

Стохастические системы

© 2022 г. М.Е. ШАЙКИН, канд. техн. наук (shaykin36@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА ПО ВЫХОДНОМУ СИГНАЛУ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ТИПА

Важнейшей нерешенной задачей теории управления является задача оптимизации мультипликативной стохастической системы в классе регуляторов по выходному сигналу, наблюдаемому в шумах. Регулятор в цепи обратной связи должен быть допустимым, т.е. обеспечивать устойчивость замкнутой системы и гарантировать требуемый уровень подавления внешних возмущений, действующих на регулируемый объект. В статье в рамках стохастической теории H^2/H_∞ -управления при наличии помех решается задача анализа, т.е. нахождения условий существования допустимых регуляторов. Полученные результаты могут использоваться далее в задаче синтеза при условной оптимизации мультипликативной стохастической системы в классе допустимых регуляторов динамического типа.

Ключевые слова: H^2/H_∞ -теория управления, диффузионное уравнение Ито, индуцированная норма оператора, мультипликативная стохастическая система, регулируемый выходной сигнал, динамический регулятор по выходному сигналу.

DOI: 10.31857/S0005231022030059

1. Введение

Областью исследования в статье являются сложные стохастические системы, определенные векторными стохастическими дифференциальными уравнениями, при априорных ограничениях на класс регуляторов в цепи обратной связи от *наблюдаемого* выходного сигнала на вход регулируемого объекта. Цель статьи — получение условий разрешимости задачи о динамическом регуляторе в условиях действия внешних возмущений и шумов приборов, регистрирующих выходной сигнал объекта. Объект вырабатывает *регулируемый* выходной сигнал, и вредное влияние на этот сигнал внешнего возмущения тем сильнее, чем больше норма оператора передачи возмущения на регулируемый выход. Любая задача синтеза регулятора для заданного объекта состоит не только в том, чтобы минимизировать, например, энергетические затраты на регулирование, но прежде всего в том, чтобы выбором регулятора обеспечить

устойчивость замкнутой им системы и ограничить эффект вредного влияния внешнего возмущения на полезный регулируемый сигнал, поддерживая этот эффект в априори заданных пределах. Этим обстоятельством обусловлена важность задачи анализа условий, при которых такой, называемый *допустимым*, регулятор существует. Задача анализа, вообще актуальная для теории и практики управления и достаточно трудная сама по себе, особенно важна в стохастическом разделе H^2/H_∞ -теории, где она осложняется стохастической природой внешних возмущающих воздействий и шумов измерительных датчиков.

В рамках теории H^2/H_∞ -управления задача оптимизации естественно принимает характер теоретико-игрового взаимодействия природы и конструктора регулятора. Плодотворной взаимосвязи теории управления и теории игр должное внимание уделяется и в оптимизационных задачах H^2/H_∞ -управления. В теоретико-игровой постановке внешнее возмущение оказывается активным игроком, максимизирующим выбранный функционал потерь.

Классические теории управления LQR и LQG , для детерминизованных и гауссовских систем соответственно, можно называть теориями *безусловной* оптимизации. Современная H^2/H_∞ -теория является теорией *условной* оптимизации, осуществляемой на классе допустимых регуляторов, гарантирующих ограниченность заданным числом γ *индуцированной* нормы оператора L_{zv} передачи случайной функции $v(\cdot) \in L^2([0, T]; L^2(\Omega, R^l))$ внешнего возмущения v на случайную функцию $z(\cdot) \in L^2([0, T]; L^2(\Omega, R^m))$ регулируемого выхода z замкнутой системы. Здесь $[0, T)$ — интервал значений параметра $t > 0$ на конечном ($T < \infty$) или бесконечном ($T = \infty$) горизонте; $L^2([0, T]; D)$ — пространство квадратично интегрируемых функций переменной t со значениями в пространстве D ; $L^2(\Omega, R^m)$ — пространство m -значных случайных величин на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с σ -алгеброй $\mathcal{F}$ и вероятностной мерой P . Индуцированная норма оператора L_{zv} (в данном случае на горизонте $R_+ := [0, \infty)$) определяется по формуле

$$\|L_{zv}\|_\infty = \sup_{v \in L^2(R_+; L^2(\Omega, R^l)), v \neq 0} \frac{\|z(\cdot)\|_{L^2(R_+; L^2(\Omega, R^m))}}{\|v(\cdot)\|_{L^2(R_+; L^2(\Omega, R^l))}}.$$

Норма же на пространстве $\mathcal{L}^2 := L^2([0, T]; L^2(\Omega, R^k))$ случайных процессов $y(\cdot) = (y(t))_{t \in [0, T]}$ определяется интегралом $\int_0^T E(\|y(t)\|^2) dt < \infty$, где E — оператор вычисления математического ожидания. Не существует аналитического способа вычисления индуцированной нормы в общем случае, но возможно компьютерное вычисление ее с заданной точностью.

Стохастическая H^2/H_∞ -теория имеет дело со стохастическими объектами, описываемыми стохастическими уравнениями Ито. В уравнении Ито вида

$$(1.1) \quad \begin{aligned} dx(t) &= \varphi(t)dt + \Phi(t)dW(t), \quad \varphi = Ax + B_1v + B_2u, \\ \Phi dW &= A_0x dw_0 + B_{01}v dw_1 + B_{02}u dw_2, \end{aligned}$$

где x , v , u — векторы состояния, внешнего возмущения и сигнала управления, диффузионная компонента ΦdW имеет специфическое строение, дающее основание называть уравнение *мультипликативным* по каждой из этих трех переменных. Важные результаты по H^2/H_∞ -теории мультипликативных систем получены в публикациях [1–9]. С идеями H^2/H_∞ -теории связаны и задачи робастного управления. В детерминированном случае эти связи прослеживаются в [10–12].

К теме синтеза регуляторов по *вектору состояния* для мультипликативных объектов относятся публикации [13, 14]. Важнейшей особенностью принятого в них метода решения является теоретико-игровая формулировка задачи управления с ее понятием равновесной по Нэшу пары (u^*, v^*) точек, определяющих оптимальное управление u^* при наименее благоприятном внешнем возмущении v^* [15]. Нахождение равновесной пары сводится к решению системы из двух *связанных* матричных уравнений Риккати, но не классических, квадратичных по искомым переменным, а скорее дробно-рациональных по искомым переменным, и потому названных *обобщенными* уравнениями Риккати. Настоящая статья, тоже для стохастического объекта, имеет целью выяснение структуры регулятора, но не вида $u(t) = \mathcal{K}(t, x(\cdot)|_0^t)$, как в [13, 14], а регулятора по выходному сигналу $u(t) = \mathcal{K}(t, y(\cdot)|_0^t)$, $t > 0$. Аналогичная задача для менее общего объекта, мультипликативного только по векторам состояния и внешнего возмущения, рассматривалась в [7]. Для удобства читателя в п. 1 Приложения приведен пример детерминированной LQG/H_∞ -задачи, решение которой имеет структуру оптимального наблюдателя $\dot{\hat{x}} = A_k \hat{x} + B_k y$, совмещенного с оптимальным регулятором $\hat{u} = C_k \hat{x}$ по вектору состояния $\hat{x}(\cdot)$ [16]. Структура допустимого регулятора вида $u(t) = \mathcal{K}(t, \bar{x}(\cdot)|_0^t)$, где $\bar{x} = (x, \hat{x})$ — вектор состояния расширенной замкнутой системы, является более общей. Регулятор по выходу $u(t) = \mathcal{K}(t, y(\cdot)|_0^t)$, рассмотренный в [17], является еще более общим.

Изложим содержание статьи по разделам. В разделе 2 дана постановка задачи. В разделе 3 получено стохастическое уравнение объекта, замкнутого динамическим регулятором. В разделах 4 и 5 получено обобщенное уравнение Риккати, коэффициенты которого подсчитаны с помощью применения формулы Ито замены переменной. Необходимое условие допустимости динамического регулятора получено в разделе 6, в разделе 7 — достаточное условие. Два приложения, краткое заключение и список литературы завершают статью.

2. Постановка задачи анализа

Задача оптимизации мультипликативных систем является разделом теории H^2/H_∞ -управления, обобщающей LQ -теорию синтеза регуляторов для линейных систем по квадратическому критерию. От внешнего возмущения v в уравнении Ито (1.1) зависят как снос, так и диффузионная компонента. Предполагается, что все винеровские процессы $w_i(t)$, $i = 0, 1, 2$, — скалярные, что не является ограничением. Не является ограничением и зависимость сноса $\varphi(t)$ и диффузии $\Phi(t)dW(t)$ от одного и того же возмущения $v(t)$. Наконец,

процессы $w_i(t)$ — статистически зависимые, не обязательно с единичной матрицей интенсивности. Используя общий формализм H^2/H_∞ -теории и специальные обозначения, введенные в [18], удастся свести задачу с несколькими возмущениями к задаче об объекте с одним мультипликативным векторным возмущением.

Как уже отмечалось в разделе 1, с задачей оптимизации при требовании одновременного подавления внешних возмущений ассоциируется дифференциальная теоретико-игровая задача, позволяющая найти пару v^* , u^* стратегий (наихудшее возмущение, наилучшее управление). Для постановки задачи о дифференциальной игре рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$(2.1) \quad \Sigma : \begin{cases} dx(t) = (Ax(t) + B_1v(t) + B_2u(t))dt + A_0x(t)dw_0(t) + \\ + B_{01}v(t)dw_1(t) + B_{02}u(t)dw_2(t), \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ z(t) = C_1x(t) + D_{11}v(t) + D_{12}u(t), \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}v(t), \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Уравнение описывает стохастический объект Σ . В этом объекте векторы u , v — входные сигналы, представляющие управление и внешнее возмущение; векторы z , y — сигналы выходные, называемые соответственно регулируемым и наблюдаемым выходом. Регулятором в цепи обратной связи является детерминированная динамическая система с вектором состояния $\hat{x}$, заданная уравнениями

$$(2.2) \quad d\hat{x}(t) = A_k\hat{x}(t)dt + B_k y(t)dt, \quad u(t) = C_k\hat{x}(t) + D_k y(t)$$

с матричными коэффициентами, пока не определенными. См. п. 2 Приложения.

Теоретико-игровая формулировка задачи управления предполагает задание пары функционалов $J_1^T(u, v)$, $J_2^T(u, v)$ и нахождение пары функций u^* , v^* таких, что (i) $J_1^T(u^*, v^*) \leq J_1^T(u, v^*)$ на траекториях $x_t = x_t(x_0, u, v^*)$ уравнения Σ и (ii) $J_2^T(u^*, v^*) \geq J_2^T(u^*, v)$ на его траекториях $x_t = x_t(x_0, u^*, v)$. Такая пара (u^*, v^*) , если она существует, и является равновесной по Нэшу точкой теоретико-игровой задачи. Можно сказать, выражаясь кратко, что определение функции $v^*(\cdot)$ есть задача анализа, а определение $u^*(\cdot)$ — задача синтеза. В более подробном изложении задача анализа состоит в нахождении условий допустимости регулятора и преобразования их к виду, удобному для получения обобщенного матричного уравнения Риккати, через решение которого выражается искомое представление возмущения v^* . Условие допустимости для задачи на конечном горизонте $t \in [0, T]$ вытекает из требования $\|L_{zv}\|_\infty < \gamma$ к замкнутой системе, которому должен удовлетворять регулятор. Конечная цель анализа состоит в описании класса допустимых регуляторов. На бесконечном горизонте $t \in [0, \infty)$ к требованию ограниченности $\|L_{zv}\|_\infty < \gamma$ добавляется условие устойчивости замкнутой системы. В этой статье ограничиваемся случаем конечного горизонта $T < \infty$.

3. Уравнение объекта, замкнутого динамическим регулятором

Вектор состояния системы, замкнутой регулятором, обозначим через $\bar{x}$, полагая $\bar{x}' := (x', \hat{x}')$. Стохастическое уравнение для $\bar{x}$ получается как результат некоторых громоздких, но элементарных вычислений, и нетрудно убедиться, что функции $t \mapsto \bar{x}(t)$, $t \mapsto z(t)$ должны удовлетворять уравнениям

$$(3.1) \quad \Sigma_2 : \begin{cases} d\bar{x}(t) = A_{cl}\bar{x}(t) dt + B_{cl}v(t) dt + A_{cl}^0\bar{x}(t)dw_0(t) + \\ + B_{cl}^0v(t)dw_1(t) + A_{cl}^1\bar{x}(t) dw_2(t) + B_{cl}^1v(t) dw_2(t), \\ z(t) = C_{cl}\bar{x}(t) + D_{cl}v(t), \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Непосредственно устанавливаются формулы, выражающие коэффициенты уравнений замкнутой системы Σ_2 . Прежде всего заметим, что

$$\begin{aligned} u(t) &= C_k\hat{x}(t) + D_k(C_2x(t) + D_{21}v(t)), \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}v(t) + D_{12}(D_kC_2x(t) + C_k\hat{x}(t) + D_kD_{21}v(t)), \end{aligned}$$

откуда $z(t) = C_{cl}\bar{x}(t) + D_{cl}v(t)$, где

$$(3.2) \quad C_{cl} = [C_1 + D_{12}D_kC_2, D_{12}C_k], \quad D_{cl} = D_{11} + D_{12}D_kD_{21}$$

(здесь C_{cl} — блочная 1×2 матрица). Далее получаем, что

$$(3.3) \quad A_{cl}^1 = B_{02} \begin{pmatrix} D_kC_2 & O \\ O & C_k \end{pmatrix}, \quad B_{cl}^0 = \begin{pmatrix} B_{01} \\ O \end{pmatrix}, \quad B_{cl}^1 = B_{02} \begin{pmatrix} D_kD_{21} \\ O \end{pmatrix}.$$

Блочные матрицы A_{cl} , A_{cl}^0 , B_{cl}^0 , B_{cl} равны:

$$\begin{aligned} A_{cl} &= \begin{pmatrix} A + B_2D_kC_2 & B_2C_k \\ B_kC_2 & A_k \end{pmatrix}, \quad A_{cl}^0 = \begin{pmatrix} A_0 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \\ B_{cl}^0 &= \begin{pmatrix} B_{01} \\ O \end{pmatrix}, \quad B_{cl} = \begin{pmatrix} B_1 + B_2D_kD_{21} \\ B_kD_{21} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрицы A_{cl} , B_{cl} , C_{cl} , D_{cl} получают представление через матрицу

$$M_k = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}$$

параметров динамического регулятора. Соответствующие формулы имеют вид аффинных относительно M_k соотношений

$$(3.4) \quad A_{cl} = A^0 + B^I M_k C^I, \quad B_{cl} = B^0 + B^I M_k D_{21}^0,$$

$$(3.5) \quad C_{cl} = C^0 + D_{12}^0 M_k C^I, \quad D_{cl} = D_{11} + D_{12}^0 M_k D_{21}^0$$

с матричными коэффициентами

$$(3.6) \quad \begin{cases} A^0 = \begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix}, & B^0 = \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix}, & C^0 = (C_1, O), & D_{12}^0 = (O, D_{12}), \\ B^I = \begin{pmatrix} O & B_2 \\ I & O \end{pmatrix}, & C^I = \begin{pmatrix} O & I \\ C_2 & O \end{pmatrix}, & D_{21}^0 = \begin{pmatrix} O \\ D_{21} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Стохастический объект Σ_2 является здесь мультипликативным не только по векторам состояния и внешнего возмущения, но и по вектору управления; а на вход регулятора подается теперь не вектор состояния объекта, а его выходной сигнал $y(\cdot)$, см. (2.1), измеряемый в шумах; наконец, регулятор берется не безынерционным, а динамическим (2.2) с вектором внутреннего состояния $\hat{x}$, определяемым некоторым дифференциальным уравнением.

4. Применение формулы Ито замены переменной

Дальнейшие преобразования имеют целью получить обобщенное уравнение Риккати, ассоциированное с системой (3.1) и функционалом $v \rightarrow J_2^T(u^*, v)$, которое позволит представить наихудшее возмущение v^* через решение уравнения Риккати. Эти преобразования связаны с применением формулы Ито замены переменной (точнее, следствия из формулы Ито) в стохастическом исчислении. Если

$$dx(t) = \varphi(t)dt + \Phi(t)dw(t)$$

— уравнение состояния и L_s — дифференциальный оператор вида

$$(L_s f)(t, x) = \partial_t f(t, x)\varphi(s, x) + 1/2 \operatorname{tr} (\partial_{\bar{x}\bar{x}}^2 f(t, \bar{x})\nu(t)),$$

где $\nu(t)dt = \operatorname{var}(\Phi(t, \bar{x}(t))dw(t)|\bar{x}(t))$, то согласно формуле Ито имеет место интегральное соотношение [19–21]

$$(4.1) \quad \mathbb{E}f(t, \bar{x}(t)) - \mathbb{E}f(0, \bar{x}(0)) = \mathbb{E} \int_0^t (\partial/\partial s + L_s)f(s, \bar{x}(s))ds,$$

где $\mathbb{E}$ — оператор осреднения. В рассматриваемом здесь конкретном случае функции f в виде квадратичной формы $f(t, \bar{x}) = \langle \bar{x}, P(t)\bar{x} \rangle$ и уравнения Ито (3.1), представленного в интегральном виде

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \bar{x}(t) = & \bar{x}(0) + \int_0^t (A_{cl}\bar{x}(s) + B_{cl}v(s))ds + \\ & + \int_0^t [A_{cl}^0\bar{x}(s) \ B_{cl}^1v(s)]d\begin{pmatrix} w_0(s) \\ w_2(s) \end{pmatrix} + \int_0^t [A_{cl}^1\bar{x}(s) \ B_{cl}^0v(s)]d\begin{pmatrix} w_2(s) \\ w_1(s) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

сумму подынтегральных диффузионных компонент в (4.2) запишем в виде $\Phi dW := \Phi_1 dW_1 + \Phi_2 dW_2$, где $W_1 = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_2 \end{pmatrix}$, $W_2 = \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$. Пусть $Q_{ij}dt = E[dW_i dW_j']$, $i, j = 1, 2$, — матрицы 2×2 и

$$(4.3) \quad \Phi_1 = [A_{cl}^0 \bar{x} \quad B_{cl}^1 v], \quad \Phi_2 = [A_{cl}^1 \bar{x} \quad B_{cl}^0 v].$$

Обозначим матрицы интенсивности винеровских процессов через

$$q_1 := Q_{11} = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{02} \\ q_{02} & q_{22} \end{pmatrix}, \quad q_2 := Q_{22} = \begin{pmatrix} q_{22} & q_{12} \\ q_{12} & q_{11} \end{pmatrix}, \quad Q_{12} = \begin{pmatrix} q_{02} & q_{01} \\ q_{22} & q_{12} \end{pmatrix}.$$

Подынтегральная функция в (4.1) принимает вид

$$(4.4) \quad (\partial/\partial s + L_s)f(s, \bar{x}(s)) = \langle \bar{x}(s), \dot{P}(s)\bar{x}(s) \rangle + \\ + 2\langle P(s)\bar{x}(s), A\bar{x}(s) + B_1 v(s) \rangle + 1/2 \operatorname{tr}\{2P(s)\nu(s)\},$$

где

$$\nu(s)ds = \operatorname{var}(\Phi_1(s)dW_1(s) + \Phi_2(s)dW_2(s)|\bar{x}(s)) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Phi_i(s)Q_{ij}\Phi_j'(s).$$

В правой части (4.4) первое слагаемое есть квадратичная форма переменной $\bar{x}(s)$ и $\dot{P}(s)$ — матрица этой формы; второе слагаемое — квадратичная форма на пространстве значений пары переменных $(\bar{x}(s), v(s))$. Вычислим третье слагаемое $\operatorname{tr}\{P(s)\nu(s)\}$.

Для первого слагаемого (при $i = j = 1$) в двойной сумме имеем

$$(4.5) \quad \operatorname{tr}\{\Phi_1'(s)P(s)\Phi_1(s)q_1(s)\} = \\ = \operatorname{tr}\left\{\begin{pmatrix} \bar{x}'(s)(A_{cl}^0)' \\ v'(s)(B_{cl}^1)' \end{pmatrix}P(s)\begin{bmatrix} A_{cl}^0 \bar{x} & B_{cl}^1 v(s) \end{bmatrix}q_1(s)\right\} = \\ = \left\langle \begin{pmatrix} \bar{x}(s) \\ v(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{00}(A_{cl}^0)'P(s)A_{cl}^0 & q_{02}(A_{cl}^0)'P(s)B_{cl}^1 \\ q_{02}(B_{cl}^1)'P(s)A_{cl}^0 & q_{22}(B_{cl}^1)'P(s)B_{cl}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Аналогично

$$(4.6) \quad \operatorname{tr}\{\Phi_2'(s)P(s)\Phi_2(s)q_2(s)\} = \\ = \operatorname{tr}\left\{\begin{pmatrix} \bar{x}'(s)(A_{cl}^1)' \\ v'(s)(B_{cl}^0)' \end{pmatrix}P(s)\begin{bmatrix} A_{cl}^1 \bar{x} & B_{cl}^0 v(s) \end{bmatrix}q_2(s)\right\} = \\ = \left\langle \begin{pmatrix} \bar{x}(s) \\ v(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{22}(A_{cl}^1)'P(s)A_{cl}^1 & q_{12}(A_{cl}^1)'P(s)B_{cl}^0 \\ q_{12}(B_{cl}^0)'P(s)A_{cl}^1 & q_{11}(B_{cl}^0)'P(s)B_{cl}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Продолжая вычисления, имеем (при $i = 1, j = 2$)

$$\begin{aligned}
 (4.7) \quad \text{tr} \{ \Phi_2'(s) P(s) \Phi_1(s) Q_{12}(s) \} &= \\
 &= \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} \bar{x}'(s)(A_0^1)' \\ v'(s)(B_{cl}^0)' \end{pmatrix} P(s) \begin{bmatrix} A_{cl}^0 \bar{x} & B_{cl}^1 v(s) \end{bmatrix} Q_{12}(s) \right\} = \\
 &= \left\langle \begin{pmatrix} \bar{x}(s) \\ v(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{02}(A_{cl}^1)' P(s) A_{cl}^0 & q_{22}(A_{cl}^1)' P(s) B_{cl}^1 \\ q_{01}(B_{cl}^0)' P(s) A_{cl}^0 & q_{12}(B_{cl}^0)' P(s) B_{cl}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \right\rangle
 \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned}
 (4.8) \quad \text{tr} \{ \Phi_1'(s) P(s) \Phi_2(s) q_2(s) \} &= \\
 &= \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} \bar{x}'(s)(A_{cl}^0)' \\ v'(s)(B_{cl}^1)' \end{pmatrix} P(s) \begin{bmatrix} A_{cl}^1 \bar{x} & B_{cl}^0 v(s) \end{bmatrix} Q_{21}(s) \right\} = \\
 &= \left\langle \begin{pmatrix} \bar{x}(s) \\ v(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{02}(A_{cl}^0)' P(s) A_{cl}^1 & q_{22}(A_{cl}^0)' P(s) B_{cl}^0 \\ q_{01}(B_{cl}^1)' P(s) A_{cl}^1 & q_{12}(B_{cl}^1)' P(s) B_{cl}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Сумму четырех блочных 2×2 матриц в формулах (4.5)–(4.8) обозначим через $\mathcal{S}(P)$. Блочные элементы S_{ij} этой суммарной матрицы равны

$$\begin{aligned}
 (4.9) \quad S_{11} &= q_{00}(A_{cl}^0)' P(s) A_{cl}^0 + q_{02}(A_{cl}^0)' P(s) A_{cl}^1 + q_{02}(A_{cl}^1)' P(s) A_{cl}^0 + \\
 &\quad + q_{22}(A_{cl}^1)' P(s) A_{cl}^1, \\
 S_{12} &= q_{01}(A_{cl}^0)' P(s) B_{cl}^0 + q_{12}(A_{cl}^1)' P(s) B_{cl}^0 + q_{02}(A_{cl}^0)' P(s) B_{cl}^1 + \\
 &\quad + q_{22}(A_{cl}^1)' P(s) B_{cl}^1, \\
 S_{22} &= q_{11}(B_{cl}^0)' P(s) B_{cl}^0 + q_{12}(B_{cl}^0)' P(s) B_{cl}^1 + q_{12}(B_{cl}^1)' P(s) B_{cl}^0 + \\
 &\quad + q_{22}(B_{cl}^1)' P(s) B_{cl}^1
 \end{aligned}$$

и, разумеется, $S_{21} = S_{12}'$.

В правой части (4.4) последний член, как и второй, тоже есть квадратичная форма на пространстве переменных $(\bar{x}, v)$, и их сумма задана матрицей $\mathcal{D}(P) + \mathcal{S}(P)$, где $\mathcal{D}(P)$ – матрица второй квадратичной формы в (4.4). Полученные формулы используются при выводе обобщенного уравнения Риккати в разделе 6.

5. Функционал потерь в задаче анализа

Проверка условия $\|L_{zv}\|_\infty < \gamma$ в требовании допустимости решения была бы простой, если бы существовал явный способ вычисления индуцированной нормы оператора L_{zv} . Однако такого способа не существует. Проверку

условия $\|L_{zv}\|_\infty < \gamma$ без вычисления нормы $\|L_{zv}\|_\infty$ можно осуществить, привлекая к рассмотрению функционал

$$(5.1) \quad J_2^T(u^*, v) = \mathbb{E} \int_0^T (\gamma^2 v'(t)v(t) - z'(t)z(t)) dt$$

при фиксированном $u = u^*$. Этот функционал — квадратичный, но не знакоопределенный, и для него существует представление, удобное для последующего анализа:

$$(5.2) \quad J_2^T(u^*, v) = \mathbb{E} \langle \bar{x}(0), P(0)\bar{x}(0) \rangle - \mathbb{E} \langle \bar{x}(T), P(T)\bar{x}(T) \rangle + \\ + \mathbb{E} \int_0^T \left(\langle \bar{x}(t), \dot{P}(t)\bar{x}(t) \rangle + \left\langle \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \mathcal{M}(\gamma, P(t)) \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \right\rangle \right) dt,$$

где $\mathcal{M}(\gamma, P) := \mathcal{S}(P) + \mathcal{D}(P) + \mathcal{C}$. Здесь

$$(5.3) \quad \mathcal{D}(P) = \begin{pmatrix} PA_{cl} + A'_{cl}P & PB_{cl} \\ B'_{cl}P & O \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} -C'_{cl}C_{cl} & -C'_{cl}D_{cl} \\ -D'_{cl}C_{cl} & \gamma^2 I - D'_{cl}D_{cl} \end{pmatrix},$$

а матрица $\mathcal{S}(P)$ определена своими блоками (4.9) в разделе 4.

Важность функционала J_2^T в H_∞ -теории состоит в том, что с его помощью можно дать необходимое условие допустимости регулятора. Согласно лемме 2.10 из публикации [7] из условия $\|L_{zv}\|_\infty < \gamma$ (и требования внутренней устойчивости системы, если последняя рассматривается на бесконечном горизонте) вытекает неравенство $J_2^T(v) \geq -c|x(0)|^2$ для некоторого регулятора K и некоторого числа $c > 0$ при любых $v \in L^2[0, T]$ ($x(0)$ — произвольное начальное условие для уравнения состояния системы). Это неравенство в случае стационарной системы используется в [7] при доказательстве важного характеристического свойства индуцированной нормы оператора L_{zv} . Именно: для любого числа $\gamma > 0$ равносильны утверждения (i) $\|L_{zv}\|_\infty < \gamma$ и (ii) существует матричная функция $P(\cdot) < 0$ такая, что $\mathcal{M}(P) > 0$. Матричное обобщенное уравнение Риккати, которому удовлетворяет функция $P(t)$, выводится далее в разделе 6.

6. Обобщенное уравнение Риккати

Из исходной системы Σ , см. (2.1), в разделе 3 была получена система (3.1), обозначенная через Σ_2 . В системе Σ_2 нет в явном виде сигнала $u(t)$, но есть внешнее возмущение $v(t)$. Для систем такого вида в H_2 -теории стандартным является критерий $J_2^T(u, v)$ в (5.1), неявно зависящий от u , где в формуле для $z(t)$, приведенной в (2.1), полагают $D_{12} = 0$. Заметим, что система Σ_2 в (3.1) — такого именно вида. Таким образом, для системы Σ_2 можно в силу (3.2) принять, что

$$(6.1) \quad J_2^T(u^*, v) = \mathbb{E} \int_0^T (\gamma^2 I - (C_{cl}\bar{x}(t) + D_{cl}v(t))'(C_{cl}\bar{x}(t) + D_{cl}v(t))) dt.$$

Функционал $J_2^T(u, v)$, квадратичный по исходным переменным x, v , остается квадратичным и по новым переменным $\bar{x}, v$. Далее, решая LQ -задачу вычисления экстремального значения v^* переменной v , воспользуемся одним простым тождеством, применявшимся в [14]. Приведем его здесь. Рассмотрим представление критерия $J_2^T(u^*, v)$ в виде (5.1), считая, что $\bar{x}(t)$ в подынтегральном выражении есть решение уравнения (3.1), полученное при фиксированном $u = u^*$.

Лемма. Квадратичная форма с матрицей $\mathcal{M}(\gamma, P(t))$, т.е. сумма

$$\langle \bar{x}, M_{11}\bar{x} \rangle + \langle \bar{x}, M_{12}v \rangle + \langle v, M_{21}\bar{x} \rangle + \langle v, M_{22}v \rangle,$$

записывается в виде

$$(6.2) \quad \langle \bar{x}, (M_{11} + M_{12}F)\bar{x} \rangle + \langle v - F\bar{x}, M_{22}(v - F\bar{x}) \rangle,$$

где матрица F определяется соотношением $M_{21} + M_{22}F = 0$. Если M_{22} — неособенная матрица, то $F = -M_{22}^{-1}M_{21}$ и $v^* = F\bar{x}$ — экстремальная точка функционала $J_2^T(u^*, v)$.

Утверждение леммы относительно $v^*(t)$ справедливо при фиксированном $u = u^*$, но оно верно при любом допустимом управлении $u(\cdot)$, обеспечивающем устойчивость замкнутой системы и ограниченность заданным числом γ индуцированной нормы оператора L_{zv} на классе функций $v(\cdot)$ с интегрируемым квадратом. Обозначения $\mathcal{M}(\gamma, P)$, M_{ij}^γ , введенные выше, естественны, поскольку от γ зависит матрица $M_{22}^\gamma = \gamma^2 I + S_{22}(P) - D'_{cl}D_{cl}$. Из леммы следует, что

$$(6.3) \quad v^* = -(\gamma^2 I + S_{22}(P) - D'_{cl}D_{cl})^{-1} (B'_{cl}P + S_{21}(P) - D'_{cl}C_{cl}) \bar{x},$$

если матрица $M_{22}^\gamma(P)$ обратима. Согласно лемме при $v = F\bar{x}$ в (6.2) матричная функция $P(t)$ определяется как решение матричного дифференциального уравнения

$$(6.4) \quad \dot{P} + M_{11}^\gamma(P) - M_{12}^\gamma(P)(M_{22}^\gamma)^{-1}(P)M_{21}^\gamma(P) = 0, \quad P(T) = 0, \quad t \in [0, T].$$

В подробной записи имеем

$$(6.5) \quad -\dot{P} = PA_{cl} + A'_{cl}P + S_{11}^\gamma(P) - C'_{cl}C_{cl} - \\ - (PB_{cl} + S_{12}(P) - C'_{cl}D_{cl})(\gamma^2 I + S_{22}(P) - D'_{cl}D_{cl})^{-1}(B'_{cl}P + S_{21}(P) - D'_{cl}C_{cl}).$$

Начальным условием является $P(T) = 0$. Функции $S_{ij}(P)$, определенные в (4.9), линейно зависят от P .

Полученными результатами исчерпывается формальная проблема анализа, если решение обобщенного матричного дифференциального уравнения Риккати (6.5) для $P(t)$ существует. Следующий этап — это проблема *существования* решения уравнения (6.5), т.е. определения условий допустимости динамического регулятора вида (2.2).

7. Условия допустимости регулятора

В теории управления с безынерционным регулятором по вектору состояния задача определения структуры оптимального регулятора ставится как оптимизационная с применением критерия $J_1^T(u, v)$ при фиксированном значении v^* наименее благоприятного возмущения v . В рассматриваемом случае структура регулятора уже предопределена уравнениями в (2.2), и только значения матричных параметров следует определить исходя из условия допустимости регулятора такой структуры. Критерий допустимости сформулируем как условие существования точки *минимума* функционала $(-1)J_2^T(v)$, квадратичного, но не знакоположительного. Предполагаем заданным значение параметра $\gamma > 0$, а функционал $J_2^T(v)$ – представленным в виде (4.2) с матрицей $\mathcal{M}(\gamma, P) = \mathcal{S}(P) + \mathcal{D}(P) + \mathcal{C}$ подынтегральной квадратичной формы. Как уже отмечалось в разделе 5, условие допустимости $\|L_{zv}\|_\infty < \gamma$ равносильно существованию отрицательно определенной функции $P(t) < 0$ такой, что $\mathcal{M}(\gamma, P(t)) > 0$ для всех $t \in [0, T]$. Для последующего удобно записать условие $\mathcal{M}(\gamma, P) > 0$ в эквивалентной форме, заменив блочно-диагональную матрицу $\text{diag}\{\mathcal{M}(P), I\}$ блочной 3×3 матрицей $T\mathcal{N}(P)T' > 0$, где

$$\mathcal{N}(P) = \begin{pmatrix} PA_{cl} + A'_{cl}P + S_{11} & PB_{cl} + S_{12} & C'_{cl} \\ B'_{cl}P + S_{21} & \gamma^2 I + S_{22} & D'_{cl} \\ C_{cl} & D_{cl} & I \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} I & O & -C'_{cl} \\ O & I & -D'_{cl} \\ O & O & I \end{pmatrix}.$$

Подставим в матрицу $\mathcal{N}(P)$ выражения для коэффициентов $A_{cl}, B_{cl}, \dots$, полученные в (3.4). Тогда для блоков-подматриц N_{ij} неотрицательно определенной матрицы $\mathcal{N}(P)$ получим формулы:

$$(7.1) \quad \begin{aligned} N_{11} &= P(A^0 + B^I M_k C^I) + (A^0 + B^I M_k C^I)' P + S_{11}, \\ N_{12} &= P(B^0 + B^I M_k D_{21}^0 + S_{12}), \quad N_{13} = (C^0 + D_{12}^0 M_k C^I)', \\ N_{22} &= \gamma^2 I + S_{22}, \quad N_{23} = (D_{11} + D_{12}^0 M_k D_{21}^0)', \quad N_{33} = I. \end{aligned}$$

Представим матрицу $\mathcal{N}(P)$ в виде суммы матрицы $\mathcal{H}$, от M_k не зависящей, и двух матриц, линейно зависящих от M_k . Получим сумму $\mathcal{H} + \mathcal{Q}' M'_k \mathcal{R} + \mathcal{R}' M_k \mathcal{Q}$ с некоторыми матрицами $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$ и неотрицательно определенной матрицей $\mathcal{H}$. Согласно полученному в [7] стохастическому обобщению *леммы о проекции* из теории линейных матричных неравенств (см., например, [6]) линейное матричное неравенство

$$(7.2) \quad \mathcal{H} + \mathcal{Q}' M'_k \mathcal{R} + \mathcal{R}' M_k \mathcal{Q} > O$$

имеет решение M_k тогда и только тогда, когда матрица $\mathcal{H}$ является положительно определенной на нулевых подпространствах $\ker \mathcal{Q}$ и $\ker \mathcal{R}$ матриц $\mathcal{Q}, \mathcal{R}$.

Лемма о проекции дает необходимое и достаточное условие выполнимости условия $\|L_{zv}\|_\infty < \gamma$. Условие формулируется не на языке теории матричных дифференциальных уравнений, а на языке нелинейных матричных

неравенств. Лемма не только решает вопрос об условиях допустимости регулятора M_k , но и позволяет вычислить значения A_k, B_k, C_k, D_k параметров регулятора, если они неизвестны. Далее в п. 2 Приложения приводится частное решение задачи *идентификации* параметров регулятора, допустимого в рамках представлений H_∞ -теории управления.

8. Заключение

Областью исследований в статье явилась H_∞ -теория управления стохастическими системами, определенными стохастическими дифференциальными уравнениями Ито, диффузионная компонента каждого из которых задана суммой $A_0 x dw_0 + B_{01} v dw_1 + B_{02} u dw_2$, в которой матрицы A_0, B_{01}, B_{02} известны, а интенсивности винеровских процессов xw_0, vw_1, uw_2 определены соответственно вектором состояния x , внешним возмущением v и управлением u . Векторы x, v неизвестны, вектор u поступает с выхода H_∞ -регулятора и обеспечивает поддержание в заданных пределах вредного действия возмущения на регулируемый выходной сигнал объекта управления. Взаимные интенсивности $q_{ij}, i \neq j$, винеровских процессов $w_i, i = 0, 1, 2$, удобно считать ненулевыми, если из общей модели желательно исключить некоторые из процессов $w_i(t)$ для получения *частных* стохастических моделей. Таким образом, рассмотренная в статье модель мультипликативного стохастического объекта является довольно общей, чего нельзя, к сожалению, утверждать о принятой здесь модели регулятора по выходному сигналу. Действительно, в *детерминированном* варианте H_∞ -теории регулятор по выходному сигналу получается представленным в виде регулятора *по состоянию* $\hat{x}$ некоторой вспомогательной системы, осуществляющей *фильтрацию* ненаблюдаемого вектора состояния x исходной системы по измеряемому выходному сигналу. См. п. 1 Приложения. С другой стороны, в представленной статье искомому регулятору по выходному сигналу *а priori навязывается* (см. п. 2 Приложения) такая же, как и в детерминированном случае, структура фильтра, вырабатывающего оценку $\hat{x}$ неизвестного сигнала x , подаваемую затем на регулятор частного вида, а именно — на регулятор по состоянию. Структура же общего вида регулятора по выходному сигналу для мультипликативной стохастической системы остается, по существу, неизвестной.

Несмотря на отмеченную особенность постановки задачи об H_∞ -регуляторе, принятую в статье, эта задача представляется важной и интересной. Эта задача важна для поиска общей структуры допустимого регулятора и представляет самостоятельный интерес в качестве необходимого этапа при решении последующей более трудной задачи *синтеза* субоптимального регулятора.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. В H^2/H_∞ -теории оптимального регулятора по выходному сигналу рассматривается линейный объект $\dot{x} = Ax + Bv_1 + Bu$ с регулируемым сигналом $z = (z_1, z_2)$, $z_1 = Cx$, $z_2 = u$ и наблюдаемым выходным сигналом $y = Cx + v_2$.

Возмущение $v = (v_1, v_2)$ является гауссовским белым шумом с нулевым средним и единичной спектральной плотностью (для простоты употребляем обозначение $v = (v_1, v_2)$ вместо более сложного $v = [v'_1, v'_2]'$; то же для z). Критерий для регулятора – квадратический,

$$J(u, v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \frac{1}{T} \int_0^T (\langle x(t), C' C x(t) \rangle + \langle u(t), u(t) \rangle) dt.$$

Существуют неотрицательно определенные решения P_1, P_2 уравнений регулятора и фильтра соответственно:

$$\begin{aligned} A' P_1 + P_1 A - (1 - \gamma^{-2}) P_1 B B' P_1 + C' C &= 0, \\ A P_2 + P_2 A' - (1 - \gamma^{-2}) P_2 C' C P_2 + B B' &= 0. \end{aligned}$$

Определим $Z := (I - \gamma^{-2} P_2 P_1)^{-1}$. Регулятор $M_k = (A_k, B_k, C_k)$ (с коэффициентом $D_k = 0$) в цепи обратной связи имеет структуру регулятора по состоянию $u = C_k \hat{x} = -B' P_1 Z \hat{x}$, где $\hat{x}$ есть вектор состояния оптимального наблюдателя

$$\dot{\hat{x}} = A_k \hat{x} + B_k y = (A - (1 - \gamma^{-2}) P_2 C' C - B B' P_1 Z) \hat{x} + P_2 C' y.$$

Решение, приведенное в п. 1 Приложения, получено в [15]. Оно является следствием изложенной в статье теории, если применить ее к детерминированному объекту и рассмотреть предельный случай $\gamma \rightarrow \infty$.

2. Задача о регуляторе по измеряемому в шумах выходному сигналу объекта, мультипликативного по вектору состояния и вектору внешнего возмущения, завершается идентификацией параметров регулятора. В [7] для объекта, который не предполагался мультипликативным по вектору управления, значения M_k параметров регулятора вычислялись с помощью решения матричного неравенства (7.2). Без ограничения общности принимались предположения так называемого регулярного случая [5]

$$D_{11} = 0, \quad D'_{12} D_{12} = I, \quad D_{21} D'_{21} = I, \quad D'_{12} C_1 = 0, \quad D_{21} B'_1 = 0.$$

В предположении $P_{cl} > 0$ вводятся обозначения

$$P_{cl} = \begin{pmatrix} S & N \\ N' & Q \end{pmatrix}, \quad P_{cl}^{-1} = \begin{pmatrix} R & M \\ M' & T \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathcal{M}}_{11}(\gamma, P_{cl}) = \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi'_{12} & \Pi_{22} \end{pmatrix}.$$

Матрицы S и R — эрмитовы, являются матрицами квадратичных форм в пространстве состояний вектора $x(t)$. Матрица S удовлетворяет матричному линейному неравенству Риккати (неравенству наблюдателя, или фильтра), матрица R — квадратичному неравенству регулятора. Неравенство для S — автономное, неравенство для R зависит от S . В итоге анализа, проведенного

в [7], выясняется, что условию допустимости регулятора M_k удовлетворяют следующие значения его параметров (при выборе $N = R^{-1} - S = -Q$ для матрицы P_{cl}):

$$B_k = \gamma^2 (R^{-1} - S)^{-1} C'_2, \quad C_k = B'_2 R^{-1}, \quad D_k = 0,$$

$$A_k = -N^{-1} \left[S B_2 B'_2 R^{-1} + A' N - \right. \\ \left. - (S B_1 + q_{12} A'_0 S B_0) (\gamma^2 I + q_{22} B'_0 S B_0)^{-1} B'_1 N + \Pi_{11} \right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *McLane P.J.* Optimal Stochastic Control of Linear Systems with State and Control-Dependent Disturbances // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. V. AC-16. P. 292–299.
 2. *Willems J.L., Willems J.S.* Feedback Stabilizability for Stochastic Systems with State and Control Dependent Noise // Automatica. 1976. V. 12. P. 277–283.
 3. *Krylov N.V.* Introduction to the Theory of Diffusion Processes // Providence. 1995. RI. Amer. Math. Soc.
 4. *Крылов Н.В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Изд-во Наука, 1977.
 5. *Doyle J., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.* State Space Solutions to Standard H_2 and H^∞ Control Problems // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. AC-34. P. 831–847.
 6. *Gahinet P., Apkarian P.* A Linear Matrix Inequality Approach to H^∞ Control // Int. J. Robust Nonlin. Control. 1994. V. 4. P. 421–448.
 7. *Hinrichsen D., Pritchard A.J.* Stochastic H_∞ // SIAM J. Control Optim. 1998. V. 36. No. 5. P. 1504–1538.
 8. *Petersen I.R., Ugrinovskiy V.A., Savkin F.V.* Robust Control Design Using H_∞ -methods. London: Springer, 2006.
 9. *Gershon E., Shaked U., Yaesh I.* H_∞ -control and Estimation of State-multiplicative Linear Systems // Lect. Notes in Control and Information Sciences. 2005. V. 318. London.
 10. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
 11. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАРД, 2014.
 12. *Dragan V., Morozan T., Stoica A.M.* Mathematical methods in robust control of linear stochastic systems / Mathematical concepts and methods in science and engineering. SPRINGER, 2006.
 13. *Шайкин М.Е.* Синтез оптимального по состоянию регулятора, робастного к внешним возмущениям для одного класса нестационарных стохастических систем // АиТ. 2015. № 7. С. 122–134.
- Shaikin M.E.* Design of optimal state controller robust to external disturbance for one class of nonstationary stochastic systems // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 7. P. 1242–1251.

14. *Шайкин М.Е.* Мультипликативные стохастические системы. Оптимизация и анализ // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 3. С. 391–406.
Shaikin M.E. Multiplicative Stochastic Systems: Optimization and Analysis // Differential Equations. 2017. V. 53. No. 3. P. 1–16.
15. *Limebeer D.J.N., Anderson B.D.O., Khargonekar, Green M.* A Game Theretic Approach to H_∞ Control for Time-Varying Systems // SIAM J. Control Optim. 1992. V. 30. P. 262–283.
16. *Mustafa D., Glover K.* Minimum entropy H_∞ control. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
17. *Ugrinovskii V.A.* Robust H_∞ -Control in the Presense of Stochastic Unsertainty // Int. J. Control. 1998. V. 71. No. 2. P. 219–237.
18. *Шайкин М.Е.* Мультипликативные стохастические системы с несколькими внешними возмущениями // АиТ. 2018. № 2. С. 122–134.
Shaikin M.E. Multiplicative Stochastic Systems with Multiple External Disturbances // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 2. P. 300–310.
19. *Kallianpur G.* Stochastic Filtering Theory. N.Y.–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1980.
20. *Булдинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003.
21. *Вентцель А.Д.* Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 22.02.2021

После доработки 29.10.2021

Принята к публикации 20.11.2021