Автоматика и телемеханика, № 2, 2022

Нелинейные системы

© 2022 г. В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhaivn@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

РЕЖИМ ЦИКЛА В СВЯЗАННОЙ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЕ[1]

Предлагается схема управления колебаниями, в которой в рамках связанной системы режим цикла Ван-дер-Поля навязывается консервативной системе, допускающей семейство периодических движений. Находится действующее управление, строится цикл, определяется область притяжения к циклу, даются закон управления и алгоритм асимптотического выхода связанной системы на режим цикла.

Ключевые слова: уравнение Ван дер Поля, консервативная система, семейство колебаний, управление, цикл, схема управления, область притяжения.

DOI: 10.31857/S0005231022020064

1. Введение. Постановка задачи

При исследовании модели, содержащей связанные подсистемы (МССП), в [1] предлагается выбирать связи, обеспечивающие одновременно существование, устойчивость и стабилизацию колебаний связанной системы. Тогда связь действует как управление, а задача стабилизации решается естественным образом, т.е. без привлечения других управлений. В частности, связь может замыкать систему на себя: конструируется управляемая система с обратной связью.

Пример такого управления находится в уравнении Ван дер Поля, в котором действие ε-малой силы на линейный осциллятор приводит к существованию орбитально асимптотически устойчивого цикла. Само управление дается нелинейной диссипацией, линейной по скорости и приложенной в текущей точке траектории осциллятора Ван дер Поля. В результате через обратную связь системе навязывается режим цикла. При этом действие управления оказывается глобальным уже с малым ε. Физически диссипация реализуется в мягком режиме функционирования триода.

Возникает мысль использовать осциллятор Ван дер Поля в рамках слабо связанной МССП для навязывания режима цикла другой системе. Реализация этой идеи приведет к конструированию управляемой системы, в качестве рабочего режима которой будет притягивающий цикл.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00146а).

В данной статье рассматривается система, включающая в себя уравнение Ван дер Поля и слабо связанную с ней консервативную механическую систему, в которой одночастотные колебания образуют семейство Σ по параметру h — постоянной интеграла энергии. В системе осциллятор Ван дер Поля генерирует одностороннюю связь — управление, настраивающую консервативную систему на режим орбитально асимптотически устойчивого колебания, близкого к одному колебанию из Σ. Цикл представляет собой изолированное периодическое решение автономной системы. Связь не зависит явно от времени в каждой инвариантной области фазового пространства: связанная система кусочно-непрерывна.

Уравнение Ван дер Поля широко используется в составе связанных систем (см., например, [2–4]) при моделировании нелинейных колебаний. Однако этот осциллятор не рассматривался в качестве управляющего звена системы управления. В [5] решалась задача об орбитальной стабилизации (в малом) периодических решений малоприводны́х нелинейных механических систем (с числом независимых при́водов на единицу меньше числа степеней свободы неуправляемой консервативной системы). Синтезированный нелинейный закон управления с обратной связью зависит от времени.

2. Связанная система

Исследуется связанная система

$$\begin{aligned}
&\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(1 - Kx^2)\dot{x},\\
(1)\qquad &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = k\varepsilon(1 - Kx^2)u_s(q, \dot{q}), \quad s = 1, \ldots, n,\\
&L = T - \Pi(q), \quad T = \frac{1}{2}\sum_{s=1, j=1} a_{sj}(q)\dot{q}_s\dot{q}_j.
\end{aligned}$$

В уравнении Ван дер Поля через ω обозначена частота линейного осциллятора, K – параметр, принимающий положительные значения. Действие осциллятора Ван дер Поля на механическую систему передается через функцию $(1-Kx^2)$, которая вместе с множителями $k\varepsilon u_s$ осуществляет одностороннюю связь между двумя подсистемами: осциллятор Ван дер Поля генерирует связь–управление для консервативной системы. Функции u_s зависят от векторов обобщенных координат q и скоростей $\dot{q}$. Для слабой связи параметр ε принимает близкие к нулю значения; параметр также может интерпретироваться как малый коэффициент регулятора. Число k равно 1 или (-1).

При $\varepsilon = 0$ система (1) распадается на независимые подсистемы. Фазовое пространство консервативной системы симметрично относительно неподвижного множества $M = \{q, \dot{q} : \dot{q} = 0\}$. На одночастотных колебаниях скорость $\dot{q}$ в некоторый момент времени обращается в нуль, а траектория пересекает M. Когда пересечение происходит в двух разных точках множества M, получается симметричное периодическое движение (СПД). Необходимые и достаточные условия существования СПД периода T записываются в виде:

$$\dot{q}_s(q_1^0, \ldots, q_n^0, \tau) = 0, \quad \tau = 0,\ T/2, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где через $q^0 = (q_1^0, \ldots, q_n^0)$, $q^0 \in M$, обозначается начальная точка СПД при $t = 0$.

При $\tau = 0$ система (2) совместна. При $\tau = T/2$ получается система из n уравнений с $n+1$ неизвестными. Следовательно, СПД всегда образуют семейство Σ, например, по параметру T.

Определение. Случай rank $||\partial\dot{q}(q^0, T/2)/\partial q^0|| = n$ *называется невырожденным для симметричного периодического движения, а само СПД — невырожденным.*

Согласно определению семейство колебаний математического маятника будет невырожденным, а колебания линейного осциллятора — вырожденные.

Невырожденные СПД в фазовом пространстве заполняют инвариантное двумерное многообразие; период на семействе СПД монотонно зависит от одного параметра [6]. Такая ситуация типична для семейства невырожденных СПД. В консервативной системе за параметр h семейства колебаний Σ обычно выбирается постоянная интеграла энергии; на Σ обобщенная координата описывается формулой $q = \varphi(h, t+\gamma)$, где γ – временной сдвиг на траектории. При $\gamma = 0$ координата q дается четной функцией времени t.

Предполагается, что рассматриваемая консервативная система допускает семейство Σ невырожденных СПД. В фазовом пространстве семейство Σ заполняет инвариантное многообразие, которое обозначается через $\tilde{\Sigma}$. Для системы с одной степенью свободы $\tilde{\Sigma}$ будет областью на фазовой плоскости. В случае $n > 1$ выделение $\tilde{\Sigma}$ представляет собой отдельную задачу.

3. Цикл в случае консервативной системы с одной степенью свободы

Исследуется система

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(1 - Kx^2)\dot{x}, \\ &\ddot{y} + f(y) = k\varepsilon(1 - Kx^2)u(y, \dot{y}), \quad u = \dot{y}. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь величина положительной постоянной ω никоим образом не влияет на создание нелинейной диссипации в мягком режиме функционирования триода, которая определяется только характеристикой триода; постоянная K дает амплитуду порождающего колебания в уравнении Ван дер Поля и находится далее. При $\varepsilon = 0$ решение уравнения Ван дер Поля имеет вид $x(A, t+\beta) = A\cos\omega(t+\beta)$, где β – временной сдвиг на траектории. Амплитуда колебания A находится из уравнения

$$\int_0^{2\pi/\omega} (1 - Kx^2)\dot{x}\psi_x dt = 0, \tag{4}$$

в котором для линейного осциллятора сопряженное решение $\psi_x = \dot{x}$. Подставляя решение уравнения Ван дер Поля при $\varepsilon = 0$ в (4), находим $A = \sqrt{2/K}$. Тогда цикл Ван дер Поля описывается формулой

$$x = x^c(t+\beta) = \sqrt{2/K}\cos\omega(t+\beta) + O(\varepsilon).$$

Второе уравнение в (3) при $\varepsilon = 0$ допускает семейство колебаний $y = \varphi(h, t+\gamma)$, в котором период $T(h)$ монотонно зависит от параметра h. При $\varepsilon > 0$ из-за наличия связи для переменной y получается неавтономное возмущенное уравнение. Для него периодическое решение, отвечающее циклу $x^c(t+\beta)$ Ван дер Поля, находится при подстановке во второе уравнение в (3) функции $x = x^c(t+\beta)$. Это решение должно быть периодическим для произвольного β. Сам вопрос существования периодического решения по переменной y решается с помощью амплитудного уравнения

$$\int\limits_0^{2\pi/\omega} (1 - Kx^2)\dot{y}\psi_y dt = 0, \tag{5}$$

где ψ_y – периодическое решение линейного сопряженного уравнения: $\psi_y = \dot{y}$ (см. [1]).

Уравнение (5) можно рассматривать вместе с уравнением (4) для одновременного нахождения неизвестных A и h. При этом используются порождающие при $\varepsilon = 0$ решения. После подстановки их в (5) и учета $\gamma = \beta + \nu$ получается амплитудное уравнение

$$I(h,\nu) \equiv \int\limits_0^{2\pi/\omega} \rho(h,\nu,t+\beta)dt = 0, \tag{6}$$
$$\rho(h,\nu,t+\beta) = [1 - 4\cos^2\omega(t+\beta)]\dot{\varphi}^2(h, t+\beta+\nu).$$

Видно, что уравнение (6) инвариантно относительно замены $t + \beta \to t$. Поэтому можно ограничиться рассмотрением значения $\beta = 0$. В результате получается, что уравнение (6) содержит две неизвестные h и ν.

Пусть порождающему решению отвечает значение параметра $h = h^*$, для которого период СПД равен $T^* = T(h^*) = 2\pi/\omega$. Функция $I(h^*, \nu)$ является π/ω-периодической по ν, уравнение

$$I(h^*,\nu) \equiv \int\limits_0^{2\pi/\omega} (1 - 4\cos^2\omega t)\dot{\varphi}^2(h^*, t+\nu)dt = 0 \tag{7}$$

служит для нахождения значения сдвига ν, отвечающего периодическому решению связанной системы (3) для СПД с значением $h = h^*$. Оно содержит параметр h^*. В зависимости от значения h^* уравнение (7) может иметь или не иметь корень. Существование корня означает, что в связанной системе (3) осуществляется захват частоты СПД, для которого реализуется режим цикла. Сам захват реализуется путем изменения частоты ω осциллятора Ван дер Поля.

В силу симметричности фазового пространства консервативной системы уравнение (7) достаточно рассматривать в промежутке $[0, \pi/\omega)$. В приложении доказывается, что в этом промежутке уравнение (7) допускает единственный изолированный корень.

Примеры показывают, что возможность захвата зависит от свойств семейства СПД. Так, ляпуновское семейство для уравнения

$$\ddot{y} + \omega^2 y - e y^3 = 0, \quad \omega, e = \mathrm{const}, \quad e > 0,$$

рождающееся из положения равновесия, описывается формулами (см. [7, гл. 7, § 3])

$$y = c\cos\tau + c^3 y_3(\tau) + \ldots, \quad y_3 = \frac{e}{32\omega^2}(\cos\tau - \cos 3\tau),$$
$$t = \frac{\tau}{\omega}\left(1 + \frac{3e}{8\omega^2}c^2 + \ldots\right).$$

Поэтому условиям захвата

$$c_1 c_3 < 0 \quad (c_1 = -c, \quad c_3 = c^3 e/96),$$

приведенным в Приложении, удовлетворяют все СПД семейства: для ляпуновского семейства значение c мало.

С другой стороны, СПД ляпуновского семейства для уравнения

$$\ddot{y} + \omega^2 y - e y^2 = 0, \quad \omega, e = \mathrm{const}, \quad e > 0,$$

не захватываются осциллятором Ван дер Поля. Это следует из вида решения

$$y = c\cos\tau + \frac{c^2 e}{6\omega^2}(3 - 2\cos\tau - \cos 2\tau) +$$
$$+ \frac{c^3 e^2}{144\omega^4}(-48 + 29\cos\tau + 16\cos 2\tau + 3\cos 3\tau) + \ldots,$$
$$t = \frac{\tau}{\omega}\left(1 + \frac{5e^2}{12\omega^4}c^2 - \frac{5e^2}{18\omega^4}c^3 + \ldots\right),$$

вычисленного в [7, гл. 7, § 3], и нарушения условия захвата:

$$c_1 c_3 > 0 \quad \left(c_1 = -c, \quad c_3 = -c^3 e^2 / \left(144 k^4\right)\right).$$

Существование изолированного корня уравнения (7) будет только необходимым условием существования цикла связанной системы (3). Достаточное условие состоит в простоте корня $h = h^*$ амплитудного уравнения (6) при $\nu = \nu^*$.

Вычислим при $h = h^*$ производную

$$\left(\frac{\partial \ddot{y}(h, t+\nu^*)}{\partial h}\right)_{h=h^*} = -\chi t \dot{y}(h^*, t+\nu^*) + v(t),$$

$$\chi = \frac{1}{T^*}\left(\frac{dT}{dh}\right)_{h=h^*}, \quad v(t) = v(t + 2\pi/\omega).$$

Тогда в силу периодичности функции $v(t)$ получается, что

$$(8) \qquad \left(\frac{dI(h,\nu^*)}{dh}\right)_{h=h^*} = -\chi \int\limits_0^{2\pi/\omega} t\rho(h^*, \nu^*, t)dt \neq 0, \quad \int\limits_0^{2\pi/\omega} \rho(h^*, \nu^*, t)dt = 0$$

— условие простоты корня. Ряд для функции $\rho(h^*, \nu^*, t)$ приводится в Приложении. С использованием данного там выражения вычисляется, что

$$(9) \qquad \left(\frac{dI(h,\nu^*)}{dh}\right)_{h=h^*} = \chi \frac{2\pi \sin 2\omega\nu^*}{\omega^2}\left(\frac{b_2}{4} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m}{m^2-1} b_{2m}\right).$$

Здесь в правых скобках выписана сумма сходящего числового ряда, которая получается как значение ряда Фурье из косинусов с нулевым свободным членом, когда все косинусы принимают равные 1 значения; $b_2 < 0$.

Условие (8) выполняется для невырожденного СПД.

Простой корень h^* уравнения $I(h, \nu^*) = 0$ приводит согласно [7, гл. 6, § 6] к изолированному периодическому решению второго уравнения в (3), которое получается при подстановке функции $x = x^c(t + \beta)$ в правую часть (3). Это решение существует при произвольном сдвиге β в решении уравнения Ван дер Поля, что для связанной системы (3) означает существование цикла.

Теорема 1. Связанная система (3) *имеет единственный цикл*

$$x^c(t+\beta) = \sqrt{2/K}\cos\omega(t+\beta) + O(\varepsilon),$$
$$y^c(t+\nu^*+\beta) = y(h^*, t+\nu^*+\beta) + O(\varepsilon),$$
$$\nu^* \neq 0.$$

Замечание 1. Введение в систему (3) ε-связи приводит к качественным изменениям в поведении консервативной системы: на плоскости $(y, \dot{y})$ возникает описываемая функцией $y^c(t+\nu^*+\beta)$ инвариантная кривая, которая соответствует циклу Ван дер Поля.

Замечание 2. Уравнение Ван дер Поля генерирует такую связь–управление, что режим цикла Ван дер Поля переносится на связанную систему.

Замечание 3. Вывод теоремы 1 не зависит от знака числа k в связанной системе (3).

4. Стабилизация цикла

В уравнении Ван дер Поля цикл – кривая C_x достигается из любой, исключая равновесие, начальной точки на фазовой плоскости Π_x. Область внутри C_x обозначается через Ω_x. Энергия линейного осциллятора E_x в уравнении Ван дер Поля меняется по закону

$$\text{(10)} \qquad \frac{dE_x}{dt} = \varepsilon(1 - Kx^2)\dot{x}^2, \quad E_x = (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)/2.$$

При $\varepsilon = 0$ энергия $E_x = h_x$ и $x = A\cos\omega(t+\beta)$: $h_x = A^2$. Согласно (10) приращение ΔE_x функции E_x на отрезке $t \in [0, 2\pi/\omega]$ дается равенством

$$\Delta E_x = \varepsilon A^2 \omega^2 \int\limits_0^{2\pi/\omega} \left[(1 - KA^2\cos^2\omega t)\sin^2\omega t + O(\varepsilon)\right] dt.$$

Отсюда получается, что $\Delta E_x > 0$, когда $A < \sqrt{2/K} - O(\varepsilon)$, и $\Delta E_x < 0$, когда $A > \sqrt{2/K} + O(\varepsilon)$. Поэтому формулу можно записать в виде

$$\text{(11)} \qquad \Delta E_x(h_x) = \varepsilon\alpha_x(h_x)\Delta h_x + o(\varepsilon),$$

где Δh_x – приращение энергии линейного осциллятора, а $\alpha_x(h_x) < 0$. Равенство (11) выражает закон приближения системы к режиму цикла. В $O(\varepsilon)$-окрестности цикла $\alpha_x(h_x) = \alpha_x^* + O(\varepsilon)$, где $\varepsilon\omega/2\pi\alpha_x^*$ – будет характеристическим показателем (ХП) цикла Ван дер Поля. Поэтому из формулы $\varepsilon\alpha_x^* = dE_x(h_x^*)/dh_x$ следует справедливость (11) также в $O(\varepsilon)$-окрестности цикла: циклу уравнения Вандер Поля соответствует значение h_x^* энергии линейного осциллятора. На цикле $\Delta E_x = 0$, и притяжение траектории к циклу сопровождается предельным переходом $\Delta E_x \to 0$.

Закон изменения полной механической энергии E_y для второго уравнения системы (3) такой

$$\text{(12)} \qquad \frac{dE_y}{dt} = k\varepsilon(1 - Kx^2)\dot{y}^2, \quad E_y = \frac{\dot{y}^2}{2} + \int f(y)dy.$$

На плоскости $\Pi_y = (y, \dot{y})$ рассматривается многообразие $\tilde{\Sigma}$, заполненное семейством Σ. Цикл связанной системы (3) представляется на Π_y замкнутой кривой C_y, соответствующей кривой $C_x \in \Pi_x$. На цикле $E_y(h^*, t)$ становится $(2\pi/\omega)$-периодической функцией с нулевым средним значением. Область внутри кривой C_y обозначается через Ω_y.

Для взаимного изменения функций E_x и E_y из законов (10), (12) выводится равенство

$$\text{(13)} \quad k\dot{y}^2 dE_x = \dot{x}^2 dE_y \quad \left(dE_x = \dot{x}^2 d\sigma, \quad dE_y = k\dot{y}^2 d\sigma, \quad d\sigma = \varepsilon(1 - Kx^2)dt\right),$$

справедливое при $(1 - Kx^2) \neq 0$. При $k = 1$ оно выражает одновременное возрастание или убывание энергии осциллятора и энергии консервативной системы.

Пусть рассматривается случай, когда на семействе Σ период $T(h)$ возрастает, т.е. число $\chi > 0$. Тогда из (13) получается, что приращение энергии ΔE_y на отрезке $t \in [0, T^*]$ в области Ω_y (вне области Ω_y) удовлетворяет неравенству $\Delta E_y > 0$ ($\Delta E_y < 0$). В результате точка $(y, \dot{y}) \in \Pi_y$ приближается к ε-окрестности кривой C_y по закону

$$\Delta E_y = \varepsilon \alpha_y(h) \Delta h + o(\varepsilon), \quad \alpha_y(h) < 0. \tag{14}$$

Равенство (13) справедливо на всем многообразии $\hat{\Sigma}$, поэтому формула (14) остается справедливой и в ε-окрестности кривой C_y. На кривой C_y приращение $\Delta E_y = 0$; притяжение точки $(y, \dot{y})$ к кривой C_y сопровождается предельным переходом $\Delta E_y \to 0$.

Таким образом, в случае $\chi > 0$, $k = 1$ к циклу притягиваются траектории из области, где $\delta > 0$, $\delta = (h_x - h_x^*)(h - h^*)$.

При $k = -1$ из (13) получается, что скорости изменения энергии осциллятора и консервативной системы имеют разные знаки. Значит, для приращения ΔE_y в области Ω_y справедливо неравенство $\Delta E_y < 0$, а вне Ω_y получается $\Delta E_y > 0$. В области Ω_x энергия линейного осциллятора $h_x < h_x^*$, и в области Ω_y энергия консервативной системы $h < h^*$. Поэтому притяжение к циклу возможно с точкой $(x, \dot{x}) \in \Omega_x$ ($(x, \dot{x}) \notin \Omega_x$) только с уменьшением (увеличением) энергии E_y, т.е. $\Delta E_y < 0$ ($\Delta E_y > 0$) и $(y, \dot{y}) \notin \Omega_y$ ($(y, \dot{y}) \in \Omega_y$). Это происходит из областей, где $\delta < 0$.

Аналогичный анализ справедлив для семейства Σ, на котором период $T(h)$ убывает ($\chi < 0$). В результате на основе проведенного исследования строится система стабилизации цикла, обеспечивающая притяжение траекторий связанной системы из области $\Pi_x \bigotimes \hat{\Sigma}$.

Таким образом, для связанной системы (3) справедлива теорема 2.

Теорема 2. Пусть при $\varepsilon = 0$ консервативная система в (3) допускает многообразие $\tilde{\Sigma}$, заполненное семейством невырожденных симметричных периодических движений, содержащим колебание с периодом $2\pi/\omega$. Тогда связанная система (3) имеет единственный притягивающий цикл $C_x \bigotimes C_y$. На плоскости $(y, \dot{y})$ область притяжения к C_y совпадает с $\tilde{\Sigma}$. При этом управление в каждой области фазового пространства, где $\delta \neq 0$, подчиняется закону

$$\operatorname{sgn}(\chi)\operatorname{sgn}(\delta) = \operatorname{sgn}(k), \tag{15}$$

где $\operatorname{sgn}(a)$– знак числа $a \neq 0$.

Замечание 4. В условиях выполнения теоремы 2 все траектории связанной системы (3) в четырехмерном пространстве притягиваются к циклу, который состоит из цикла Ван дер Поля – кривой C_x на плоскости Π_x и замкнутой кривой C_y на плоскости Π_y.

Замечание 5. Связанная автономная система (1) в каждой из четырех инвариантных областей фазового пространства описывается своими уравнениями, отличающимися знаком k. Общей границей этих областей является цикл.

Замечание 6. Из теоремы 2 следует, что производная (9) отрицательна.

Поясним выводы теоремы 2 в случае $k = 1$ с использованием приближенных формул для решений подсистем в (3). Решение уравнения Ван дер Поля с начальной точкой на плоскости Π_x представляется на отрезке $t \in [0, T^*]$ в виде $x = A\cos\omega(t+\beta) + O(\varepsilon)$, а решение консервативной системы для любой точки из $\tilde{\Sigma}$ дается формулой $y = \varphi(h, t+\gamma) + O(\varepsilon)$. Из этих формул получаются все точки плоскости Π_x и многообразие $\tilde{\Sigma}$. Положим $\tilde{\gamma} = \gamma - \beta$.

Рассматривается отображение G пространства $\Pi_x \bigotimes \Pi_y$ на себя на отрезке $t \in [0, T^*]$. Оно оставляет неподвижным цикл $C_x \bigotimes C_y$ системы (1), а энергия E_y меняется по формуле (12). Приращение ΔE_y равно

$$\Delta E_y = \varepsilon\Delta + o(\varepsilon), \quad \Delta = \int\limits_0^{T^*} \left[1 - \frac{KA^2}{2} - \frac{KA^2}{2}\cos 2\omega t\right] \dot{\varphi}^2(h, t+\tilde{\gamma})dt,$$

и согласно (12) знак приращения ΔE_y на отображении G сохраняется. Равенство $\Delta = 0$ совпадает с амплитудным уравнением (6), оно выполняется на кривой C_y. Для остальных точек $\Pi_x \bigotimes \tilde{\Sigma}$ по теореме 2 выполняется условие $\Delta \neq 0$; оно записывается в виде

$$\frac{\int\limits_0^{T(h^*)} \cos 2\omega t \dot{\varphi}^2(h, t+\tilde{\gamma})dt}{\int\limits_0^{T(h^*)} \dot{\varphi}^2(h, t+\tilde{\gamma})dt} \neq \frac{2 - KA^2}{KA^2}. \tag{16}$$

Полученное неравенство (16) не зависит от амплитуды колебаний на семействе Σ и предъявляется только к амплитуде колебаний линейного осциллятора. Получается, что для каждой точки многообразия $\tilde{\Sigma}$ (левая часть неравенства), не принадлежащей $O(\varepsilon)$-окрестности кривой C_y, всегда найдется область амплитуд A осциллятора (правая часть неравенства) такая, что траектория второго уравнения в (3) достигнет $O(\varepsilon)$-окрестности кривой C_y.

В предложенной схеме (3) выбором частоты ω стабилизируются колебания связанной системы, отвечающей СПД консервативной системы с периодом $T(h^*) = 2\pi/\omega$. При этом амплитуда порождающих колебаний в уравнении Ван дер Поля равняется $A = 2/\sqrt{K}$. Поэтому в схеме (3) за счет выбора параметра K можно стабилизировать колебания консервативной системы с большими амплитудами: амплитуда цикла Ван дер Поля может быть малой. С другой стороны, схему управления с малым K можно применять для стабилизации микроколебаний. Так, электрический контур Ван дер Поля становится основным управляющим звеном в системе управления колебаниями.

5. Консервативная система произвольного порядка

В случае системы с одной степенью свободы управление дается линейной по скорости функцией, обеспечивающей диссипацию в каждой текущей точке цикла. Такой же подход применяется для системы с $n > 1$. В связанной системе (1) управление выбирается с функцией

$$
u_s = \sum_{j=1}^{n} r_{sj}\dot{q}_j, \quad s = 1, \dots, n, \tag{17}
$$

где $R = ||r_{sj}||$ – постоянная матрица. Тогда изменение полной механической энергии $E_q = T + \Pi$ консервативной системы происходит по закону

$$
\frac{dE_q}{dt} = k\varepsilon(1 - Kx^2)\hat{R}(\dot{q}, \dot{q}), \quad \hat{R} = \sum_{s=1,j=1}^{n} r_{sj}\dot{q}_s\dot{q}_j, \tag{18}
$$

в котором функция x удовлетворяет уравнению Ван дер Поля. В случае $n = 1$ получается формула (12).

Обратимся к задаче существования цикла связанной системы. Период на цикле $T^* = 2\pi/\omega$, а необходимые условия даются системой амплитудных уравнений, включающей уравнение для осциллятора Ван дер Поля и уравнение

$$
\begin{gathered}
I(h, \nu) \equiv \int_0^{T^*} (1 - Kx^2) \sum_{s=1,j=1}^{n} r_{sj}\dot{\varphi}_j(h, t+\nu)\psi_s(h, t+\nu)dt = 0, \\
\psi_s = -\dot{\varphi}_s.
\end{gathered} \tag{19}
$$

В формуле (19) учитывается симметричность матрицы уравнений в вариациях для СПД консервативной системы, что дает возможность явного вычисления решения $\{\psi_s(h, t+\gamma)\}$ сопряженной системы.

Выводы по существованию корня амплитудного уравнения и его простоты, сделанные для случая $n = 1$, остаются справедливыми в случае $n > 1$. В самом деле, они основаны только на симметричности фазового портрета механической системы и рассмотрении невырожденного семейства симметричных периодических движений.

Таким образом, цикл в связанной системе (1), (17) существует.

Функция $E_q(h, t)$ на выбранном колебании семейства Σ зависит от двух переменных. Вычислим приращение $\Delta E_q(h)$ на периоде T^*. Тогда с точностью до первых по ε слагаемых уравнение $\Delta E_q(h) = 0$ совпадает с амплитудным уравнением. Поэтому $\Delta E_q(h^*) = 0$, где h^* – значение энергии, отвечающей циклу. Приращение $\Delta E_q(h)$ содержит матрицу R. Вследствие этого при надлежащем выборе R получаются наименьшее или наибольшее приращения энергии на периоде.

Т е о р е м а 3. *В связанной системе* (1) *с функцией* (17), *включающей осциллятор Ван дер Поля и консервативную механическую систему, которая допускает семейство невырожденных симметричных периодических движений, осциллятор Ван дер Поля навязывает всей системе режим цикла. При этом наименьший или наибольший приросты энергии h консервативной системы на отрезке T^* обеспечиваются надлежащим выбором матрицы R.*

Из теоремы 3 следует, в частности, возможность за счет выбора управления (17) с надлежащей матрицей R достигнуть значения энергии h^* по закону (15) с наименьшим или наибольшим приростами энергии на периоде. В случае $n = 1$ закон (15) обеспечивает именно такое притяжение к циклу. Оказывается, что в случае $n > 1$ вопрос притяжения связан не только с выбором R.

Далее выясняется, какие необходимые условия налагаются на семейство Σ, чтобы траектории связанной системы (1) притягивались к циклу.

Пусть через $E_q^c(t)$ обозначается энергия на цикле. В системе с $n > 1$ степенями свободы из равенства (18) не следует, что даже траектории, принадлежащие множеству $E_q = E_q^c(t)$, притягиваются к циклу. Более того, точки этого множества с течением времени могут даже не приближаться к $\tilde{\Sigma}$. Это становится понятным при рассмотрении сценария бифуркации ХП.

В случае $n = 1$ ХП для решений из Σ равняются нулю. Действие управления приводит в (3) к расщеплению жордановой клетки с перемещением ХП в левую полуплоскость. В случае $n > 1$ указанная пара ХП для решений Σ сохраняется, а остальные ХП образуют $n - 1$ пар, содержащих ХП противоположного знака (см. [8]). Если ХП в этих парах лежали вне мнимой оси, то при действии в (1) ε-малого управления ХП по-прежнему остаются вне мнимой оси. Поэтому необходимым условием для притяжения траекторий системы (1) к циклу будет принадлежность ХП решений семейства Σ мнимой оси.

Лемма. В системе с $n > 1$ степенями свободы необходимым условием для притяжения траекторий связанной системы (1) *к циклу является принадлежность ХП семейства Σ мнимой оси.*

Лемма используется далее при решении задачи стабилизации.

6. Выход на режим цикла

В Приложении приводится лемма П.1 о возможности описания СПД на $\tilde{\Sigma}$ с помощью редукцированной консервативной системы с одной степенью свободы. Через Ω_q обозначается многообразие $\hat{\Sigma}$ вместе с его ε-окрестностью. В Ω_q вводятся независимые координаты: $y = w_1$ для описания СПД на $\tilde{\Sigma}$ и $z = (w_2, \ldots, w_n)$, обращающаяся в нуль на $\tilde{\Sigma}$. В связанной системе (1), (17) переходом к переменной $w = (y, z)$ редукцированная система на $\tilde{\Sigma}$ получает вид (3): она подробно изучена в разделах 3 и 4. В окрестности $\tilde{\Sigma}$ переменная $z \neq 0$ и $E_q = E_y + E_z$, где E_y – энергия редукцированной системы: разность $E_z = E_q - E_y$ может быть положительной или отрицательной. Тогда из (18) с учетом (14) и выбором $\hat{R} = \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ в преобразованной системе выводятся равенства

$$k(\dot{y}^2 + \dot{z}^2)dE_x = \dot{x}^2 dE_q, \quad k\dot{z}^2 dE_x = \dot{x}^2 dE_z. \tag{20}$$

Отображение G на отрезке $t \in [0, T^*]$ применяется к точкам Ω_q. Тогда согласно (13) и первому равенству в (20) знаки приращений ΔE_q и ΔE_y совпадают на G. Следовательно, как и в частном случае (13), справедливы предельные переходы: $\Delta E_q \to 0$, $\Delta E_y \to 0$. Поэтому $\Delta E_z = (\Delta E_q - \Delta E_y) \to 0$. При этом приращения ΔE_q и ΔE_z согласно (20) также имеют один и тот же знак.

Пусть выполнена лемма и ХП системы для z принадлежат мнимой оси. Функция $|E_z|$ рассматривается в окрестности точки, где $z = 0$, $\dot{z} = 0$, и представляет собой энергию системы для z. Поэтому в выколотой окрестности $|E_z| > 0$. Следовательно, из $\Delta E_z \to 0$ выводится: $(z, \dot{z}) \to (0, 0)$.

Таким образом, каждая точка из окрестности $\tilde{\Sigma}$ приближается $\hat{\Sigma}$ и одновременно притягивается к циклу.

Управление $k\varepsilon(1 - Kx^2)\dot{w}$ в преобразованной консервативной системе дается знакоположительной формой $\sum_{s=1}^{n} w_s^2$. Линейное преобразование в лемме П.1 проводится с постоянной матрицей P, которое не меняет знака квадратичной формы. Следовательно, в исходных переменных получается управление с знакоположительной квадратичной формой скоростей $\hat{R}(\dot{q}, \dot{q})$.

Таким образом, формулируется теорема 4 об асимптотическом выходе связанной системы на режим цикла.

Теорема 4. Пусть консервативная механическая система допускает семейство невырожденных симметричных периодических движений Σ, характеристические показатели которых принадлежат мнимой оси; в фазовом пространстве движения Σ заполняют двумерное многообразие $\tilde{\Sigma}$. Тогда выход на режим цикла в связанной системе (1) *с управлением* (17)*, где квадратичная $\hat{R}(\dot{q}, \dot{q})$ положительно определена, происходит из точек $\tilde{\Sigma}$ и его окрестности так, что траектория стремится к $\tilde{\Sigma}$ и одновременно притягивается к циклу. Используется закон управления* (15).

Замечание 7. При выполнении условий теоремы 4 цикл орбитально асимптотически устойчив в большом: каждая траектория из области Ω_q притягивается к циклу.

Замечание 8. Заметим, что в силу неединственности выбора в лемме П.1 матрицы P форма R находится не единственным образом.

Алгоритм асимптотического вывода связанной механической системы на режим цикла с периодом $T^* = T(h^*)$ состоит из двух шагов: подбирается частота $\omega = 2\pi/T^*$ осциллятора Ван дер Поля; выбирается закон управления (15).

7. Пример. Колебания спутника в плоскости круговой орбиты

Движение спутника в плоскости орбиты под действием гравитационных сил описывается уравнением В.В. Белецкого [9]. Для круговой орбиты уравнение приобретает вид

$$\ddot{\alpha} + \mu \sin\alpha \cos\alpha = 0, \quad \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dv}, \tag{21}$$

где μ – инерциальный параметр ($|\mu| \leqslant 3$), α – угол между радиусом-вектором центра масс и главной центральной осью инерции спутника в плоскости орбиты, v – истинная аномалия, выбранная в качестве независимой переменной. Получается уравнение математического маятника

$$\ddot{y} + \mu \sin y = 0, \quad \mu > 0, \quad y = 2\alpha,$$

или

$$\ddot{y} + |\mu| \sin y = 0, \quad \mu < 0, \quad y = 2\alpha + \pi.$$

Колебания спутника образуют семейство от начального отклонения по углу y, на котором период $T(h)$ возрастает. Следовательно, для реализации асимптотически устойчивого режима колебания спутника с желаемым начальным углом отклонения необходимо перейти к управляемой системе. Используется схема стабилизации колебаний:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}, \\ \ddot{y} + |\mu| \sin y &= k\varepsilon(1 - x^2)\dot{y}, \end{aligned} \tag{22}$$

где $y = 2\alpha$ при $\mu > 0$ и $y = 2\alpha + \pi$, если $\mu < 0$. Тогда по теореме 1 колебания спутника с периодом $2\pi/\omega$ настраиваются на режим асимптотически орбитально устойчивого цикла связанной системы (22).

По теореме 2 областью притяжения цикла для колебания, входящего в диапазон захвата осциллятором Ван дер Поля, будет вся область колебаний спутника. Математически захват означает существование корня уравнения (7). Обратимся к задаче нелокальной стабилизации колебания спутника, близкого к его равновесию.

Уравнение движения спутника записывается в виде

$$\dot{y} + \omega^2 \sin y = 0, \quad \sin y = y - p(y), \quad \omega^2 = |\mu|, \quad p = \sum_{s=3}^{\infty} (-1)^{s+1} \frac{y^{2s+1}}{(2s+1)!}.$$

Оно не меняет вид при замене y на $(-y)$. Поэтому согласно теории ляпуновских периодических движений (см. [7, гл. 7]) используется такая замена времени

$$t = \frac{\tau}{k}(1 + h_2 c^2 + h_4 c^4 + \ldots),$$

где постоянные $h_2, h_4, \ldots$ дают поправку к периоду линейных колебаний в окрестности равновесия, c – начальное значение переменной y: $c = y(0)$. Тогда получается уравнение

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \omega^2 (y - p(y))(1 + h_2 c^2 + h_4 c^4 + \ldots). \tag{23}$$

Решение уравнения (23) ищется в виде ряда

$$y = c \cos \tau + c^3 y_3(\tau) + c^5 y_5(\tau) + \ldots,$$

где $x_j(\tau)$ – периодические функции τ периода 2π, удовлетворяющие начальным условиям

$$y_3(0) = \dot{y}_3(0) = y_5(0) = \dot{y}_5(5) = \ldots = 0. \tag{24}$$

При этом для y_3 получается уравнение

$$\frac{d^2 y_3}{d\tau^2} + y_3 = -2h_2 \cos\tau + p(\cos\tau),$$

где функция $p(\cos\tau)$ представляется рядом

$$p(\cos\tau) = a_1 \cos\tau + a_3 \cos 3\tau + a_5 \cos 5\tau + \ldots \tag{25}$$

Условие периодичности функции $y_3(\tau)$ выполняется при $h_2 = a_1/2$. Само решение, принимая во внимание условия (24), записывается в виде

$$y_3 = \left(\frac{a_3}{8} + \frac{a_5}{24} + \ldots\right)\cos\tau - \frac{a_3}{8}\cos 3\tau - \frac{a_5}{24}\cos 5\tau + \ldots$$

Поэтому решение уравнения (23) имеет вид

$$y(\tau) = c\cos\tau + c^3\left(\frac{a_3}{8} + \ldots\right)\cos\tau - c^3\frac{a_3}{8}\cos 3\tau + O(c^5). \tag{26}$$

В уравнении (7) рассматривается решение периода $2\pi/\omega$, которое получается из (26) при $\tau = \omega t$. Значит, дифференцированием функции $y(\omega t)$ по t находится знак произведения в (П.4):

$$c_1 = c\omega^2, \quad c_3 = -c^3\omega^2 a_3/24, \quad c_1 c_3 = -\omega^4 c^4 a_3/24 < 0.$$

Коэффициенты разложения (25) находятся с использованием формулы Эйлера для записи косинуса и формулы бинома Ньютона. Получается: $a_3 > 0$. Значит, условие захвата для решений ляпуновского семейства выполнено.

Таким образом, задача нелокальной стабилизации близкого к равновесию колебания спутника получает решение с помощью схемы (22).

8. Заключение

В предложенной системе управления колебаниями осциллятор Ван дер Поля генерирует одностороннюю связь–управление для консервативной механической системы, которая содержит семейство невырожденных симметричных периодических движений на многообразии $\tilde{\Sigma}$. В результате связанной системе навязывается режим асимптотически орбитально устойчивого цикла. При этом для консервативной системы с одной степенью свободы область Ω_q притяжения к циклу совпадает с многообразием $\tilde{\Sigma}$. В системе с $n > 1$ степенями свободы область Ω_q включает $\tilde{\Sigma}$ с его $O(\varepsilon)$-окрестностью. Выход на режим цикла происходит из любой начальной точки $q \in \Omega$.

Асимптотический выход связанной механической системы на режим цикла с периодом $T^* = T(h^*)$ реализуется алгоритмом: подбирается частота $\omega = 2\pi/T^*$ осциллятора Ван дер Поля; выбирается закон управления (15).

1. Нахождение корней уравнения $I(h^*,\nu)=0$. СПД описывается четной функцией $y(h^*,t)$. Производная $\dot y(h^*,t)$ на СПД представляется рядом

$$\text{(П.1)}\qquad \dot y(h^*,t)=c_1\sin\omega t+c_2\sin 2\omega t+c_3\sin 3\omega t+\ldots$$

Тогда

$$\text{(П.2)}\qquad \dot\varphi^2(h^*,t+\nu)=b_0+b_2\cos 2\omega(t+\nu)+\sum_{m=2}^{\infty}b_{2m}\cos 2m\omega(t+\nu),$$

где

$$b_0=\frac{c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2+\ldots}{2}>0,\quad b_2=-\frac{c_1^2}{2}+c_1c_3+c_2c_4+c_3c_5+c_4c_6+\ldots$$

Амплитудное уравнение (6) при $\beta=0$ записывается в виде

$$\text{(П.3)}\qquad I(h,\nu)\equiv\int_0^{2\pi/\omega}\rho(h,\nu,t)dt=0,\quad \rho=(1-4\cos^2\omega t)\dot y^2(h,t+\nu),$$

в котором с учетом (П.2)

$$-\rho(h^*,\nu,t)=b_0(1+2\cos 2\omega t)+\sum_{m=1}^{\infty}b_{2m}\cos 2m\omega(t+\nu)+$$
$$+\cos 2\omega\nu\sum_{m=1}^{\infty}b_{2m}[\cos 2\omega(m+1)t+\cos 2\omega(m-1)t]-$$
$$-\sin 2\omega\nu\sum_{m=1}^{\infty}b_{2m}[\sin 2\omega(m+1)t+\sin 2\omega(m-1)t].$$

Поэтому

$$I(h,\nu)\equiv-(b_0+b_2\cos 2\omega\nu)$$

и уравнение (7) имеет изолированный корень, если $|b_2|\geqslant b_0$. С учетом выражений для b_0 и b_2 выписываются коэффициентные условия

$$\text{(П.4)}\qquad \begin{array}{ll} a) & c_1c_3<0,\quad 2|c_1c_3|>(c_2-c_4)^2+(c_3-c_5)^2+\ldots,\\ b) & c_1c_3=0,\quad c_2=c_4,\quad c_3=c_5,\quad c_4=c_6,\ \ldots \end{array}$$

на ряд (П.1), которые гарантируют существование корня.

Очевидно, условия (П.4) выполняются при $c_1=1$, $c_2=c_3=\ldots=0$, в этом случае $\dot y=\sin\omega t$. Другой частный случай имеется в ляпуновском семействе СПД. Здесь решение представляется рядом по начальному значению $y(0)$.

Поэтому условия (П.4) сводятся к одному неравенству $c_1c_3 < 0$. При продолжении ляпуновского семейства неравенства (П.4) выполняются до некоторого предельного $y(0)$.

Заметим, что анализ условий (П.4) входит составной частью в задачу по выделению классов СПД, в которых возможен захват колебания для вывода системы на режим притягивающего цикла.

2. Выделение на $\tilde{\Sigma}$ консервативной системы с одной степенью свободы.

Лемма П.1. Семейство невырожденных СПД описывается консервативной системой с одной степенью свободы.

Доказательство. Из условий (2) при $\tau = T/2$ следуют линейные равенства

$$\xi_s \equiv b_{s1}(q^0,\tau)dq_1^0 + \ldots + b_{sn}(q^0,\tau)dq_n^0 + c_s(q^0,\tau)d\tau = 0,$$
$$B = ||b_{sj}(q^0,\tau)||,\ b_{sj}(q^0,\tau) = \partial\dot{q}_s(q^0,\tau)/\partial q_j^0,$$
$$C = ||c_s(q^0,\tau)||, \quad c_s = \partial\dot{q}_s(q^0,\tau)/\partial t = \ddot{q}_s(q^0,\tau);\ s,j = 1,\ldots,n,$$

которые выполняются тождественно на $\tilde{\Sigma}$. Для семейства невырожденных СПД выполняется условие $\det B = n$, а вектор ускорения $C = (c_1,\ldots,c_n)$ на СПД отличен от нулевого. Поэтому посредством линейного преобразования $\eta = P\xi$, $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$, с постоянной матрицей $P = ||p_{sj}||$, удовлетворяющий условиям $\eta_2 = 0,\ldots,\eta_n = 0$, в векторной форме η выделяется форма η_1. Преобразование справедливо для любой точки (q^0,τ), поэтому выделение происходит на всем $\tilde{\Sigma}$. Тогда на $\tilde{\Sigma}$ получается:

$$\eta_1 \equiv \sum_{s=1}^{n} \tilde{b}_s(q^0,\tau)dq_s^0 + \tilde{a}_1(q^0,\tau)d\tau = 0, \quad \tilde{a}_1 \equiv \sum_{j=1}^{n} p_{1j}c_j(q^0,\tau), \tag{П.5}$$
$$\eta_k(q^0,\tau) = 0, \quad k = 2,\ldots,n.$$

Для семейства Σ невырожденных СПД найденное линейное преобразование означает существование координат $w_1,\ldots,w_n$ таких, что $n-1$ из них на Σ принимают нулевые значения: $w_2 = 0,\ldots,w_n = 0$. Начальная точка q^0 на Σ является функцией одного параметра, например начального значения w_1^0 переменной w_1. Поэтому из первого равенства в (П.5) получается, что

$$\ddot{w}_1 + \tilde{a}_1(w_1) = 0,$$

и динамика на $\tilde{\Sigma}$ описывается консервативной системой с одной степенью свободы.

Лемма П.1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний автономной системы // АиТ. 2016. № 6. С. 38–46.

Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of an Autonomous System // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 6. P. 972–979.

2. *Rompala K., Rand R., Howland H.* Dynamics of Three Coupled Van der Pol Oscillators with Application to Circadian Rhythms // Communicat. Nonlin. Sci. Numerical Simulation. 2007. V. 12. No. 5. P. 794–803.
3. *Кондрашов Р.Е., Морозов А.Д.* К исследованию резонансов в системе двух уравнений Дюффинга-Ван дер Поля // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. № 2. С. 241–254.
4. *Lazarus L., Rand R.H.* Dynamics of a System of Two Coupled Oscillators which are Driven by a Third Oscillator // J. Appl. Nonlin. Dynam. 2014. V. 3. No. 3. P. 271–282.
5. *Shiriaev A., Perram J.W., Canudas-de-Wit C.* Constructive Tool for Orbital Stabilization of Underactuated Nonlinear Systems: Virtual Constraints Approach // IEEE Trans. Automat. Contr. 2005. V. 50. No. 8. P. 1164–1176.
6. *Тхай В.Н.* О поведении периода симметричных периодических движений // Прикл. матем. и механ. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 616–622.
7. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.
8. *Тхай В.Н.* Об устойчивости регулярных прецессий Гриоли // Прикл. матем. и механ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 848–857.
9. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс // Искусственные спутники Земли. 1958. № 1. С. 25–43. М.: Изд-во АН СССР, 1958.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.М. Красносельским.

Поступила в редакцию 08.11.2020

После доработки 08.07.2021

Принята к публикации 29.08.2021