \left(\sum_{j \in N_c \setminus \{i\}} x_j^t\right)^2 \right].$$

Для квадратичной формы, представленной выражением в квадратных скобках, соответствующая симметрическая матрица представляет собой клеточную матрицу размера $n \times n$, вдоль диагонали которой идут квадратная подматрица F_s размера $n_s \times n_s$ и квадратная подматрица F_c размера $n_c \times n_c$. При этом

$$F_s = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{n^2(n_s-1)}{(1+n)^2} & -\dfrac{n^2(n_s-2)}{(1+n)^2} & \ldots & -\dfrac{n^2(n_s-2)}{(1+n)^2} \\ -\dfrac{n^2(n_s-2)}{(1+n)^2} & 1 - \dfrac{n^2(n_s-1)}{(1+n)^2} & \ldots & -\dfrac{n^2(n_s-2)}{(1+n)^2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\dfrac{n^2(n_s-2)}{(1+n)^2} & -\dfrac{n^2(n_s-2)}{(1+n)^2} & \ldots & 1 - \dfrac{n^2(n_s-1)}{(1+n)^2} \end{pmatrix},$$

$$F_c = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{n_c-1}{4} & -\dfrac{n_c-2}{4} & \ldots & -\dfrac{n_c-2}{4} \\ -\dfrac{n_c-2}{4} & 1 - \dfrac{n_c-1}{4} & \ldots & -\dfrac{n_c-2}{4} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\dfrac{n_c-2}{4} & -\dfrac{n_c-2}{4} & \ldots & 1 - \dfrac{n_c-1}{4} \end{pmatrix}.$$

Клеточная матрица будет положительно определена в том и только в том случае, если положительно определены обе ее подматрицы F_s и F_c.

Для рынка Курно ранее было показано, что подматрица F_c положительно определена только при $n_c \leq 2$. Поэтому рассмотрим соответствующие последнему неравенству случаи:

1) $n_c = 0$. Тогда $n_s = n$ и для подматрицы F_s определитель первого главного минора положителен только при $n_s = 1$ или $n_s = 2$. При $n_s = 2$ положителен также определитель второго главного минора;
2) $n_c = 1$. Тогда $n_s = n - 1$ и для подматрицы F_s определитель первого главного минора положителен только, если $n_s = 1$ или $n_s = 2$. При $n_s = 2$ положителен также и определитель второго главного минора;
3) $n_c = 2$. Если $n_s = 1$ $(n = 3)$, то для подматрицы F_s определитель первого главного минора положителен. Если $n_s = 2$ $(n = 4)$, то для подматрицы F_s положительны определители первого и второго главных миноров. Если $n_s > 2$ $(n > 4)$, то для подматрицы F_s определитель первого главного минора отрицателен.

Обобщим полученные результаты в утверждении 4.

Утверждение 4. *В олигополии* (5)–(9) *с одним или несколькими лидерами по Штакельбергу для процессов* 1 *и* 2 *неравенство* $\left\|B^t\right\| < 1$ *имеет место только на рынке, на котором не более четырех агентов и* 1) $n_s, n_c \le 2$; 2) *если* $n_s = 1$, *то* $n = 2$ *или* $n = 3$; 3) *если* $n_s = 2$, *то* $n = 3$ *или* $n = 4$. *В этих случаях процесс* 1 *и процесс* 2 *сходятся к равновесию.*

Для процесса 2 утверждение 4 следует из утверждений 1 и 2.

Полученные для процессов 1 и 2 выводы согласуются с известными результатами (см., например, [15, 20, 21]).

Перейдем к процессу 3.

Здесь, как и для рынка Курно, положим $\left[\vec{\lambda}_i^{t+1}; \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\right] = \left[0; \frac{1}{1+n}\right]$. Это по (12) соответствует тому, что $\gamma_i^{t+1} \in \left[0; \frac{1}{n}\right]$, если $i \in N_s$, и $\gamma_i^{t+1} \in \left[0; \frac{2}{1+n}\right]$, если $i \in N_c$.

Неравенство (25) принимает вид

$$f\left(\frac{\beta_1^{t+1}}{1+n}, \ldots, \frac{\beta_i^{t+1}}{1+n}, \ldots, \frac{\beta_n^{t+1}}{1+n}\right) \le$$

$$\le \sum_{i \in N} \left(1 - \beta_i^{t+1}\right) \left(x_i^t\right)^2 + \sum_{i \in N_s} \beta_i^{t+1} \left[x_i^t - \frac{1}{1+n} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t\right)\right]^2 +$$

$$+ \sum_{i \in N_c} \beta_i^{t+1} \left[x_i^t - \frac{1}{1+n} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t\right)\right]^2 =$$

$$= 1 - \sum_{i \in N} \beta_i^{t+1} \left(x_i^t\right)^2 + \sum_{i \in N_s} \frac{\beta_i^{t+1}}{n^2 (1+n)^2} \left[\left(n^2 - 1\right) x_i^t - n \sum_{j \in N_s \setminus \{i\}} x_j^t\right]^2 +$$

$$+ \sum_{i \in N_c} \frac{\beta_i^{t+1}}{(1+n)^2} \left[(n-1) x_i^t - \sum_{j \in N_c \setminus \{i\}} x_j^t\right]^2.$$

Элементы симметрической подматрицы F_s^t, соответствующей квадратичной форме $\sum_{i\in N_s}\beta_i^{t+1}\left(x_i^t\right)^2-\sum_{i\in N_s}\frac{\beta_i^{t+1}}{n^2(1+n)^2}\left[\left(n^2-1\right)x_i^t-n\sum_{j\in N_s\setminus\{i\}}x_j^t\right]^2$ по агентам с реакцией по Штакельбергу, имеют вид:

$$f_{ii}^t=\beta_i^{t+1}-\frac{\left(n^2-1\right)^2\beta_i^{t+1}}{n^2\left(1+n\right)^2}-\frac{\sum\limits_{k\in N_s\setminus\{i\}}\beta_k^{t+1}}{\left(1+n\right)^2}=\frac{\left(2n-1\right)\beta_i^{t+1}}{n^2}-\frac{\sum\limits_{k\in N_s\setminus\{i\}}\beta_k^{t+1}}{\left(1+n\right)^2},$$

$$f_{ij}^t=\frac{n\left(n^2-1\right)\left(\beta_i^{t+1}+\beta_j^{t+1}\right)}{n^2\left(1+n\right)^2}-\frac{\sum\limits_{k\in N_s\setminus\{i,j\}}\beta_k^{t+1}}{\left(1+n\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(n-1\right)\left(\beta_i^{t+1}+\beta_j^{t+1}\right)}{n\left(1+n\right)}-\frac{\sum\limits_{k\in N_s\setminus\{i,j\}}\beta_k^{t+1}}{\left(1+n\right)^2}\quad\left(i,j\in N_s;i\neq j\right).$$

Элементы симметрической подматрицы F_c^t, соответствующей квадратичной форме $\sum_{i\in N_c}\beta_i^{t+1}\left(x_i^t\right)^2-\sum_{i\in N_c}\frac{\beta_i^{t+1}}{(1+n)^2}\left[(n-1)x_i^t-\sum_{j\in N_c\setminus\{i\}}x_j^t\right]^2$, имеют вид

$$f_{ii}^t=\frac{4n\beta_i^{t+1}}{\left(1+n\right)^2}-\frac{\sum\limits_{k\in N_c\setminus\{i\}}\beta_k^{t+1}}{\left(1+n\right)^2},$$

$$f_{ij}^t=\frac{\left(n-1\right)\left(\beta_i^{t+1}+\beta_j^{t+1}\right)}{\left(1+n\right)^2}-\frac{\sum\limits_{k\in N_c\setminus\{i,j\}}\beta_k^{t+1}}{\left(1+n\right)^2}\quad\left(i,j\in N_c;\ i\neq j\right).$$

Если определители всех главных миноров подматриц F_s^t и F_c^t положительны, то процессы 3 и 4 сходятся.

Для $n=4$ и $n_s=2$ $(i=1,2)$, $n_c=2$ $(i=3,4)$ выпишем подматрицы F_s^t и F_c^t

$$F_s^t=\begin{pmatrix}\dfrac{7\beta_1^{t+1}}{16}-\dfrac{\beta_2^{t+1}}{25} & \dfrac{3\left(\beta_1^{t+1}+\beta_2^{t+1}\right)}{20}\\ \dfrac{3\left(\beta_2^{t+1}+\beta_1^{t+1}\right)}{20} & \dfrac{7\beta_2^{t+1}}{16}-\dfrac{\beta_1^{t+1}}{25}\end{pmatrix},$$

$$F_c^t=\begin{pmatrix}\dfrac{16\beta_3^{t+1}}{25}-\dfrac{\beta_4^{t+1}}{25} & \dfrac{3\left(\beta_3^{t+1}+\beta_4^{t+1}\right)}{25}\\ \dfrac{3\left(\beta_4^{t+1}+\beta_3^{t+1}\right)}{25} & \dfrac{16\beta_4^{t+1}}{25}-\dfrac{\beta_3^{t+1}}{25}\end{pmatrix}.$$

Пусть $\beta_i^{t+1}\neq 0,\ i=1,2,3,4$. Определители главных миноров подматрицы F_s^t положительны, если $\frac{\beta_2^{t+1}}{\beta_1^{t+1}}<3{,}4$. Определители главных миноров подматрицы F_c^t положительны, если $\frac{\beta_4^{t+1}}{\beta_3^{t+1}}<9{,}45$. Такие же неравенства должны выполняться для обратных отношений. Запишем условия сходимости процессов 3 и 4, переходя к параметрам γ

$$\frac{\gamma_1^{t+1}}{\gamma_2^{t+1}},\ \frac{\gamma_2^{t+1}}{\gamma_1^{t+1}} < 3{,}4; \quad \frac{\gamma_3^{t+1}}{\gamma_4^{t+1}},\ \frac{\gamma_4^{t+1}}{\gamma_3^{t+1}} < 9{,}45. \tag{26}$$

Таким образом, *на рынке олигополии с четырьмя агентами, из которых первые два действуют по Штакельбергу, другие два — по Курно, процессы* 3 *и* 4 *с диапазонами шагов* $\gamma_1^{t+1}, \gamma_2^{t+1} \in (0; 0{,}25]$ *и* $\gamma_3^{t+1}, \gamma_4^{t+1} \in (0; 0{,}4]$ сходятся к равновесию при любых начальных выпусках агентов $\left\{q_i^0, i \in N\right\}$, если начиная с некоторого момента t_0 выбираемые агентами величины шагов удовлетворяют условиям (26).

Если один из агентов, действующих по Штакельбергу, выбирает верхнюю границу своего диапазона (равную 0,25), то (26) будет выполнено, когда другой выбирает шаг больше 0,074. Если один из агентов, действующих по Курно, выбирает верхнюю границу диапазона (равную 0,4), то (26) будет выполнено, когда другой выбирает шаг больше 0,043.

Аналогичные условия сходимости процессов можно получить для рынков с произвольным числом агентов и лидеров по Штакельбергу, а также для произвольных диапазонов выбора агентами величин шагов.

Так, для того же примера рынка, но с максимально возможными для агентов диапазонами шагов $\gamma_i^{t+1} \in (0; 1]$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, условия типа (26) имеют вид $\frac{\gamma_1^{t+1}}{\gamma_2^{t+1}},\ \frac{\gamma_2^{t+1}}{\gamma_1^{t+1}} < 1{,}56$, $\frac{\gamma_3^{t+1}}{\gamma_4^{t+1}},\ \frac{\gamma_4^{t+1}}{\gamma_3^{t+1}} < 4$. В частности, если $\gamma_1^{t+1} = 1$, то $\gamma_2^{t+1} > 0{,}64$, если $\gamma_3^{t+1} = 1$, то $\gamma_4^{t+1} > 0{,}25$.

6. Заключение

Введение в модели динамических систем предположений об информированности взаимосвязанных агентов, реальных экономических ограничений и условий приводит к повышению адекватности, но и к усложнению моделей. С усложнением моделей более проблематичным становится аналитическое исследование. Для моделей рефлексивного коллективного поведения рассматривается один из возможных подходов к исследованию условий их сходимости к равновесию, основанный на использовании норм матриц перехода от от t-го к $(t+1)$-му моменту времени в процессах итерационного решения систем линейных алгебраических уравнений, а также на обобщении аналитических решений. Получены важные свойства норм. Проведены доказательства утверждений, позволяющих перенести результаты о сходимости для простых динамик на более сложные модели коллективного поведения. Полученные результаты проиллюстрированы для рефлексивных моделей олигополии с линейными функциями затрат агентов и спроса с реакцией агентов по Курно и Штакельбергу на действия окружения. Представлены новые результаты о сходимости процессов коллективного поведения в олигополии с произвольным числом лидеров по Штакельбергу.

Доказательство утверждения 1. Доказательство проведем от противного. Пусть $\tilde{x}^t \in \mathrm{Arg}\max\limits_{\|x^t\|=1} \left\|\tilde{B}^t\left(\lambda^{t+1}\right)x^t\right\|$ для некоторого произвольного набора параметров $\lambda_i^{t+1} \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $i \in N_c$; $\lambda_i^{t+1} \in \left[0; \frac{n}{1+n}\right]$, $i \in N_s$. Допустим, что $\left\|\tilde{B}^t\left(\lambda^{t+1}\right)\right\| > \left\|B^t\left(\lambda^{t+1}\right)\right\|$, т.е.

$$\sqrt{\sum_{i\in N_s\setminus N_s^t}\left[\tilde{x}_i^t - \lambda_i^{t+1}\left(\frac{\tilde{x}_i^t}{n} + \sum_{j\in N_s}\tilde{x}_j^t\right)\right]^2 + \sum_{i\in N_c\setminus N_c^t}\left[\tilde{x}_i^t - \lambda_i^{t+1}\left(\tilde{x}_i^t + \sum_{j\in N_c}\tilde{x}_j^t\right)\right]^2} > \\ > \left\|B^t\left(\lambda^{t+1}\right)\right\|.$$

Но тогда

$$\left(\sum_{i\in N_s\setminus N_s^t}\left[\tilde{x}_i^t - \lambda_i^{t+1}\left(\frac{\tilde{x}_i^t}{n} + \sum_{j\in N_s}\tilde{x}_j^t\right)\right]^2 + \sum_{i\in N_s^t}\left[\tilde{x}_i^t - \lambda_i^{t+1}\left(\frac{\tilde{x}_i^t}{n} + \sum_{j\in N_s}\tilde{x}_j^t\right)\right]^2 + \right.$$

$$\left.\sqrt{+ \sum_{i\in N_c\setminus N_c^t}\left[\tilde{x}_i^t - \lambda_i^{t+1}\left(\tilde{x}_i^t + \sum_{j\in N_c}\tilde{x}_j^t\right)\right]^2 + \sum_{i\in N_c^t}\left[\tilde{x}_i^t - \lambda_i^{t+1}\left(\tilde{x}_i^t + \sum_{j\in N_c}\tilde{x}_j^t\right)\right]^2}\right) > \\ > \left\|B^t\left(\lambda^{t+1}\right)\right\|,$$

означающее $\left\|B^t\left(\lambda^{t+1}\right)\tilde{x}^t\right\| > \left\|B^t\left(\lambda^{t+1}\right)\right\|$ при $\left\|\tilde{x}^t\right\| = 1$. Что противоречит определению нормы $\left\|B^t\right\|$.

Утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждения 3. Сначала докажем положение п. а.

Пусть i — произвольный агент и, для определенности, этот агент действует по Курно. Для агента с реакцией по Штакельбергу доказательство аналогично. По (23) имеем

$$f\left(\lambda_1^{t+1}, \ldots, \lambda_{i-1}^{t+1}, \alpha_i^{t+1}\vec{\lambda}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}, \lambda_{i+1}^{t+1}, \ldots, \lambda_n^{t+1}\right) =$$

$$= \sum_{k\in N_s}\left[x_k^t - \lambda_k^{t+1}\left(\frac{x_k^t}{n} + \sum_{j\in N_s}x_j^t\right)\right]^2 + \sum_{k\in N_c\setminus\{i\}}\left[x_k^t - \lambda_k^{t+1}\left(x_k^t + \sum_{j\in N_c}x_j^t\right)\right]^2 +$$

$$+ \left[x_i^t - \left(\alpha_i^{t+1}\vec{\lambda}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\right)\left(x_i^t + \sum_{j\in N_c}x_j^t\right)\right]^2 =$$

$$= \sum_{k\in N_s}\left[x_k^t - \lambda_k^{t+1}\left(\frac{x_k^t}{n} + \sum_{j\in N_s}x_j^t\right)\right]^2 + \sum_{k\in N_c\setminus\{i\}}\left[x_k^t - \lambda_k^{t+1}\left(x_k^t + \sum_{j\in N_c}x_j^t\right)\right]^2 +$$

$$+\left[\alpha_i^{t+1}\left(x_i^t-\vec{\lambda}_i^{t+1}\left(x_i^t+\sum_{j\in N_c}x_j^t\right)\right)+\beta_i^{t+1}\left(x_i^t-\overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\left(x_i^t+\sum_{j\in N_c}x_j^t\right)\right)\right]^2=$$

$$=\alpha_i^{t+1}\left\{\sum_{k\in N_s}\left[x_k^t-\lambda_k^{t+1}\left(\frac{x_k^t}{n}+\sum_{j\in N_s}x_j^t\right)\right]^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{k\in N_c\setminus\{i\}}\left[x_k^t-\lambda_k^{t+1}\left(x_k^t+\sum_{j\in N_c}x_j^t\right)\right]^2+\left[x_i^t-\vec{\lambda}_i^{t+1}\left(x_i^t+\sum_{j\in N_c}x_j^t\right)\right]^2\right\}+$$

$$+\beta_i^{t+1}\left\{\sum_{k\in N_s}\left[x_k^t-\lambda_k^{t+1}\left(\frac{x_k^t}{n}+\sum_{j\in N_s}x_j^t\right)\right]^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{k\in N_c\setminus\{i\}}\left[x_k^t-\lambda_k^{t+1}\left(x_k^t+\sum_{j\in N_c}x_j^t\right)\right]^2+\left[x_i^t-\overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\left(x_i^t+\sum_{j\in N_c}x_j^t\right)\right]^2\right\}-$$

$$-\alpha_i^{t+1}\beta_i^{t+1}\left\{\left[x_i^t-\vec{\lambda}_i^{t+1}\left(x_i^t+\sum_{j\in N_c}x_j^t\right)\right]^2+\left[x_i^t-\overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\left(x_i^t+\sum_{j\in N_c}x_j^t\right)\right]^2-\right.$$

$$\left.-2\left[x_i^t-\vec{\lambda}_i^{t+1}\left(x_i^t+\sum_{j\in N_c}x_j^t\right)\right]\cdot\left[x_i^t-\overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\left(x_i^t+\sum_{j\in N_c}x_j^t\right)\right]\right\}.$$

Здесь использовано равенство $\alpha_i^{t+1}\beta_i^{t+1}=\alpha_i^{t+1}-\left(\alpha_i^{t+1}\right)^2=\beta_i^{t+1}-\left(\beta_i^{t+1}\right)^2$. Поскольку в последних фигурных скобках выражение представляет собой развернутый квадрат разности двух чисел, получаем требуемое неравенство

$$f\left(\lambda_1^{t+1},\ldots,\lambda_{i-1}^{t+1},\alpha_i^{t+1}\vec{\lambda}_i^{t+1}+\beta_i^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_i^{t+1},\lambda_{i+1}^{t+1},\ldots,\lambda_n^{t+1}\right)\le$$

$$\le\alpha_i^{t+1}f\left(\lambda_1^{t+1},\ldots,\lambda_{i-1}^{t+1},\vec{\lambda}_i^{t+1},\lambda_{i+1}^{t+1},\ldots,\lambda_n^{t+1}\right)+$$

$$+\beta_i^{t+1}f\left(\lambda_1^{t+1},\ldots,\lambda_{i-1}^{t+1},\overleftarrow{\lambda}_i^{t+1},\lambda_{i+1}^{t+1},\ldots,\lambda_n^{t+1}\right).$$

Положение п. а доказано.

Справедливость положения п. б следует из равенства

$$f\left(\eta\vec{\lambda}^{t+1}+\mu\overleftarrow{\lambda}^{t+1}\right)=$$

$$=f\left(\eta\vec{\lambda}_1^{t+1}+\mu\overleftarrow{\lambda}_1^{t+1},\ldots,\eta\vec{\lambda}_i^{t+1}+\mu\overleftarrow{\lambda}_i^{t+1},\ldots,\eta\vec{\lambda}_n^{t+1}+\mu\overleftarrow{\lambda}_n^{t+1}\right)=$$

$$= \sum_{i \in N_s} \left[\eta \left(x_i^t - \vec{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right) + \mu \left(x_i^t - \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right) \right]^2 +$$

$$+ \sum_{i \in N_c} \left[\eta \left(x_i^t - \vec{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right) + \mu \left(x_i^t - \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right) \right]^2 =$$

$$= \eta \left\{ \sum_{i \in N_s} \left[x_i^t - \vec{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right]^2 + \sum_{i \in N_c} \left[x_i^t - \vec{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2 \right\} +$$

$$+ \mu \left\{ \sum_{i \in N_s} \left[x_i^t - \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right]^2 + \sum_{i \in N_c} \left[x_i^t - \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2 \right\} -$$

$$- \eta\mu \sum_{i \in N_s} \left\{ \left[x_i^t - \vec{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right] - \left[x_i^t - \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right] \right\}^2 -$$

$$- \eta\mu \sum_{i \in N_c} \left\{ \left[x_i^t - \vec{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right] - \left[x_i^t - \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right] \right\}^2 =$$

$$= \eta f(\vec{\lambda}^{t+1}) + \mu f(\overleftarrow{\lambda}^{t+1}) -$$

$$- \eta\mu \sum_{i \in N_s} \left\{ \left[x_i^t - \vec{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right] - \left[x_i^t - \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right] \right\}^2 -$$

$$- \eta\mu \sum_{i \in N_c} \left\{ \left[x_i^t - \vec{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right] - \left[x_i^t - \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right] \right\}^2 .$$

Здесь $\eta, \mu \in [0; 1]$ и $\eta + \mu = 1$.

Перейдем к доказательству положения п. в.

Доказательство проведем, основываясь на методе математической индукции.

По доказанному положению п. а для одного (первого) агента имеем

$$f\left(\alpha_1^{t+1} \vec{\lambda}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1} \overleftarrow{\lambda}_1^{t+1}, \lambda_2^{t+1}, \ldots, \lambda_n^{t+1} \right) \leq$$

$$\leq \alpha_1^{t+1} f\left(\vec{\lambda}_1^{t+1}, \lambda_2^{t+1}, \ldots, \lambda_n^{t+1} \right) + \beta_1^{t+1} f\left(\overleftarrow{\lambda}_1^{t+1}, \lambda_2^{t+1}, \ldots, \lambda_n^{t+1} \right).$$

Для двух (первых) агентов имеем

$$f\left(\alpha_1^{t+1} \vec{\lambda}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1} \overleftarrow{\lambda}_1^{t+1}, \alpha_2^{t+1} \vec{\lambda}_2^{t+1} + \beta_2^{t+1} \overleftarrow{\lambda}_2^{t+1}, \lambda_3^{t+1}, \ldots, \lambda_n^{t+1} \right) \leq$$

$$\leq \alpha_1^{t+1} f\left(\vec{\lambda}_1^{t+1}, \alpha_2^{t+1}\vec{\lambda}_2^{t+1} + \beta_2^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_2^{t+1}, \lambda_3^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right) +$$

$$+ \beta_1^{t+1} f\left(\overleftarrow{\lambda}_1^{t+1}, \alpha_2^{t+1}\vec{\lambda}_2^{t+1} + \beta_2^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_2^{t+1}, \lambda_3^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right) \leq$$

$$\leq \alpha_1^{t+1}\left[\alpha_2^{t+1} f\left(\vec{\lambda}_1^{t+1}, \vec{\lambda}_2^{t+1}, \lambda_3^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right) + \beta_2^{t+1} f\left(\vec{\lambda}_1^{t+1}, \overleftarrow{\lambda}_2^{t+1}, \lambda_3^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right)\right] +$$

$$+ \beta_1^{t+1}\left[\alpha_2^{t+1} f\left(\overleftarrow{\lambda}_1^{t+1}, \vec{\lambda}_2^{t+1}, \lambda_3^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right) + \beta_2^{t+1} f\left(\overleftarrow{\lambda}_1^{t+1}, \overleftarrow{\lambda}_2^{t+1}, \lambda_3^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right)\right].$$

Это подтверждает справедливость утверждения 3 для двух агентов. Пусть (24) имеет место для k (первых) агентов. Тогда

$$f\Big(\alpha_1^{t+1}\vec{\lambda}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_1^{t+1}, \dots, \alpha_k^{t+1}\vec{\lambda}_k^{t+1} + \beta_k^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_k^{t+1},$$

$$\alpha_{k+1}^{t+1}\vec{\lambda}_{k+1}^{t+1} + \beta_{k+1}^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_{k+1}^{t+1}, \lambda_{k+2}^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\Big) \leq$$

$$\leq \alpha_{k+1}^{t+1} f\Big(\alpha_1^{t+1}\vec{\lambda}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_1^{t+1}, \dots,$$

$$\alpha_k^{t+1}\vec{\lambda}_k^{t+1} + \beta_k^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_k^{t+1}, \vec{\lambda}_{k+1}^{t+1}, \lambda_{k+2}^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\Big) +$$

$$+ \beta_{k+1}^{t+1} f\Big(\alpha_1^{t+1}\vec{\lambda}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_1^{t+1}, \dots,$$

$$\alpha_k^{t+1}\vec{\lambda}_k^{t+1} + \beta_k^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_k^{t+1}, \overleftarrow{\lambda}_{k+1}^{t+1}, \lambda_{k+2}^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\Big) \leq$$

$$\leq \alpha_{k+1}^{t+1}\Bigg[\sum_{y_1 \in \left\{\alpha_1^{t+1}, \beta_1^{t+1}\right\}} \cdots \sum_{y_k \in \left\{\alpha_k^{t+1}, \beta_k^{t+1}\right\}} y_1 \cdot \ldots \cdot y_k \times$$

$$\times f\left(z_1^{t+1}, \dots, z_k^{t+1}, \vec{\lambda}_{k+1}^{t+1}, \lambda_{k+2}^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right)\Bigg] +$$

$$+ \beta_{k+1}^{t+1}\Bigg[\sum_{y_1 \in \left\{\alpha_1^{t+1}, \beta_1^{t+1}\right\}} \cdots \sum_{y_k \in \left\{\alpha_k^{t+1}, \beta_k^{t+1}\right\}} y_1 \cdot \ldots \cdot y_k \times$$

$$\times f\left(z_1^{t+1}, \dots, z_k^{t+1}, \overleftarrow{\lambda}_{k+1}^{t+1}, \lambda_{k+2}^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right)\Bigg] =$$

$$= \sum_{y_1 \in \left\{\alpha_1^{t+1}, \beta_1^{t+1}\right\}} \cdots \sum_{y_{k+1} \in \left\{\alpha_{k+1}^{t+1}, \beta_{k+1}^{t+1}\right\}} y_1 \cdot \ldots \cdot y_{k+1} \cdot f\left(z_1^{t+1}, \dots, z_{k+1}^{t+1}, \lambda_{k+2}^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right).$$

Показано, что (24) имеет место для первых $(k+1)$ агентов. Проведенные выкладки справедливы для любых, не только первых агентов.

Положение п. в доказано.

Положение п. г следует из (24) и того, что

$$\sum_{y_1 \in \left\{\alpha_1^{t+1}, \beta_1^{t+1}\right\}} \ldots \sum_{y_i \in \left\{\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1}\right\}} \ldots \sum_{y_n \in \left\{\alpha_n^{t+1}, \beta_n^{t+1}\right\}} y_1 \cdot \ldots \cdot y_i \cdot \ldots \cdot y_n = 1.$$

Докажем положение п. д. Имеем равенство

$$f\left(\alpha_1^{t+1}\vec{\lambda}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_1^{t+1}, \ldots, \alpha_i^{t+1}\vec{\lambda}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}, \ldots, \alpha_n^{t+1}\vec{\lambda}_n^{t+1} + \beta_n^{t+1}\overleftarrow{\lambda}_n^{t+1}\right) =$$

$$= \sum_{i\in N_s}\left[\alpha_i^{t+1}\left(x_i^t - \vec{\lambda}_i^{t+1}\left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j\in N_s} x_j^t\right)\right) + \beta_i^{t+1}\left(x_i^t - \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j\in N_s} x_j^t\right)\right)\right]^2 +$$

$$+ \sum_{i\in N_c}\left[\alpha_i^{t+1}\left(x_i^t - \vec{\lambda}_i^{t+1}\left(x_i^t + \sum_{j\in N_c} x_j^t\right)\right) + \beta_i^{t+1}\left(x_i^t - \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\left(x_i^t + \sum_{j\in N_c} x_j^t\right)\right)\right]^2 =$$

$$= \sum_{i\in N_s}\alpha_i^{t+1}\left[x_i^t - \vec{\lambda}_i^{t+1}\left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j\in N_s} x_j^t\right)\right]^2 + \sum_{i\in N_c}\alpha_i^{t+1}\left[x_i^t - \vec{\lambda}_i^{t+1}\left(x_i^t + \sum_{j\in N_c} x_j^t\right)\right]^2 +$$

$$+ \sum_{i\in N_s}\beta_i^{t+1}\left[x_i^t - \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j\in N_s} x_j^t\right)\right]^2 + \sum_{i\in N_c}\beta_i^{t+1}\left[x_i^t - \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\left(x_i^t + \sum_{j\in N_c} x_j^t\right)\right]^2 -$$

$$- \sum_{i\in N_s}\alpha_i^{t+1}\beta_i^{t+1}\left\{\left[x_i^t - \vec{\lambda}_i^{t+1}\left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j\in N_s} x_j^t\right)\right] - \left[x_i^t - \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j\in N_s} x_j^t\right)\right]\right\}^2 -$$

$$- \sum_{i\in N_c}\alpha_i^{t+1}\beta_i^{t+1}\left\{\left[x_i^t - \vec{\lambda}_i^{t+1}\left(x_i^t + \sum_{j\in N_c} x_j^t\right)\right] - \left[x_i^t - \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}\left(x_i^t + \sum_{j\in N_c} x_j^t\right)\right]\right\}^2.$$

Здесь использовано, что $\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1} \in [0;1]$, $\alpha_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} = 1$ и $\alpha_i^{t+1}\beta_i^{t+1} = \alpha_i^{t+1} - \left(\alpha_i^{t+1}\right)^2 = \beta_i^{t+1} - \left(\beta_i^{t+1}\right)^2$.

Из полученного равенства следует положение п. д. Положение п. д может быть также получено из (24). Утверждение 3 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. Leiden: CRC Press, 2014.
2. *Novikov D., Korepanov V., Chkhartishvili A.* Reflexion in Mathematical Models of Decision-Making // Int. J. Parallel Emerg. Distrib. Syst. 2018. V. 33. No. 3. P. 319–335.

3. *Cournot A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838).
4. *Stackelberg H.* Market Structure and Equilibrium: 1 st Edition. Translation into English, Basin, Urch&Hill. Springer, 2011. (Original 1934).
5. The Handbook of Experimental Economics / Ed. by Kagel J. and Roth A. Princeton: Princeton University Press, 1995.
6. *Wright J., Leyton-Brown K.* Beyond Equilibrium: Predicting Human Behavior in Normal Form Games // Proc. Conf. Associat. Advancement of Artificial Intelligence (AAAI-10), 2010. P. 461–473.
7. *Айзенберг Н.И., Зоркальцев В.И., Мокрый И.В.* Исследование нестационарных олигопольных рынков // Сиб. журн. индустр. мат. 2017. Т. 20. № 1. С. 11–20.
8. *Гераськин М.И., Чхартишвили А.Г.* Анализ игровых моделей рынка олигополии при ограничениях по мощности и конкурентоспособности агентов //АиТ. 2017. № 11. С. 105–121.

   Geras'kin M.I., Chkhartishvili A.G. Analysis of Game-Theoretic Models of an Oligopoly Market under Constrains on the Capacity and Competitiveness of Agents // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 11. P. 2025–2038.
9. *Опойцев В.И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.
10. *Малишевский А.В.* Качественные модели в теории сложных систем. М.: Наука, 1998.
11. *Kalashnikov V.V., Bulavsky V.A., Kalashnykova N.I.* Existence of the Nash-Optimal Strategies in the Meta-Game // Studies in Syst., Decision and Control. 2018. V. 100. P. 95–100.
12. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Коллективное поведение в модели Штакельберга в условиях неполной информации // АиТ. 2017. № 9. С. 91–105.

    Algazin G.I., Algazina D.G. Collective Behavior in the Stackelberg Model under Incomplete Information // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 9. P. 1619–1630.
13. *Дюсуше О.М.* Статическое равновесие Курно–Нэша и рефлексивные игры олигополии: случай линейных функций спроса и издержек // Эконом. журн. ВШЭ. 2006. № 1. С. 3–32.
14. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // АиТ. 2020. № 2. С. 115–133.

    Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 2. P. 345–359.
15. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером // АиТ. 2020. № 7. С. 113–128.

    Algazin G.I., Algazina D.G. Reflecxive Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 7. P. 1258–1270.
16. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.
17. *Белицкий Г.Р., Любич Ю.И.* Нормы матриц и их приложения. Киев: Наукова думка, 1984.
18. *Ueda M.* Effect of Information Asymmetry in Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality // Appl. Math. Comput. 2019. V. 362. 124535.
19. *Elsadany A.A.* Dynamics of a Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality Based on Relative Profit Maximization // Appl. Math. Comput. 2017. V. 294. P. 253–263.

20. *Askar S., Simos T.* Tripoly Stackelberg Game Model: One Leader Versus Two Followers // Appl. Math. Comput. 2018. V. 328. P. 301–311.

21. *Wu R., Van Gorder R.A.* Nonlinear Dynamics of Discrete Time Multi-Level Leader-Follower Games // Appl. Math. Comput. 2018. V. 320. P. 240–250.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Губко.

Поступила в редакцию 23.07.2020

После доработки 23.11.2021

Принята к публикации 24.12.2021