Автоматика и телемеханика, № 2, 2022

Нелинейные системы

© 2022 г. **М.Г. ЮМАГУЛОВ, д-р физ.-мат. наук (yum_mg@mail.ru),**
Л.С. ИБРАГИМОВА, канд. физ.-мат. наук (lilibr@mail.ru),
А.С. БЕЛОВА (89177662488@mail.ru)
(Башкирский государственный университет, Уфа)

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ В СИСТЕМАХ ЛУРЬЕ СО СЛАБООСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

Предлагаются основанные на методах теории возмущений признаки устойчивости по Ляпунову систем Лурье со слабоосциллирующими параметрами. Основное внимание уделяется получению формул первого приближения для возмущений кратных дефинитных и индефинитных мультипликаторов линейных гамильтоновых систем и их приложениям в задаче исследования устойчивости. Предлагаемые формулы приводят к новым признакам устойчивости по Ляпунову систем Лурье в критических случаях. Рассматриваются приложения в задаче о параметрическом резонансе в основных резонансах. Полученные результаты сформулированы в терминах исходных уравнений и доведены до расчетных формул и алгоритмов. Эффективность предлагаемых формул иллюстрируется на примере задачи о параметрическом резонансе в системе связанных осцилляторов.

Ключевые слова: гамильтонова система, система Лурье, устойчивость, малый параметр, параметрический резонанс.

DOI: 10.31857/S0005231022020076

1. Введение

Рассматривается зависящая от малого параметра ε динамическая система, описываемая неавтономным уравнением

$$(1)\qquad L\left(\frac{d^2}{dt^2}, t, \varepsilon\right) x = M\left(\frac{d^2}{dt^2}, t, \varepsilon\right) f(x);$$

здесь L и M – операторные многочлены:

$$\begin{aligned} L(p,t,\varepsilon) &= p^l + (a_1 + \varepsilon\varphi_1(t))p^{l-1} + (a_2 + \varepsilon\varphi_2(t))p^{l-2} + \ldots + (a_l + \varepsilon\varphi_l(t)), \\ M(p,t,\varepsilon) &= (b_0 + \varepsilon\psi_0(t))p^m + (b_1 + \varepsilon\psi_1(t))p^{m-1} + \ldots + \\ &\quad + (b_m + \varepsilon\psi_m(t)), \quad (l > m); \end{aligned}$$

[1] Исследование третьего автора выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027).

функции $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_l(t),\psi_0(t),\ldots,\psi_m(t)$ предполагаются непрерывными и T-периодическими по t, а коэффициенты a_j и b_j являются константами. Нелинейность $f(x)$ представима в виде

$$f(x)=k_0x+\delta(x),\ \text{где}\ |\delta(x)|=O(x^2)\ \text{при}\ x\to 0,$$

а k_0 – некоторая константа. Все входящие в уравнение (1) функции и коэффициенты предполагаются вещественными.

При $\varepsilon=0$ уравнение (1) является автономным:

$$L_0\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)x=M_0\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)f(x); \tag{2}$$

здесь $L_0(p),\ M_0(p)$ – взаимно простые вещественные многочлены:

$$L_0(p)=p^l+a_1p^{l-1}+\ldots+a_l,$$
$$M_0(p)=b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m.$$

Уравнение (2) описывает (см., например, [1, 2]) одноконтурную систему управления, состоящую из линейного звена с дробно-рациональной передаточной функцией $W(p)=M_0(p^2)/L_0(p^2)$ и нелинейной обратной связью $f(x)$. Уравнение (1) можно рассматривать как одноконтурную систему управления со слабоосциллирующими параметрами. Отметим также, что системы вида (2) часто называют системами Лурье.

Уравнения (1) и (2) имеют точку равновесия $x=0$. Соответствующие линеаризованные уравнения имеют вид

$$L\left(\frac{d^2}{dt^2},t,\varepsilon\right)x=k_0M\left(\frac{d^2}{dt^2},t,\varepsilon\right)x, \tag{3}$$

$$L_0\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)x=k_0M_0\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)x. \tag{4}$$

Отметим, что уравнения (1)–(4) содержат производные только четного порядка. Эти уравнения могут быть различными способами приведены к гамильтоновым формам (см., например, [1, 3]).

В настоящей статье изучается задача об устойчивости по Ляпунову решения $x=0$ уравнения (1) при малых ε в ситуациях параметрического резонанса для линеаризованного уравнения (3). Более развернутая постановка будет приведена ниже. Здесь же отметим, что задаче исследования устойчивости гамильтоновых систем с периодическим возмущением и, в частности, задаче о параметрическом резонансе посвящено множество работ. Большинство исследований основаны на методах нормализации гамильтоновых систем и на соответствующих преобразованиях гамильтонианов. В этом направлении получен ряд важных результатов (см., например, [4–8]).

Другие подходы исследования задачи о параметрическом резонансе основаны на классической теории возмущений линейных операторов. Следует указать на то, что интерес представляют не непосредственное применение методов общей теории (этот путь, как правило, чрезвычайно громоздок и поэтому практически не применяется), а модификации методов, максимально учитывающих специфику задачи, связанную с гамильтоновостью системы. Указанный подход также получил свое развитие в работах многих авторов (см., например, [9–11]).

Исследования продолжаются в различных направлениях. Здесь особо актуальными представляются разработки общих подходов исследования задачи о параметрическом резонансе в терминах исходных уравнений без необходимости предварительного (часто трудоемкого и громоздкого) их преобразования.

Необходимость исследования гамильтоновых систем возникает во многих задачах теории автоматического регулирования и управления. Часто параметры системы слабо осциллируют, что может привести к параметрическому резонансу (см., например, [12–14]). Здесь важны простые признаки, позволяющие провести анализ устойчивости системы. Именно к этому направлению относится настоящая работа.

2. Задача о параметрическом резонансе

Рассмотрим сначала задачу об устойчивости по Ляпунову линейного уравнения (3) или, что равносильно, задачу об устойчивости по Ляпунову нулевого решения $x = 0$ этого уравнения. Наряду с этой задачей будем рассматривать также задачу о сильной устойчивости линейного уравнения (4). Говорят (см., например, [9, 11]), что линейное уравнение (4) является *сильно* (*параметрически*) *устойчивым*, если оно и все его достаточно малые линейные периодические гамильтоновы возмущения устойчивы по Ляпунову. Другими словами, уравнение (4) является сильно (параметрически) устойчивым, если оно и близкие к нему возмущенные уравнения (3) являются устойчивыми по Ляпунову. Отметим также, что сильную устойчивость линейного уравнения (4) можно (в естественной постановке) рассматривать как частный случай его структурной устойчивости (см., например, [15]).

Из общих свойств гамильтоновых систем (см., например, [7, 9, 11]) следует, что если уравнение

$$L_0(p^2) - k_0 M_0(p^2) = 0 \tag{5}$$

имеет хотя бы один корень $p = p_0$ с ненулевой вещественной частью, то линейное уравнение (3) будет неустойчивым при всех малых $|\varepsilon|$. Неустойчивым будет и нулевое решение $x = 0$ нелинейного уравнения (1).

Основной интерес представляет случай, когда все корни уравнения (5) являются чисто мнимыми. Здесь имеет место следующий факт (см., например, [7]):

Теорема 1. *Пусть все корни уравнения* (5) *являются простыми и чисто мнимыми вида $p = i\omega_j$, при этом ни для одной пары из них не выпол-*

няется резонансное соотношение вида

$$\omega_j - \omega_h = 2\pi k/T, \quad j \neq h, \text{ при целых } k.$$

Тогда линейная система (3) *будет устойчивой при всех малых* $|\varepsilon|$.

В условиях теоремы 1 малые T-периодические возмущения коэффициентов автономного линейного уравнения (4) не влекут изменения характера его устойчивости: оно остается устойчивым. Другими словами, уравнение (4) является сильно устойчивым.

В настоящей статье будет изучаться вопрос об устойчивости линейного уравнения (3) и решения $x = 0$ уравнения (1) в ситуациях, когда условия теоремы 1 не выполняются. А именно, будут рассматриваться следующие случаи:

P_1. Уравнение (5) имеет кратный (кратности 2) корень $p = i\omega_0$, где $\omega_0 \geqslant 0$ и $\omega_0 \neq \pi k/T$ при натуральных k.

P_2. Уравнение (5) имеет два простых корня $p_1 = i\omega_1$ и $p_2 = i\omega_2$, где $\omega_1, \omega_2 > 0$, ω_1, $\omega_2 \neq \pi k/T$ при натуральных k, при этом

$$\omega_1 - \omega_2 = 2\pi k_0/T \qquad \text{при некотором натуральном } k_0. \tag{6}$$

P_3. Уравнение (5) имеет простой корень $p = i\omega_0$ такой, что

$$\omega_0 = \pi k_0/T \qquad \text{при некотором натуральном } k_0. \tag{7}$$

Будем предполагать, что остальные (отличные от $\pm i\omega_0$ в случаях P_1 и P_3 и от $\pm i\omega_1$ и $\pm i\omega_2$ в случае P_2) корни уравнения (5) являются простыми и чисто мнимыми вида $p = i\omega$, где $\omega \neq \pi k/T$ при целых k. При этом ни для одной пары из них не выполняется резонансное соотношение типа того, что указано в случае P_2.

Задачу исследования устойчивости линейной системы (3) в условиях типа P_1–P_3 обычно называют (см., например, [8–10]) *задачей о параметрическом резонансе*.

Как отмечалось выше, уравнения (1)–(4) различными способами приводимы к гамильтоновой форме. В частности, линейное уравнение (3) приводимо к виду

$$u' = J[A_0 + \varepsilon S(t)]u, \quad u \in \mathbb{R}^{2l}, \tag{8}$$

в котором A_0 – вещественная постоянная симметрическая матрица, $S(t)$ – вещественная, симметрическая и T-периодическая по t матрица; $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$; здесь I – единичная $(l \times l)$ матрица.

Рассмотрим задачу о параметрическом резонансе для линейной системы (3) в случаях P_1–P_3.

2.1. Случай P_1

В этом случае матрица JA_0 имеет пару кратных (кратности 2) собственных значений $\lambda = \pm i\omega_0$. Эти собственные значения могут быть неполупростыми или полупростыми. Ограничимся рассмотрением ситуации, когда собственные значения $\lambda = \pm i\omega_0$ матрицы JA_0 являются неполупростыми. В этой ситуации найдется пара линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^{2l}$ таких, что выполняются равенства

$$JA_0 e = i\omega_0 e, \quad JA_0 g = i\omega_0 g + e. \tag{9}$$

Векторы e и g определяются неоднозначно. В настоящей работе предлагается нормировать эти векторы специальным образом. В основе предлагаемой нормировки лежат формулы первого приближения (по степеням малого параметра ε) для мультипликаторов системы (8). Такие формулы (в существенно более общей постановке) были получены ранее авторами настоящей статьи (см. [16]); более детально о них говорится ниже в Приложении. Построение указанных формул базируется на специальной нормировке собственных и присоединенных векторов матрицы невозмущенной системы. Конечно, предлагаемые нормировки векторов, вообще говоря, не обеспечивают единственность выбора этих векторов. Однако полученные в данной работе основные результаты не зависят от выбора векторов в рамках данной нормировки.

Нужную нормировку векторов e и g из равенств (9) обеспечивает справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Имеют место соотношения $(e, Je) = 0$, $(e, Jg) \neq 0$, при этом число (e, Jg) является вещественным. Вектор g можно выбрать из условия выполнения равенства*

$$(g, Jg) = 0. \tag{10}$$

Ниже равенство (10) будем считать выполненным. Определим число ν и постоянную матрицу S_0:

$$\nu = \frac{1}{(e, Jg)}, \qquad S_0 = \int_0^T S(t)\, dt; \tag{11}$$

здесь $S(t)$ – матрица, участвующая в системе (8). Отметим, что число $(S_0 e, e)$ является вещественным.

Теорема 2. *Пусть $\varepsilon\nu(S_0 e, e) > 0$ $(\varepsilon\nu(S_0 e, e) < 0)$. Тогда при соответствующих малых $|\varepsilon|$ уравнение (3) устойчиво (неустойчиво).*

Пусть, например, $\nu > 0$, а матрица $S_1(t)$ такова, что $(S_0 e, e) > 0$. Тогда при $\varepsilon > 0$ уравнение (3) устойчиво, а при $\varepsilon < 0$ оно неустойчиво.

Доказательства теоремы 2 и других основных утверждений статьи приводятся в Приложении.

2.2. Случай P_2

В этом случае матрица JA_0 имеет две пары простых собственных значений $\lambda = \pm i\omega_1$ и $\lambda = \pm i\omega_2$ и, следовательно, найдется пара линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^{2l}$ таких, что выполняются равенства

$$JA_0 e = i\omega_1 e, \qquad JA_0 g = i\omega_2 g. \tag{12}$$

Существенную роль в дальнейших построениях играет

Л е м м а 2. *Векторы e, g можно нормировать в соответствии с одной и только одной парой равенств:*

$$(iJe, e) = (iJg, g) = 1 \tag{13}$$

или

$$(iJe, e) = (iJg, g) = -1; \tag{14}$$

или только

$$(iJe, e) = 1, \quad (iJg, g) = -1. \tag{15}$$

Первые два случая, т.е. когда имеет место нормировка (13) или (14), приводят (см., например, [9, 11]) к *дефинитному* мультипликатору $\mu_0 = e^{T\omega_1 i} = e^{T\omega_2 i}$ линейной "невозмущенной" системы

$$u' = JA_0 u, \quad u \in \mathbb{R}^{2l}. \tag{16}$$

Случай, когда имеет место нормировка (15), приводит к *индефинитному* мультипликатору μ_0. Обсудим в краткой форме соответствующие понятия.

Обозначим через $V(\varepsilon)$ матрицу монодромии "возмущенной" системы (8). Тогда $V_0 = e^{JA_0 T}$ – матрица монодромии "невозмущенной" системы (16). В рассматриваемом случае матрица V_0 имеет полупростое собственное значение μ_0 кратности 2. При этом в силу того, что $\omega_1, \omega_2 \neq \pi k/T$ при натуральных k, имеем $\mu_0 \neq \pm 1$. Согласно теории возмущений линейных операторов при малых $|\varepsilon|$ матрица $V(\varepsilon)$ имеет пару собственных значений $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ таких, что функции $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ являются непрерывно дифференцируемыми, причем $\mu_1(0) = \mu_2(0) = \mu_0$.

Мультипликатор μ_0 системы (16) является дефинитным, если при малых $|\varepsilon|$ функции $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ остаются на единичной окружности: $|\mu_1(\varepsilon)| = |\mu_2(\varepsilon)| = 1$. Если же существуют возмущения, при которых функции $\mu_1(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ покидают единичную окружность, то мультипликатор μ_0 является индефинитным.

Приведем два утверждения относительно свойств уравнения (4) в зависимости от того, какая имеет место нормировка.

Т е о р е м а 3. *Пусть имеет место нормировка* (13) *или* (14). *Тогда линейное уравнение* (4) *сильно устойчиво.*

Фактически, как это следует из приведенного в Приложении доказательства этой теоремы, в ее условиях мультипликатор μ_0 системы (16) является дефинитным.

Рассмотрим теперь случай, когда имеет место нормировка (15). Здесь в зависимости от конкретного вида малых T-периодических возмущений коэффициентов уравнения (4) оно может быть как устойчивым, так и неустойчивым.

Положим

$$\Delta_1 = (d_1 + d_2)^2 - 4|d_3|^2, \tag{17}$$

где

$$d_1 = (S_0 e, e)\,, \quad d_2 = (S_0 g, g)\,, \quad d_3 = \int\limits_0^T e^{-2\pi i k_0 t/T}\,(S(t)g, e)\,dt;$$

здесь S_0 – матрица (11).

Теорема 4. Пусть имеет место нормировка (15). *Пусть* $\Delta_1 > 0$ ($\Delta_1 < 0$). *Тогда уравнение* (3) *является устойчивым* (*неустойчивым*) *при всех малых ненулевых* $|\varepsilon|$.

2.3. Случай P_3

В этом случае матрица JA_0 имеет пару простых собственных значений $\lambda = \pm i\omega_0$. Тогда существует ненулевой вектор $e + ig \in \mathbb{C}^{2l}$ (где $e, g \in \mathbb{R}^{2l}$) такой, что выполняется равенство

$$JA_0(e + ig) = i\omega_0(e + ig). \tag{18}$$

Положим

$$\Delta_2 = d^2 + d_1 d_2, \tag{19}$$

где

$$d = \int\limits_0^T \left\{\cos(2\omega_0 t)\,(S(t)e, g) - \frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)\,[(S(t)g, g) - (S(t)e, e)]\right\} dt,$$

$$d_1 = \int\limits_0^T \left\{\cos^2(\omega_0 t)\,(S(t)g, g) + \sin^2(\omega_0 t)\,(S(t)e, e) + \sin(2\omega_0 t)\,(S(t)e, g)\right\} dt,$$

$$d_2 = d_1 - \{(S_0 e, e) + (S_0 g, g)\}\,;$$

здесь S_0 – матрица (11).

Теорема 5. Пусть $\Delta_2 < 0$ ($\Delta_2 > 0$). *Тогда уравнение* (3) *будет устойчивым* (*неустойчивым*) *при всех малых* $|\varepsilon|$.

Таким образом, в случае P_3 линейное уравнение (4) не обладает свойством сильной устойчивости.

3. Исследование нелинейного уравнения

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости нулевого решения $x = 0$ нелинейного гамильтонова уравнения (1) при малых $|\varepsilon|$. Здесь (как и в линейном случае) следует различать резонансный и нерезонансный случаи.

Изучению соответствующих задач посвящена обширная литература. Здесь одними из основных являются подходы, основанные на методах нормализации гамильтониана (см., например, [4–8]); эти подходы позволили решить ряд задач, представляющих важный практический и теоретический интерес.

Следует отметить, что особая необходимость соответствующих исследований возникает тогда, когда все мультипликаторы μ линеаризованного уравнения равны единице по модулю: $|\mu| = 1$. Проведенный выше анализ задачи о параметрическом резонансе для линейного уравнения (3) показывает, что при определенных условиях это уравнение при малых ненулевых ε имеет мультипликаторы $\mu(\varepsilon)$ такие, что $|\mu(\varepsilon)| \neq 1$. А именно, такая ситуация возникает в условиях теорем 2, 4 и 5 в той их части, где говорится о неустойчивости соответствующего линейного уравнения. Поэтому из указанных утверждений следует, что верна

Теорема 6. *Пусть в условиях случая P_1 выполнено неравенство $\varepsilon\nu(S_0 e, e) < 0$. Тогда при соответствующих малых ненулевых $|\varepsilon|$ решение $x = 0$ нелинейного уравнения* (1) *неустойчиво.*

Пусть в условиях случая P_2 имеет место нормировка (15) *и выполнено неравенство $\Delta_1 < 0$. Тогда при всех малых ненулевых $|\varepsilon|$ решение $x = 0$ нелинейного уравнения* (1) *неустойчиво.*

Пусть в условиях случая P_3 выполнено неравенство $\Delta_2 > 0$. Тогда при всех малых ненулевых $|\varepsilon|$ решение $x = 0$ нелинейного уравнения (1) *неустойчиво.*

Отметим, что приведенное утверждение фактически рассматривает только случай, когда линейное уравнение (4) не обладает свойством сильной устойчивости. При этом рассматриваются только такие возмущения, при которых линейное уравнение (3) является неустойчивым. В этом случае малые нелинейные добавки $\delta(x)$ не изменяют свойства неустойчивости решения $x = 0$ уравнения (1).

Ситуации, когда линейное уравнение (4) является сильно устойчивым или когда линейное уравнение (3) является устойчивым, уже требуют учета свойств малых нелинейных добавок $\delta(x)$ в уравнении (1).

4. Пример: устойчивость системы двух связанных осцилляторов

В качестве примера рассмотрим зависящую от малого параметра ε систему двух связанных осцилляторов, описываемых уравнениями (см., например, [12, 17])

$$\begin{cases} x'' + ax + by = f_1(x) + \varepsilon\,(x+y)\,(\sin t + 1), \\ y'' + y + x = f_2(y) + \varepsilon\,(x+y)\,(\cos t + 1). \end{cases} \tag{20}$$

Здесь a, b – некоторые постоянные коэффициенты, а нелинейности $f_1(x)$ и $f_2(y)$ удовлетворяют соотношениям: $|f_1(x)| = O(x^2)$, $|f_2(x)| = O(x^2)$ при $x \to 0$. Система (20) имеет состояние равновесия $x = y = 0$. Рассмотрим вопрос об устойчивости этого состояния при малых значениях ε в зависимости от коэффициентов a и b .

Система (20) может быть сведена к уравнению вида (1) при $l = 2$:

$$h'''' + (1 + a + \varepsilon\varphi(t))\, h'' + \big(a - b + \varepsilon\psi(t) + O(\varepsilon^2)\big)\, h = g(h),$$

в котором $\varphi(t) = -\sin t - \cos t - 2$, $\psi(t) = (b - a)(\cos t + 1)$, а нелинейность $g(h)$ удовлетворяет соотношению $|g(h)| = O(h^2)$ при $h \to 0$.

Будем рассматривать также линеаризованное уравнение

$$h'''' + (1 + a + \varepsilon\varphi(t))\, h'' + \big(a - b + \varepsilon\psi(t) + O(\varepsilon^2)\big)\, h = 0.$$

Это уравнение может быть приведено к гамильтоновой форме

$$u' = J\left(A_0 + \varepsilon S(t) + O(\varepsilon^2)\right) u, \qquad u \in \mathbb{R}^4; \tag{21}$$

здесь

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\psi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Необходимыми условиями устойчивости состояния равновесия $x = y = 0$ системы (20) являются неравенства:

$$a > -1, \quad 0 \leqslant a - b \leqslant (a+1)^2/4.$$

В этом случае все собственные значения матрицы JA_0 являются чисто мнимыми: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$; здесь

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{a + 1 + \sqrt{(a-1)^2 + 4b}}{2}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{a + 1 - \sqrt{(a-1)^2 + 4b}}{2}}. \tag{22}$$

Указанные в разделе 2 условия P_1–P_3 здесь могут быть представлены в виде:

P_1. $a > -1$, $b = -(a-1)^2/4$, $a + 1 \neq k^2/2$ при натуральных k;

P_2. $a > -1$, $-(a-1)^2/4 < b < a$, при этом числа (22) удовлетворяют условию (6);

P_3. $a > -1$, $-(a-1)^2/4 < b < a$, при этом одно из чисел (22) удовлетворяет условию (7).

Рассмотрим сначала случай P_1. Здесь матрица JA_0 имеет пару неполупростых (кратности 2) собственных значений $\pm i\sqrt{a+1}/\sqrt{2}$. Далее, векторы $e, g \in \mathbb{C}^4$, удовлетворяющие равенствам (9) и условиям леммы 1, здесь имеют вид

$$e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}i(a+1)^{3/2} \\ i\sqrt{a+1} \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}(a+1)/2 \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{bmatrix} -3(a+1)/2\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{a+1} \\ 3i\sqrt{a+1}/2 \end{bmatrix}.$$

Тогда число ν из (11) равно: $\nu = \frac{1}{(e,Jg)} = \frac{1}{4(a+1)}$. Поэтому получим $\nu(S_0 e, e) = \pi(a-3)/4$. Тогда из теорем 2 и 6 следует, что в случае P_1:

- при $a > 3$ и $b = -(a-1)^2/4$ состояние равновесия $x = y = 0$ системы (20) будет линейно устойчивым (неустойчивым в нелинейной постановке) при всех малых ненулевых $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 0$);
- при $-1 < a < 3$ и $b = -(a-1)^2/4$ состояние равновесия $x = y = 0$ системы (20) будет линейно устойчивым (неустойчивым в нелинейной постановке) при всех малых ненулевых $\varepsilon < 0$ ($\varepsilon > 0$) .

Рассмотрим теперь случай P_2. Пусть для определенности числа (22) удовлетворяют условию P_2 при $k_0 = 1$, т.е. $\omega_1 - \omega_2 = 1$. Тогда случай P_2 имеет место при выполнении соотношений

$$a > -1, \quad b = \frac{1}{4}a\,(4-a)\,, \quad a + 1 \pm \sqrt{2a+1} \neq \frac{k^2}{2} \ \text{ при натуральных } k.$$

Для того чтобы воспользоваться схемой, изложенной в разделе 2.2, построим собственные векторы e и g матрицы JA_0, удовлетворяющие равенствам (12):

$$e = \begin{bmatrix} -i\omega_1\omega_2^2 \\ -i\omega_1 \\ -1 \\ \omega_1^2 \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{bmatrix} -i\omega_1^2\omega_2 \\ -i\omega_2 \\ -1 \\ \omega_2^2 \end{bmatrix}.$$

Тогда $(iJe, e) > 0$, $(iJg, g) < 0$. Это означает, что мультипликатор $\mu_0 = e^{2\pi\omega_1 i} = e^{2\pi\omega_2 i}$ линейной системы (21) (при $\varepsilon = 0$) является индефинитным.

Далее нормируем эти векторы так, чтобы выполнялись равенства (15), т.е. вместо e и g определим векторы $e_1 = \alpha e$ и $g_1 = \beta g$, в которых коэффициенты α и β подбираются соответствующим образом. Подсчет показывает, что тогда число (17) равно $\Delta_1 = \pi^2(1-6a)/4(2a+1)^2$.

Тогда из теорем 5 и 6 следует, что в случае P_2:

- при $-1 < a < 1/6$ и $b = a(4-a)/4$ состояние равновесия $x = y = 0$ системы (20) будет линейно устойчивым при всех малых $|\varepsilon|$;
- при $a > 1/6$ и $b = a(4-a)/4$ состояние равновесия $x = y = 0$ системы (20) будет неустойчивым в нелинейной постановке при всех малых $|\varepsilon|$.

Рассмотрим, наконец, случай P_3. Пусть, для определенности, условию (7) удовлетворяет число $i\omega_1$ при $k_0 = 1$, т.е. $\omega_1 = 1/2$. Тогда случай P_3 имеет место при выполнении соотношений $a > -1$ и $b = 3(4a-1)/16$. Определим ненулевой вектор $e + ig \in \mathbb{C}^4$, удовлетворяющий равенству (18):

$$e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1/4 \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{bmatrix} (4a+3)/8 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Подсчет показывает, что тогда число (19) равно $\Delta_2 = -\pi^2(48a^2 + 1224a + 4475)/16\,384$. Это число при $a > -1$ является отрицательным. Отсюда и из теоремы 5 следует, что в случае P_3 состояние равновесия $x = y = 0$ системы (20) будет линейно устойчивым при всех малых $|\varepsilon|$.

5. Заключение

В статье предложены новые признаки устойчивости по Ляпунову систем Лурье со слабоосциллирующими параметрами в критических случаях. Основное внимание уделено изучению задачи о параметрическом резонансе в основных резонансах. Полученные результаты базируются на предложенных авторами новых формулах первого приближения для возмущений кратных дефинитных и индефинитных мультипликаторов линейных гамильтоновых систем. Основные результаты доведены до расчетных формул и алгоритмов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вспомогательные построения

Отметим, что теоремы 2–5, относящиеся к уравнениям (1) и (3), несложно переформулировать для соответствующих равносильных уравнений в гамильтоновых формах. Поэтому и доказательства этих утверждений можно провести для уравнений в гамильтоновых формах. Далее, исследование характера устойчивости решений можно свести к исследованию поведения мультипликаторов соответствующих линеаризованных уравнений при малых значениях $|\varepsilon|$. При этом используются спектральные свойства неавтономных линейных гамильтоновых систем (см., например, [7, 9–11]).

Приведем сначала некоторые вспомогательные утверждения, полученные ранее авторами настоящей статьи (см. [16]).

Пусть $A(\varepsilon)$ – вещественная квадратная $(2l \times 2l)$ матрица, гладко зависящая от параметра ε. Пусть сначала матрица $A_0 = A(0)$ имеет полупростое собственное значение λ_0 (вещественное или комплексное) кратности 2. Тогда при малых $|\varepsilon|$ матрица $A(\varepsilon)$ имеет два собственных значения $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что $\lambda^{(1)}(0) = \lambda^{(2)}(0) = \lambda_0$. Указанные функции непрерывно дифференцируемы и представимы в виде

$$\lambda^{(1)}(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1^{(1)} + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \lambda^{(2)}(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1^{(2)} + O(\varepsilon^{3/2}). \tag{П.1}$$

В рассматриваемом случае найдутся две пары линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^{2l}$ и $e^*, g^* \in \mathbb{C}^{2l}$ такие, что:

$$A_0 e = \lambda_0 e,\ A_0 g = \lambda_0 g, \quad A_0^* e^* = \overline{\lambda_0} e^*,\ A_0^* g^* = \overline{\lambda_0} g^*.$$

Векторы e, g, e^*, g^* можно нормировать в соответствии с равенствами

$$(e, e^*) = (g, g^*) = 1,\ (e, g^*) = (g, e^*) = 0. \tag{П.2}$$

Теорема 7. Коэффициенты $\lambda_1^{(1)}$ *и* $\lambda_1^{(2)}$ *в формулах* (П.1) *являются собственными значениями матрицы*

$$D = \begin{bmatrix} (A_1 e, e^*) & (A_1 g, e^*) \\ (A_1 e, g^*) & (A_1 g, g^*) \end{bmatrix},$$

где $A_1 = A'(0)$.

Пусть теперь матрица $A_0 = A(0)$ имеет неполупростое собственное значение λ_0 (вещественное или комплексное) кратности 2. Тогда при малых $|\varepsilon|$ матрица $A(\varepsilon)$ имеет два собственных значения $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ и $\lambda^{(2)}(\varepsilon)$ таких, что $\lambda^{(1)}(0) = \lambda^{(2)}(0) = \lambda_0$. Указанные функции непрерывны и представимы в виде разложения Пюизье:

$$\lambda^{(1)}(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon^{1/2}\lambda_1^{(1)} + O(\varepsilon), \quad \lambda^{(2)}(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon^{1/2}\lambda_1^{(2)} + O(\varepsilon). \tag{П.3}$$

В рассматриваемом случае найдутся две пары линейно независимых векторов $e, g \in \mathbb{C}^{2l}$ и $e^*, g^* \in \mathbb{C}^{2l}$ такие, что

$$A_0 e = \lambda_0 e,\ A_0 g = \lambda_0 g + e, \quad A_0^* e^* = \overline{\lambda_0} e^*,\ A_0^* g^* = \overline{\lambda_0} g^* + e^*.$$

Векторы e, g, e^*, g^* можно нормировать в соответствии с равенствами

$$(e, g^*) = (g, e^*) = 1,\ (e, e^*) = (g, g^*) = 0. \tag{П.4}$$

Теорема 8. Коэффициенты $\lambda_1^{(1)}$ *и* $\lambda_1^{(2)}$ *в разложениях* (П.3) *– это числа*

$$\lambda_1^{(1)} = \sqrt{(A_1 e, e^*)}, \quad \lambda_1^{(2)} = -\lambda_1^{(1)};$$

здесь $A_1 = A'(0)$.

Отметим, что матрица монодромии $V(\varepsilon) = X(T)$ ($X(t)$ – фундаментальная матрица решений) системы (8) представима (см., например, [16]) в виде

$$V(\varepsilon) = V_0 + \varepsilon V_1 + V_2(\varepsilon); \tag{П.5}$$

здесь $V_0 = e^{JA_0T}$,

$$V_1 = V'(0) = e^{JA_0T}\int_0^T e^{-JA_0\tau} J S_1(\tau) e^{JA_0\tau}\, d\tau, \tag{П.6}$$

а $V_2(\varepsilon)$ – непрерывно дифференцируемая матрица, удовлетворяющая условию $\|V_2(\varepsilon)\| = O(|\varepsilon|^2)$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство теоремы 2.

По векторам e и g из равенств (9) определим новые векторы:

$$e_1 = e, \qquad g_1 = \frac{1}{T\mu_0} g, \qquad e_1^* = -aJe, \qquad g_1^* = \frac{1}{T\overline{\mu_0}} \tau Jg,$$

где τ – ненулевой коэффициент (вообще говоря, комплексный). Эти векторы удовлетворяют равенствам:

$$V_0 e_1 = \mu_0 e_1, \quad V_0 g_1 = \mu_0 g_1 + e_1, \quad V_0^* e_1^* = \overline{\mu_0} e_1^*, \quad V_0^* g_1^* = \overline{\mu_0} g_1^* + e_1^*.$$

При этом векторы $e_1,\ g_1,\ e_1^*,\ g_1^*$ можно нормировать в соответствии с аналогами равенств (П.4), положив $\tau = T\overline{\mu_0}/(e, Jg)$.

Для завершения доказательства теоремы 2 остается применить утверждение теоремы 8 к матрице (П.5).

Доказательство теоремы 3.

Ограничимся приведением доказательства теоремы 3; теорема 4 доказывается аналогично.

В силу теоремы 7 коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в разложениях (П.3) – это собственные значения матрицы

(П.7) $$D = \begin{bmatrix} (V_1 e, e^*) & (V_1 g, e^*) \\ (V_1 e, g^*) & (V_1 g, g^*) \end{bmatrix};$$

здесь $V_1 = V'(0)$.

Пусть в условиях теоремы 3 для определенности имеет место нормировка (13). Тогда в качестве векторов e^* и g^* в матрице (П.7) будем использовать векторы

(П.8) $$e^* = -iJe, \qquad g^* = -iJg,$$

где e и g – векторы из (12). Векторы (П.8) являются линейно независимыми собственными векторами матрицы $(JA_0)^*$, отвечающими собственному значению $\lambda = -\omega_0 i$, т.е. для них выполнены равенства

$$(JA_0)^* e^* = -\omega_0 i e^*, \quad (JA_0)^* g^* = -\omega_0 i g^*.$$

В силу равенств (13)–(15) векторы e, g, e^*, g^* удовлетворяют условиям нормировки (П.2).

Подставляя матрицу (П.6) в (П.7) и учитывая равенства (П.8), установим справедливость теоремы 3.

Доказательство теоремы 5.

В силу теоремы 7 коэффициенты $\mu_1^{(1)}$ и $\mu_1^{(2)}$ в разложениях (П.3) – это собственные значения матрицы (П.7), в которой $V_1 = V'(0)$, векторы e и g

берутся из равенства (18). В качестве векторов e^* и g^* будем использовать векторы

$$e^* = \nu J g, \quad g^* = \nu J e, \tag{П.9}$$

где $\nu = \frac{1}{(e, Jg)}$.

Элементы матрицы (П.7) могут быть вычислены с использованием формул (П.6) и (П.9). Проведя необходимые преобразования, установим справедливость теоремы 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонов Г.А.* Теория управления. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006.
2. *Воронов А.А.* Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985.
3. *Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* О гамильтоновости систем Лурье // АиТ. 2000. № 8. С. 25–29.
   Krasnosel'skii A.M., Rachinskii D.I. On Hamiltonian Nature of Lurie Systems // Autom. Remote Control. 2000. V. 61. No. 8. P. 1259–1262.
4. *Брюно А.Д.* О типах устойчивости в системах Гамильтона // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2020, 021, 24 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-2.
5. *Брюно А.Д.* Нормальная форма системы Гамильтона с периодическим возмущением // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2019, 057, 27 с.
   https://doi.org/10.20948/prepr-2019-57.
6. *Журавлев В.Ф., Петров Ф.Г., Шундерюк М.М.* Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: Ленанд, 2015.
7. *Маркеев А.П.* Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.– Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2009.
8. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987.
9. *Meyer K., Hall G., Offin D.* Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem. 2nd ed. / V. 60 of Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 2009.
10. *Seyranian A.P., Mailybaev A.A.* Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications. New Jersey: World Scientific, 2003.
11. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
12. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Либроком, 2015.
13. *Lanchares V.* On the stability of Hamiltonian dinamical systems / Monografias Matematicas Garca de Galdeano., 2014. P. 155–166.
14. *Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Музафаров С.М., Нуров И.Д.* Бифуркация Андронова-Хопфа со слабоосциллирующими параметрами // АиТ. 2008. № 1. С. 39–44.
    Yumagulov M.G., Ibragimova L.S., Muzafarov S.M., Nurov I.D. The Andronov-Hopf Bifurcation with Weakly Oscillating Parameters // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 1. P. 36–41.

15. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2009.
16. *Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Белова А.С.* Методы исследования устойчивости линейных периодических систем, зависящих от малого параметра // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Тем. обзор. Т. 163. 2019. С. 113–126.
17. *Поляк Б.Т., Квинто Я.И.* Устойчивость и синхронизация осцилляторов: новые функции Ляпунова // АиТ. 2017. № 7. С. 76–85.

    Polyak B.T., Kvinto Ya.I. Stability and Synchronization of Oscillators: New Lyapunov Functions // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 7. P. 1234–1242.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Маликовым.

Поступила в редакцию 19.06.2021

После доработки 28.10.2021

Принята к публикации 20.11.2021