

© 2022 г. О.О. ЯНОЧКИНА, канд. техн. наук (yanoolga@gmail.com),
Д.В. ТИТОВ, д-р техн. наук (amazing2004@inbox.ru)
(Юго-Западный государственный университет, Курск)

БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ¹

Исследуются локальные бифуркации в системе управления с широтно-импульсной модуляцией первого рода (ШИМ-1), состояние которой описывается кусочно-гладким отображением. Показано, что в импульсных системах наряду с классическими возможны так называемые бифуркации граничного столкновения («border collision bifurcations»), не имеющие аналогов в гладких системах. С использованием кусочно-линейного непрерывного отображения в качестве нормальной формы описаны основные бифуркационные переходы.

Ключевые слова: широтно-импульсная модуляция, кусочно-гладкое отображение, бифуркация граничного столкновения, нормальная форма.

DOI: 10.31857/S0005231022020040

1. Введение

Рассмотрим импульсную систему, состоящую из непрерывной линейной части и широтно-импульсного модулятора [1–4]. Поведение такой системы описывается дифференциальным уравнением с разрывной правой частью [2, 4, 5]

$$(1) \quad \frac{T}{T_0} \dot{x} + x = f, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \sigma = q - x,$$

где x – выход системы; $\dot{x}$ – производная x по безразмерному времени $t_* = t/T_0$; T_0 – период модуляции; T – постоянная времени; q – внешнее воздействие; σ , f – сигналы на входе и выходе модулятора, осуществляющего ШИМ-1:

$$f = \begin{cases} 1, & k \leq t_* < k + z_k; \\ 0, & k + z_k \leq t_* < k + 1. \end{cases}$$

¹ Работа поддержана Минобрнауки РФ, грант «Реализация программы стратегического академического лидерства Приоритет-2030» (соглашения № 075-15-2021-1155, № 075-15-2021-1213).

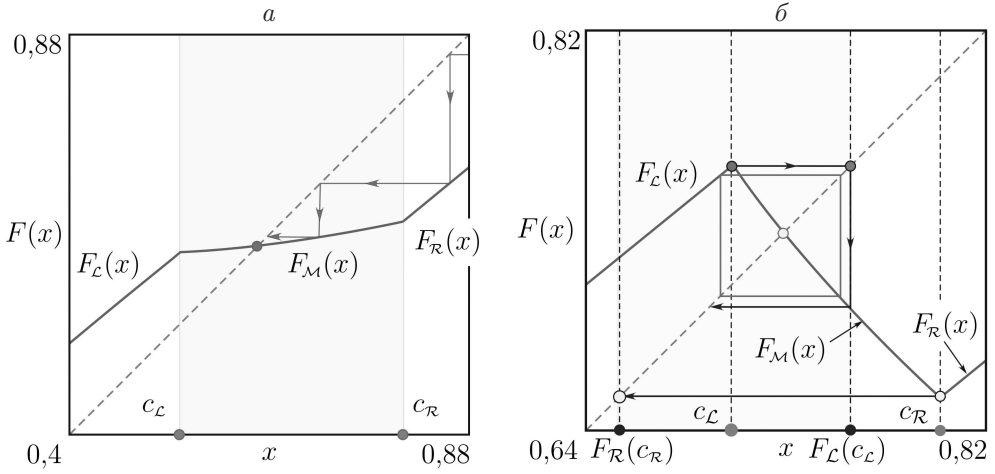


Рис. 1. Кусочно-гладкое отображение: a – обратимое; b – необратимое: $c_L = \frac{\alpha - 0,5}{\alpha}$, $c_R = q$.

Здесь z_k – относительная ширина импульса (коэффициент заполнения):

$$z_k = \begin{cases} 0, & \sigma_k \geq 0; \\ \frac{2\alpha}{q} \sigma_k, & 0 < \sigma_k < \frac{q}{2\alpha}; \\ 1, & \sigma_k \leq \frac{q}{2\alpha}, \end{cases}$$

$$\sigma_k = q - x_k, \quad x_k = x(k),$$

где α – коэффициент усиления.

Из уравнения (1) получено кусочно-гладкое стробоскопическое отображение $F: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ (см., например, [6–8])

$$(2) \quad x \mapsto F(x),$$

$$F(x) = \begin{cases} F_L(x) = b(x-1) + 1, & x \leq q \frac{\alpha - 0,5}{\alpha}; \\ F_M(x) = b(x-1) + b^{(1-z)}, & q \frac{\alpha - 0,5}{\alpha} < x < q; \\ F_R(x) = bx, & x \geq q, \end{cases}$$

$$b = e^\lambda, \quad \lambda = -T_0/T, \quad 0 < b < 1,0, \quad z = 2\alpha \frac{q-x}{q}, \quad \alpha > 0,5.$$

Здесь $F_L(x)$, $F_R(x)$ – линейные функции, отвечающие насыщению модулятора, а $F_M(x)$ – нелинейная функция. Точки $x = c_L$ и $x = c_R$ являются границами областей определения $F_L(x)$, $F_M(x)$ и $F_R(x)$ [9] или многообразиями переключения («switching manifold») [9]. Как показано на рис. 1, в зависимости от параметров функция $F(x)$ может быть обратимой или необратимой.

Прежде чем продолжить, отметим некоторые свойства (2).

- ◇ Точка $x \in I$, $I \subseteq \mathbb{R}$, которая отображается за одну итерацию F в точку $x' = F(x)$, называется образом ранга один точки x .
- ◇ Любая точка x , такая что $F(x) = x'$, называется прообразом ранга один точки x' или $x' = F^{-1}(x)$, где $F^{-1}(x)$ – обратная функция.
- ◇ Точка x называется неподвижной, если

$$F(x) - x = 0,$$

и m -периодической ($m > 0$), если

$$F^m(x) - x = 0.$$

- ◇ Если x есть m -периодическая точка, то она является km -периодической для любого положительного целого k . Поэтому под m понимается наименьший период.

В статье рассматривается случай, приведенный в [2], когда $F(x)$ имеет два локальных экстремума в точках недифференцируемости (рис. 1,б): максимум в $x = c_{\mathcal{L}} = q \frac{\alpha-0,5}{\alpha}$ и минимум в $x = c_{\mathcal{R}} = q$. Локальные экстремумы отображаются в так называемые критические точки [9, 10] $c_0 = F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}) = bq \frac{\alpha-0,5}{\alpha} - b + 1$, $c_1 = F_{\mathcal{R}}(c_{\mathcal{R}}) = bq$, являющиеся образами ранга один точек $c_{\mathcal{L}}$ и $c_{\mathcal{R}}$ соответственно. Точки c_0, c_1 делят прямую $x \in \mathbb{R}$ на три открытые области. В области $c_1 < x < c_0$ каждая точка имеет три прообраза ранга один, а в двух областях $x \leq c_1$ и $x \geq c_0$ – только один прообраз ранга один.

Таким образом, в рассматриваемом случае отображение (2) принадлежит к классу $\mathcal{Z}_1 - \mathcal{Z}_3 - \mathcal{Z}_1$ [9, 10]. Из (2) видно, что при $\alpha \rightarrow \infty$ отображение (2) становится разрывным. Напомним, что если отображение разрывное, то роль критических точек c_0, c_1 играют предельные значения функций $F_{\mathcal{L}/\mathcal{R}}(x)$ в точке разрыва: $c_0 = \lim_{x \rightarrow q} F_{\mathcal{L}}(x)$, $c_1 = \lim_{x \rightarrow q} F_{\mathcal{R}}(x)$ [9].

Параметры модели: $0,5 < q < 1,25$; $\lambda = -0,2$; $\alpha > 0,5$.

В (2) возможны разные типы неподвижных точек. Неподвижные точки, удовлетворяющие линейным уравнениям

$$F_{\mathcal{L}}(x) - x = 0 \quad \text{или} \quad F_{\mathcal{R}}(x) - x = 0,$$

соответствуют состояниям равновесия (1), а неподвижная точка, удовлетворяющая

$$F_{\mathcal{M}}(x) - x = 0,$$

отвечает периодическому решению (1) с периодом модуляции.

При вариации параметров неподвижная точка попадает на одну из границ («switching manifolds») $c_{\mathcal{L}}$ или $c_{\mathcal{R}}$, разделяющих области определения функций $F_{\mathcal{L}}(x)$, $F_{\mathcal{M}}(x)$ или $F_{\mathcal{M}}(x)$, $F_{\mathcal{R}}(x)$ (рис. 1). Это приводит к специфическим изменениям топологической структуры фазового пространства из-за нарушения условия существования неподвижной точки. Подобные топологические перестройки фазового пространства кусочно-гладких отображений

названы Н.Е. Nusse и J.A. Yorke бифуркациями граничного столкновения («border collision bifurcations») [11–13]. Однако следует заметить, что такие бифуркации впервые были исследованы М.И. Фейгиным еще в семидесятых годах задолго до появления работ Н.Е. Nusse и J.A. Yorke и названы им «*C-бифуркациями*» [14–17].

Работы М.И. Фейгина [14–17] долгое время оставались малоизвестными. В конце 90-х гг. положение изменилось, после того как в 1999 г. была опубликована работа [18], главной целью которой, как отмечают авторы, является систематизация ранних результатов М.И. Фейгина в контексте современной бифуркационной теории и представление их более широкой аудитории.

Бифуркации граничного столкновения не имеют аналогов в гладких динамических системах и включают чрезвычайно большое многообразие нелинейных явлений, например удвоение или «умножение» периода колебаний, одновременное возникновение нескольких сосуществующих аттракторов или рождение из неподвижной точки хаотического аттрактора [11, 19–22].

Исследование нелинейных явлений, индуцированных такими бифуркациями, представляет одну из актуальных задач современной нелинейной динамики и стимулируется потенциальными приложениями результатов во многих областях науки и техники. Сюда относятся приложения к силовой электронике и теории управления, механике, а также биологии, экономике и социальным наукам [20–22]. Сейчас по этому кругу вопросов существуют солидный список монографий и огромное число статей. Обзор этих исследований можно найти, например, в [23, 24], там же имеется обширная библиография.

Представленная работа посвящена изучению локальных бифуркаций в широтно-импульсной системе управления. Такие системы описываются кусочно-гладкими отображениями, в которых помимо классических бифуркаций, связанных с устойчивостью инвариантных множеств, возможны так называемые бифуркации граничного столкновения («border collision bifurcations»).

Известно, что в качестве нормальной формы для кусочно-гладких отображений часто используется кусочно-линейное непрерывное отображение («skew tent map») [9, 25]. Такая нормальная форма строится посредством линеаризации отображения (2) в окрестности неподвижной точки, лежащей на многообразии переключения. С помощью такого подхода описаны основные бифуркационные переходы.

2. Бифуркационные явления в широтно-импульсной системе

Периодическому режиму с периодом модуляции, как было отмечено в предыдущем разделе, отвечает неподвижная точка отображения (2), удовлетворяющая уравнениям:

$$(3) \quad b(x-1) + b^{(1-z)} - x = 0; \quad q - x - \frac{q}{2\alpha}z = 0.$$

Переменную x в (3) можно исключить. Для этого из первого уравнения (3) выразим x и подставим во второе. В результате получим трансцендентное

уравнение относительно z :

$$(4) \quad \xi(z) = q - \frac{b^{(1-z)} - b}{1-b} - \frac{q}{2\alpha}z = 0, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Уравнение (4) называется *уравнением периодов* [4]. Из (4) видно, что функция $\xi(z)$ монотонно убывающая. Для существования решения уравнения (4) достаточно выполнения условия [4]

$$\xi(0)\xi(1) < 0, \quad \text{или} \quad q \left(q - 1 - \frac{q}{2\alpha} \right) < 0 \Leftrightarrow q - 1 - \frac{q}{2\alpha} < 0.$$

Пусть z_* – наименьший неотрицательный корень уравнения (4). Тогда неподвижная точка x_* находится по формуле

$$x_* = \frac{b^{(1-z_*)} - b}{1-b}.$$

Локальная устойчивость x_* определяется неравенством

$$(5) \quad -1 < F'_{\mathcal{M}}(x_*) < 1, \quad F'_{\mathcal{M}}(x_*) = b + \frac{2\lambda\alpha}{q}b^{1-z_*}.$$

Производная $F'_{\mathcal{M}}(x_*)$ называется мультипликатором неподвижной точки. Нарушение условия (5) приводит, например, к удвоению периода колебаний. Такая бифуркация отвечает тем значениям параметров, при которых неподвижная точка x_* становится негиперболической с мультипликатором $F'_{\mathcal{M}}(x_*) = -1$. Это негрубое состояние (бифуркационное). Как известно, устойчивость негиперболической неподвижной точки с мультипликатором -1 определяется знаком производной Шварца:

$$SF_{\mathcal{M}}(x_*) = -F'''_{\mathcal{M}}(x_*) - \frac{3}{2}[F''_{\mathcal{M}}(x_*)]^2.$$

Неподвижная точка асимптотически устойчива, если $SF'_{\mathcal{M}}(x_*) < 0$, и неустойчива, если $SF'_{\mathcal{M}}(x_*) > 0$. При переходе через бифуркационное значение параметра происходит удвоение периода колебаний, а неподвижная точка продолжает существовать, но становится неустойчивой.

В зависимости от знака производной Шварца различают два типа бифуркаций удвоения периода: суперкритическую, если $SF_{\mathcal{M}}(x_*) < 0$, и субкритическую, если $SF_{\mathcal{M}}(x_*) > 0$. Субкритическая называется еще «опасной» или «жесткой», поскольку при переходе бифуркационного значения параметра происходит внезапная (жесткая) смена характера динамики.

На рис. 2,а приведена бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая основные стадии перехода от регулярных колебаний к хаотическим при вариации коэффициента усиления α . В точке $\alpha = \alpha_{\text{flip}}$ из неподвижной точки рождается устойчивый цикл с периодом 2 через классическую суперкритическую бифуркацию удвоения периода (см. рис. 2,б).

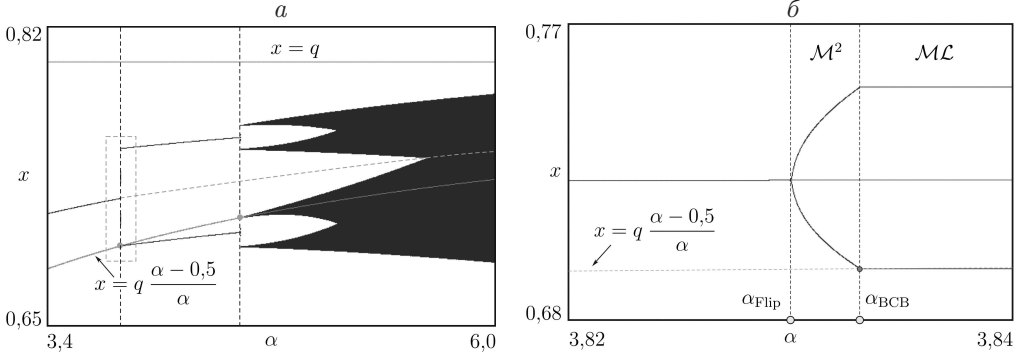


Рис. 2. *а* – Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая переход от регулярных колебаний к хаосу при $q = 0,8$ и $3,4 < \alpha < 6,0$. *б* – Бифуркация удвоения периода и простого изменения типа решения («border collision persistence»).

При дальнейшем изменении параметра α сначала устойчивый 2-цикл меняет тип через так называемую бифуркацию простого изменения типа решения [17] (в [9, 22] названа «border collision persistence»), когда одна из точек 2-цикла сталкивается с многообразием переключения $c_{\mathcal{L}} = q \frac{\alpha - 0,5}{\alpha}$ (см. рис. 2, *б*).

В результате такого перехода устойчивая периодическая орбита одного типа с символической характеристикой $\mathcal{M}^2$ переходит в устойчивую периодическую орбиту другого типа $\mathcal{LM}$, но того же периода. Затем устойчивый 2-цикл $\mathcal{LM}$ снова претерпевает суперкритическую бифуркацию удвоения периода. Далее реализуется бифуркация, приводящая к мягкому рождению 4-полосного хаотического аттрактора (4-band chaotic attractor).

Здесь характеристика $\mathcal{M}^2$ обозначает, что обе точки цикла периода 2 лежат в области определения $F_{\mathcal{M}}(x)$. Символы $\mathcal{LM}$ введены для обозначения другого типа 2-цикла, когда одна периодическая точка лежит в области определения $F_{\mathcal{L}}(x)$, а другая – в области определения $F_{\mathcal{M}}(x)$ (см. [7, 9, 19, 25]).

3. Бифуркации граничного столкновения и численные эксперименты

Применительно к неподвижной точке бифуркация граничного столкновения связана с нарушением условия существования решения уравнения периодов (4), когда x_* попадает на левую границу области определения $F_{\mathcal{M}}(x)$:

$$(6) \quad x_* = c_{\mathcal{L}} = q - \frac{q}{2\alpha}.$$

Граница такой бифуркации на плоскости параметров α и q , отвечающая нарушению условия существования решения уравнения периодов (4), определяется как

$$\mathcal{L}_{BCB} = \left\{ (\alpha, q) \mid q - 1 - \frac{q}{2\alpha} = 0 \right\}.$$

Рассматриваемая здесь методика естественным образом обобщается на цикл любого периода m . Достаточно перейти к m -й итерации функции F . Подход основан на следующем утверждении [25] (см. также [17]).

Утверждение 1. Рассмотрим семейство одномерных кусочно-гладких непрерывных отображений $F : I \rightarrow I$, $I \subseteq \mathbb{R}$, зависящее от параметра r и определяемое как

$$(7) \quad x \mapsto F(r, x).$$

Пусть c_B – многообразие переключения («border») отображения (7). Потребуем, чтобы $x = c_B$ при некотором c_B и для этого же самого значения c_B выполнялось условие

$$F(r_*, c_B) - c_B = 0.$$

Определим

$$a_{\mathcal{L}} = \left. \frac{\partial F(r_*, x)}{\partial x} \right|_{x=c_B-0}, \quad a_{\mathcal{R}} = \left. \frac{\partial F(r_*, x)}{\partial x} \right|_{x=c_B+0}.$$

Тогда в общем случае бифуркация граничного столкновения, возникающая в (7) при $r = r_*$, та же самая, что и в кусочно-линейном отображении («skew tent map»)

$$(8) \quad \begin{aligned} x &\mapsto f(x), \\ f(x) &= \begin{cases} a_{\mathcal{L}}x + \mu, & \text{если } x < 0, \\ a_{\mathcal{R}}x + \mu, & \text{если } x > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

при $\mu = 0$.

Заметим, что здесь рассматриваются бифуркации, возникающие в точке $\mu = 0,0$, когда бифуркационный параметр μ меняет знак с «минуса» на «плюс» или наоборот. В общем случае в качестве бифуркационного можно выбрать любой из трех параметров $a_{\mathcal{L}}, a_{\mathcal{R}}, \mu$ [9, 25].

Далее покажем, что параметры нормальной формы (8) можно получить в виде явной зависимости от параметров отображения (2). Изложенная здесь методика получения параметров нормальной формы в точности совпадает с той, которая представлена в [26] для анализа бифуркации рождения замкнутой инвариантной кривой.

Начнем с небольшого предварительного замечания. Мультипликатор есть $F'_{\mathcal{L}}(x_*) = b$, $0 < b < 1$ и, следовательно, неподвижная точка $x_* = c_{\mathcal{L}} = 1$ устойчива.

Это означает, что в рассматриваемой системе бифуркации граничного столкновения возникают, когда неподвижная точка пересекает многообразие переключения $c_{\mathcal{L}}$, отвечающее границе, разделяющей области определения функций $F_{\mathcal{L}}(x)$ и $F_{\mathcal{M}}(x)$. Но в случае бифуркаций более сложных инвариантных множеств, например периодических орбит, надо рассматривать обе границы $F_{\mathcal{M}}(x)$.

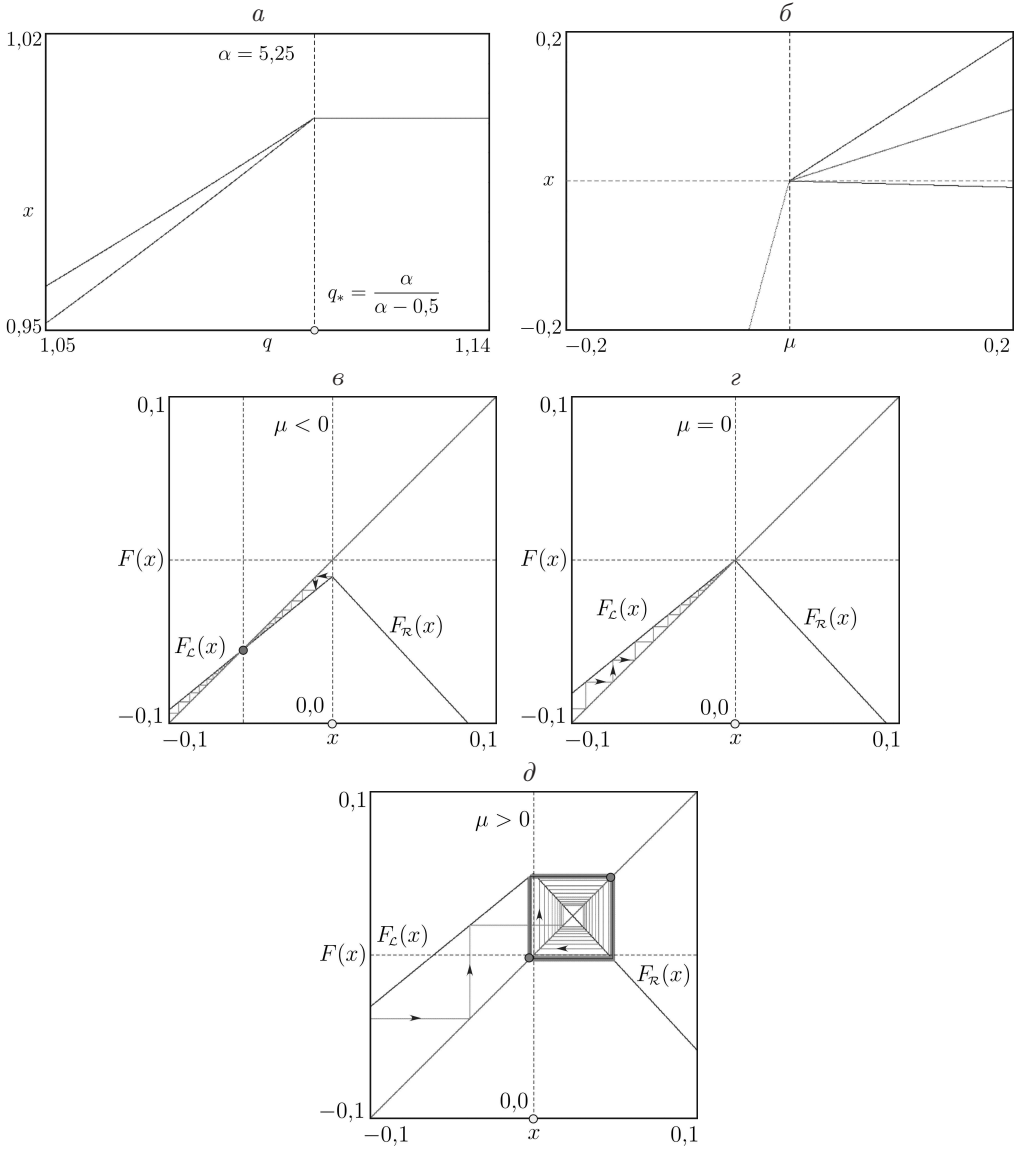


Рис. 3. Суперкритическая бифуркация удвоения периода. *а* – Бифуркационная диаграмма для отображения (2) при $\alpha = 5,25$ и $1,105 < q < 1,14$. *б* – Бифуркационная диаграмма для нормальной формы (8): $a_{\mathcal{L}} = b$, $a_{\mathcal{R}} = b + 2\lambda\alpha - \lambda$. *в* – До бифуркации $\mu < 0,0$. *г* – В точке бифуркации $\mu = 0,0$. *д* – После бифуркации $\mu > 0,0$.

Положим $c_{\mathcal{B}} = c_{\mathcal{L}} = q - \frac{q}{2\alpha}$ и, учитывая, что $q - 1 - \frac{q}{2\alpha} = 0$, найдем:

$$(9) \quad a_{\mathcal{L}} = \frac{\partial F_{\mathcal{L}}(x)}{\partial x} = b, \quad a_{\mathcal{R}} = \frac{\partial F_{\mathcal{M}}(x)}{\partial x} \Big|_{x=c_{\mathcal{L}}+0} = b + 2\lambda\alpha - \lambda,$$

$$\mu = \frac{\partial F_{\mathcal{M}}(q, x)}{\partial q} \Big|_{\substack{x=c_0 \\ q=q_*}} (q - q_*) = -\frac{2\lambda\alpha}{q_*^2} (q_* - q),$$

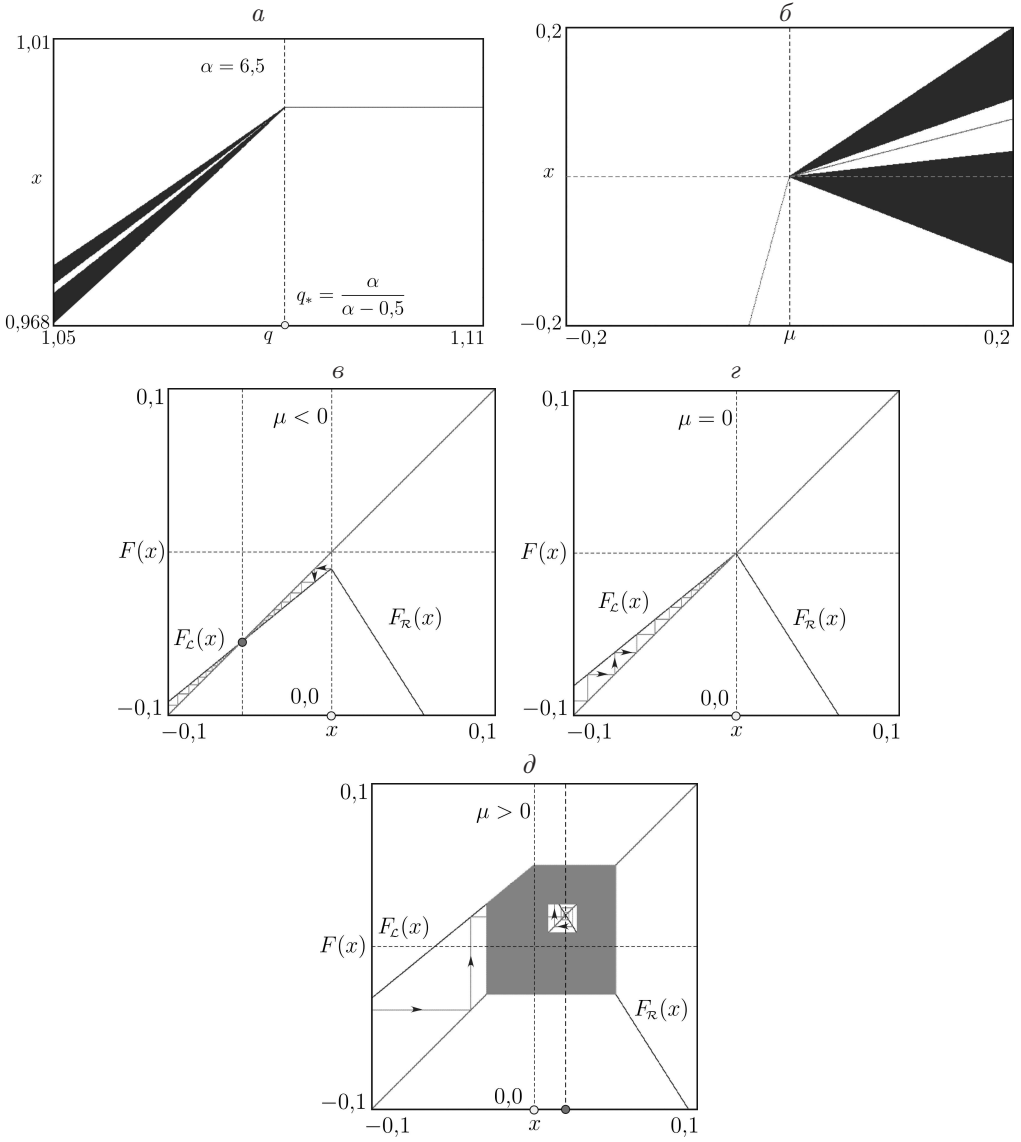


Рис. 4. Рождение двухполосного хаотического аттрактора из неподвижной точки. *a* – Бифуркационная диаграмма для отображения (2) при $\alpha = 6,5$ и $1,105 < q < 1,11$. *б* – Бифуркационная диаграмма для нормальной формы (8): $a_{\mathcal{L}} = b$, $a_{\mathcal{R}} = b + 2\lambda\alpha - \lambda$. *в* – До бифуркации $\mu < 0,0$. *г* – В точке бифуркации $\mu = 0,0$. *д* – После бифуркации $\mu > 0,0$.

где $\mu < 0$, если $q > q_*$; $\mu > 0$, если $q < q_*$; $\mu = 0$, если $q = q_*$. Здесь и далее $q_* = \frac{\alpha}{\alpha - 0,5}$ – точка бифуркации, лежащая на границе $\mathcal{L}_{BCB}$.

Фазовое пространство отображения (8) делится на две области $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ и $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Неподвижные точки в областях $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$

$$x_{\mathcal{L}}^* = \frac{\mu}{1 - a_{\mathcal{L}}} \leq 0 \quad \text{и} \quad x_{\mathcal{R}}^* = \frac{\mu}{1 - a_{\mathcal{R}}} \geq 0.$$

Поскольку бифуркация возникает при $\mu = 0,0$, то в точке бифуркации получаем $x_{\mathcal{L}}^* = x_{\mathcal{R}}^* = 0$. Устойчивость $x_{\mathcal{L}/\mathcal{R}}^*$ определяется коэффициентами $a_{\mathcal{L}}, a_{\mathcal{R}}$: неподвижная точка $x_{\mathcal{L}/\mathcal{R}}^*$ устойчива, если $|a_{\mathcal{L}/\mathcal{R}}| < 1,0$, и неустойчива, если $|a_{\mathcal{L}/\mathcal{R}}| > 1,0$.

Из (9) видно, что коэффициент $a_{\mathcal{L}} = b = \text{const}$. В зависимости от величины $a_{\mathcal{R}}$ можно наблюдать большое многообразие нелинейных явлений, например удвоение или умножение периода колебаний, рождение многополосного хаотического аттрактора в результате единственной бифуркации (за подробностями отсылаем к [9, 20–22]).

Приведем несколько численных примеров, показывающих роль нормальной формы (8) в прогнозировании нелинейных явлений в широтно-импульсной системе управления.

На рис. 3,а приведена бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая бифуркацию удвоения периода при переходе через границу $\mathcal{L}_{BCB}$ при $\alpha = 5,25$. На рис. 3,б показаны результаты исследований с помощью нормальной формы (8). Значение коэффициента $a_{\mathcal{R}}$ отвечает точке (α, q) , лежащей на границе $\mathcal{L}_{BCB}$ при $\alpha = 5,25$, определяемой уравнением $q - 1 - \frac{q}{2\alpha} = 0$. На рис. 3,в–3,д изображены итерационные диаграммы, показывающие бифуркационный переход. Как видно из этих диаграмм, в точке бифуркации $\mu = 0,0$ существует асимптотически устойчивая неподвижная точка $x_{\mathcal{L}}^* = x_{\mathcal{R}}^* = 0,0$. После бифуркации при $\mu > 0,0$ возникают неустойчивая неподвижная точка $x_{\mathcal{R}}^*$ и устойчивый цикл с периодом 2, причем одна точка 2-цикла находится в области $\mathcal{L}$, а другая — в области $\mathcal{R}$ (см. рис. 3,д). На рис. 4 изображен бифуркационный переход для $\alpha = 6,5$, при котором из неподвижной точки возникает двухполосный хаотический аттрактор.

4. Выводы

Импульсные системы автоматического управления описываются кусочно-гладкими отображениями. В таких динамических системах помимо классических локальных бифуркаций, связанных с устойчивостью инвариантных множеств, возможны нелинейные явления, индуцированные бифуркациями граничного столкновения, не имеющие аналогов в гладких динамических системах.

Известно, что в качестве нормальной формы можно использовать кусочно-линейное непрерывное отображение. С помощью такого подхода описаны основные локальные бифуркации в широтно-импульсной системе управления.

Благодарности

Работа выполнена в Международной научной лаборатории динамики негладких систем Юго-Западного государственного университета под руководством проф. Ж.Т. Жусубалиева (Zh.T. Zhusubaliyev)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кипнис М.М.* Фазовые портреты широтно-импульсных систем // *Авт.* 1990. № 12. С. 105–115.
Kipnis M.M. Phase portraits of impulse-modulated systems // *Autom. Remote Control.* 1990. V. 51. No. 12. P. 1693–1701.
2. *Кипнис М.М.* Хаотические явления в детерминированной одномерной широтно-импульсной системе управления // *Техническая кибернетика.* 1992. № 1. С. 108–112.
3. *Кипнис М.М.* Символическая и хаотическая динамика широтно-импульсной системы управления // *Докл. РАН.* 1992. Том 324. № 2. С. 273–276.
4. *Геллиг А.Х., Чурилов А.Н.* Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. СПб.: Изд-во. СПб. ун-та., 1993.
5. *Филлипов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
6. *Розенвассер Е.Н.* Периодически нестационарные системы управления. М.: Наука, 1973.
7. *Avrutin V., Mosekilde E., Zhusubaliyev Zh.T., Gardini L.* Onset of Chaos in a Single-Phase Power Electronic Inverter // *Chaos.* 2015. No. 25. P. 043114-1–043114-14.
8. *Avrutin V., Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E.* Cascades of Alternating Pitchfork and Flip Bifurcations in H-bridge Inverters // *Physica D.* 2017. No. 345. P. 27–39.
9. *Avrutin V., Gardini L., Sushko I., Tramontana F.* Continuous and Discontinuous Piecewise-Smooth One-Dimensional Maps: Invariant Sets and Bifurcation Structures. Singapore: World Scientific, 2019.
10. *Mira C., Gardini L., Barugola A., Cathala J.C.* Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps. Singapore: World Scientific, 1996.
11. *Nusse H.E., Yorke J.A.* Border-Collision Bifurcations Including “Period Two to Period Three” for Piecewise Smooth Systems // *Physica D.* 1992. V. 57. No. 1–2. P. 39–57.
12. *Nusse H.E., Yorke J.A.* Border-Collision Bifurcation: An Explanation for Observed Bifurcation Phenomena // *Physical Review E.* 1994. V. 49. P. 1073–1076.
13. *Nusse H.E., Yorke J.A.* Border-Collision Bifurcations for Piecewise Smooth One Dimensional Maps // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1995. V. 5. No. 1. P. 189–207.
14. *Фейгин М.И.* Удвоение периода колебаний при С-бифуркациях в кусочно-непрерывных системах // *ПММ.* 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 861–869.
15. *Фейгин М.И.* О рождении семейства субгармонических режимов в кусочно-непрерывной системе // *ПММ.* 1974. Т. 38. Вып. 5. С. 810–818.
16. *Фейгин М.И.* О структуре С-бифуркационных границ кусочно-непрерывных систем // *ПММ.* 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 820–819.
17. *Фейгин М.И.* Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994.
18. *Di Bernardo M., Feigin M.I., Hogan S.J., Homer M.E.* Local Analysis of C-bifurcations in n -Dimensional Piecewise-Smooth Dynamical Systems // *Chaos, Solitons and Fractals.* 1999. V. 19. No. 11. P. 1881–1908.
19. *Banerjee S., Ranjan P., Grebogi C.* Bifurcations in Two-Dimensional Piecewise Smooth Maps: Theory and Applications in Switching Circuits // *IEEE Trans. Circ. Syst. I.* 2000. V. 47. No. 5. P. 633–643.

20. *Banerjee S., Verghese C.C. (Eds.) Nonlinear Phenomena in Power Electronics.* New York: IEEE Press, 2001.
21. *Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E. Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems.* Singapore: World Scientific, 2003.
22. *Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R., Kowalczyk P. Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications.* London: Springer-Verlag, 2008.
23. *Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R., Kowalczyk P., Nordmark A.B., Tost G.O., Piiroinen P.T. Bifurcations in Nonsmooth Dynamical Systems // SIAM Review.* 2008. V. 50. P. 629–701.
24. *Simpson D.J.W. Border-Collision Bifurcations in R^N // SIAM Review.* 2016. V. 58. P. 177–226.
25. *Sushko I., Avrutin V., Gardini L. Bifurcation Structure in the Skew Tent Map and its Application as a Border Collision Normal Form // J. Difference Equat. Appl.* 2016. V. 22. No. 8. P. 1040–1087.
26. *Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E. Equilibrium-Torus Bifurcation in Nonsmooth Systems // Physica D.* 2008. V. 237. No. 7. P. 930–936.

Статъя представена к публикации членом редколлегии А.П. Крищенко.

Поступила в редакцию 31.12.2020

После доработки 08.10.2021

Принята к публикации 15.10.2021