Автоматика и телемеханика, № 3, 2022

Нелинейные системы

© 2022 г. М.А. МУНИЦЫНА, канд. физ.-мат. наук (munitsyna@gmail.com)
(Московский физико-технический институт (государственный университет),
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ДИНАМИКА КЕЛЬТСКОГО КАМНЯ НА ПЛОСКОСТИ С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ[1]

Рассматривается задача о динамике кельтского камня на неподвижной горизонтальной плоскости. По аналогии с [1] предполагается, что со стороны плоскости на тело действует сила классического вязкого трения. Приводится аналитическое обоснование смены направления вращения с положительного (в направлении поворота главных центральных осей инерции относительно осей геометрической симметрии тела) на отрицательное при некоторых ограничениях на параметры задачи. Для приближенной системы уравнений, описывающей динамику тела, определяются соответствующие начальные условия и приводится приближенное выражение для финальной угловой скорости.

Ключевые слова: кельтский камень, вязкое трение.

DOI: 10.31857/S0005231022030035

1. Введение

Хорошо известно [2], что устойчивость вращении кельтского камня вокруг вертикальной оси зависит от направления вращения. В большинстве работ, посвященных этому свойству, рассматривается неголономная постановка задачи (см., например, [1, 3–8]), в которой вращения могут быть устойчивы только в отрицательном направлении. Этим свойством, как правило, объясняется смена направления вращения кельтского камня в процессе движения при начальном вращении в положительном направлении.

Однако, например, в [9] указывается физическая необоснованность данной постановки, вследствие чего, например, в [9, 10] рассматриваются поликомпонентные модели взаимодействия кельтского камня с опорной плоскостью, которые при наличии верчения и малой скорости проскальзывания соответствуют рассматриваемой в настоящей работе модели вязкого трения. Та же модель трения рассматривается, например, в [11] для оценки количества смен направления вращения тела, близкого к однородному эллипсоиду.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (19-01-00140) и Программы фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом Российской академии наук, № 7 “Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники”.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении тяжелого выпуклого твердого тела по неподвижной горизонтальной плоскости. Пусть $\mathbf{v}$ — скорость центра масс тела, $\boldsymbol{\omega}$ — его угловая скорость, $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор восходящей вертикали. Тогда радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки контакта тела и плоскости определяется равенством

$$\boldsymbol{\gamma} = -\mathrm{grad}\, \mathrm{f}(\mathbf{r})/|\mathrm{grad}\, \mathrm{f}(\mathbf{r})|$$

($f(\mathbf{x}) = 0$ — уравнение поверхности тела в главных центральных осях инерции $Sx_1x_2x_3$), а скорость этой точки имеет вид $\mathbf{u} = \mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$.

Будем считать, что на тело действуют сила тяжести $-mg\boldsymbol{\gamma}$, нормальная компонента реакции опорной плоскости $\mathbf{N} = N\boldsymbol{\gamma}$ и сила вязкого трения $\mathbf{F} = -\kappa\mathbf{u}$. Уравнения движения тела, записанные в его главных центральных осях, имеют вид

$$m\dot{\mathbf{v}} + [\boldsymbol{\omega}, m\mathbf{v}] = (N - mg)\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}, \tag{1}$$

$$\mathbb{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbb{J}\boldsymbol{\omega}] = [\mathbf{r}, N\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}], \tag{2}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}] = 0, \tag{3}$$

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}) = 0. \tag{4}$$

Здесь $\mathbb{J} = \mathrm{diag}(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3)$ — тензор инерции тела. Уравнение (1) выражает теорему о движении центра масс тела, (2) — теорему об изменении кинетического момента относительно центра масс, (3) — условие постоянства вектора восходящей вертикали, а (4) — условие контакта тела с плоскостью.

Заметим, что если в течение движения величина N изменит знак с положительного на отрицательный, то произойдет отрыв тела от опорной плоскости. В случае же безотрывного движения из системы (1)–(4) определяется величина нормальной реакции опорной плоскости

$$N = m\left(g + ([\mathbf{r}, \dot{\boldsymbol{\omega}}] + [\dot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\omega}], \boldsymbol{\gamma}) + ([\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}], [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}])\right). \tag{5}$$

Будем считать, что положительная полуось Sx_3 перпендикулярна поверхности тела. Тогда система (1)–(3) с учетом (5) имеет решения вида

$$\begin{aligned} &v_1 = v_2 = v_3 = 0, \\ &\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \\ &\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega = \mathrm{const} \end{aligned} \tag{6}$$

(нижним индексам соответствуют проекции векторов на оси системы $Sx_1x_2x_3$), на которых величина нормальной реакции опорной плоскости равна весу тела. Им соответствуют равномерные вращения тела вокруг перпендикулярной его поверхности главной оси инерции, совпадающей с вертикалью. Уравнение поверхности тела в окрестности точки контакта в положении, соответствующем значению $\gamma_3 = 1$, можно представить в виде

$$(7)\quad f(\mathbf{x}) = x_3 + a_3 - \frac{(x_1\cos\delta + x_2\sin\delta)^2}{2a_1} - \frac{(x_1\sin\delta - x_2\cos\delta)^2}{2a_2} + O_3(x_1, x_2),$$

где a_1, a_2 — главные радиусы кривизны поверхности тела в точке контакта, a_3 — высота центра масс, δ — угол между векторами главных кривизн и главными осями. Рассматриваемое тело является кельтским камнем [1], если выполнены соотношения $A_1 \neq A_2$, $a_1 \neq a_2$, $\delta \neq 0 \pmod{\pi/2}$.

Хорошо известны [1, 3] условия устойчивости решений (6) в случае неголономной постановки задачи, соответствующей случаю $\kappa \to +\infty$ [12], одним из которых является отрицательное направление вращения. В случае произвольного коэффициента вязкого трения линеаризованные уравнения возмущенного движения системы в окрестности решений (6) довольно громоздки [1] и аналитический анализ условий устойчивости затруднителен. Однако соответствующие области устойчивости при фиксированных параметрах задачи могут быть построены численно [13]. Существуют такие параметры задачи [13], что в неголономной постановке задачи вращения (6) всегда неустойчивы, а в случае вязкого трения всегда существуют устойчивые вращения как в положительном, так и в отрицательном направлениях. При этом численные эксперименты показывают, что при достаточно большом начальном отклонении от вращения (6) в положительном направлении финальное значение угловой скорости вращения может быть отрицательным.

3. Движения в окрестности устойчивых равновесий

Введем такие масштабы измерения масс, длин и времени, что $g = 1$, $A_3 = 1$ и $mg(a_2 - a_3) = A_1$, сохраняя все предыдущие обозначения. Будем считать, что в равновесии ($\omega_3 = 0$) центр масс тела занимает наинизшее положение ($a_3 < a_1$, $a_3 < a_2$), т.е. равновесие устойчиво, и рассмотрим движение в его окрестности, считая малыми переменные v_1, v_2, γ_1, γ_2, ω_1, ω_2, ω_3, а движение безотрывным. Тогда уравнения (1)–(3) с учетом (5) допускают интеграл (4) и геометрический интеграл $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1$, позволяющие исключить переменные v_3 и γ_3 и соответствующие им уравнения. Остальные уравнения запишем для первых шести малых переменных с точностью до первого порядка:

$$(8)\quad \begin{aligned}
\dot\gamma_1 &= -\omega_2,\\
\dot\gamma_2 &= \omega_1,\\
\dot\omega_1 &= \frac{m}{A_1}\left(\gamma_2 a_3 - b_3\gamma_1 - b_2\gamma_2\right) - \frac{\kappa a_3}{A_1}\left(\omega_1 a_3 + v_2\right),\\
\dot\omega_2 &= \frac{m}{A_2}\left(-\gamma_1 a_3 + b_3\gamma_2 + b_1\gamma_1\right) - \frac{\kappa a_3}{A_2}\left(\omega_2 a_3 - v_1\right),\\
\dot v_1 &= \frac{\kappa}{m}\left(a_3\omega_2 - v_1\right),\\
\dot v_2 &= -\frac{\kappa}{m}\left(a_3\omega_1 + v_2\right),
\end{aligned}$$

а для производной ω_3 по времени — с точностью до четвертого порядка:

$$
\begin{aligned}
\dot\omega_3 = (A_1 - A_2)\omega_2\omega_1 + m\Big(b_3({\gamma_1}^2 - {\gamma_2}^2) - (b_1 - b_2)\,\gamma_2\gamma_1\Big) + \\
+ \kappa\omega_3 \left(\frac{a_1 a_2 \left({\gamma_1}^2 + {\gamma_2}^2\right)\left({b_1}^2 + {b_2}^2\right)}{(a_1 + a_2)^2} - \right. \\
\left. - \left(b_1{\gamma_1}^2 + b_2{\gamma_2}^2\right)(b_1 + b_2) - 2\,b_3\,(a_1 + a_2)\,\gamma_1\gamma_2 \right) + \\
+ \kappa\Big[a_3(b_1\omega_1\gamma_1 + b_2\omega_2\gamma_2 + b_3(\omega_2\gamma_1 + \omega_1\gamma_2)) + \\
+ b_1 v_2\gamma_1 - b_2 v_1\gamma_2 - b_3(v_1\gamma_1 - v_2\gamma_2)\Big],
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где

$$
\begin{aligned}
b_1 &= a_1\cos^2\delta + a_2\sin^2\delta, \\
b_2 &= a_2\cos^2\delta + a_1\sin^2\delta, \\
b_3 &= (a_1 - a_2)\sin\delta\cos\delta.
\end{aligned}
$$

Система (8) замкнута и при $\kappa = 0$, $\delta = 0$ соответствует уравнениям малых колебаний с частотами 0, 1 и

$$
\xi_2 = \sqrt{\frac{m(a_1 - a_3)}{A_2}},
$$

которые заменой

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= -\rho\sin\theta\sin\varphi, & \gamma_2 &= \rho\sin\theta\cos\varphi, \\
\omega_2 &= \xi_2\rho\cos\theta\sin(\varphi + \sigma), & \gamma_1 &= \rho\sin\theta\cos(\varphi + \sigma)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

приводятся к виду

$$
\dot\rho = 0, \quad \dot\theta = 0, \quad \dot\varphi = 1, \quad \dot\sigma = \eta = \xi_2 - 1, \quad \dot v_1 = 0, \quad \dot v_2 = 0.
$$

Выполним замену (10) в уравнениях (8), (9), считая малыми параметры κ, δ и η. Тогда переменные ρ, θ, σ, v_1 и v_2 в новом времени являются медленными, а φ — быстрой. Величина ω_3 при этом также является медленной переменной, так как в отсутствие трения решения уравнений движения выпуклого тела на гладкой плоскости являются условно-периодическими функциями времени [14] и первое слагаемое правой части (9) в среднем не меняется.

Осредняя записанные в новых переменных уравнения (8), (9) по быстрой переменной с точностью до первого порядка малых параметров, получим

$$
\begin{aligned}
\dot\rho &= -\,\kappa\frac{{a_3}^2}{2A_1A_2}\rho\left(A_1\cos^2\theta - A_2\sin^2\theta\right) - \delta\,\frac{(A_2-A_1)^2}{2A_1A_2}\rho\cos\theta\sin\theta\sin\sigma,\\
\dot\sigma &= \eta - \delta\,\frac{(A_2-A_1)}{2A_1A_2}(A_1\sin^2\theta - A_2\cos^2\theta)\frac{\cos\sigma}{\sin\theta\cos\theta},\\
\dot\theta &= \kappa\,\frac{a_3^2(A_2-A_1)}{2A_1A_2}\sin\theta\cos\theta + \delta\,\frac{(A_2-A_1)}{2A_1A_2}\left(A_1\sin^2\theta + A_2\cos^2\theta\right)\sin\sigma,\\
\dot\omega_3 &= \kappa a_3\left(a_3+\frac{A_1+A_2}{2m}\right)\rho^2\sin\theta\cos\theta\sin\sigma +\\
&+\frac{\kappa}{2m}\left(\left(a_3+\frac{A_1}{m}\right)^2\sin^2\theta - \left(a_3+\frac{A_2}{m}\right)^2\cos^2\theta\right)\rho^2\omega_3 +\\
&+\delta\,\frac{(A_2-A_1)}{2}\rho^2\cos 2\theta - \eta\,\frac{(A_1+A_2)}{2}\rho^2\cos\sigma\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Поскольку эти уравнения не содержат переменных v_1 и v_2, соответствующие уравнения не приводятся.

Заметим, что в системе (11) уравнения для θ и σ отделяются. В зависимости от параметров задачи они могут иметь равновесия вида $\sigma=\sigma_0$, $\theta=\theta_0$, определяющиеся равенствами

$$
\begin{aligned}
\cos^2\sigma_0 &= \frac{1}{2} - \frac{\nu_1^2+\nu_2^2}{\alpha} + \frac{\sqrt{\left(\alpha-\nu_1^2+\nu_2^2\right)^2+4\nu_1^2\nu_2^2}}{2\alpha},\\
\operatorname{ctg}\theta_0 &= \frac{-\nu_1\pm\sqrt{\nu_1^2-\alpha\cos^2\sigma_0}}{\cos\sigma_0},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где

$$
\nu_1 = \frac{\kappa {a_3}^2}{2\delta A_2},\quad \nu_2 = \frac{\eta A_1}{\delta(A_2-A_1)},\quad \alpha = \frac{A_1}{A_2}.
$$

Характеристическое уравнение линеаризованных уравнений возмущенного движения отделяющейся системы в окрестности этих равновесий имеет вид

$$
\lambda^2 + 2\lambda\eta\operatorname{tg}\sigma_0 + \operatorname{tg}^2\sigma_0 + \frac{\eta^2}{\nu_1^2\nu_2^2}\operatorname{ctg}^2\sigma_0 = 0,
$$

и равновесия устойчивы при $\operatorname{tg}\sigma_0 > 0$.

Будем считать, что параметры задачи таковы, что указанные равновесия (12) существуют и начальные значения $\theta(0)$ и $\sigma(0)$ соответствуют устойчивым из них. Тогда, пренебрегая отклонениями θ и σ от начальных значений в системе (11) с точностью до первого порядка малых параметров, получим

$$\dot{\rho} = -\beta_1\rho, \qquad \dot{\omega}_3 = -\rho^2(\beta_2 + \beta_3\omega_3), \tag{13}$$

где

$$\beta_1 = \frac{\kappa a_3^2}{2(A_1 \sin^2\theta_0 + A_2\cos^2\theta_0)} > 0,$$

$$\beta_2 = \left(\frac{\kappa^2 a_3^3(2ma_3 + (A_1 + A_2))}{2m(A_1\sin^2\theta_0 + A_2\cos^2\theta_0)} + \frac{\eta^2 A_1 A_2\,(A_2 + A_1)}{(A_1\sin^2\theta_0 - A_2\cos^2\theta_0)(A_2 - A_1)}\right) \times$$

$$\times\,\frac{\sin^2\theta_0\cos^2\theta_0}{\delta} + \frac{\delta(A_2 - A_1)\cos 2\theta}{2},$$

$$\beta_3 = \frac{(A_1^2\cos^2\theta_0 + A_2^2\sin^2\theta_0)}{2m^2} + \frac{a_3(A_1\cos^2\theta_0 + A_2\sin^2\theta_0)}{m} + \frac{a_3^2}{2} > 0.$$

Заметим, что если $A_2 > A_1$ и параметры системы таковы, что $\nu_1^2 > \alpha\cos^2\sigma_0$ (что справедливо при рассматриваемых далее значениях параметров), то для соответствующего знаку "+" в формуле (12) значению θ_0 справедливы соотношения

$$\cos 2\theta_0 > \cos^2\theta_0(\alpha + 1) > 0,$$

$$A_1\cos^2\theta_0 - A_2\sin^2\theta_0 = A_2\frac{\cos^2\theta_0}{\cos^2\sigma_0}\left(\alpha\cos^2\sigma_0 - \left(\nu_1 - \sqrt{{\nu_1}^2 - \alpha\cos^2\sigma_0}\right)^2\right) > 0$$

и величина β_2 заведомо положительна.

Решение системы (13) имеет вид

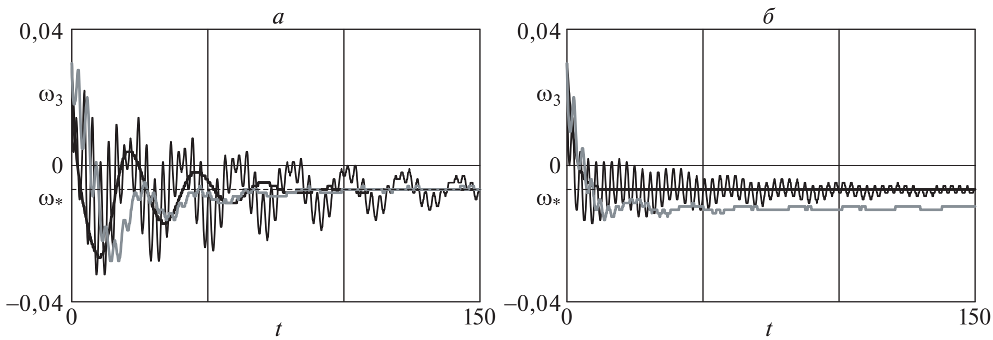
$$\rho = \rho(0)\exp(-\beta_1 t), \quad \omega_3 = -\frac{\beta_2}{\beta_3} + \left(\omega_3(0) + \frac{\beta_2}{\beta_3}\right)\exp\left(-\frac{\beta_3}{2\beta_1}(\rho(0)^2 - \rho^2)\right), \tag{14}$$

откуда, в частности, следует, что в случае $\beta_2 > 0$ при начальной угловой скорости вращения, большей (меньшей) значения $\omega_* = -\beta_2/\beta_3 < 0$, в процессе движения ее величина убывает (возрастает). Таким образом, смена направления вращения возможна только с положительного на отрицательное, если начальное отклонение от вращения удовлетворяет неравенству

$$\rho(0)^2 > \frac{\beta_1}{\beta_3}\ln\frac{\beta_3\omega_3(0) + \beta_2}{\beta_2}.$$

Можно также отметить, что при начальных условиях $\rho(0) \neq 0$, $\omega_3(0) = 0$ из (14) получим $\lim_{t\to+\infty}\rho(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty}\omega_3(t) < 0$, что соответствует такому характерному для кельтского камня эффекту [3], как переход от колебательных движений к вращательному.

На рисунке *а* представлены зависимости величины ω_3 от времени при интегрировании точных уравнений движения (1)–(3), (5) (серая кривая), приближенных уравнений (8), (9) (тонкая кривая) и осредненной системы (11)



Рисунок

(жирная кривая) кельтского камня с параметрами

$$m = 0{,}01, \quad A_1 = 0{,}12, \quad A_2 = 0{,}92, \quad a_1 = 100, \quad a_2 = 10, \quad a_3 = 1, \quad \delta = 0{,}1 \quad (\eta = 0{,}105), \tag{15}$$

на плоскости с коэффициентом трения $\kappa = 0{,}01$ при начальных условиях

$$\gamma_1(0) = 0{,}2, \quad \gamma_2(0) = 0{,}001, \quad \omega_3(0) = 0{,}03, \quad \omega_1(0) = \omega_2(0) = 0, \quad \mathbf{v}(0) = 0,$$
$$(\rho(0) \approx 0{,}2, \quad \theta(0) \approx 0{,}005, \quad \sigma(0) = \varphi(0) = 0).$$

На рисунке *б* представлены решение (13) при аналогичных начальных условиях

$$\rho(0) = 0{,}2, \quad \omega_3(0) = 0{,}03$$

и решения точных и приближенных уравнений при соответствующих начальных условиях вида

$$\gamma_1(0) \approx 0{,}122, \ \gamma_2(0) \approx 0{,}158, \ \omega_1(0) = 0, \ \omega_2(0) \approx -0{,}019, \ \omega_3(0) = 0{,}03, \ \mathbf{v}(0) = 0.$$

Полученные результаты показывают, что система уравнений (8), (9) сохраняет исследуемые свойства исходной системы (1)–(3), (5), и при заданных параметрах задачи финальные значения угловой скорости вращения при интегрировании (8), (9) отличаются на малую величину от финальных значений осредненной системы (11), которые при соответствующих начальных значениях углов $\theta(0)$ и $\sigma(0)$, в свою очередь, близки к финальному значению угловой скорости вращения при интегрировании системы (13), определенному равенством (14).

4. Заключение

Таким образом, если в равновесии центр масс кельтского камня занимает наинизшее положение, то в случае малого трения, малого угла поворота главных центральных осей инерции тела относительно его осей геометрической симметрии и при выполнении неравенства $\sqrt{A_1/A_2(a_1 - a_3)/(a_2 - a_3)} - 1 << 1$ $(\eta << 1)$ смена направления кельтского камня имеет аналитическое обоснование в рамках модели классического вязкого трения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1988.
2. *Walker J.* The mysterious “ratterback”: a stone spins in one direction and then reverses // Sci. Amer. 1979. No. 10. P. 144–149.
3. *Маркеев А.П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.; Ижевск : Ин-т компьют. исслед., 2014.
4. *Mamaev I.S., Borisov A.V.* Strange attractors in rattleback dynamics // Phys. Usp. 2003. Vol. 46. No. 4. P. 393–403.
5. *Franti L.* On the rotational dynamics of the rattleback // Open Physics. 2013. Vol. 11. No. 2. P. 162–172.
6. *Kazakov A.O., Gonchenko A.S., Gonchenko S.V.* Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a celtic stone // Regular Chaotic Dynam. 2013. Vol. 18. No. 5. P. 521–538.
7. *Nakanishi H., Kondo Y.* Rattleback dynamics and its reversal time of rotation // Phys. Rev. E. 2017. Vol. 95. No. 6. 062207.
8. *Przybylska M., Rauch-Wojciechowski S.* Understanding reversals of a rattleback // Regular Chaotic Dynam. 2017. Vol. 22. No. 4. P. 368–385.
9. *Климов Д.М., Журавлёв В.Ф.* Глобальное движение кельтского камня // Известия РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 8–16.
10. *Kudra G., Awrejcewicz J.* Celtic stone dynamics revisited using dry friction and rolling resistance // Shock Vibrat. 2012. Vol. 19. No. 5. P. 1115–1123.
11. *Takano H.* Spin reversal of a rattleback with viscous friction // Regular Chaotic Dynam. 2014. Vol. 19. No. 1. P. 81–99.
12. *Карапетян А.В.* О Реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней // ПММ. 1981. Т. 45. № 1. С. 42–51.
13. *Муницына М.А.* Численное исследование динамики кельтского камня на плоскости с вязким трением // Труды МФТИ. Т. 12. № 1(45). 2020. С. 137–142.
14. *Routh E.J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies // London: Macmillan, 1884.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 10.06.2020

После доработки 27.07.2021

Принята к публикации 15.10.2021