

© 2022 г. В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhai@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АГРЕГИРОВАНИЕ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С ПРИТЯГИВАЮЩИМ ЦИКЛОМ¹

Рассматривается множество автономных систем, в каждой из которых реализуется невырожденный для периодического решения случай. Решается задача агрегирования этих систем в модель, содержащую связанные подсистемы, с целью построения системы с притягивающим циклом. Предлагаются способы агрегирования, находятся слабые связи-управления, строятся скорректированные системы.

Ключевые слова: агрегирование, подсистемы, периодическое решение, невырожденный случай, слабая связь-управление, скорректированная система, цикл, притяжение.

DOI: 10.31857/S0005231022030047

1. Введение

В публикации [1] введена модель, содержащая связанные подсистемы (МССП) и описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой подсистемы — системы автономных ОДУ. Наличие связи между подсистемами определяется параметром связи ε , при нулевом значении которого модель распадается на независимые подсистемы. Таких параметров в МССП может быть один или несколько. Параметры отражают иерархичность подсистем в МССП. Размерность каждой подсистемы в МССП в общем случае — индивидуальная, сама подсистема может быть линейной или нелинейной и описывать различные процессы: механические, электрические, биофизические и т.д. Система МССП моделирует систему, в которой одновременно происходят различные связанные между собой процессы. В случае связей, не зависящих явно от времени, получается автономная МССП. Одноровневая МССП называется связанной (coupled) системой.

МССП относится к сложной системе. Основным методом изучения сложных систем стала декомпозиция (см. [2–9]). При декомпозиции свойства сложной системы исследуются на основе свойств подсистем с учетом связей между ними. Из-за своей структуры МССП допускает естественную декомпозицию

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00146).

на подсистемы. Агрегирование сложной системы заключается в объединении подсистем в единое целое, обладающее требуемым динамическим свойством. Способы агрегирования сложной системы методом Ляпунова приводятся в [10].

Колебания автономной МССП изучались в ряде публикаций (см., например, [11–14]). При этом в [13] для решения задачи стабилизации колебания МССП предложено выбирать связи, обеспечивающие одновременно существование, устойчивость и саму стабилизацию. Тогда связь действует как управление, а задача стабилизации колебания решается естественным образом, т.е. без привлечения других управлений. Анализ уравнения Ван дер Поля с позиции МССП приводит в [15, 16] к нахождению универсальных слабых связей–управлений, реализующих идею [13], и построению управляемой механической системы с малым коэффициентом ε усиления регулятора. Такая управляемая система называется ε -скорректированной системой. В результате коррекции система обладает орбитально асимптотически устойчивым циклом, близким к выделенному колебанию самой системы. С построением ε -скорректированных систем для подсистем, допускающих семейства невырожденных периодических решений, находится путь к агрегированию механических систем в связанную систему.

По альтернативе в [11] в невырожденном для периодических решений случае в автономной системе реализуется семейство периодических решений или цикл. В механической системе цикл рождается в ε -скорректированной системе (см. [15, 16]) из семейства периодических решений. Поэтому подсистема с семейством периодических решений располагается на нижнем уровне иерархии МССП. Сама скорректированная система принадлежит следующему уровню иерархии, на котором могут находиться и другие подсистемы с циклами. Более того, этот уровень может содержать подсистемы с семействами периодических решений так же, как и нижний уровень может иметь подсистемы с циклами. На последующих уровнях иерархии МССП могут быть подсистемы с семействами периодических решений, подсистемы с циклами, скорректированные системы. Такой сложной представляется структура агрегированной автономной системы, содержащей связанные подсистемы. С другой стороны, выясняется, что агрегирование связанных систем с семействами периодических решений и агрегирование связанных систем с циклами становятся основными этапами при агрегировании любой автономной МССП, допускающей цикл.

В статье решается задача агрегирования автономной МССП, обладающей притягивающим циклом.

2. Скорректированная автономная система

Согласно разделу 1 на нижнем уровне иерархии автономной МССП располагаются подсистемы, допускающие семейства периодических решений (одночастотных колебаний). Рассматривается семейство невырожденных колебаний, на котором согласно [11] период монотонно (см. [17]) зависит от одного

параметра, обозначенного здесь через h . Такими являются, в частности, колебания лагранжевой системы, подверженной действию позиционных сил — потенциальных и неконсервативно позиционных.

Для механических систем задача нахождения универсальных связей—управлений и построение скорректированных (управляемых) систем, допускающих орбитально асимптотически устойчивый цикл, решалась в [15, 16]. Далее дается построение скорректированной системы для системы общего вида.

Рассматривается гладкое автономное уравнение

$$(1) \quad \dot{z} = Z(z), \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

общее решение которого обозначается через $z(z_1^0, \dots, z_n^0, t)$, где z^0 — начальная точка (при $t = 0$). Для (1) необходимые и достаточные условия существования T -периодического решения даются равенством

$$(2) \quad f \equiv z(z_1^0, \dots, z_n^0, T) - z^0 = 0.$$

В предположении, что (2) имеет решение $z^0 = z^*$, $T = T^*$, вычисляется ранг Ra_* функциональной матрицы для функции f в точке z^* при $T = T^*$. Используются определения из [11].

Определение 1. Случай $Ra_ = n - 1$ называется невырожденным для периодического решения случаям.*

Определение 2. Изолированное периодическое решение автономного уравнения называется циклом.

В данной статье анализируется невырожденный случай для периодического решения. В нем система (1) допускает цикл или семейство Σ периодических решений с монотонным по скалярному параметру h периодом $T(h)$ (см. [11, 17]). Решения из Σ заполняют двумерное инвариантное многообразие $\hat{\Sigma}$. Без ограничения общности сначала рассматривается система

$$(3) \quad \dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y),$$

заданная на $\hat{\Sigma}$. Семейство Σ описывается формулами: $x = x(h, t)$, $y = y(h, t)$. Тогда уравнения в вариациях для решения из Σ имеют периодическое решение $\dot{x}(h, t)$, $\dot{y}(h, t)$. Второе решение этих уравнений находится дифференцированием по h и в невырожденном случае не будет периодическим. При этом соответствующие нулевые характеристические показатели (ХП) образуют жорданову клетку.

На плоскости (x, y) для фиксированного h решение из семейства Σ представляется замкнутой кривой, а все решения — семейством по h замкнутых кривых. Значит, семейство Σ удобно представлять в полярной системе координат (r, θ) , выбирая за r параметр семейства h . Тогда скорость изменения угла θ будет зависеть от h . При этом при необходимости используется перенос начала координат.

В новых переменных уравнения (3) записываются в виде

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\theta} = \omega(r).$$

Управляемая система

$$(4) \quad \dot{\rho} = -\varepsilon\rho, \quad \dot{\theta} = \omega(r^* + \rho); \quad \rho = r - r^*, \quad \varepsilon = \text{const},$$

строится в окрестности решения, на котором $r = r^*$. При малом $\varepsilon > 0$ решение $\rho = 0$ первого уравнения становится устойчивым, а управляемая система в переменных (r, θ) допускает орбитально асимптотически устойчивый цикл.

Вывод сохраняется для многомерной системы, в которой многообразие $\hat{\Sigma}$ обладает свойством притяжения, что обеспечивается соответствующими отрицательными ХП. В граничном случае, когда часть этих ХП принадлежит мнимой оси, притяжение к $\hat{\Sigma}$ обеспечивается по каждой переменной малым управлением, как происходит в первом уравнении системы (4).

Таким образом, получается принципиальное решение задачи построения скорректированной системы, обладающей орбитально асимптотически устойчивым циклом.

Теорема 1. Пусть автономная система содержит многообразие $\hat{\Sigma}$, заполненное семейством Σ невырожденных периодических решений, для которого ХП принадлежат левой полуплоскости или мнимой оси. Для такой системы всегда строится скорректированная система, допускающая орбитально асимптотически устойчивый цикл.

3. Построение скорректированной системы

Согласно теореме 1, скорректированная система существует. В ней орбитальная асимптотическая устойчивость обеспечивается диссипацией, действующей в каждой текущей точке траектории. В уравнении второго порядка диссипация создается нелинейной силой, линейной по скорости: таким является универсальное управление в [15, 16].

При переходе от уравнения второго порядка к системе двух уравнений (3), в которой $\dot{x} = y$, оказывается, что диссипация линейна по скорости $\dot{x}$. При этом одновременно происходит диссипация по координате y . Действующее на систему управление находится из необходимых условий существования в системе цикла. При этом универсальное управление из [15, 16] является простейшим по виду и реализуется в мягком режиме функционирования триода. Очевидно, управление не будет единственным.

В общем случае (3) строится скорректированная система

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= X(x, y), \\ \dot{y} &= Y(x, y) + \varepsilon\sigma(1 - Kx^2)X(x, y), \end{aligned}$$

где постоянная σ равняется $+1$ или (-1) , а постоянная K вычисляется далее.

При $\varepsilon = 0$ система (5) допускает семейство Σ . Поэтому для решения вопроса о существовании и устойчивости цикла используется амплитудное (бифуркационное) уравнение

$$(6) \quad I(h) \equiv \int_0^{T^*} (1 - Kx(h, t)^2)X(x(h, t), y(h, t))\eta(h, t)dt = 0,$$

где $(\xi(h, t), \eta(h, t))$ — T -периодическое решение системы, сопряженной к уравнениям в вариациях для периодического решения автономной системы. С учетом возможности выбора времени t с точностью до постоянной полагается $\eta(h, 0) = 0$. Само равенство (6) получается как необходимое условие существования T^* -периодического решения системы (5) в первом приближении по ε : $T^* = T(h^*)$. Число K вычисляется из условия существования корня $h = h^*$ уравнения (6). В результате получается

$$(7) \quad K = \frac{\int_0^{T^*} X(h^*, t)\eta(h^*, t)dt}{\int_0^{T^*} x^2(h^*, t)X(h^*, t)\eta(h^*, t)dt},$$

где $X(h, t) = X(x(h, t), y(h, t))$.

Формула (7) справедлива для произвольного корня $h = h^*$ амплитудного уравнения (6). При учете этого факта вводится функция $K(h^*)$ или функция $K(h)$ с переменной h .

Далее используется тождество

$$\int_0^{T(h)} (1 - Kx(h, t)^2)X(x(h, t), y(h, t))\eta(h, t)dt \equiv 0,$$

дифференцированием которого по параметру h в точке $h = h^*$ и учетом равенства $\eta(h, T) = 0$ вычисляется производная

$$(8) \quad \frac{dI(h^*)}{dh} = \frac{dK(h^*)}{dh}\kappa, \quad \kappa = \int_0^{T^*} x^2(h^*, t)X(h^*, t)\eta(h^*, t)dt.$$

Из формулы (8) выводится достаточное условие $dI(h^*)/dh \neq 0$ существования цикла в точке $h = h^*$. Условие выполняется, если $\chi = dK(h^*)/dh \neq 0$ и интеграл в (8) отличен от нуля. В этой ситуации выбором соответствующего знака постоянной σ , $\sigma dI(h^*)/dh < 0$, завершается построение орбитально асимптотически устойчивого цикла.

Таким образом, справедлива теорема 2.

Теорема 2. Пусть система (3) допускает семейство Σ невырожденных периодических решений. Тогда посредством управления с функцией $u = (1 - Kx^2)X(x, y)$, действующего на правую часть уравнения по y в системе (3), для каждой точки $h = h^*$, в которой $\chi_k \neq 0$, строится ε -скорректированная система, обладающая орбитально асимптотически устойчивым циклом.

Замечание 1. Теорема 2 также формулируется с использованием управления $(1 - Ky^2)Y(x, y)$, действующего на правую часть уравнения по x в системе (3).

Замечание 2. Теорема 2 доставляет конструктивный способ построения скорректированной системы, обладающей орбитально асимптотически устойчивым циклом.

Замечание 3. В случае механической системы, подверженной действию позиционных сил, универсальное управление найдено в [15].

Замечание 4. Теорема 2 распространяется на многомерную систему с притягивающим многообразием $\hat{\Sigma}$.

Пример 1. Для консервативной системы с одной степенью свободы в (3) выполняются равенства

$$X(x, y) = y, \quad Y(x, y) = F(x).$$

Поэтому скорректированное уравнение (5) записывается в виде

$$\ddot{x} = F(x) + \varepsilon \sigma (1 - Kx^2)\dot{x}.$$

Функция $\eta(h, t) \equiv \dot{x}(h, t)$ (см. [13]), и амплитудное уравнение (6) приобретает вид

$$I(h) \equiv \int_0^{T^*} [1 - Kx^2(h, t)] \dot{x}^2(h, t) dt = 0.$$

Достаточное условие существования орбитально асимптотически устойчивого цикла в скорректированной консервативной системе с одной степенью свободы дается неравенством $\sigma\chi < 0$.

Для математического маятника $F(x) = -\sin x$, а функция $K(h)$ согласно [18] монотонно убывает. Поэтому $\chi < 0$, и условие существования орбитально асимптотически устойчивого цикла выполняется с константой $\sigma = 1$.

4. Агрегирование подсистем, допускающих циклы

Рассматривается гладкая слабо связанная система

$$(9) \quad \dot{z}^s = Z^s(z^s) + \varepsilon u^s(z^1, \dots, z^m), \quad z^s \in \mathbb{R}^{m_s}, \quad s = 1, \dots, m.$$

Предполагается, что при $\varepsilon = 0$ каждая из подсистем допускает орбитально асимптотически устойчивый цикл $z^s = z^s(t + \gamma_s)$ с периодом T : γ_s — временной сдвиг на траектории. Задача заключается в нахождении таких функций u^s , чтобы связанная система (9) при малых $\varepsilon > 0$ также обладала орбитально асимптотически устойчивым циклом.

Согласно [12] записываются амплитудные уравнения

$$(10) \quad g^s(\gamma) \equiv \int_0^T \sum_{k=1}^{m_s} u_k^s(z^1(t + \gamma_1), \dots, z^m(t + \gamma_m)) \psi_k^s dt = 0, \quad s = 1, \dots, m,$$

доставляющие необходимое и достаточное условие существования в (9) в первом приближении по ε решения периода T ; функция $z^s = z^s(t + \gamma_s)$, $s = 1, \dots, m$, вычисляется на цикле подсистемы. Функции $\{\psi_k^s\}$ образуют систему T -периодических решений линейной сопряженной системы. Векторное уравнение (10) содержит m неизвестных. В [12, теорема 1] доказывается, что корню $\gamma = \gamma^*$ уравнения (10), для которого ранг функциональной матрицы отображения $\gamma \rightarrow g(\gamma)$, $g = (g^1, \dots, g^m)$, равен $m - 1$, отвечает цикл связанной системы. При этом функции u^s связывают все подсистемы в одну автономную систему, в которой для цикла реализуется невырожденный для периодического решения случай. В этой ситуации по теореме Андронова–Витта [19] цикл будет орбитально асимптотически устойчивым, если ненулевые ХП находятся в левой полуплоскости. С другой стороны, для устойчивого цикла задача стабилизации цикла решается самим фактом существования цикла. Следовательно, согласно результатам в [12, теорема 3] задача стабилизации цикла связанной системы решается надлежащими автономными управлениями u^s .

Далее предполагается, что все ХП цикла в каждой подсистеме принадлежат левой полуплоскости. Для подсистем, обладающих семействами периодических решений, это достигается построением скорректированных систем. Но в любом случае агрегирование подсистем, обладающих устойчивыми циклами, проводится нахождением функций u_k^s , гарантирующих перемещение $m - 1$ нулевых ХП в отрицательную полуплоскость.

Для определения векторов u^s используется подход, идея которого лежит в теории вынужденных колебаний. В этом подходе с учетом факта устойчивости циклов в подсистемах вектор u^1 полагается нулевым, а остальные u^s определяются по формулам

$$(11) \quad u^s = \sigma_s [1 - K_s(z^1)^2] v^s(z^s), \quad (z^1)^2 = \sum_{j=1}^{m_1} (z_j^1)^2, \quad s = 2, \dots, m,$$

где числа σ_s равны $+1$ или (-1) , K_s — постоянные, а функция v^s зависит только от вектора z^s . Получается, что подсистема с номером 1 действует на все другие подсистемы, не испытывая действия других подсистем: связь — односторонняя. Более того, на каждую из этих подсистем действует только

первая подсистема. В результате анализ системы (9) включает независимый анализ $m - 1$ систем

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{z}^1 &= Z^1(z^1), \\ \dot{z}^s &= Z^s(z^s) + \varepsilon \sigma_s [1 - K_s(z^1)^2] v^s(z^s), \quad s = 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Постоянная K_s в системе (12) находится из условия выполнения равенства

$$(13) \quad g^s(\gamma) \equiv \sigma_s \int_0^T [1 - K_s(z^1(t + \gamma_1))^2] \sum_{k=1}^{m_s} v_k^s(z^s(t + \gamma_s)) \psi_k^s(t + \gamma_s) dt = 0, \\ s = 2, \dots, m.$$

Это уравнение вместе с тождеством $g^1(\gamma_1) \equiv 0$ служит системой амплитудных уравнений для (12). С учетом произвольности сдвига γ_1 при нахождении корня уравнения (13) используется переменная интегрирования $\tau = t + \gamma_1$. Тогда получаются $m - 1$ независимых уравнений

$$(14) \quad \begin{aligned} g^s(\nu_s) &\equiv \sigma_s \int_0^T [1 - K_s(z^1(\tau))^2] f_s(\tau, \nu_s) d\tau = 0, \\ f_s(\tau, \nu_s) &= \sum_{k=1}^{m_s} v_k^s(z_k^s(\tau + \nu_s)) \psi_k^s(\tau + \nu_s), \quad s = 2, \dots, m, \end{aligned}$$

для нахождения временных сдвигов $\nu_s = \gamma_s - \gamma_1$, $s = 2, \dots, m$. Эти уравнения исследуются, когда средние значения не равны нулю:

$$(15) \quad \kappa_s = \frac{1}{T} \int_0^T f_s(\tau, \nu_s) d\tau \neq 0.$$

Из (14) для корня $\nu_s = \nu_s^*$ уравнения (13) с номером s определяется число

$$(16) \quad K_s = \frac{\int_0^T f_s(\tau, \nu_s^*) d\tau}{\int_0^T (z^1(\tau))^2 f_s(\tau, \nu_s^*) d\tau},$$

т.е. устанавливается существование корня $\nu_s = \nu_s^*$ для рассматриваемого уравнения в (14).

Таким образом, система амплитудных уравнений (10) имеет корень, для которого сдвиг γ_1 произволен, а остальные сдвиги $\gamma_s = \gamma_1 + \nu_s^*$, $s = 2, \dots, m$, находятся как корни уравнений (14).

При рассмотрении равенства (16) как формулы для нахождения зависимости $K_s(\nu_s)$ из (13) следует тождество

$$(17) \quad \int_0^T [1 - K_s(\nu_s)(z^1(\tau))^2] f_s(\tau, \nu_s) d\tau \equiv 0.$$

Отсюда при $\nu_s = \nu_s^*$ выводится равенство

$$-dK_s(\nu_s^*) \int_0^T (z^1(\tau))^2 f_s(\tau, \nu_s^*) d\tau + d \int_0^T [1 - K_s(\nu_s^*)(z^1(\tau))^2] f_s(\tau, \nu_s^*) d\tau = 0.$$

Поэтому при $\nu_s = \nu_s^*$ для всех номеров $s = 2, \dots, m$ вычисляется производная

$$(18) \quad \frac{dg^s(\nu_s^*)}{d\nu_s} = \sigma_s \chi_s \kappa_s, \quad \chi_s = \frac{dK_s(\nu_s^*)}{d\nu_s}.$$

В результате для невырожденного случая, когда все $dK_s(\nu_s^*)/d\nu_s \neq 0$, ранг функциональной матрицы отображения $\gamma \rightarrow g(\gamma)$ равняется $m - 1$. Следовательно, достаточные условия агрегирования подсистем в МССП, обладающей циклом, выполняются.

Интеграл в (15) не зависит от ν_s . Поэтому из (17) следует T -периодичность функции $K_s(\nu_s)$. Эта функция, как следует из ее определения, не сводится к постоянной. Следовательно, ее производная обращается в нуль только в конечном числе точек.

Следующий шаг агрегирования заключается в выборе таких функций (11), чтобы МССП обладала притягивающим циклом. По предположению все ХП циклов в подсистемах лежат в отрицательной полуплоскости; они наследуются циклом МССП. В невырожденном случае нулевые ХП подсистем с номерами $s = 2, \dots, m$ становятся ненулевыми. Поэтому выбором чисел σ_s они перемещаются при необходимости в левую полуплоскость.

Таким образом, решается задача агрегирования МССП, содержащей подсистемы с циклами и обладающей притягивающим циклом.

Теорема 3. Пусть имеется множество из m систем, каждая с орбитально асимптотически устойчивым циклом, причем периоды циклов совпадают. Тогда задача агрегирования автономной МССП, допускающей притягивающий цикл, решается функциями (11), (15): числа σ_s обеспечивают принадлежность ХП цикла левой полуплоскости. Цикл задается в подсистемах сдвигами $\nu_2^, \dots, \nu_m^*$ по времени и существует для всех точек на окружностях по параметрам ν_s за исключением конечного числа точек.*

Замечание 5. В силу равноправности рассматриваемых подсистем вместо первой подсистемы системы (9) в схеме агрегирования можно выбирать любую из подсистем. При этом качественный результат — агрегированная МССП, обладающая притягивающим циклом — сохраняется. Однако циклы агрегированных МССП будут отличаться на величины порядка $O(\varepsilon)$.

Замечание 6. В предложенной схеме агрегирования одна из подсистем становится регулятором, который генерирует управляющий сигнал, а остальные подсистемы – объектами регулирования. Получается структура с регулятором в центре и объектами на периферии. Колебания в объектах не синхронизируются по времени. Природная аналогия напрашивается.

Замечание 7. Теорема 3 гарантирует решение задачи агрегирования системы с притягивающим циклом, однако решение зависит от выбора функций v^s , поэтому оно не единственное.

5. Агрегирование многоуровневой МССП

Теоремами 2 и 3 дается конструктивный способ агрегирования автономной МССП из подсистем, содержащих невырожденные периодические решения. Если набор подсистем состоит только из подсистем с циклами, то они агрегируются в МССП по теореме 3. Получается одноуровневая МССП.

С другим случае, когда в наборе подсистем содержатся только семейства периодических решений, согласно теореме 2 конструируются скорректированные системы, обладающие орбитально асимптотически устойчивыми циклами, которые агрегируются по теореме 3 в МССП. Получается двухуровневая МССП.

Наконец, в случае набора подсистем, содержащих невырожденные периодические решения разных типов, на первом уровне для подсистем с семействами периодических решений конструируются скорректированные системы, к которым на втором уровне добавляются подсистемы с циклами. В результате все подсистемы агрегируются в двухуровневую МССП.

Таким представляется правило агрегирования автономной МССП, обладающей притягивающим циклом. Однако в приложениях на каждом уровне иерархии к МССП могут добавляться подсистемы с разными типами невырожденных периодических решений. Тогда все подсистемы агрегируются в многоуровневую МССП. В любом случае при этом используется теорема 2 о скорректированной системе, а на самом верхнем уровне — теорема 3 об агрегировании подсистем с циклами.

Заметим, что агрегирование в связанную механическую систему идентичных консервативных систем на плоскости можно проводить построением общей для всех подсистем одной скорректированной системы.

Пример 2. Показывается, как на базе линейного осциллятора и математического маятника

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \text{const}, \quad \ddot{y} + \sin y = 0$$

агрегируется двухуровневая автономная система с притягивающим циклом.

Несмотря на вырожденность колебаний линейного осциллятора, скорректированная система — уравнение Ван дер Поля — допускает притягивающий цикл. Для математического маятника при применении теоремы 2 учитывается, что для маятника число $\chi < 0$, $\sigma = 1$ (пример 1). Малый коэффициент

усиления регулятора обозначается через ε_1 . Формируется первый уровень иерархии

$$(19) \quad \ddot{x}_1 + \omega x_1 = \varepsilon_1(1 - K_x x_1^2)\dot{x}_1, \quad \ddot{y}_1 + \sin y_1 = \varepsilon_1(1 - K_y y_1^2)\dot{y}_1,$$

записанный в переменных x_1 и y_1 и состоящий из скорректированных систем. На этом уровне каждая из подсистем допускает орбитально асимптотический устойчивый цикл. Для маятника с периодом $T = T(h)$, где h – постоянная энергии, периоды цикла осциллятора Ван дер Поля и цикла управляемого маятника совпадают при условии $T(h) = 2\pi/\omega$. Циклы единого для подсистем периода образуют семейство по сдвигу ν .

Подсистемы на первом уровне можно записать в виде системы

$$\ddot{x}_1 = X_1(x_1, \dot{x}_1), \quad \ddot{y}_1 = Y_1(y_1, \dot{y}_1),$$

к которой применяется теорема 3. Полученная система записывается в переменных x_2 и y_2 : формируется второй уровень иерархии

$$(20) \quad \begin{aligned} \ddot{x}_2 &= X_1(x_2, \dot{x}_2), \\ \ddot{y}_2 &= Y_1(y_2, \dot{y}_2) + \varepsilon_2 \sigma [1 - K_{xy} (X_1^2(x_2, \dot{x}_2) + \dot{x}_2^2)] \dot{y}_2. \end{aligned}$$

В (20) постоянные σ и K_{xy} обеспечивают существование и притяжение циклов, ε_2 – коэффициент усиления регулятора. В амплитудном уравнении

$$\int_0^T [1 - K_{xy} (X_1^2(x_c(\tau), \dot{x}_c(\tau)) + \dot{x}_c^2(\tau))] \dot{y}_1(\tau + \nu) \psi(\tau + \nu) d\tau = 0$$

для цикла системы (20) функцией $x_c(\tau)$ описывается цикл Ван дер Поля, а функцией $y_1(\tau + \nu)$ – цикл управляемого маятника в (19): (φ, ψ) – периодическое решение сопряженной системы. При этом функция $y_1 = y + O(\varepsilon_1)$, а согласно вычислениям в [13] функция $\psi = -\dot{y} + O(\varepsilon_1)$. Поэтому интеграл

$$\kappa = - \int_0^T [\dot{y}^2(\tau + \nu) + O(\varepsilon_1)] d\tau$$

с учетом малости числа ε_1 отличен от нуля. Выполнением этого условия теоремы 3 констатируется достижение второго уровня иерархии – автономной системы с притягивающим циклом.

Таким образом, агрегирование проводится последовательным применением теорем 2 и 3.

6. Заключение

Агрегирование автономной МССП из подсистем, содержащих невырожденные периодические решения, проводится с целью конструирования системы, обладающей притягивающим циклом. В агрегированной МССП осуществляется естественная стабилизация колебания всей системы и происходит синхронизация колебаний подсистем по частоте. В данной статье предлагается агрегировать подсистемы на каждом этапе объединения в связанную

систему. При этом подсистемы с семействами периодических решений агрегируются путем конструирования скорректированных систем, обладающих притягивающими циклами, и отдельно дается решение задачи агрегирования подсистем с циклами. В результате получаются одноуровневые МССП, а также — многоуровневые МССП. Задача агрегирования в автономную МССП, обладающую притягивающим циклом, всегда получает решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тхай В.Н.* Модель, содержащая связанные подсистемы // *АиТ.* 2013. № 6. С. 26–41.
Tkhai V.N. Model with Coupled Subsystems // *Autom. Remote Control.* 2013. V. 74. No. 6. P. 919–931.
2. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова в анализе сложных систем с распределенными параметрами // *АиТ.* 1973. № 1. С. 5–22.
Matrosov V.M. The Method of Vector Lyapunov Functions in Analysis of Composite Systems with Distributed Parameters (Survey) // *Autom. Remote Control.* 1973. V. 34. No. 1. P. 1–15.
3. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. А.А. Воронова, В.М. Матросова. М.: Наука, 1987.
4. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001.
5. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974.
6. *Зубов В.И.* Аналитическая динамика системы тел. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.
7. *Пятницкий Е.С.* Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // *Докл. АН СССР.* 1988. Т. 300. № 2. С. 300–303.
8. *Шильяк Д.* Децентрализованное управление сложными системами / Пер. с англ. под ред. В.М. Матросова, С.В. Савастюка. М.: Мир, 1994.
9. *Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006.
10. *Александров А.Ю., Платонов А.В.* Метод сравнения и устойчивость движений нелинейных систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2012.
11. *Тхай В.Н.* Колебания автономной модели, содержащей связанные подсистемы // *АиТ.* 2015. № 1. С. 81–90.
Tkhai V.N. Oscillations in the Autonomous Model Containing Coupled Subsystems // *Autom. Remote Control.* 2015. V. 76. No. 1. P. 64–71.
12. *Тхай В.Н.* Колебания, устойчивость и стабилизация в модели, содержащей связанные подсистемы с циклами // *АиТ.* 2015. № 7. С. 40–51.
Tkhai V.N. Oscillations, Stability and Stabilization in the Model Containing Coupled Subsystems with Cycles // *Autom. Remote Control.* 2015. V. 76. No. 7. P. 1169–1178.
13. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний автономной системы // *АиТ.* 2016. № 6. С. 38–46.
Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of an Autonomous System // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 6. P. 972–979.

14. *Тхай В.Н.* Модель, содержащая связанные подсистемы с различными типами колебаний // *АиТ.* 2017. № 4. С. 21–36.
Tkhai V.N. Model Containing Coupled Subsystems with Oscillations of Different Types // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 4. P. 595–607.
15. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы // *АиТ.* 2019. № 11. С. 83–92.
Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of a Controlled Mechanical System // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 11. P. 1996–2004.
16. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы с N степенями свободы // *АиТ.* 2020. № 9 . С. 93–104.
Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of an N Degree of Freedom Controlled Mechanical System // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 9. P. 1637–1646.
17. *Тхай В.Н.* Закон зависимости периода нелинейных колебаний от одного периода // *Прик. матем. и механ.* 2011. Т. 75. Вып. 3. С. 430–434.
18. *Tkhai V.N.* Dissipation in the Vicinity of a Oscillation of the Mechanical System // *AIP Conf. Proc.* 2018. V. 1959. No. 030022. P. 030022-1–030022-5.
19. *Андронов А.А., Витт А.А.* Об устойчивости по Ляпунову // *Журн. эксп. и теор. физики.* 1933. Т. 3. Вып. 5. С. 373–374.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.М. Красносельским.

Поступила в редакцию 25.08.2020

После доработки 22.09.2021

Принята к публикации 20.11.2021