

Нелинейные системы

© 2022 г. А.Н. ЖИРАБОК, д-р техн. наук (zhirabok@mail.ru)
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток,
Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток),
А.В. ЗУЕВ, канд. техн. наук (zuev@dvo.ru)
(Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток),
О. СЕРГИЕНКО, д-р техн. наук (srgnk@uabc.edu.mx)
(Universidad Autonoma de Baja California, Mexicali, Mexico),
А.Е. ШУМСКИЙ, д-р техн. наук (a.e.shumsky@yandex.con)
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДЕФЕКТОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И ИХ ДАТЧИКАХ НА ОСНОВЕ СКОЛЬЗЯЩИХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ¹

Рассматривается задача идентификации дефектов в нелинейных технических системах, описываемых динамическими моделями, и их датчиках при наличии возмущений. Для решения задачи применяется метод с использованием скользящих наблюдателей. Предложена модификация этого метода, позволяющая расширить семейство систем, для которых можно решить задачу идентификации, за счет ослабления ограничений, накладываемых на исходную систему. Эта модификация позволила добиться уменьшения сложности средств диагностирования. Изложенное иллюстрируется практическими примерами.

Ключевые слова: нелинейные системы, дефекты, скользящие наблюдатели, идентификация.

DOI: 10.31857/S0005231022020052

1. Введение и постановка задачи

В основу настоящей работы положена работа [1], где решалась задача идентификации дефектов в линейных системах с использованием скользящих наблюдателей. Методы построения таких наблюдателей рассмотрены в [2–15] для различных классов систем: линейных [2–7], нелинейных [8–13], сингулярных [14], для отказоустойчивого управления [15]. В настоящей работе решается задача идентификации дефектов в нелинейных системах и их датчиках.

В отличие от известных подходов [6–15], где скользящий наблюдатель полного порядка строится на основе исходной системы, предложенный в [1] подход основан на идее построения редуцированной [16] (меньшей размерности)

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда: проект № 22-19-00028 (разработан метод построения скользящих наблюдателей) и проект № 22-29-01303 (выполнен синтез наблюдателей).

модели исходной системы, имеющей различную чувствительность к дефектам и возмущениям, на основе которой строится скользящий наблюдатель. Дополнительно к уменьшению размерности скользящего наблюдателя этот подход позволил расширить семейство систем, для которых решается задача идентификации, за счет ослабления ограничений, накладываемых на исходную систему.

В настоящей статье задача идентификации дефектов в нелинейных системах и их датчиках в присутствии возмущений решается по аналогии с подходом, предложенным в [10], но также при наложении менее жестких, нежели в [10] и ряде аналогичных работ, ограничений на класс рассматриваемых систем. Кроме того, предлагаемые подходы позволяют добиться уменьшения сложности средств диагностирования. Отметим, что подход на основе редуцированной модели исходной системы для линейных систем был также рассмотрен в [17].

Рассматривается класс систем, описываемых нелинейной моделью

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) + C\Psi(x(t), u(t)) + Dd(t) + L\rho(t), \\ y(t) &= Hx(t) + \sum_{i=1}^l D_i d_i(t), \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$ — векторы состояния, управления и выхода; F и G — постоянные матрицы, описывающие линейную динамику; H , C , L и D — известные постоянные матрицы, $d(t)$ — скалярная функция, описывающая дефекты: если они отсутствуют, то $d(t) = 0$, при их появлении $d(t)$ становится неизвестной ограниченной функцией времени; D_i и $d_i(t) \in \mathbb{R}$ — постоянные матрицы и функции времени, описывающие дефекты: если дефекты отсутствуют, $d_i(t) = 0$, при появлении дефекта в i -м датчике $d_i(t)$ становится неизвестной функцией времени, $i = 1, \dots, l$; $D_1 = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$, $\dots$, $D_l = (0 \ 0 \ \dots \ 1)^T$; $\rho(t) \in \mathbb{R}^p$ описывает возмущения, действующие на систему, предполагается, что $\rho(t)$ — неизвестная ограниченная функция времени; $\Psi(x, u)$ — нелинейная составляющая, представленная в виде

$$\Psi(x, u) = \begin{pmatrix} \varphi_1(A_1 x, u) \\ \dots \\ \varphi_q(A_q x, u) \end{pmatrix},$$

$A_1, \dots, A_q$ — известные постоянные матрицы-строки, $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ — нелинейные функции. Предполагается, что функция $C\Psi(x, u)$ удовлетворяет условию Липшица по аргументу x , т.е.

$$\|C(\Psi(x, u) - \Psi(x', u))\| \leq N\|x - x'\|,$$

где $N > 0$ — некоторая константа. Это условие не выполняется для многих функций, описывающих такие практически важные явления, как сухое трение, насыщение, гистерезис. Для преодоления этого недостатка введем обобщенную функцию Липшица:

$$(1.2) \quad \|C(\Psi(x, u) - \Psi(x', u))\| \leq N\|x - x'\| + M,$$

$N, M \geq 0$ — некоторые константы, и будем предполагать, что функция $C\Psi(x, u)$ в (1.1) удовлетворяет этому условию.

Следует отметить, что нелинейная модель (1.1) может быть получена из обычной нелинейной модели

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \rho(t), d(t)), \quad y(t) = h(x(t))$$

за счет выполнения ряда преобразований [18].

Напомним, что в [10] при построении скользящего наблюдателя предполагается, что система (1.1) удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\text{rank}(H[L D]) = \text{rank}([L D])$,
 - 2) все инвариантные нули тройки $(F, [L D], H)$ лежат в левой полуплоскости.
- В [10] при этих предположениях система (1.1) представляется в виде композиции двух подсистем со следующими свойствами: функции $d(t)$ и $\rho(t)$ входят только в одну подсистему, выход $y(t)$ совпадает с вектором состояния этой подсистемы, при этом вторая подсистема является устойчивой.

В настоящей работе задача идентификации дефектов решается без наложения на систему указанных условий, ограничивающих класс систем, для которых задача идентификации имеет решение.

2. Построение модели минимальной размерности для идентификации дефектов в динамике

Методы построения модели для идентификации дефектов в динамике и датчиках отличаются друг от друга. Остановимся вначале на дефектах в динамике, полагая, что дефекты в датчиках отсутствуют.

В основе решения рассматриваемой задачи лежит модель системы (1.1) меньшей размерности, которая описывается уравнением

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= F_*x_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + C_*\Psi_*(x_*(t), y(t), u(t)) + D_*d(t) + L_*\rho(t), \\ y_*(t) &= H_*x_*(t), \end{aligned}$$

где $x_*(t) \in \mathbb{R}^k$, $k < n$ — размерность модели, $y_* \in \mathbb{R}$, F_* , G_* , J_* , H_* , D_* и L_* — матрицы, подлежащие определению,

$$C_*\Psi_*(x_*, y, u) = \begin{pmatrix} \varphi_{i_1}(A_{*1,i_1}x_* + A_{*2,i_1}y, u) \\ \dots \\ \varphi_{i_k}(A_{*1,i_k}x_* + A_{*2,i_k}y, u) \end{pmatrix},$$

$A_{*1,i_1}, A_{*2,i_1}, \dots, A_{*1,i_k}, A_{*2,i_k}$ — матрицы, подлежащие определению; через $C_*\Psi_*$ обозначена функция $C_*\Psi$, в которой вектор x заменен на x_* и y на основе соотношения $A_i x = A_{*1,i}x_* + A_{*2,i}y$, $i = i_1, \dots, i_k$. Функции φ_{i_j} , $j = i_1, \dots, i_k$, — это функции из множества φ_i из раздела 1.

Будем полагать, что справедливы равенства $x_*(t) = \Phi x(t)$ и $y_*(t) = R_*y(t)$, где Φ и R_* — некоторые постоянные матрицы. Известно [13–15], что эти мат-

рицы удовлетворяют условиям

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \Phi F &= F_* \Phi + J_* H, \quad R_* H = H_* \Phi, \quad \Phi G = G_*, \quad \Phi C = C_*, \\ A_i &= (A_{*1,i} \ A_{*2,i}) \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}, \quad i = i_1, \dots, i_k, \quad \Phi D = D_*, \quad \Phi L = L_*. \end{aligned}$$

Разрешимость этих условий выясняется ниже в виде уравнений (2.8), (2.9) и условия (2.10).

Построим не чувствительную к возмущениям модель (2.1) минимальной размерности, которая будет положена в основу синтеза скользящего наблюдателя. С этой целью матрицы F_* и H_* будем искать в идентификационной канонической форме:

$$(2.3) \quad F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_{k-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad H_* = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0),$$

где коэффициенты обратной связи $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ выбираются так, чтобы гарантировать устойчивость подсистемы с вектором состояния $x_{**} = (x_{*2} \ \dots \ x_{*k})^T$.

Отметим, что устойчивость этой подсистемы для произвольной размерности k обеспечивается в [10] требованием, чтобы все инвариантные нули тройки $(F, [L \ D], H)$ лежали в левой полуплоскости. Для практически важных случаев, когда $k \leq 3$, это ограничение может быть ослаблено за счет более детального анализа условий (2.2). Рассмотрим это подробно.

Используя матрицы F_* и H_* в (2.3), из (2.2) получаем следующие уравнения для Φ и J_* :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \Phi_1 &= R_* H, \quad \Phi_1 F = \Phi_2 + J_{*1} H, \\ \Phi_i F &= \Phi_{i+1} + \alpha_{i-1} \Phi_2 + J_{*i} H, \quad i = 2, \dots, k-1, \\ \Phi_k F &= \alpha_{k-1} \Phi_2 + J_{*k} H, \end{aligned}$$

где Φ_i и J_{*i} — i -е строки матриц Φ и J_* , $i = 1, \dots, k$.

Остановимся на случае $k = 3$ как более сложном. По аналогии с [19] уравнения (2.4) могут быть преобразованы следующим образом:

$$\begin{aligned} R_* H F &= \Phi_2 + J_{*1} H, \\ R_* H F^2 &= \Phi_2 F + J_{*1} H F = J_{*1} H F + J_{*2} H + \alpha_1 \Phi_2 + \Phi_3 = \\ &= J_{*1} H F + J_{*2} H + \alpha_1 (R_* H F - J_{*1} H) + \Phi_3 = \\ &= (J_{*1} + \alpha_1 R_*) H F + (J_{*2} - \alpha_1 J_{*1}) H + \Phi_3. \end{aligned}$$

В конечном итоге приходим к одному уравнению

$$(2.5) \quad \begin{aligned} R_* H F^3 &= (J_{*1} + \alpha_1 R_*) H F^2 + (J_{*2} - \alpha_1 J_{*1} + \alpha_2 R_*) H F + \\ &+ (J_{*3} - \alpha_2 J_{*1}) H. \end{aligned}$$

Как показано в [18, 19], условие нечувствительности модели (2.1) к возмущениям имеет вид $\Phi L = 0$. Нетрудно видеть, что из (2.4) следует

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= R_* H, \\ \Phi_2 &= \Phi_1 F - J_{*1} H = R_* H F - J_{*1} H, \\ \Phi_3 &= \Phi_2 F - J_{*2} H - \alpha_1 \Phi_2 = R_* H F^2 - J_{*1} H F - J_{*2} H - \alpha_1 \Phi_2.\end{aligned}$$

Из приведенных соотношений следует, что это условие можно представить в виде

$$(2.6) \quad \begin{pmatrix} R_* & -J_{*1} & -J_{*2} \end{pmatrix} B^{(3)} = 0,$$

где

$$B^{(3)} = \begin{pmatrix} HL & HFL & HF^2 L \\ 0 & HL & HFL \\ 0 & 0 & HL \end{pmatrix}.$$

По аналогии с [10] для возможности построения скользящего наблюдателя функция $d(t)$ должна входить в уравнение только для первой компоненты вектора x_* . Это условие выражается в виде семейства равенств $\Phi_i D = 0$, $i = 2, 3$, которые могут быть представлены в форме

$$(2.7) \quad \begin{pmatrix} R_* & -J_{*1} & -J_{*2} \end{pmatrix} D^{(3)} = 0,$$

где

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & HFD & HF^2 D \\ 0 & HD & HFD \\ 0 & 0 & HD \end{pmatrix}.$$

Отметим, что при $k > 3$ структура матриц $B^{(k)}$ и $D^{(k)}$ становится более сложной, в частности,

$$\begin{aligned}B^{(4)} &= \begin{pmatrix} HL & HFL & HF^2 L & HF^3 L \\ 0 & HL & HFL & HF^2 L \\ 0 & 0 & HL & HFL + \alpha_1 HL \\ 0 & 0 & 0 & HL \end{pmatrix}, \\ D^{(4)} &= \begin{pmatrix} 0 & HFD & HF^2 D & HF^3 D \\ 0 & HD & HFD & HF^2 D \\ 0 & 0 & HD & HFD + \alpha_1 HD \\ 0 & 0 & 0 & HD \end{pmatrix},\end{aligned}$$

однако процедура построения редуцированной модели сохраняется.

Из (2.6) и (2.7) следует

$$(2.8) \quad (R_* \ -J_{*1} \ \dots \ -J_{*k-1})(B^{(k)} \ D^{(k)}) = 0, \quad k = 2, 3.$$

При $k = 1$ (2.8) принимает вид $R_*HL = 0$.

Чтобы построить модель (3.1), имеющую минимальную размерность, требуется выяснить, при каком минимальном k уравнение (2.8) имеет решение; ниже будем полагать $k_{\min} = 3$, что соответствует более сложному случаю. Далее находится решение уравнения (2.8) в виде $(R_* \ -J_{*1} \ -J_{*2})$, уравнение (2.5) преобразуется к виду

$$(2.9) \quad \begin{aligned} J_{*3}H = & -R_*HF^3 - (J_{*1} + \alpha_1 R_*)HF^2 - \\ & - (J_{*2} - \alpha_1 J_{*1} + \alpha_2 R_*)HF + \alpha_2 J_{*1}H, \end{aligned}$$

коэффициенты α_1 и α_2 выбираются так, чтобы гарантировать устойчивость модели (2.1), и решается уравнение (2.9) (если оно разрешимо) для неизвестной строки J_{*3} . Принимаем $G_* := \Phi G$, на чем заканчивается построение линейной части модели (2.1).

Отметим, что уравнение (2.9) может иметь несколько решений, т.е. преобразование к модели (2.1) не является однозначным, но все такие решения обладают требуемыми свойствами. Отметим также, что в ряде случаев в результате решения уравнения (2.8) определяются не все элементы строки $(R_* \ -J_{*1} \ -J_{*2})$, некоторые из них могут оставаться неизвестными. Пусть, например, матрица J_{*2} в этой строке имеет вид $J_{*2} = (2 \ z_1 \ z_2)$, где символами z_1 и z_2 обозначены неизвестные элементы; остальные элементы строки определены. Тогда уравнение (2.5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} z_1 H_2 F + z_2 H_3 F + J_{*3}H = & -R_*HF^3 - (J_{*1} + \alpha_1 R_*)HF^2 - \\ & - (2H_1 F - \alpha_1 J_{*1} + \alpha_2 R_*)HF + \alpha_2 J_{*1}H, \end{aligned}$$

коэффициенты α_1 и α_2 выбираются для обеспечения устойчивости модели (2.1), после чего определяются неизвестные элементы z_1 , z_2 и J_{*3} .

Изложим сказанное в виде процедуры, пояснив действия при $k < 3$. Положить $k = 1$ и найти матрицу R_* из уравнения $R_*HL = 0$; если существует такое J_{*1} , что $R_*HF = J_{*1}H$, то конец процедуры, иначе положить $k = 2$ и найти строку $(R_* \ -J_{*1})$ из (2.8). Если существуют такие J_{*2} и $\alpha_1 < 0$, что

$$R_*HF^2 - J_{*1}HF = \alpha_1(R_*HF - J_{*1}H) + J_{*2}H,$$

конец процедуры, иначе положить $k = 3$ и выполнить действия, описанные выше. Проверить существование J_{*2} и α_1 можно с помощью рангового критерия: если

$$\text{rank} \begin{pmatrix} R_*HF - J_{*1}H \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} R_*HF - J_{*1}H \\ H \\ R_*HF^2 - J_{*1}HF \end{pmatrix},$$

то J_{*2} и α_1 существуют.

Для построения нелинейной части модели найдем из (2.2) строки матрицы Φ , положим $C_* := \Phi C$, найдем произведение $C_* \Psi(x, u)$ и проверим условие

$$(2.10) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ A_i \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ A_i \end{pmatrix}, \quad i = i_1, \dots, i_k.$$

При его выполнении положим $D_* := \Phi D$; матрицы A_{*1i} и A_{*2i} , $i = i_1, \dots, i_k$, входящие в нелинейную часть, определяются из уравнения (2.2). Если уравнение (2.9) не имеет решения или равенство (2.10) не справедливо, находится другое решение уравнения (2.8); возможно, для этого потребуется увеличить значение k . Если увеличение размерности не приводит к результату, то не чувствительной к возмущениям модели не существует. В таких случаях можно использовать подход, обеспечивающий минимальную чувствительность к возмущениям [20].

В результате модель (2.1) принимает вид

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \dot{x}_{*1}(t) &= x_{*2}(t) + G_{*1}u(t) + J_{*1}y(t) + C_{*1}\Psi_*(x_{**}(t), y(t), u(t)) + ad(t), \\ \dot{x}_{**}(t) &= F_{**}x_{**}(t) + G_{**}u(t) + J_{**}y(t) + C_{**}\Psi_*(x_{**}(t), y(t), u(t)), \\ y_*(t) &= x_{*1}(t) = R_*y(t), \end{aligned}$$

где $a = \Phi_1 D \neq 0$, $x_{**} = (x_{*2} \dots x_{*k})^T$, символами F_{**} , G_{**} , J_{**} и C_{**} обозначены подматрицы матриц F_* , G_* , J_* и C_* , соответствующие x_{**} , матрица F_{**} устойчива. Поскольку $x_{*1} = y_*$, а $y_* = R_*y$, то аргумент x_* в функции Ψ_* в (2.1) заменен в (2.11) на x_{**} , для простоты обозначение Ψ_* сохранено. Отметим, что свойства модели (2.11) соответствуют свойствам декомпозиции работы [10], упомянутыми в первом разделе, которые положены в основу синтеза скользящего наблюдателя.

Отметим также, что модель (2.11) может быть построена эвристическими методами.

3. Построение скользящего наблюдателя

По аналогии с [10] скользящий наблюдатель ищется на основе (2.11) в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{*1}(t) &= \hat{x}_{*2}(t) + G_{*1}u(t) + J_{*1}y(t) + C_{*1}\Psi_*(\hat{x}_{**}(t), y(t), u(t)) - be_y(t) + v(t), \\ \dot{\hat{x}}_{**}(t) &= F_{**}\hat{x}_{**}(t) + G_{**}u(t) + J_{**}y(t) + C_{**}\Psi_*(\hat{x}_{**}(t), y(t), u(t)), \\ \hat{y}_*(t) &= \hat{x}_{*1}(t), \end{aligned}$$

где

$$(3.2) \quad v(t) = \begin{cases} -g|a| \frac{e_y(t)}{\|e_y(t)\|}, & \text{if } e_y(t) \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$e_y(t) = \hat{y}_*(t) - y_*(t) = \hat{y}_*(t) - R_*y(t)$, $b > 0$. Используя (2.11) и (3.1), запишем уравнения для ошибок оценивания $e_1(t) = \hat{x}_{*1}(t) - x_{*1}(t)$ и $e_2(t) = \hat{x}_{**}(t) - x_{**}(t)$:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= -be_1(t) + Qe_2(t) - ad(t) + \Delta\Psi_1(t) + v(t), \\ \dot{e}_2(t) &= F_{**}e_2(t) + \Delta\Psi_2(t), \end{aligned}$$

где $Q = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$,

$$\begin{aligned} \Delta\Psi_1(t) &= C_{*1}(\Psi_*(\hat{x}_{**}(t), y(t), u(t)) - \Psi_*(x_{**}(t), y(t), u(t))), \\ \Delta\Psi_2(t) &= C_{**}(\Psi_*(\hat{x}_{**}(t), y(t), u(t)) - \Psi_*(x_{**}(t), y(t), u(t))). \end{aligned}$$

Предполагается, что функции $C_{*1}\Psi(x(t), u(t))$ и $C_{**}\Psi(x(t), u(t))$ удовлетворяют условию Липшица (1.2) относительно x и функции $C_{*1}\Psi_*(\hat{x}_{**}(t), y(t), u(t))$ и $C_{**}\Psi_*(\hat{x}_{**}(t), y(t), u(t))$ получены из них линейными преобразованиями; тогда они также удовлетворяют этому условию относительно x_* и

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \|\Delta\Psi_1(t)\| &\leq N_{*1}\|e_2(t)\| + M_{*1}, \\ \|\Delta\Psi_2(t)\| &\leq N_{*2}\|e_2(t)\| \end{aligned}$$

для некоторых скаляров $N_{*1} \geq 0$, $M_{*1} \geq 0$ и $N_{*2} \geq 0$.

Так как матрица F_{**} устойчива, то существуют положительно определенные симметрические матрицы W и P_2 такие, что $F_{**}^T P_2 + P_2 F_{**} = -W$. Будем полагать, что выполняется условие

$$(3.5) \quad \lambda_{\min}(W) > 2\|P_2\|N_{*2}.$$

Отметим, что неравенство (3.5) нередко используется в процедуре построения скользящих наблюдателей (см., например, [11]). Оно накладывает определенные ограничения на класс рассматриваемых систем, поскольку константа N_{*2} входит в условие Липшица. В другой форме — в виде линейного матричного неравенства — N_{*2} фигурирует в ряде других работ, например, [10].

*Теорема 1. Из (3.5) следует, что часть наблюдателя (3.1) с вектором $\hat{x}_{**}$ асимптотически устойчива, т.е. $\lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(t) = e_2^T(t)P_2e_2(t)$$

и с учетом (3.3) найдем ее производную по времени:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= (F_{**}e_2(t) + \Delta\Psi_2(t))^T P_2 e_2(t) + e_2^T(t) P_2 (F_{**}e_2(t) + \Delta\Psi_2(t)) = \\ &= e_2^T(t) (F_{**}^T P_2 + P_2 F_{**}) e_2(t) + 2(P_2 e_2(t))^T \Delta\Psi_2(t) = \\ &= -e_2^T(t) W e_2(t) + 2(P_2 e_2(t))^T \Delta\Psi_2(t) \leq \\ &\leq -(\lambda_{\min}(W) - 2\|P_2\|N_{*2})\|e_2(t)\|^2 < 0. \end{aligned}$$

Полученное неравенство доказывает теорему.

Замечание. Ненулевое значение M_{*1} в (3.4) используется для обеспечения возникновения скользящего режима в наблюдателе (3.1) (см. условие (3.6)). С другой стороны, известно [8], что в скользящем режиме выполняется равенство $e_1(t) = 0$, а так как $\lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}_*(t) - x_*(t)) = 0$, и здесь можно принять $M_{*1} := 0$.

Теорема 2. Если справедливо (3.5) и скаляр g удовлетворяет условию

$$(3.6) \quad g > \|d(t)\| + \frac{M_{*1}}{|a|},$$

то скаляр b может быть выбран так, что скользящее движение системы (3.3) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(t) = e_1^T(t)e_1(t) + e_2^T(t)P_2e_2(t)$$

и с учетом (3.3) найдем ее производную по времени:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= (-be_1(t) + Qe_2(t) - ad(t) + \Delta\Psi_1(t) + v(t))^T e_1(t) + \\ &\quad + e_1^T(t)(-be_1(t) + Qe_2(t) - ad(t) + \Delta\Psi_1(t) + v(t)) + \\ &\quad + (F_{**}e_2(t) + \Delta\Psi_2(t))^T P_2e_2(t) + \\ &\quad + e_2^T(t)P_2(F_{**}e_2(t) + \Delta\Psi_2(t)) = \\ &= -2be_1^T(t)e_1(t) + 2e_2^T(t)Q^T e_1(t) - 2e_1^T(t)ad(t) + \\ &\quad + 2e_1^T(t)v(t) + e_2^T(t)(F_{**}^T P_2 + P_2 F_{**})e_2(t) + \\ &\quad + 2(e_1(t))^T \Delta\Psi_1(t) + 2(P_2e_2(t))^T \Delta\Psi_2(t) = \\ &= -2be_1^T(t)e_1(t) + 2e_2^T(t)Q^T e_1(t) - 2e_1^T(t)ad(t) + \\ &\quad + 2e_1^T(t)v(t) - e_2^T(t)W e_2(t) + 2e_1^T(t)\Delta\Psi_1(t) + 2(P_2e_2(t))^T \Delta\Psi_2(t). \end{aligned}$$

Принимая во внимание (3.2) и (3.4) и учитывая, что $e_y(t) = e_1(t)$, преобразуем последнее выражение:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -2be_1^T(t)e_1(t) + 2e_2^T(t)Q^T e_1(t) - e_2^T(t)W e_2(t) - \\ &\quad - 2e_1^T(t)ad(t) - 2e_1^T(t)g|a| \frac{e_y(t)}{\|e_y(t)\|} + 2e_1^T(t)\Delta\Psi_1(t) + 2(P_2e_2(t))^T \Delta\Psi_2(t) \leq \\ &\leq -2b\|e_1(t)\|^2 - \lambda_{\min}(W)\|e_2(t)\|^2 + 2\|e_1\|\|e_2\|\|Q\| + 2\|e_1\|\|a|(\|d(t)\| - g) + \\ &\quad + 2\|e_1(t)\|(N_{*1}\|e_2(t)\| + M_{*1}) + 2\|P_2\|N_{*2}\|e_2(t)\|^2 = \\ &= -2b\|e_1(t)\|^2 - (\lambda_{\min}(W) - 2\|P_2\|N_{*2})\|e_2(t)\|^2 + \\ &\quad + 2(\|Q\| + N_{*1})\|e_1(t)\|\|e_2(t)\| + 2M_{*1}\|e_1(t)\| + 2\|e_1(t)\|\|a|(\|d(t)\| - g). \end{aligned}$$

Обозначим: $a_1 = 2b$, $a_2 = \lambda_{\min}(W) - 2\|P_2\|N_{*2}$, $a_{12} = 2(\|Q\| + N_{*1})$, тогда

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & - (a_1\|e_1(t)\|^2 - a_{12}\|e_1\|\|e_2\| + a_2\|e_2(t)\|^2) + \\ & + 2\|e_1\|\|a\| \left(\|d(t)\| + \frac{M_{*1}}{|a|} - g \right). \end{aligned}$$

Ясно, что значение b может быть выбрано так, что $a_1 > 0$, а по условию теоремы $a_2 > 0$. Тогда если $a_{12} \leq 2\sqrt{a_1 a_2}$, то

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & - (a_1\|e_1(t)\|^2 - 2\sqrt{a_1 a_2}\|e_1\|\|e_2\| + a_2\|e_2(t)\|^2) + \\ (3.7) \quad & + 2\|e_1(t)\|\|a\| \left(\|d(t)\| + \frac{M_{*1}}{|a|} - g \right) = \\ & = - (\sqrt{a_1}\|e_1(t)\| - \sqrt{a_2}\|e_2(t)\|)^2 + 2\|e_1(t)\|\|a\| \left(\|d(t)\| + \frac{M_{*1}}{|a|} - g \right). \end{aligned}$$

Из определения коэффициента a_1 следует, что значение b может быть выбрано так, что $a_{12} \leq 2\sqrt{a_1 a_2}$. Из (3.7) тогда получаем $\dot{V}(t) < 0$, что доказывает теорему.

Известно [8], что в скользящем режиме $\dot{e}_1(t) = 0$ и $e_1(t) = 0$, а так как $e_2(t) \rightarrow 0$, то (3.3) влечет $v(t) - ad(t) + \Delta\Psi_1(t) \rightarrow 0$. В [8] показывается, что функция $v(t)$ может быть заменена непрерывной функцией

$$(3.8) \quad v_\delta(t) = -g|a| \frac{e_y(t)}{\|e_y(t)\| + \delta},$$

где δ — малое положительное число. Поскольку согласно замечанию справедливо соотношение $\|\Delta\Psi_1(t)\| \leq \|N_{*1}\|\|e(t)\| = 0$, функция $d(t)$ может быть оценена с высокой степенью точности в виде

$$\hat{d}(t) = -g \frac{|a|e_y(t)}{a(\|e_y(t)\| + \delta)}.$$

Важно, что правая часть последнего выражения зависит только от величины ошибки оценивания $e_y(t) = \hat{y}_*(t) - R_*y(t)$.

Согласно [22] необходимым и достаточным условием попадания системы на поверхность скольжения и возникновения скользящего режима является неотрицательность действительных частей корней ее характеристического уравнения, а поскольку матрица F_{**} устойчива, это условие с очевидностью выполняется. Удержание системы на этой поверхности обеспечивается условием $\dot{V}(t) < 0$ [2], которое гарантируется неравенством (3.6).

Отметим, что ранее в [2] для оценки функции $d(t)$ было предложено применять фильтр нижних частот; используемая в настоящей работе формула (3.8) является альтернативой, активно применяемой последнее время.

Отметим также, что второе соотношение в (3.4) не содержит константу, т.е. $M_{*2} = 0$; это связано с тем, что наличие ненулевой константы приводит к невозможности существования скользящего режима в наблюдателе (3.1).

4. Учет шумов измерений

В случае, когда в измерениях присутствуют шумы, главный результат остается прежним, только ужесточаются требования к величине скаляра g для обеспечения скользящего режима. Пусть $y(t) = Hx(t) + \rho_s(t)$, где $\rho_s(t) \in \mathbb{R}^l$ — функция, описывающая шумы измерений. Предполагается, что $\rho_s(t)$ — ограниченная функция: $\|\rho_s(t)\| \leq \rho_*$.

Для учета шумов скорректируем вид модели (2.11):

$$\begin{aligned}\dot{x}_{*1}(t) &= x_{*2}(t) + G_{*1}u(t) + J_{*1}Hx(t) + C_{*1}\Psi(x_{**}(t), Hx(t), u(t)) + ad(t), \\ \dot{x}_{**}(t) &= F_{**}x_{**}(t) + G_{**}u(t) + J_{**}Hx(t) + C_{**}\Psi(x_{**}(t), Hx(t), u(t)), \\ y_*(t) &= x_{*1}(t).\end{aligned}$$

Тогда уравнения (3.3) для переменной $e_1(t)$ дополнятся новым слагаемым $J_{*1}\rho_s(t)$ (для простоты предполагается, что измерения, входящие во вторую подсистему, свободны от шума):

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= -be_1(t) + Qe_2(t) - ad(t) + J_{*1}(y(t) - Hx(t)) + \Delta\Psi_1(t) + v(t) = \\ &= -be_1(t) + Qe_2(t) - ad(t) + J_{*1}\rho_s(t) + \Delta\Psi_1(t) + v(t), \end{aligned}$$

при этом

$$\|\Delta\Psi_1(t)\| \leq N_{*1}\|e_2(t)\| + M_{*1} + S_{**},$$

где

$$S_{**} \approx \rho_* \left\| \frac{\partial C_{*1}\Psi_*(\hat{x}_{**}, y, u)}{\partial y} \right\|.$$

Тогда последние элементы выражения для $\dot{V}(t)$ в (3.6) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -2b\|e_1(t)\|^2 - \lambda_{\min}(W)\|e_2(t)\|^2 + 2\|e_1\|\|e_2\|\|Q\| + \\ &\quad + 2\|e_1\|\|a\|(\|d(t)\| - g) + 2\|e_1(t)\|(\|N_{*1}\|e_2(t)\| + M_{*1} + \|J_{*1}\|\rho_* + S_{**}) + \\ &\quad + 2\|P_2\|\|e_2(t)\|\|N_{*2}\|e_2(t)\| = \\ &= -2b\|e_1(t)\|^2 - (\lambda_{\min}(W) - 2\|P_2\|\|N_{*2}\|)\|e_2(t)\|^2 + \\ &\quad + 2\|e_1(t)\|\|e_2(t)\|(\|Q\| + N_{*1}) + \\ &\quad + 2\|e_1(t)\|\|a\| \left(\|d(t)\| + \frac{M_{*1} + \|J_{*1}\|\rho_* + S_{**}}{|a|} - g \right) = \\ &= -(\sqrt{a_1}\|e_1(t)\| - \sqrt{a_2}\|e_2(t)\|)^2 + \\ &\quad + 2\|e_1(t)\|\|a\| \left(\|d(t)\| + \frac{M_{*1} + \|J_{*1}\|\rho_* + S_{**}}{|a|} - g \right). \end{aligned}$$

Ясно, что $\dot{V}(t) < 0$ при

$$g > \|d(t)\| + \frac{M_{*1} + \|J_{*1}\|\rho_* + S_{**}}{|a|},$$

что обеспечивает существование скользящего режима. Поскольку в уравнение (4.1) входят шумы измерений, оценка функции $d(t)$ производится с погрешностью порядка величины $\|J_{*1}\|\rho_* + S_{**}$.

5. Построение модели минимальной размерности для идентификации дефектов в датчиках

Перейдем к задаче идентификации дефектов в датчиках. Для конкретности ниже будем полагать, что дефект возник в j -м датчике и описывается матрицей $D := D_j$ и функцией $d(t) := d_j(t)$, т.е. j -я компонента вектора y искажена дефектом.

Отметим, что в [8, 9] также рассматривались задачи идентификации дефектов в датчиках и было получено только приближенное решение, поскольку итоговое выражение содержало производную $\dot{d}(t)$. Метод, предложенный в [12], давал точное решение за счет использования специальной системы размерности $n + l$, на основе которой строился скользящий наблюдатель. В отличие от этих методов в настоящей работе скользящий наблюдатель строится с использованием редуцированной модели исходной системы размерности $k < n$, не чувствительной к возмущениям, которая не содержит производной $\dot{d}(t)$. Кроме того, задача решается без дополнительных условий, накладываемых в [12], что позволяет решить задачу идентификации для более широкого класса систем.

Как и в разделе 2, в основе решения рассматриваемой задачи лежит модель системы (1.1) меньшей размерности (редуцированная модель). С учетом того, как сигнал от неисправного датчика входит в эту модель, рассматриваются три варианта.

1. Сигнал входит только в линейную часть модели.
2. Сигнал входит только в нелинейную часть модели.
3. Сигнал входит как в линейную, так и нелинейную части модели.

Рассмотрим вначале первый вариант и построим модель, которая несколько отличается от модели (2.1):

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= F_*x_*(t) + G_*u(t) + J_*Hx(t) + C_*\Psi_*(x_*(t), H^{(j)}x(t), u(t)) + L_*\rho(t), \\ y_*(t) &= H_*x_*(t) + D_*d(t), \end{aligned}$$

где

$$(5.2) \quad C_*\Psi_*(x_*, H^{(j)}x, u) = \begin{pmatrix} \varphi_{i_1}(A_{*1i_1}x_* + A_{*2i_1}H^{(j)}x, u) \\ \dots \\ \varphi_{i_k}(A_{*1i_k}x_* + A_{*2i_k}H^{(j)}x, u) \end{pmatrix},$$

$y^{(j)} = H^{(j)}x$ — вектор y без j -й компоненты, отвечающей неисправному датчику, $H^{(j)}$ — соответствующая матрица. Остальные элементы модели (5.1) совпадают с (2.1).

Построим не чувствительную к возмущениям модель (5.1) минимальной размерности, которая затем будет положена в основу синтеза скользящего

наблюдателя. С этой целью матрицы F_* и H_* будем искать в канонической форме (2.3) с $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$; устойчивость наблюдателя будет обеспечена другим способом.

Применяя эти формы к (5.2), получим соотношения для матриц Φ и J_* :

$$(5.3) \quad \Phi_1 = R_* H, \quad \Phi_i F = \Phi_{i+1} + J_{*i} H, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad \Phi_k F = J_{*k} H,$$

где Φ_i и J_{*i} — i -е строки матриц Φ и J_* , $i = 1, \dots, k$.

Одним из условий построения скользящего наблюдателя является равенство $R_* D = 0$, при его невыполнении скользящий режим существовать не будет. Это условие может быть учтено матрицей D^0 , имеющей максимальный ранг и удовлетворяющей условию $D^0 D = 0$. Тогда из $R_* D = 0$ следует $R_* = S D^0$ для некоторой матрицы S . Известно [18, 19], что уравнения (5.3) могут быть сведены к одному уравнению

$$(5.4) \quad S D^0 H F^k = J_{*1} H F^{k-1} + J_{*2} H F^{k-2} + \dots + J_{*k} H.$$

Как и в разделе 2, модель должна быть нечувствительна к возмущениям и сигнал от неисправного датчика должен входить в уравнение только для первой компоненты вектора x_* . Учитывая, что последнее условие записывается в виде $J_{*i} D = 0$, $i = 2, \dots, k$, уравнение (5.4) можно преобразовать к виду, аналогичному (2.8):

$$(5.5) \quad (S \quad -J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k})(V^{(k)} \quad L^{(k)} \quad D^{(k)}) = 0,$$

где

$$V^{(k)} = \begin{pmatrix} D^0 H F^k \\ H F^{k-1} \\ \dots \\ H \end{pmatrix}, \quad L^{(k)} = \begin{pmatrix} D^0 H L & D^0 H F L & \dots & D^0 H F^{k-1} L \\ 0 & H L & \dots & H F^{k-2} L \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$D^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D \end{pmatrix}.$$

Критерием решения уравнения (5.5) является условие

$$\text{rank}(V^{(k)} \quad L^{(k)} \quad D^{(k)}) < l(k+1) - 1.$$

Начиная с $k = 1$, проверяем это условие, при его выполнении для некоторого k из (5.5) находим матрицы S и J_* и затем матрицу Φ из (2.4) и $C_* = \Phi C$. Далее вычисляется произведение (2.2) и проверяется условие

$$(5.6) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H^{(j)} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H^{(j)} \\ A_i \end{pmatrix}, \quad i = i_1, \dots, i_k.$$

Если оно выполняется, полагаем $G_* := \Phi G$ и $R_* := SD^0$; матрицы A_{*1i} и A_{*2i} , $i = i_1, \dots, i_k$, определяются из (2.2). Если (5.6) не выполняется, находим другое решение уравнения (5.5) с прежней или увеличенной размерностью k .

В результате модель (5.1) принимает вид, подобный (2.11):

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \dot{x}_{*1}(t) &= x_{*2}(t) + G_{*1}u(t) + J_{*1}Hx(t) + C_{*1}\Psi_*(x_{**}(t), H^{(j)}x(t), u(t)), \\ \dot{x}_{**}(t) &= F_{**}x_{**}(t) + G_{**}u(t) + J_{**}H^{(j)}x(t) + C_{**}\Psi_*(x_{**}(t), H^{(j)}x(t), u(t)), \\ y_*(t) &= x_{*1}(t), \end{aligned}$$

но в отличие от (2.11) матрица F_{**} может не быть устойчивой. Примем для простоты, что слагаемое $C_{**}\Psi_*(x_{**}, H^{(j)}x, u)$ не зависит от x_{**} , т.е. имеет вид $C_{**}\Psi_*(H^{(j)}x, u)$.

Приведем выражение (5.7) к компактному виду:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= \begin{pmatrix} \dot{x}_{1*}(t) \\ \dot{x}_{**}(t) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & F_{*1} \\ 0 & F_{**} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1*}(t) \\ x_{**}(t) \end{pmatrix} + G_*u(t) + J_*Hx(t) + \\ &+ \begin{pmatrix} C_{*1}\Psi_*(x_{**}(t), H^{(j)}x(t), u(t)) \\ C_{**}\Psi_*(H^{(j)}x(t), u(t)) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $F_{*1} = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$. Модель (5.8) будет использована для построения скользящего наблюдателя.

6. Решение задачи

6.1. Первый вариант

Скользящий наблюдатель имеет вид

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_{1*}(t) \\ \dot{\hat{x}}_{**}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & F_{*1} \\ 0 & F_{**} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{1*}(t) \\ \hat{x}_{**}(t) \end{pmatrix} + G_*u(t) + J_*y(t) + Qv(t) + \\ &+ \begin{pmatrix} C_{*1}\Psi_*(\hat{x}_{**}(t), y^{(j)}(t), u(t)) \\ C_{**}\Psi_*(y^{(j)}(t), u(t)) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ K_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $Q = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$, $v(t)$ — разрывная функция:

$$(6.2) \quad v(t) = \begin{cases} -g|J_{*1}D|\frac{e_y(t)}{\|e_y(t)\|}, & \text{если } e_y(t) \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$e_y(t) = \hat{y}_*(t) - R_*y(t) = e_1(t) = \hat{x}_{*1}(t) - x_{*1}(t),$$

$$e_2(t) = \hat{x}_{**}(t) - x_{**}(t),$$

коэффициенты k_1 и K_2 обеспечивают устойчивость наблюдателя. Используя (5.8), (6.1) и равенство $y(t) = Hx(t) + Dd(t)$, приведем уравнение для ошибки $e(t) = (e_1^T(t), e_2^T(t))^T$:

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \dot{e}(t) &= \begin{pmatrix} -k_1 & F_{*1} \\ -K_2 & F_{**} \end{pmatrix} e(t) + Qv(t) + QJ_{*1}Dd(t) + Q\Delta\Psi_1(t) = \\ &= F_0e(t) + Qv(t) + QJ_{*1}Dd(t) + Q\Delta\Psi_1(t), \end{aligned}$$

где

$$\Delta\Psi_1(t) = C_{*1} \left(\Psi_*(\hat{x}_{**}(t), y^{(j)}(t), u(t)) - \Psi_*(x_{**}(t), H^{(j)}x(t), u(t)) \right),$$

произведение $J_{*1}D$ предполагается ненулевым, матрица F_0 устойчива. Поскольку слагаемое $C_{**}\Psi_*(H^{(j)}x, u)$ не зависит от x_* и сигнал от неисправного датчика входит только в линейную часть, то $\Delta\Psi_2(t) = 0$.

Так как функция $C_{*1}\Psi(x, u)$ удовлетворяет условию Липшица (1.2) по x , то функция $C_{*1}\Psi_*(\hat{x}_{**}, y, u)$ также удовлетворяет этому условию по $\hat{x}_*$ и

$$(6.4) \quad \|\Delta\Psi_1(t)\| \leq N_* \|e(t)\| + M_*$$

для неотрицательных N_* и M_* . Отметим, что ненулевое значение M_* используется в доказательстве асимптотической устойчивости скользящего движения системы (6.3) (см. условие (6.5)). С другой стороны, известно [8], что скользящее движение дает $e_1(t) = 0$, а так как $\lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}_*(t) - x_*(t)) = 0$, и в этом случае можно принять $M_* := 0$.

Теорема 3. Если $\lambda_{\min}(W) > 2N_$ и скаляр g удовлетворяет условию*

$$(6.5) \quad g > \|d(t)\| + M_*/|J_{*1}D|,$$

то скользящее движение системы (6.3) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова $V(t) = e^T(t)P'e(t)$ и найдем ее производную по времени:

$$(6.6) \quad \begin{aligned} \dot{V}(t) &= (F_0e(t) + Qv(t) + QJ_{*1}Dd(t) + Q\Delta\Psi_1(t))^T P'e(t) + \\ &+ e^T(t)P'(F_0e(t) + Qv(t) + QJ_{*1}Dd(t) + Q\Delta\Psi_1(t)) = \\ &= e^T(t)(F_0^T P' + P'F_0)e(t) + 2e^T(t)P'Qv(t) + \\ &+ 2e^T(t)P'QJ_{*1}Dd(t) + 2e^T(t)P'Q\Delta\Psi_1(t). \end{aligned}$$

Определим матрицу P' в виде $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ для некоторой положительно определенной матрицы P . Тогда

$$\begin{aligned} 2e^T(t)P'Q &= 2e_1(t), \\ 2e^T(t)P'Q\Delta\Psi_1(t) &= 2e_1(t)\Delta\Psi_1(t). \end{aligned}$$

Так как матрица F_0 устойчива, существует положительно определенная матрица W , такая что $F_0^T P' + P' F_0 = -W$. Принимая во внимание эти соотношения и (6.2), преобразуем (6.6):

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= -e^T(t)W e(t) + 2e_1(t)v(t) + 2e_1(t)J_{*1}Dd(t) + 2e_1(t)\Delta\Psi_1(t) = \\
&= -e^T(t)W e(t) - 2|J_{*1}D|e_1(t)g \frac{e_1(t)}{\|e_1(t)\|} + \\
&\quad + 2e_1(t)J_{*1}Dd(t) + 2e_1(t)\Delta\Psi_1(t) = \\
&= -e^T(t)W e(t) - 2g|J_{*1}D|\|e_1(t)\| + 2e_1(t)J_{*1}Dd(t) + \\
&\quad + 2e_1(t)\Delta\Psi_1(t) \leq \\
(6.7) \quad &\leq -e^T(t)W e(t) + 2\|e_1(t)\|\|\Delta\Psi_1(t)\| + \\
&\quad + 2|J_{*1}D|\|e_1(t)\|(\|d(t)\| - g) \leq \\
&\leq -e^T(t)W e(t) + 2\|e_1(t)\|^2 N_* + 2\|e_1(t)\|M_* + \\
&\quad + 2|J_{*1}D|\|e_1(t)\|(\|d(t)\| - g) = \\
&= -(\lambda_{\min}(W) - 2N_*)\|e_1(t)\|^2 + \\
&\quad + 2|J_{*1}D|\|e_1(t)\| \left(\|d(t)\| + \frac{M_*}{|J_{*1}D|} - g \right).
\end{aligned}$$

Так как $\lambda_{\min}(W) > 2N_*$ и $g > \|d(t)\| + M_*/|J_{*1}D|$, то $\dot{V}(t) < 0$, что завершает доказательство.

Из (6.3) и (6.4) с учетом того, что в скользящем режиме $\dot{e}_1(t) = 0$ и $e_1(t) = 0$ [8], а также $e_2(t) \rightarrow 0$, получаем $v(t) + J_{*1}Dd(t) = 0$. Как и в разделе 4, функцию $v(t)$ можно заменить непрерывной функцией

$$(6.8) \quad v_\delta(t) = -g|J_{*1}D| \frac{e_y(t)}{\|e_y(t)\| + \delta},$$

где δ — малое положительное число. В результате функция $d(t)$ может быть оценена с высокой степенью точности в виде

$$\hat{d}(t) = \text{sign}(J_{*1}D) \frac{ge_y(t)}{\|e_y(t)\| + \delta}.$$

6.2. Второй вариант

Рассмотрим случай, когда j -я компонента вектора y , искаженная дефектом, входит только в нелинейную составляющую $C_{*1}\Psi(x_{**}, y, u)$ модели (5.8). Тогда условие (5.6) принимает вид (2.10) и матрица $D^{(k)}$ в (5.5) заменяется

на

$$D_*^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D \end{pmatrix}.$$

Полагая, что функция $d(t)$ достаточно мала, получим

$$(6.9) \quad \begin{aligned} C_{*1}\Psi(\hat{x}_{**}, y, u) &\approx C_{*1}\Psi(\hat{x}_{**}, Hx, u) + \frac{\partial C_{*1}\Psi(\hat{x}_{**}, y, u)}{\partial y_j} d = \\ &= C_{*1}\Psi(\hat{x}_{**}, Hx, u) + S_* d, \end{aligned}$$

где

$$S_* = \frac{\partial C_{*1}\Psi(\hat{x}_{**}, y, u)}{\partial y_j}.$$

Так как j -я компонента вектора y входит только в нелинейную составляющую, нетрудно видеть, что $J_{*1}D$ в (6.2) и (6.6) заменяется на S_* . По аналогии с (6.4) получаем

$$(6.10) \quad \|\Delta\Psi_1(t)\| \leq N_* \|e(t)\| + |S_*| \|d(t)\| + M_*.$$

Тогда выражение (6.7) принимает вид

$$(6.11) \quad \begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -(\lambda_{\min}(W) - 2N_*) \|e_1(t)\|^2 + \\ &+ 2|S_*| \|e_1(t)\| (\|d(t)\| + M_*/|S_*| - g_2). \end{aligned}$$

Ясно, что $\dot{V}(t) < 0$, если $\lambda_{\min}(W) > 2N_*$ и $g_2 > \|d(t)\| + M_*/|S_*|$, где g_2 входит в (6.2) вместо g . Функция $d(t)$ оценивается в виде

$$\hat{d}(t) = \text{sign}(S_*) \frac{g_2 e_y(t)}{\|e_y(t)\| + \delta}.$$

6.3. Третий вариант

Как и выше, найдем приближенное решение. В этом случае используем условие (6.8) и матрицу $D^{(k)}$ из (5.5); разрывная функция $v(t)$ в (6.1) дается выражением

$$v(t) = \begin{cases} -g_3 |(J_{*1}D + S_*)| \frac{e_y(t)}{\|e_y(t)\|}, & \text{если } e_y(t) \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

уравнение для ошибки $e(t)$ принимает вид

$$\dot{e}(t) = F_0 e(t) + Qv(t) + Q\Delta\Psi_1(t) + Q(J_{*1}D + S_*)d(t),$$

где $\Delta\Psi_1(t)$ имеет вид (3.10). Выражение (6.11) изменяется:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) \leq & -(\lambda_{\min}(W) - 2N_*)\|e_1(t)\|^2 + 2\|e_1(t)\|\|J_{*1}D + \\ & + S_*\|(\|d(t)\| + M_*/|J_{*1}D + S_*| - g_3).\end{aligned}$$

Функция $d(t)$ оценивается в виде

$$\hat{d}(t) = \text{sign}(J_{*1}D + S_*) \frac{g_3 e_y(t)}{\|e_y(t)\| + \delta},$$

где

$$g_3 > \|d(t)\| + M_*/|J_{*1}D + S_*|.$$

7. Размещение дополнительных датчиков для решения задачи идентификации

В ряде случаев задача идентификации дефектов в рассматриваемом датчике не имеет решения, поскольку для него не выполняется условие $R_*D = 0$. Эта трудность может быть преодолена введением дополнительных датчиков, которые позволят построить модель, не чувствительную к возмущениям и удовлетворяющую условию $R_*D = 0$. Дополнительные датчики могут быть также полезны при идентификации дефектов в динамике для уменьшения размерности скользящих наблюдателей.

Правила определения мест размещения дополнительных датчиков можно сформулировать следующим образом. Пусть H_{ad} — матрица, описывающая дополнительный датчик, и $H_n = \begin{pmatrix} H \\ H_{ad} \end{pmatrix}$ — матрица, описывающая все датчики. Пусть D_n обозначает матрицу, соответствующую неисправному датчику, и матрица D_n^0 имеет максимальный ранг и удовлетворяет условию $D_n^0 D_n = 0$. Принимая во внимание вид матриц V^k и L^k в (5.5), заключаем, что матрица H_{ad} должна быть такой, чтобы выполнялось условие

$$\text{rank}(D^0 H) < \text{rank}(D_n^0 H_n),$$

поскольку такой выбор дает больше шансов найти матрицу R_* , удовлетворяющую условию $R_* D_n = 0$. Когда имеются два варианта H_{ad1} и H_{ad2} , первый будет предпочтительнее, если

$$(7.1) \quad \text{rank}(D_{n1}^0 H_{n1}) > \text{rank}(D_{n2}^0 H_{n2}),$$

где матрицы D_{n1}^0 и H_{n1} соответствуют первому варианту, D_{n2}^0 и H_{n2} — второму.

Если дополнительные датчики по каким-либо причинам нельзя использовать, для оценки неизмеряемых компонент вектора состояния $x(t)$ могут быть применены так называемые виртуальные датчики [23, 24]. Для реализации таких датчиков может быть использован наблюдатель Люенбергера, не

чувствительный к возмущениям, который в случае, когда исходная система линейна и наблюдаема, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_v(t) &= (F - J_v H)x_v(t) + Gu(t) + J_v y(t), \\ y_v(t) &= H_v x_v(t),\end{aligned}$$

где $x_v \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, матрица J_v выбирается так, что матрица $F - J_v H$ устойчива, это всегда можно сделать, когда пара (F, H) наблюдаема; y_v — выход наблюдателя, являющийся оценкой неизмеряемой компоненты вектора состояния $x(t)$, которую необходимо использовать при построении скользящего наблюдателя для идентификации дефекта в некотором датчике, H_v — соответствующая матрица. Нетрудно видеть, что уравнение для ошибки $e(t) = x(t) - x_v(t)$ имеет вид

$$\dot{e}(t) = (F - J_v H)e(t),$$

и $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, так как матрица $F - J_v H$ устойчива. Таким образом, $x_v(t) \rightarrow x(t)$ и $y_v(t) \rightarrow H_v x(t)$, т.е. переменная $y_v(t)$ оценивает неизмеряемую компоненту вектора $x(t)$.

Детальное решение этой задачи содержится в [25].

8. Практические примеры

8.1. Идентификация дефектов в динамике

Рассмотрим полную модель электропривода робота [21, 26]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{C_r i_r^2}{H_E} x_1(t) - \frac{K_{vr} + h_E}{H_E} x_2(t) + \frac{C_r i_r}{H_E} x_3(t) + \\ &\quad + \frac{-M_E - M_1 \text{sign}(x_2(t)) + C_r i_r f(\beta)}{H_E} + \rho(t), \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) &= \frac{C_r i_r}{J_m} x_1(t) - \frac{C_r}{J_m} x_3(t) - \frac{K_{vm}}{J_m} x_4(t) + \frac{K_m}{J_m} x_5(t) + \\ &\quad + \frac{-M_2 \text{sign}(x_4(t)) + C_r i_r f(\beta)}{J_m}, \\ \dot{x}_5(t) &= -\frac{K_\omega}{L_m} x_4(t) - \frac{R_m}{L_m} x_5(t) + \frac{K_U}{L_m} u(t) + d(t).\end{aligned}$$

Детальное описание его переменных и коэффициентов можно найти в [21, 26], дополнительно отметим, что $f(\beta)$ — функция, описывающая нечувствительность в механической передаче:

$$f(\beta) = \begin{cases} \beta + \sigma, & \text{если } \beta < -\sigma, \\ 0, & \text{если } -\sigma \leq \beta \leq \sigma, \\ \beta - \sigma, & \text{если } \beta > \sigma, \end{cases}$$

$\beta = x_3 - i_r x_1$, σ — угол проскальзывания редуктора.

Дефект и возмущение интерпретируются следующим образом: $d(t) = -\frac{\tilde{R}}{L_m} x_3(t)$ соответствует отклонению $\tilde{R}$ активного сопротивления R_m от его номинального значения; функция $\rho(t) = -\frac{\tilde{M}(t)}{H_E}$ вызвана внешним моментом $\tilde{M}(t)$, приложенным к выходному валу редуктора. Требуется построить скользящий наблюдатель, инвариантный к возмущению и оценивающий величину отклонения $\tilde{R}_m$.

Полагая, что измеряются первая, третья и пятая компоненты вектора состояния, т.е. $y_1 = x_1$, $y_2 = x_3$ и $y_3 = x_5$, получаем следующее описание электропривода:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{C_r i_r^2}{H_E} & -\frac{K_{vr} + h_E}{H_E} & \frac{C_r i_r}{H_E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{C_r i_r}{J_m} & 0 & -\frac{C_r}{J_m} & -\frac{K_{vm}}{J_m} & \frac{K_m}{J_m} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{K_\omega}{L_m} & -\frac{R_m}{L_m} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_U}{L_m} \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi(x, u) = \begin{pmatrix} \frac{-M_E - M_1 \text{sign}(A_1 x) + C_r i_r f(A_2 x)}{H_E} \\ \frac{-M_2 \text{sign}(A_3 x) + C_r i_r f(A_2 x)}{J_m} \end{pmatrix},$$

$$A_1 = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0), \quad A_2 = (-i_r \ 0 \ 1 \ 0 \ 0), \quad A_3 = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0).$$

Ясно, что функция $\text{sign}(x)$ удовлетворяет условию (1.2) в виде

$$|\text{sign}(x) - \text{sign}(x')| \leq 2,$$

т.е. $N = 0$ и $M = 2$. Функция $f(\beta)$ удовлетворяет условию (1.2) в виде

$$|f(\beta) - f(\beta')| \leq |\beta - \beta'|,$$

т.е. $N = 1$ и $M = 0$ для этой функции.

Нетрудно видеть, что $\text{rank}(H[L \ D]) = 1 \neq \text{rank}([L \ D]) = 2$, т.е. условия работы [8] не выполняются и предложенными там методами скользящий наблюдатель построен быть не может.

Построим линейную модель, инвариантную к возмущению. Нетрудно проверить, что матрицы $B^{(k)}$ и $D^{(k)}$ при $k = 2$ имеют вид

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L_m}{R_m} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения (2.8) дает строку $(R_* \quad -J_{*1})$ с тремя неопределенными элементами, соответствующими нулям вторых столбцов приведенных выше матриц, что заметно усложняет решение уравнения (2.9). Поэтому здесь более удобным оказывается эвристический подход, основанный на анализе модели электропривода, который дает следующее:

$$R_* = (0 \ 0 \ 1), \quad J_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{R_m}{L_m} \\ \frac{C_r i_r}{J_m} & -\frac{C_r}{J_m} & \frac{K_m}{J_m} \end{pmatrix},$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_* = \Phi C = (0 \ 1)^T.$$

Так как аргумент функции $f(\beta)$ выражается через вектор y , условие (2.10) с очевидностью выполняется. В результате редуцированная модель описывается уравнениями

$$(8.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_{*1}(t) &= -\frac{K_\omega}{L_m} x_{*2}(t) - \frac{R_m}{L_m} y_3(t) + \frac{K_U}{L_m} u(t) + d(t), \\ \dot{x}_{*2}(t) &= -\frac{K_{vm}}{J_m} x_{*2}(t) + \frac{C_r i_r}{J_m} y_1(t) - \frac{C_r}{J_m} y_2(t) + \frac{K_m}{J_m} y_3(t) + \\ &\quad + \frac{-M_2 \text{sign}(x_{*2}(t)) + C_r i_r f(y_2(t) - i_r y_1(t))}{J_m}, \\ y_*(t) &= x_{*1}(t), \end{aligned}$$

где $x_{*1} = x_5$, $x_{*2} = x_4$. Поскольку

$$D_* = \Phi D = (1 \ 0)^T \neq 0,$$

модель чувствительна к дефекту, а так как

$$F_{**} = -\frac{K_{vm}}{J_m},$$

подсистема с переменной x_{*2} устойчива. Поскольку функция $f(\beta)$ в (8.1) не содержит вектора состояния x_* , для нее $N_{*2} = 0$.

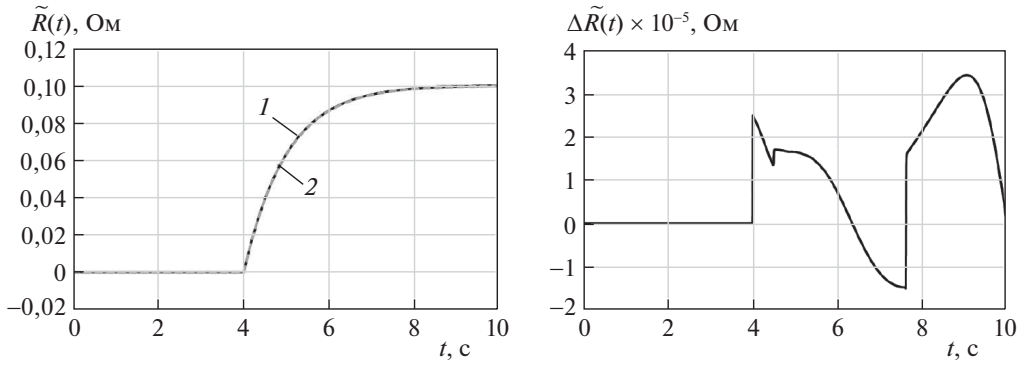


Рис. 1. Функция $\tilde{R}$, ее оценка и ошибка оценивания $\hat{\tilde{R}}(t) - \tilde{R}(t)$.

Сравнивая (2.11) и (8.1), приходим к выводу, что $a = 1$; примем $b := 0,3$. Скользящий наблюдатель описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}_{*1}(t) &= -\frac{K_\omega}{L_m} \hat{x}_{*2}(t) - \frac{R_m}{L_m} y_3(t) + \frac{K_U}{L_m} u(t) + v(t) - 0,3e_y(t), \\
 \dot{\hat{x}}_{*2}(t) &= -\frac{K_{vm}}{J_m} \hat{x}_{*2}(t) + \frac{C_r i_r}{J_m} y_1(t) - \frac{C_r}{J_m} y_2(t) + \frac{K_m}{J_m} y_3(t) + \\
 (8.2) \quad &+ \frac{-M_2 \text{sign}(\hat{x}_{*2}(t)) + C_r i_r f(y_2(t) - i_r y_1(t))}{J_m}, \\
 \hat{y}_*(t) &= \hat{x}_{*1}(t),
 \end{aligned}$$

где $e_y(t) = \hat{y}(t) - y_3(t)$,

$$v(t) = \begin{cases} -g \frac{e_y(t)}{\|e_y(t)\|}, & \text{если } e_y(t) \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$g > \|d(t)\|$. Оценка функции $d(t)$ дается выражением

$$(8.3) \quad \hat{d}(t) = -g \frac{e_y(t)}{\|e_y(t)\| + \delta}.$$

Моделирование производилось при следующих значениях параметров: $J_m = 0,0001 \text{ Kgm}^2$, $K_\omega = 0,02 \text{ Vs}$, $K_U = 100$, $R_m = 0,4 \text{ }\Omega$, $L_m = 0,004 \text{ H}$, $K_m = 0,02 \text{ Nm/A}$, $i_r = 100$, $C_r = 2 \text{ Nm/rad}$, $M_1 = 1 \text{ Nm}$, $M_2 = 0,01 \text{ Nm}$, $K_{vm} = 10^{-5} \text{ Nms/rad}$, $K_r = 0,01 \text{ Nms/rad}$, $\sigma = 0,01 \text{ rad}$. Заданные показатели качества управления обеспечиваются ПИД регулятором. Входное воздействие на электропривод было таким, чтобы угол вращения выходного вала редуктора описывался функцией $x_1^{ref}(t) = \sin(t) + 1,5t$.

Возмущение $\rho(t)$ моделировалось функцией $\tilde{M}(t) = 7 \sin(0,8t) \text{ Nm}$ на интервале $t = 1 \div 10 \text{ с}$. Дефект $d(t)$ вызван плавным изменением активного сопротивления R_m от 0 до $0,1 \text{ }\Omega$ начиная с момента $t = 4 \text{ с}$. При моделировании задавались $g = 100$ и $\delta = 0,05$.

Результаты моделирования представлены на рис. 1, символом 1 на нем представлена функция $\tilde{R}(t)$, символом 2 — ее оценка согласно формуле (8.3), а также ошибка оценивания. Из рисунка видно, что оценка равна нулю на интервале $0 \div 4$ с, что означает нечувствительность наблюдателя (8.2) к возмущению.

8.2. Идентификация дефектов в датчиках

Заметим, что нередко в исполнительных элементах современных мехатронных и робототехнических объектов можно пренебречь упругостью механической передачи и нечувствительностью. Тогда электропривод можно описать упрощенной моделью:

$$(8.4) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \gamma_1 x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \gamma_2 x_3(t) + \gamma_6 \text{sign}(x_2) + \rho(t), \\ \dot{x}_3(t) &= \gamma_3 x_2(t) + \gamma_4 x_3(t) + \gamma_5 u(t), \\ y_1(t) &= x_1(t) + d_1(t), \quad y_2(t) = x_3(t) + d_2(t). \end{aligned}$$

Здесь $\gamma_1 = 1/i_r$, $\gamma_2 = K_{vm}/J_m$, $\gamma_3 = -K_\omega/L_m$, $\gamma_4 = -R_m/L_m$, $\gamma_5 = K_U/L_m$, $\gamma_6 = -M_2/J_m$. Электропривод описывается следующими матрицами:

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \\ 0 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ H &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi(x, u) = \text{sign}(Ax), \quad A = (0 \ 1 \ 0), \\ D_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

По аналогии с [1] построим модель, не чувствительную к возмущению:

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= -\gamma_1 \gamma_4 H_2 x(t) - \gamma_1 \gamma_5 u(t), \\ y_*(t) &= x_*(t), \end{aligned}$$

где $x_* = \gamma_3 x_1 - \gamma_1 x_3$ и $R_* = (\gamma_3 - \gamma_1)$.

Поскольку $R_* D_1 \neq 0$ и $R_* D_2 \neq 0$, требуемое условие построения скользящего наблюдателя не выполняется, необходимо использовать дополнительный датчик, формирующий выход $y_3(t) = x_2(t) + d_3(t)$. Новые матрицы H_n и D_{nj} принимают вид

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{n1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_{n2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D_{n3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $D_{n2}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\text{rank}(D_2^0 H) = 1 < \text{rank}(D_{n2}^0 H_n) = 2$, т.е. условие (7.1) выполняется.

Поскольку переменная $x_1 = y_1$ не входит в правые части уравнений (8.4), дефекты в первом датчике рассматриваемым методом идентифицированы быть не могут.

Вначале рассмотрим третий датчик (как более простой) и построим соответствующую редуцированную модель. Можно показать, что она описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}'_*(t) &= \gamma_1 H_3 x(t), \\ y'_*(t) &= x'_*(t) = y_1(t),\end{aligned}$$

где $x'_* = x_1$, $R'_* = (1 \ 0 \ 0)$. Нетрудно видеть, что $R'_* D_{n3} = 0$, $J'_* D_{n3} = \gamma_1$. Скользящий наблюдатель описывается в виде

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}'_*(t) &= \gamma_1 y_3(t) + v'(t) - k' e'(t), \\ \hat{y}'_*(t) &= \hat{x}'_*(t),\end{aligned}$$

где

$$v'(t) = -g' \gamma_1 \frac{e'(t)}{\|e'(t)\| + \delta'},$$

$e'(t) = \hat{y}'_*(t) - y_1(t) = \hat{x}'_*(t) - x'_*(t)$, $g' > \|d_3(t)\|$, $k' > 0$. Как результат, получаем оценку для функции $d_3(t)$:

$$\hat{d}_3(t) = g' \frac{e'(t)}{\|e'(t)\| + \delta'}.$$

Приведем модель для второго датчика:

$$\begin{aligned}\dot{x}''_*(t) &= \gamma_2 H_2 x(t) + \gamma_6 \text{sign}(y_3(t)), \\ y''_*(t) &= x''_*(t) = y_3(t),\end{aligned}$$

где $x''_* = x_2$, $R''_* = (0 \ 1 \ 0)$; ясно, что $R''_* D_{n2} = 0$, $J''_* D_{n2} = \gamma_2$. Скользящий наблюдатель принимает вид

$$\begin{aligned}(8.5) \quad \dot{\hat{x}}''_*(t) &= \gamma_2 y_2(t) + \gamma_6 \text{sign}(y_3(t)) - g'' \gamma_2 \frac{e''(t)}{\|e''(t)\| + \delta''} - k'' e''(t), \\ \hat{y}''_*(t) &= \hat{x}''_*(t),\end{aligned}$$

где $e''(t) = \hat{y}''_*(t) - y_3(t) = \hat{x}''_*(t) - x''_*(t)$, $g'' > \|d_2(t)\|$, $k'' > 0$. Функция $d_2(t)$ оценивается следующим образом:

$$(8.6) \quad \hat{d}_2(t) = g'' \frac{e''(t)}{\|e''(t)\| + \delta''}.$$

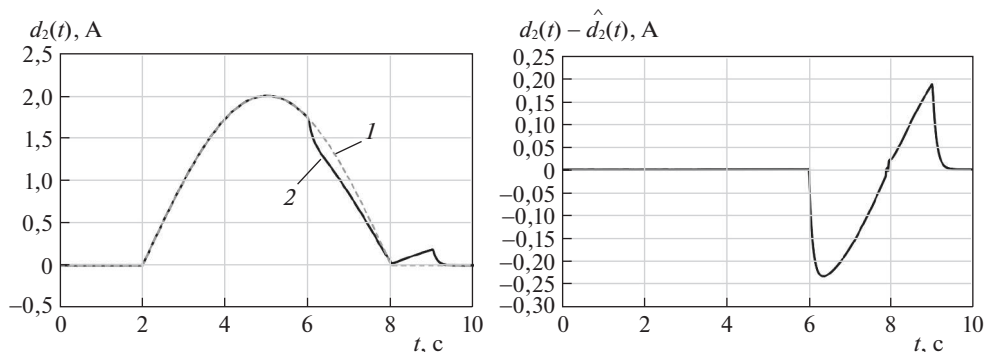


Рис. 2. Функция $d_2(t)$, ее оценка и ошибка оценивания $d_2(t) - \hat{d}_2(t)$.

Поскольку в уравнение для переменной x_2 входит возмущение ρ , величина дефекта во втором датчике будет оценена с погрешностью.

При моделировании задавались следующие параметры рассматриваемого следящего электропривода: $J_H = 0,0001 \text{ Kgm}^2$, $K_\omega = 0,02 \text{ Vc}$, $K_U = 100$, $R = 0,4 \text{ }\Omega$, $L = 0,004 \text{ H}$, $K_M = 0,02 \text{ Nm/A}$, $K_d = 0,02 \text{ N/m}$, $i_p = 100$. Заданные показатели качества управления обеспечиваются типовым корректирующим устройством с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{(0,089s + 1)(0,0011s + 1)}{(0,001s + 1)(0,001s + 1)}.$$

Желаемое значение угла поворота выходного вала редуктора принималось в виде $x_1^{ref}(t) = \sin(t)$.

Возмущение $\rho(t)$ имитировалось действием внешнего нагрузочного момента величиной $\tilde{M}(t) = 0,005 \sin(0,8t) \text{ Nm}$ на интервале $t = 6 \div 9 \text{ c}$. Дефект $d_2(t)$ представлен функцией $2 \sin((t - 2)\pi/6)$ на интервале $t = 2 \div 8 \text{ c}$.

Результаты моделирования с $g'' = 100$ и $\delta'' = 10^{-3}$ в (8.5) показаны на рис. 2, где символом 1 помечена функция $d_2(t)$, символом 2 — ее оценка согласно (8.6); также показана ошибка оценивания, которая, как видно, достаточно мала. Отметим, что ошибка оценивания на интервале $t = 6 \div 9 \text{ c}$ возрастает, что можно объяснить наличием возмущения $\rho(t)$.

9. Заключение

В работе была поставлена и решена задача идентификации дефектов в нелинейных динамических системах и их датчиках при наличии внешних возмущающих воздействий. Для решения поставленной задачи было предложено использовать метод на основе скользящих наблюдателей. В работе разработана модификация этого метода, позволившая расширить класс систем, для которых удастся решить задачу идентификации. Такое расширение стало возможным за счет ослабления ограничений, накладываемых на исходную систему. Кроме того, эта модификация позволила уменьшить размерность построенных наблюдателей. Для случая дефектов в датчиках были

рассмотрены три случая вхождения показаний дефектного датчика и для каждого из них получены соответствующие формулы для оценки величины дефекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Шумский А.Е.* Диагностирование линейных динамических систем: подход на основе скользящих наблюдателей // *АиТ.* 2020. № 2. С. 18–35.
Zhirabok A., Zuev A., Shumsky A. Diagnosis of linear dynamic systems: an approach based on sliding mode observers // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 2. P. 211–225.
2. *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.
3. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
4. *Краснова С.А., Кузнецов С.И.* Оценивание на скользящих режимах неконтролируемых возмущений в нелинейных динамических системах // *АиТ.* 2005. № 10. С. 54–69.
Krasnova S.A., Kuzntsov S.I. Uncontrollable perturbation of nonlinear dynamic systems: estimation on moving modes // *Autom. Remote Control.* 2005. V. 66. No. 10. P. 1580–1593.
5. *Краснова С.А., Уткин В.А.* Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. М.: Наука, 2006.
6. *Shtessel Yu., Edwards C., Fridman L., Levant A.* Sliding mode control and observation. N.Y.: Springer, 2014.
7. *Fridman L., Levant A., Davila J.* Observation of linear systems with unknown inputs via high order sliding-modes // *Int. J. Syst. Sci.* 2007. V. 38. P. 773–791.
8. *Edwards C., Spurgeon S., Patton R.* Sliding mode observers for fault detection and isolation // *Automatica.* 2000. V. 36. P. 541–553.
9. *Kalsi K., Hui S., Zak S.* Unknown input and sensor fault estimation using sliding-mode observers // *Proc. 2011 ACC, San Francisco.* 2011. P. 1364–1369.
10. *Yan X., Edwards C.* Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using a sliding modes observer // *Automatica.* 2007. V. 43. P. 1605–1614.
11. *He J., Zhang C.* Fault reconstruction based on sliding mode observer for nonlinear systems // *Mathematical Problems in Engineering.* 2012. P. 1–22.
12. *Tan C., Edwards C.* Sliding mode observers for robust detection and reconstruction of actuator and sensor faults // *Int. J. Robust and Nonlinear Control.* 2003. V. 13. P. 443–463.
13. *Brahim A., Dhahri S., Hmida F., Sellami A.* Simultaneous actuator and sensor faults reconstruction based on robust sliding mode observer for a class of nonlinear systems // *Asian J. Contr.* 2017. V. 19. P. 362–371.
14. *Chang J., Tan C., Trinh H., Kamal M.* State and fault estimation for a class of non-infinitely observable descriptor systems using two sliding mode observers in cascade // *J. Franklin Institute.* 2019. V. 356. P. 3010–3029.
15. *Castillo I., Fridman L., Moreno J.* Super-twisting algorithm in presence of time and state dependent perturbations // *Int. J. Control.* 2018. V. 91. P. 2535–2548.

16. *Мироновский Л.А.* Функциональное диагностирование динамических систем. М.-СПб.: Изд-во МГУ-ГРИФ, 1998.
17. *Zhirabok A., Shumsky A., Zuev A.* Fault diagnosis in linear systems via sliding mode observers // *Int. J. Control.* 2021. V. 94. No. 2. P. 327–335.
18. *Zhirabok A., Shumsky A., Solyanik S., Suvorov A.* Fault detection in nonlinear systems via linear methods // *Int. J. Applied Mathematics and Computer Science.* 2017. V. 27. P. 261–272.
19. *Жи́рабок А.Н., Шумский А.Е., Павлов С.В.* Диагностирование линейных динамических систем непараметрическим методом // *АиТ.* 2017. № 7. С. 3–21.
Zhirabok A., Shumsky A., Pavlov S. Diagnosis of linear dynamic systems by the non-parametric method // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 7. P. 1173–1188.
20. *Жи́рабок А.Н., Зуев А.В., Шумский А.Е.* Методы диагностирования линейных систем на основе скользящих наблюдателей // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2019. № 6. С. 73–89.
Zhirabok A., Zuev A., Shumsky A. Methods of diagnosis in linear systems based on sliding mode observers // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2019. Vol. 58. No. 6. P. 898–914.
21. *Зуев А.В., Филаретов В.Ф.* Особенности создания комбинированных позиционно-силовых систем управления манипуляторами // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2009. № 1. С. 154–162.
Zuev A., Filaretov V. Features of designing combined force/position manipulator control systems // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2009. Vol. 48. P. 146–154.
22. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука, 1967.
23. *Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M.* Diagnosis and Fault-Tolerant Control. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
24. *Witczak M.* Fault diagnosis and fault tolerant control strategies for nonlinear systems. Berlin: Springer, 2014.
25. *Жи́рабок А.Н., Ким Чхун Ир.* Виртуальные датчики в задаче функционального диагностирования // *Мехатроника, автоматизация, управление.* 2021. № 6. С. 298–303.
Zhirabok A., Kim C. Virtual sensors in the fault diagnosis problem // *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie.* 2021. Vol. 22. No. 6. P. 298–303.
26. *Филаретов В.Ф.* Самонастраивающиеся системы управления приводами манипуляторов. Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2000.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 28.04.2021

После доработки 21.09.2021

Принята к публикации 15.10.2021