

© 2022 г. О.В. ДРУЖИНИНА, д-р физ.-мат. наук (ovdruzh@mail.ru)  
(Федеральный исследовательский центр  
«Информатика и управление» РАН, Москва,  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),  
Н.О. СЕДОВА, д-р физ.-мат. наук (sedovano@ulsu.ru)  
(Ульяновский государственный университет, Ульяновск)

**К ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ПО ВЫХОДУ:  
ПОСТРОЕНИЕ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ  
ДЛЯ КРАТНОГО ИНТЕГРАТОРА**

Предлагается структура обратной связи, стабилизирующей  $n$ -кратный интегратор с четным  $n$ . Известно, что для многих дифференциальных систем, в частности для моделей механических систем, задачи стабилизации допускают преобразование в специальную форму, содержащую кратные интеграторы в качестве подсистемы. Построенное управление для произвольного четного порядка интегратора представляет собой линейную комбинацию координат запаздывающего состояния с нечетными индексами и зависит от трех числовых параметров. Эти параметры удовлетворяют ограничениям простого вида и могут изменяться в широких пределах в зависимости от требований к качеству управления. Приведены примеры структур систем более общего вида, для которых построенное управление обеспечивает асимптотическую устойчивость положения равновесия. Для обоснования стабилизирующих свойств управления используются свойства устойчивости систем с запаздыванием каскадной структуры.

*Ключевые слова:* кратный интегратор, стабилизация по выходу, запаздывание.

DOI: 10.31857/S0005231022020027

## 1. Введение

Всюду ниже используются в основном стандартные обозначения:  $R^n$  обозначает  $n$ -мерное пространство векторов  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ ,  $R^+ = [0, +\infty)$ ,  $\dot{x}_i(t)$  – *правостороннюю* производную (уточнение требуется в связи с изначально предполагаемым запаздыванием в структуре обратной связи, которое превращает исследуемую систему в систему с запаздывающим аргументом).

Рассмотрим управляемую систему, описываемую уравнением  $x^{(n)}(t) = u(t)$ ,  $t \in R^+$ , что эквивалентно системе, часто называемой цепью интеграторов (chain on integrators) или кратным интегратором:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= x_{i+1}(t), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n(t) &= u(t). \end{aligned}$$

В дальнейшем без специальных оговорок управление называем стабилизирующим, а замкнутую систему — асимптотически устойчивой, если нулевое решение системы глобально равномерно асимптотически устойчиво.

Стабилизация системы (1) является составной частью решения различных задач управления, а в ряде случаев полностью решает рассматриваемую задачу. Например, в [1] приведены нелинейные системы, для которых задача стабилизации сводится к аналогичной задаче для (1).

Задача стабилизации системы (1) в различных постановках исследовалась во многих работах (некоторые результаты и историю вопроса, см., например, в [2–6]). В частности, известно, что стабилизирующее управление для (1) не может зависеть менее чем от  $n$  значений координат. Следовательно, закон управления, определяемый текущим состоянием, должен использовать все координаты.

Несмотря на впечатляющие результаты, полученные в теории управления в последние десятилетия, остается актуальной задача построения простых по структуре стабилизирующих управлений по выходу. В [7] подчеркивается, что задача о статической стабилизации по выходу для линейной системы в общем случае является NP-сложной и ее исчерпывающее решение неизвестно. Проблема уменьшения размерности вектора, используемого для построения стабилизирующей обратной связи, исследовалась с помощью различных подходов. Перспективной идеей является использование запаздывающих значений. В частности, доказано, что при некоторых предположениях устойчивость системы с обратной связью по-прежнему гарантируется, если в стабилизирующем регуляторе значения производных заменены разностными аналогами при достаточно малых значениях запаздываний [6]. Эта идея начала активно использоваться с начала 2000-х годов. Например, в [8] построено управление по выходу, решающее задачу слежения для линейной SISO-системы при наличии параметрической и структурной неопределенности, а также внешних возмущений. В случае известной относительной степени  $\gamma$  объекта управления построенный регулятор определяется значениями ошибки слежения выхода в моменты  $t, t - \tau, \dots, t - \gamma\tau$  и зависит от  $\gamma + 2$  параметров.

Исследование системы (1) показало, что  $n$  различных значений координат системы необходимы [9] и достаточны [10] для построения стабилизирующего управления. В зависимости от решаемой задачи авторы предлагают различные структуры управления с использованием запаздывающих значений координат. В [11] используются функции насыщения, зависящие от  $x_i(t - \tau)$  ( $i = 1, \dots, n, \tau > 0$ ); для определения этих функций требуется задать значения  $n + 1$  параметров (включая выбор  $\tau$ , верхняя граница для которого определяется остальными  $n$  значениями). В [5] управление с заданной верхней границей определяется  $n$  функциями насыщения с уровнями насыщения, связанными между собой некоторыми условиями; используются значения только первой координаты, величина запаздывания выбирается из некоторого интервала вида  $(0, d)$ . В [10] управление определяется формулой  $u(t) = -\sum_{i=1}^m k_i x_1(t - \tau_i)$ ,  $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$ , коэффициен-

ты  $k_i$  зависят от  $n$ ,  $\tau_i$  и дополнительного параметра. В силу упомянутого выше необходимого условия стабилизации минимальное количество слагаемых в сумме составляет  $m = n$ , поэтому необходимо задать  $n + 1$  параметров. В [12] для интегратора четвертого порядка строится управление  $u(t) = -k_1x_1(t) + k_2x_1(t - \tau) - k_3x_3(t) + k_4x_3(t - h)$ , в котором шесть параметров. Отметим, что алгоритмы построения упомянутых управлений предполагают анализ характеристического уравнения замкнутой системы для определения значений параметров. Другой подход — применение прямого метода Ляпунова. Например, в [1] с использованием функции Ляпунова–Разумихина построено управление по состоянию, зависящее от  $\tau > 0$  и одного дополнительного параметра  $b \in (0, 1/\tau)$ . В [13] предложено управление по выходу, зависящее от значений  $x_1(t), x_1(t - \tau), \dots, x_1(t - (n - 1)\tau)$  и от  $n + 2$  параметров; все параметры, кроме  $\tau$ , определяются в результате решения системы линейных матричных неравенств, полученных с применением функционала Ляпунова–Красовского. При этом получаемая обратная связь остается стабилизирующей при всех значениях  $\tau > 0$ , меняется лишь область притяжения. Отличительной особенностью построенного закона управления является также нелинейность: авторы показывают, что такой регулятор выигрывает по скорости сходимости у линейного.

Важным частным случаем задачи управления по выходу является стабилизация механической системы без измерения скоростей, которая активно изучается в последние десятилетия. Различные подходы к решению этой задачи обсуждаются, например, в [14, 15]; в линейной постановке для нее разработаны алгоритмы разной степени сложности, отличающиеся в том числе формой представления системы и видом управления; для нелинейной системы предлагаемые методы содержат, как правило, эвристическую составляющую.

Именно исследованиями в этом направлении, в частности идеей замены переменных в уравнениях движения механической системы из недавней статьи [12], в первую очередь мотивирована постановка задачи в данной работе: построить для  $n$ -кратного интегратора с четным  $n$  глобально стабилизирующую статическую обратную связь, линейно зависящую только от значений координат с нечетными номерами (текущих и/или запаздывающих).

Еще одной вдохновляющей задачей стала стабилизация линейной системы вида

$$(2) \quad \ddot{y}(t) = A_1y(t) + A_2\dot{y}(t) + Bu(t) \quad (y(t) \in R^l)$$

управлением в форме  $u(t) = K_1y(t - \tau_1) + K_2\dot{y}(t - \tau_2)$ . Здесь  $\tau_1 > 0$ ,  $\tau_2 > 0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  — постоянные матрицы подходящих размерностей. В [16] в предположении статической стабилизируемости системы по состоянию доказано существование управления предлагаемой структуры при достаточно малых значениях  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ; коэффициенты обратной связи находятся в результате решения системы линейных матричных неравенств. Заметим, что в переменных  $x = (y_1 \ \dot{y}_1 \ y_2 \ \dot{y}_2 \ \dots \ y_l \ \dot{y}_l)^\top$  система (2) преобразуется в стандартную линейную систему порядка  $2l$ , при этом выбранная структура управления зависит только от значений координат с нечетными номерами.

Структура остальной части статьи стандартна: за введением следует раздел с основным результатом и некоторыми обсуждениями, раздел 3 представляет результаты численного моделирования для интегратора шестого порядка, раздел 4 посвящен иллюстративным примерам и возможным приложениям, раздел 5 содержит заключительные замечания.

## 2. Основной результат

Рассмотрим  $2l$ -кратный интегратор с управляющим входом в зависимости от  $l$ :

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= x_{i+1}(t), \quad i = 1, \dots, 2l - 1, \\ \dot{x}_{2l}(t) &= u_l(t). \end{aligned}$$

Тогда имеет место следующий результат:

*Теорема 1.* Предположим, что  $\tau > 0$ ,  $0 < a - b < a + b < (\pi/\tau)^2$ . Тогда закон управления

$$(4) \quad u_l(t) = - \sum_{m=1}^l \left[ C_l^m \sum_{k=0}^m C_m^k (-1)^k a^{m-k} b^k x_{2(l-m)+1}(t - k\tau) \right]$$

стабилизирует систему (3) (здесь использовано стандартное обозначение  $C_l^k = \frac{l!}{k!(l-k)!}$ ).

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

*Замечание 1.* Закон управления, построенный в теореме 1, содержит три параметра. Предлагаемая структура управления показывает, что можно произвольно увеличивать запаздывание при уменьшении двух других параметров. Этот вопрос подробно изучался в [11] для общей формы управления, которая зависит от всех запаздывающих координат. Настраивая параметры, можно регулировать характеристики управления (см. результаты численного моделирования ниже).

Заметим, что любая управляемая линейная стационарная система, заданная в общей форме, невырожденным линейным преобразованием приводится к каноническому виду, эквивалентному уравнению  $x^{(2l)}(t) + a_1 x(t) + a_2 \dot{x}(t) + \dots + a_{2l} x^{(2l-1)}(t) = u(t)$ . Можно ли применить предлагаемый способ построения управления к задаче стабилизации для последнего уравнения?

Рассмотрим соответствующую двумерную систему:

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) + u_1(t). \end{aligned}$$

Очевидно, слагаемое  $-a_1 x_1(t)$  не влияет на изменения в структуре управления (4), и можно рассматривать то же управление  $u_1(t)$  с заменой  $a$  на  $a + a_1$  (по этим же соображениям в системе порядка  $2l$  все коэффициенты с нечетными номерами могут быть произвольными).

При  $a_2 > 0$  область устойчивости в пространстве параметров управления предсказуемо расширяется (рис. 1, слева) и управление  $u_1(t)$  остается

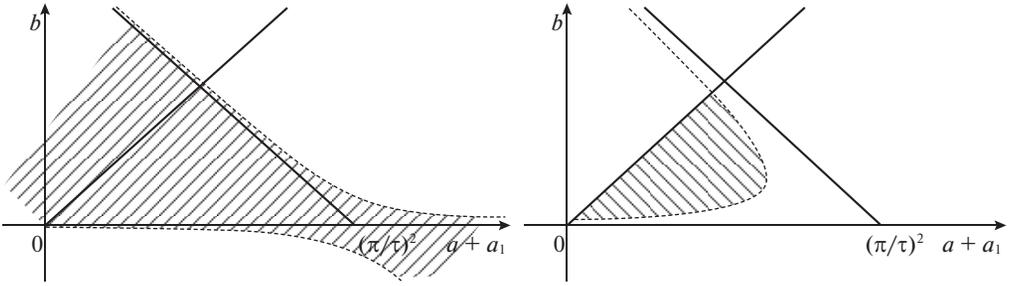


Рис. 1. Фрагмент области устойчивости для системы (5), (4) при малом  $|a_2|\tau$ .

стабилизирующим для значений  $a + a_1$  и  $b$  из треугольника, определяемого условиями теоремы 1. При  $a_2 < 0$  область устойчивости, наоборот, сужается (рис. 1, справа); при достаточно больших значениях  $|a_2|\tau$  треугольники, заштрихованные на рис. 8, стягиваются в точки, и система становится неустойчивой для всех  $a + a_1$  и  $b$ .

Поэтому рассмотренный подход к стабилизации не обобщается непосредственно на уравнение  $x^{(2l)}(t) + a_1x(t) + a_2\dot{x}(t) + \dots + a_{2l}x^{(2l-1)}(t) = u_l(t)$  с произвольными параметрами  $a_i$  даже в случае  $l = 1$ , и задача требует дополнительного исследования.

### 3. Результаты численного моделирования

Для иллюстрации работоспособности предложенной схемы управления исследуем с помощью моделирования поведение траекторий 6-кратного интегратора с законом управления (4). Для всех представленных графиков в каче-

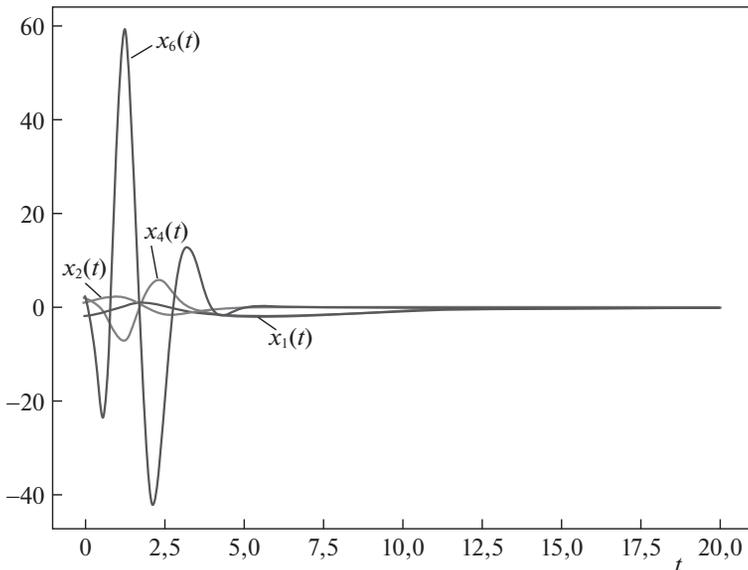


Рис. 2. Траектории системы (3), (4) при  $a = 5$ ,  $b = 4$ ,  $\tau = 0,5$  (малое запаздывание, большая амплитуда  $x_6(t)$ ).

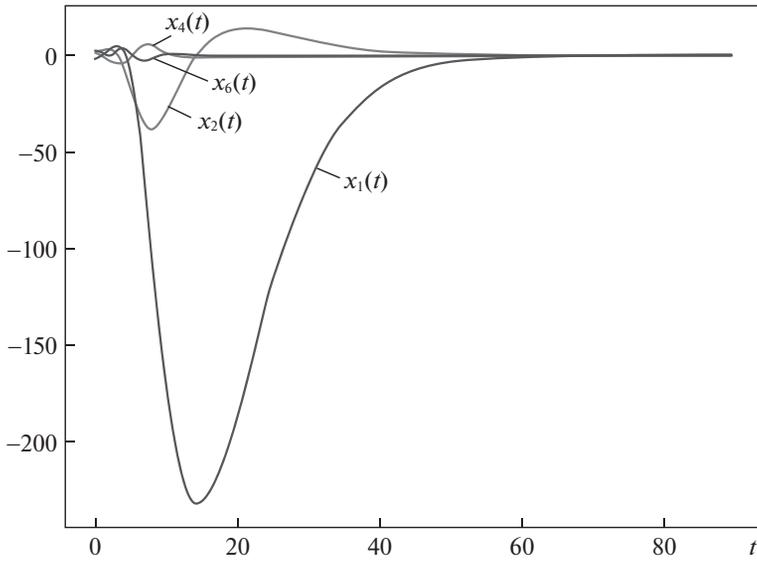


Рис. 3. Траектории системы (3), (4) при  $a = 0,5$ ,  $b = 0,4$ ,  $\tau = 1,5$  (большое запаздывание, большая амплитуда  $x_1(t)$ ).

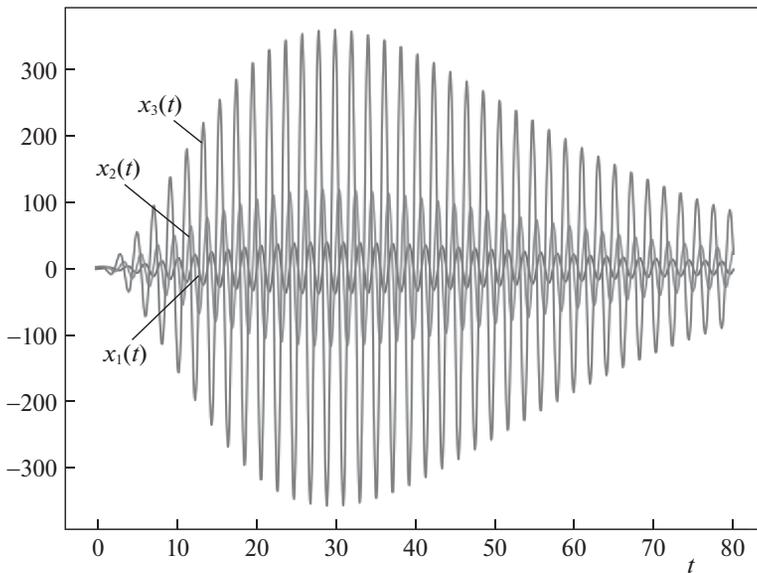


Рис. 4. Траектории системы (3), (4) при  $a = 5$ ,  $b = 4$ ,  $\tau = 1$  (близость к границе области устойчивости, медленное затухание).

стве начальной точки выбрана  $(-2, 1, 1, 2, -4, 2)$ ; параметры  $a$ ,  $b$  и  $\tau$  различны для разных расчетов и указаны в подписях к рисункам.

Как и ожидалось, если значения параметров не попадают в область устойчивости, управление не стабилизирует систему; характеристики переходного

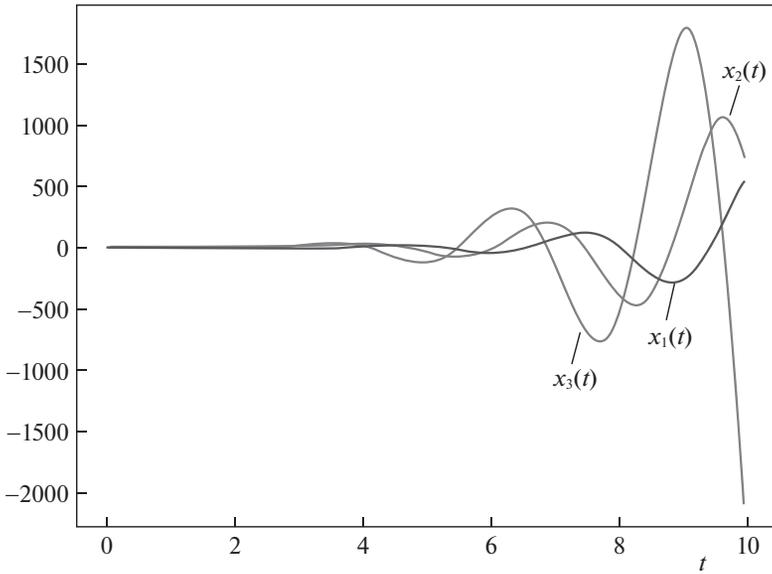


Рис. 5. Траектории системы (3), (4) при  $a = 5$ ,  $b = 4$ ,  $\tau = 2$  (выход за границу области устойчивости).

процесса ухудшаются по мере приближения значений параметров к границе области устойчивости; при больших значениях запаздывания и малых значениях коэффициентов скорость сходимости уменьшается, а максимальные отклонения увеличиваются (см. рис. 2–5).

#### 4. Примеры

Каноническая форма Бруновского, которая представляется в виде независимых подсистем — интеграторов некоторого порядка, широко применяется для построения алгоритмов управления линейными системами. Кроме того, многие нелинейные системы, аффинные относительно управления, неособенным преобразованием переменных (как состояния, так и управления) приводятся к линейным системам (см., например, [17]). Среди аффинных систем выделяют также те, которые преобразуются к так называемому квазиканоническому виду. Такие системы содержат подсистему, которая линеаризацией обратной связью преобразуется в каноническую форму Бруновского, и подсистему общего вида [18].

Еще одной известной формой представления систем, для которой можно использовать полученные результаты, является нормальная форма Исидори [19], которая представляет собой декомпозицию системы на кратный интегратор и подсистему, не зависящую от управляющего воздействия:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}^1(t) &= f(x^1(t), x^2(t)), \\
 \dot{x}_i^2(t) &= x_{i+1}^2(t), \quad i = 1, \dots, p-1; \\
 \dot{x}_p^2(t) &= u(t),
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

где  $x^1 \in R^{n-p}$ ,  $x^2 \in R^p$  ( $0 < p < n$ ),  $f \in C(R^+ \times R^n, R^{n-p})$ ,  $f(0, 0) = 0$ .

Асимптотическая устойчивость этой системы при  $p = 2l$  и  $u(t) = u_l(t)$  в силу ее каскадной структуры следует из аналогичного свойства системы  $\dot{x}^1(t) = f(x^1(t), 0)$ . Утверждение остается в силе, даже если  $x^1(t)$  является решением не обыкновенного дифференциального уравнения, а уравнения с запаздыванием [20]. Для гарантии глобального свойства асимптотической устойчивости необходимы дополнительные ограничения; удобными для проверки (но, с другой стороны, довольно ограничительными) являются условия, ограничивающие рост слагаемых, зависящих от «возмущающих» переменных  $x^2$  в правой части системы  $f$  (см., например, [20]).

*Замечание 2.* Для случая систем без запаздывания свойства устойчивости каскадных систем хорошо изучены. Систему  $\dot{x}^1(t) = f(t, x^1(t), 0)$  называют при этом системой нулевой динамики, а в случае асимптотической устойчивости нулевого решения последней исходная система называется минимально-фазовой [19]. Для не минимально-фазовой системы построение стабилизирующего управления для подсистемы переменных  $x^2$  может в общем случае обеспечить стабилизацию исходной системы лишь по части переменных. В ряде случаев нулевое решение системы  $\dot{x}^1(t) = f(t, x^1(t), 0)$  оказывается (глобально) устойчивым (не асимптотически). Тогда нулевое решение системы (6) будет обладать свойством устойчивости (глобальной — при некоторых дополнительных ограничениях); одно из обоснований последнего результата для систем, учитывающих наличие запаздывания, можно найти в [1].

Рассмотрим механическую систему, уравнения движения которой могут быть записаны в виде

$$(7) \quad M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) = B(q)Q,$$

где  $q$  —  $l$ -мерный вектор обобщенных координат системы,  $m$ -мерный вектор  $Q$  обозначает обобщенные силы от исполнительных механизмов ( $m < l$ ). Систему (7) глобально обратимой заменой координат можно преобразовать к виду

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{z}^1 &= z^2, & \dot{z}^3 &= f_3(z), \\ \dot{z}^2 &= u, & \dot{z}^4 &= f_4(z), \end{aligned}$$

где  $z = ((z^1)^\top (z^2)^\top (z^3)^\top (z^4)^\top)^\top \in R^{2l}$ ,  $u \in R^m$  [21]; частные случаи вида (8), условия и способы приведения к такой форме, а также приложения к механическим системам приведены, например, в [22]. Заметим, что управление вида (4) при некоторых дополнительных предположениях стабилизирует систему (8) (см. замечание 2).

В заключение рассмотрим применение управления (4) к двум хрестоматийным примерам.

*Пример 1.* Рассмотрим перевернутый плоский двухзвенный маятник, управляемый скалярным, приложенным к нижнему звену, крутящим моментом  $\tau(t)$  (схему и обозначения см. на рис. 6).

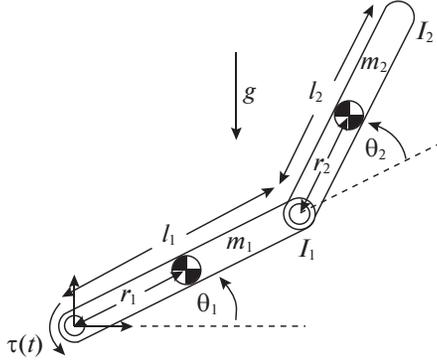


Рис. 6. Двухзвенный маятник в окрестности верхнего положения равновесия.

Следуя [12], выразим крутящий момент через входное напряжение:  $\tau(t) = (k_\tau/R_m)V(t)$ , где  $k_\tau$  – постоянная крутящего момента, а  $R_m$  – сопротивление якоря двигателя. Введем также обозначения

$$\beta_1 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + I_1,$$

$$\beta_2 = m_2 l_1 r_2,$$

$$\beta_3 = m_1 (l_1 + r_1),$$

$$\beta_4 = m_2 r_2,$$

$$\beta_5 = g / [(m_2 r_2^2 + I_2) ((m_2 l_1 r_2)^2 - (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + I_1)(m_2 r_2^2 + I_2))].$$

Определим вектор состояния системы  $(\theta_1 \dot{\theta}_1 \theta_2 \dot{\theta}_2)^\top$  и рассмотрим линеаризацию уравнений движения в окрестности равновесия  $(\pi/2 \ 0 \ 0 \ 0)^\top$ ; пусть вектор  $z \in R^4$  задает координаты отклонения от равновесия в системе линейного приближения. Пусть теперь  $y(t) = z_1(t) + z_3(t)$  – выходная переменная, желаемый закон изменения которой описывается гладкой функцией  $y^*(t)$ , и  $e(t) = y(t) - y^*(t)$ . Тогда для переменных  $x_1(t) = e(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{e}(t)$ ,  $x_3(t) = \ddot{e}(t)$ ,  $x_4(t) = e^{(3)}(t)$  получаем систему [12]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t), \\ (9) \quad \dot{x}_3(t) &= x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) &= \beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5 g z_1(t) - \beta_1 \beta_4^2 \beta_5 g (z_1(t) + z_3(t)) + \\ &\quad + (k_\tau \beta_2 \beta_4 \beta_5 / R_m) V(t) - y^{*(4)}(t). \end{aligned}$$

После этого  $V(t) = R_m / (k_\tau \beta_2 \beta_4 \beta_5) [u_2(t) - (\beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5 g) z_1(t) + (\beta_1 \beta_4^2 \beta_5 g) (z_1(t) + z_3(t)) + y^{*(4)}(t)]$  приводит систему (9) к виду (3) при  $l = 2$ . Таким образом, для стабилизации системы (9) и сходимости  $y(t) \rightarrow y^*(t)$  достаточно задать  $u_2(t)$  формулой (4) (заметим, что результирующее управление  $V(t)$  в этом случае не зависит от значений скоростей системы).

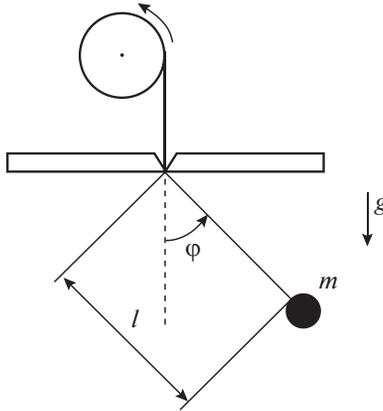


Рис. 7. Маятник с нитью переменной длины (рис. из [23]).

*Пример 2.* Рассмотрим маятник переменной длины (рис. 7).

Определим вектор состояния системы  $y = (l, \dot{l}, \varphi, \dot{\varphi})^\top$  и рассмотрим задачу стабилизации равновесия вида  $(y_1^*, 0, 0, 0)$  ( $y_1^* > 0$ ). Запишем уравнения движения маятника в отклонениях  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1 - y_1^*, y_2, y_3, y_4)$ . При этом, следуя [23], определим управление  $v = \ddot{x}_1$ . Тогда уравнения движения маятника примут вид (6), где  $p = 2$ ,  $x^1 = (x_3, x_4)^\top$ ,  $x^2 = (x_1, x_2)^\top$ ,  $f = (x_4, -2\frac{x_2x_4}{(x_1+x_1^*)} - \frac{g}{(x_1+x_1^*)} \sin x_3)^\top$ . Заметим, что при  $x_1 = x_2 = 0$  подсистема для координат  $x^1$  устойчива. Поэтому в силу замечания 2 рассматриваемое положение равновесия маятника при управлении  $v = u_1(t)$  является асимптотически устойчивым по  $l, \dot{l}$  и устойчивым по  $\varphi, \dot{\varphi}$ .

## 5. Заключительные замечания

К задаче стабилизации кратного интегратора подходящей заменой переменных сводятся различные задачи управления, в том числе для нелинейных систем.

В работе искомое стабилизирующее управление для интегратора четной кратности предполагается зависящим от значений производных нечетного порядка; при этом используются текущие и предыдущие (запаздывающие) значения. Структура полученного управления предусматривает задание значений трех параметров, которые могут быть произвольно выбраны из области устойчивости двумерной системы, имеющей простую форму и алгебраическое описание. Варьирование значений параметров позволяет регулировать характеристики переходного процесса.

Построенное управление можно рассматривать как один из возможных вариантов решения задачи стабилизации механической системы по выходу, в частности без измерения скоростей (см. [12]). Использование свойств каскадной системы позволяет доказать, что стабилизирующие свойства предлагаемого управления сохраняются для нелинейных систем определенной струк-

туры, содержащих кратный интегратор в качестве подсистемы. Если такая система не является минимально-фазовой, то построенное управление без дополнительных построений не обеспечивает асимптотическую устойчивость положения равновесия (только по части координат), однако все еще может гарантировать (глобальную) устойчивость для широкого класса систем.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 1.* Рассмотрим сначала двойной интегратор:

$$(П.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= u_1(t), \end{aligned}$$

где  $u_1(t) = -ax_1(t) + bx_1(t - \tau)$  определяется формулой (4). Используя методологию  $D$ -разбиения [24], получаем область устойчивости для (П.1) с управлением выбранного вида (зависящим от трех параметров); проекция этой области на плоскость  $(a, b)$  (при фиксированном значении  $\tau$ ) заштрихована на рис. 8 и содержит, в частности, область, определяемую неравенствами

$$0 < a - b < a + b < (\pi/\tau)^2.$$

Заметим, что для значений  $(a, b)$  из других треугольных частей области устойчивости затраты на управление возрастают с ростом  $a$ ; численные эксперименты показывают, что характеристики переходного процесса при этом не улучшаются.

Теперь рассмотрим систему (3) при  $l = 2$ ; она эквивалентна следующей:

$$(П.2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & \dot{y}_1(t) &= y_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= u_1(t) + y_1(t), & \dot{y}_2(t) &= u_2(t) - \ddot{u}_1(t), \end{aligned}$$

где  $y_1(t) = x_3(t) - u_1(t)$ . Пусть  $u_2(t) = \ddot{u}_1(t) + \bar{u}_1(t)$ , где  $\bar{u}_1(t) = -ay_1(t) + by_1(t - \tau)$ , и параметры  $a, b$  и  $\tau$  выбраны из упомянутой выше области

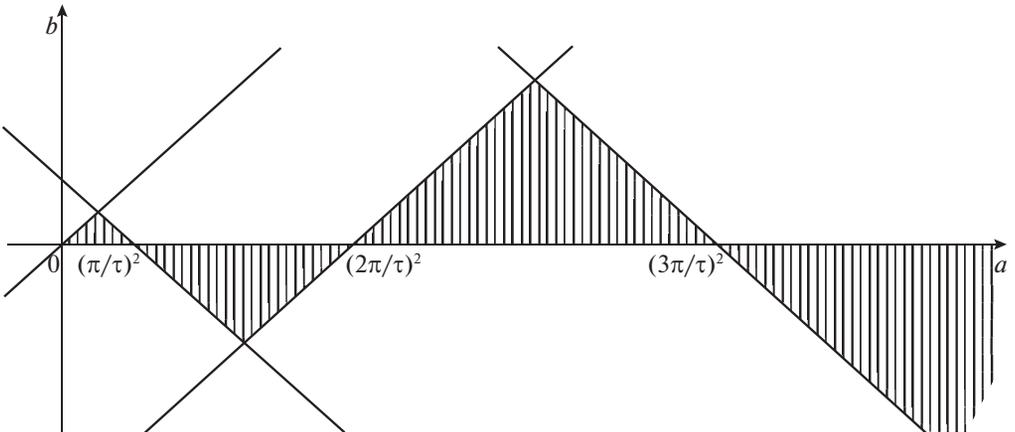


Рис. 8. Область устойчивости для системы (П.1), (4) при фиксированном  $\tau > 0$ .

устойчивости. Тогда система

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) &= u_2(t) - \ddot{u}_1(t)\end{aligned}$$

асимптотически устойчива. Теперь из свойств устойчивости каскадных систем [20] следует также асимптотическая устойчивость системы (П.2). Таким образом, закон управления  $u_2(t) = \ddot{u}_1(t) + \bar{u}_1(t) = -a^2x_1(t) + 2abx_1(t - \tau) - b^2x_1(t - 2\tau) + 2(-ax_3(t) + bx_3(t - \tau))$  обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (П.2).

Доказательство завершается индукцией по  $l$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седова Н.О.* Достаточные условия устойчивости и построение стабилизирующих управлений для дифференциальных систем специального вида с запаздыванием // Сиб. журн. индустр. мат. 2010. Т. 13. № 4 (44). С. 118–130.
2. *Каменецкий В.А.* Синтез ограниченного стабилизирующего управления для  $n$ -кратного интегратора // АиТ. 1991. Вып. 6. С. 33–40.  
*Kamenetskiĭ V.A.* Synthesis of Bounded Stabilizing Control for an  $n$ -Fold Integrator // Autom. Remote Control. 1991. V. 52. No. 6. P. 770–775.
3. *Kaliora G., Astolfi A.* Nonlinear Control of Feedforward Systems with Bounded Signals // IEEE Trans. Automat. Control. 2004. V. 49. No. 11. P. 1975–1990.
4. *Kokame H., Mori T.* Stability Preserving Transition from Derivative Feedback to Its Difference Counterparts // IFAC Proceeding Volumes. 2002. V. 5. Iss. 1. P. 129–134.
5. *Niu X., Lin W., Gao X.* Static Output Feedback Control of a Chain of Integrators with Input Constraints Using Multiple Saturations and Delays // Automatica. 2021. V. 125. No. 3. P. 109457.
6. *Zhou B., Duan G.-R., Li Z.-Y.* On Improving Transient Performance in Global Control of Multiple Integrators System by Bounded Feedback // Syst. Control Lett. 2008. V. 57. No. 10. P. 867–875.
7. *Поляк В.Т., Щербakov П.С.* Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // АиТ. 2005. Вып. 5. С. 7–46.  
*Polyak V.T., Shcherbakov P.S.* Hard Problems in Linear Control Theory: Possible Approaches to Solution // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 5. P. 681–718.
8. *Фуртат И.Б.* Робастный статический алгоритм управления линейными объектами // АиТ. 2015. Вып. 3. С. 94–107.  
*Furtat I.B.* Robust Static Control Algorithm for Linear Objects // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 3. P. 446–457.
9. *Kharitonov V.L., Niculescu S.I., Moreno J., Michiels W.* Static Output Feedback Stabilization: Necessary Conditions for Multiple Delay Controllers // IEEE Trans. Automat. Control. 2005. V. 50. No. 1. P. 82–86.
10. *Niculescu S.-I., Michiels W.* Stabilizing a Chain of Integrators Using Multiple Delays // IEEE Trans. Automat. Control. 2004. V. 49. No. 5. P. 802–817.
11. *Mazenc F., Mondie S., Niculescu S.-I.* Global Asymptotic Stabilization for Chains of Integrators with a Delay in the Input // Proceedings of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control. 2001. P. 1843–1848.

12. *Ochoa-Ortega G., Villafuerte-Segura R., Luviano-Juárez A., et al.* Cascade Delayed Controller Design for a Class of Underactuated Systems // *Hindawi Complexity*. 2020. Article ID 2160743.
13. *Nekhoroshikh A.N., Efimov D., Polyakov A., et al.* On Output-Based Accelerated Stabilization of a Chain of Integrators: Implicit Lyapunov-Krasovskii Functional Approach // *IFAC-PapersOnLine*. 2020. 53(2). P. 5982–5987.
14. *Андреев А.С., Перегудова О.А.* О стабилизации программных движений голономной механической системы без измерения скоростей // *ПММ*. 2017. Т. 81. Вып. 2. С. 137–153.
15. *Антипов А.С., Краснов Д.В., Уткин А.В.* Декомпозиционный синтез системы управления электромеханическими объектами в условиях неполной информации // *ПММ*. 2019. Т. 83. № 4. С. 530–548.
16. *Fridman E., Shaikhet L.E.* Delay-induced Stability of Vector Second-Order Systems via Simple Lyapunov Functionals // *Automatica*. 2016. V. 74. P. 288–296.
17. *Елкин В.И., Коновалова Л.Б.* О редукции нелинейных управляемых систем к линейным // *АиТ*. 2000. Вып. 2. С. 45–55.  
*Elkin V.I., Konovalova L.B.* Reduction of Nonlinear Control Systems to Linear Systems // *Autom. Remote Control*. 2000. V. 61. No. 2. P. 215–225.
18. *Крищенко А.П.* Преобразование нелинейных систем и стабилизация программных движений // *Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана*. 1988. № 512. С. 69–87.
19. *Isidori A.* *Nonlinear Control Systems: An Introduction* (3rd ed.). London: Springer, 1995.
20. *Седова Н.О.* Глобальная асимптотическая устойчивость и стабилизация в нелинейной каскадной системе с запаздыванием // *Изв. вузов. Математика*. 2008. № 11. С. 68–79.
21. *Knoll C., Röbenack K.* Maneuver-Based Control of the 2-Degrees of Freedom Underactuated Manipulator in Normal Form Coordinates // *Syst. Sci. Control. Engineer.* 2015. V. 3. No. 1. P. 26–38.
22. *Olfati-Saber R.* Normal Forms for Underactuated Mechanical Systems with Symmetry // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2002. V. 47. No. 2. P. 305–308.
23. *Knoll C., Röbenack K.* Analysis and Control of an Underactuated Pendulum / In *Crossing Borders within the ABC: Automation, Biomedical Engineering and Computer Science*. 2010. V. 55. P. 440–445.
24. *Neimark Y.I.* D-Partition and Robust Stability // *Computational Mathematics and Modeling*. 1998. V. 9. No. 2. P. 160–166.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.*

Поступила в редакцию 20.08.2021

После доработки 11.10.2021

Принята к публикации 15.10.2021