

Управление в социально-экономических системах

© 2022 г. М.И. ГЕРАСЬКИН, д-р эконом. наук (innovation@ssau.ru)
(Самарский национальный исследовательский
университет им. академика С.П. Королева)

ВЛИЯНИЕ РЕФЛЕКСИИ НА СВОЙСТВА РАВНОВЕСИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ ШТАКЕЛЬБЕРГА

Рассматривается теоретико-игровая проблема выбора оптимальных стратегий агентов рынка олигополии при линейной функции спроса и нелинейных функциях издержек агентов. Исследовано влияние рефлексивного поведения на число и свойства равновесий в игре для агентов, имеющих различные типы функций издержек: вогнутые, соответствующие положительному эффекту расширения масштаба, и выпуклые, соответствующие отрицательному эффекту. Доказано, что в случае выпуклых функций издержек существует только одно равновесие, а в случае вогнутых функций издержек может существовать два равновесия, одно из которых меньше равновесия при линейных издержках, а другое — больше. Установлено, что при выпуклых функциях издержек равновесное действие увеличивается с ростом рефлексии агента и снижается с ростом рефлексии окружения, как и в модели с линейными функциями издержек. При вогнутых функциях издержек влияние рефлексии зависит от знака суммы предположительных вариаций S : с повышением рефлексии агента большее равновесие растёт, а меньшее снижается при $S < 0$, а при $S > 0$ — наоборот.

Ключевые слова: олигополия, игра Штакельберга, вогнутость и выпуклость функции издержек, рефлексия.

DOI: 10.31857/S000523102211006X, EDN: KELPWF

1. Введение

В играх олигополии с нелинейными функциями издержек агентов традиционный подход вычисления равновесия Курно–Нэша [1, 2] требует совершенствования, поскольку включение в модель лидерства по Штакельбергу [3] приводит к расширению содержания понятия «тип агента». Если в самой распространенной модели с линейными издержками [4–6] параметром типа агента являются предельные издержки агентов, то нелинейная модель с лидерством по Штакельбергу, во-первых, типизирует агента по признаку выпуклости (вогнутости) функции издержек, т.е. по специфике технологии, и, во-вторых, по типу рефлексивного поведения.

В рамках рефлексии исследуется многообразие представлений агента 1) о стратегиях окружения (т.е. других игроков), 2) о представлениях окружения о стратегии агента; 3) о представлениях окружения о представлении агента о стратегиях окружения и т.д. В этом ряду номер представления называется рангом [7]. Модель рефлексивной игры является инструментом описания информированности агентов, с помощью которого экзогенно заданная информированность сводится к множеству возможных игр с полной информированностью. Поэтому решением рефлексивной игры является информационное равновесие [8]. Рефлексивное поведение агентов исследовалось в постановке Курно–Штакельберга в процессах стратегической и информационной рефлексии [9–13], а также в рамках динамики установления равновесия Курно [14] и Штакельберга [15].

Таким образом, тип агента представляет собой множество из двух характеристик, первая из которых выражает технологию производства агента, а вторая — его способ мышления. Поскольку технология предопределяет вид зависимости производственных издержек от выпуска, то первый элемент множества параметров типа, т.е. *технологический тип* агента, характеризуется значениями коэффициентов его функции издержек. В соответствии с видом функции издержек агента могут быть следующие технологические типы: 1) постоянная отдача от расширения масштаба производства, при которой издержки возрастают прямо пропорционально выпуску, а технология оптимальна, так как достигла предела улучшения; 2) отрицательный эффект расширения масштаба, когда издержки возрастают ускоренным темпом относительно роста выпуска, и технология рецессивная, т.е. тормозит расширение производства; 3) положительный эффект расширения масштаба, если издержки возрастают замедленным темпом относительно роста выпуска, что соответствует прогрессирующей технологии, способствующей расширению производства. Для реальных фирм выявлена [16] следующая тенденция перехода от одного технологического типа к другому в процессе развития фирмы: вначале наблюдается третий тип (положительный эффект), затем совершенствование технологии приводит к оптимуму, т.е. первому типу (постоянная отдача), после чего технология деградирует и наступает второй тип (отрицательный эффект). Следовательно, вообще в экономике могут сосуществовать агенты различных технологических типов. Однако олигополии, как рынки, возникшие из монополии и, следовательно, предлагающие покупателю идентичный товар, как правило, включают в себя фирмы, пребывающие на одной и той же стадии развития. Поэтому в статье исследуется игра олигополии, в которой все агенты имеют одинаковые технологические типы.

В свою очередь, ментальное поведение агента в игре при взаимодействии с окружением характеризуется рангом его рефлексии, которому можно поставить в соответствие предположительную вариацию, т.е. предполагаемое изменение выпуска контрагента, вызываемое единичным увеличением выпуска агента. Поэтому второй элемент множества параметров типа агента, т.е. *ментальный тип*, количественно измеряется его предположительной вариацией,

точнее, в игре более двух агентов, суммой предположительных вариаций касательно всех агентов окружения. По этому признаку агентов можно разделить на следующие типы: 1) ведомый агент, не выдвигающий предположений о стратегиях окружении, вследствие чего сумма предположительных вариаций такого агента равна нулю; 2) лидер по Штакельбергу (первого уровня), предполагающий, что его окружают ведомые агенты, что, как известно [3], означает отрицательную предположительную вариацию, т.е. предположено снижение выпуска контрагента в ответ на рост выпуска лидера; 3) лидер по Штакельбергу второго уровня (или более высоких уровней), предполагающий, что его окружают лидеры первого уровня (или последующих, но низших уровней). В этой классификации типов с ростом уровня лидерства сумма предположительных вариаций лидера возрастает по абсолютной величине, оставаясь отрицательной, если лидера окружают агенты первого и второго технологических типов. Однако если окружение имеет третий технологический тип (положительный эффект), то углубление рефлексии (т.е. рост ранга) агента может приводить к атипичному предположению о том, что рост выпуска агента вызывает увеличение выпуска контрагента; в таком случае сумма предположительных вариаций атипичного агента положительна [17]. Следовательно, на ментальный тип агента опосредованно, через функции издержек агентов как общее знание, влияет технологический тип окружения, и предположительные вариации в результате могут принимать значения в диапазоне $(-\infty, \infty)$. Поэтому дискретный набор ментальных типов моделируется в статье непрерывной величиной суммы предположительных вариаций.

Поскольку совместное влияние технологического и ментального компонентов типа агентов на равновесие в агрегативной игре олигополистов не исследовано, то эта проблема является предметом данной статьи.

2. Методология

Рассмотрим рынок олигополии, на котором фирмы (агенты) имеют степенные функции издержек следующего вида:

$$(1) \quad C_i(Q_i) = C_{Fi} + B_i Q_i^{\beta_i}, \quad C_{Fi} \geq 0, \quad B_i > 0, \quad \beta_i \in (0, 2), \quad i \in N,$$

где Q_i — действие (объем выпуска) i -го агента; $N = \{1, \dots, n\}$ — множество агентов рынка; n — количество агентов; C_{Fi} , B_i , β_i — коэффициенты функций издержек агентов. Степенная функция издержек (1) в диапазоне коэффициентов $\beta_i \in (0, 2)$ обобщает три технологических типа: агент с постоянной отдачей от расширения масштаба описывается линейной функцией издержек ($\beta_i = 1$), агент с отрицательным эффектом — выпуклой функцией при $1 < \beta_i < 2$, агент с положительным эффектом расширения масштаба — вогнутой функцией издержек при $0 < \beta_i < 1$. Следовательно, коэффициенты B_i , β_i представляют собой параметры *технологического типа* агента.

В агрегативной игре на рынке олигополии с линейной функцией спроса агенты выбирают оптимальные действия из условия максимума функции по-

лезности:

$$(2) \quad \begin{aligned} \max_{Q_i \geq 0} \Pi_i(Q, Q_i) &= \max_{Q_i \geq 0} \left\{ (a - bQ) Q_i - C_{Fi} - B_i Q_i^{\beta_i} \right\}, \\ Q_i &\geq 0, \quad Q = \sum_{i \in N} Q_i, \quad i \in N, \end{aligned}$$

при условии¹

$$(2a) \quad a > C'_{iQ_i} \quad \forall \beta \in [1, 2), \quad a > \beta^{-1} C'_{iQ_i} \quad \forall \beta \in (0, 1),$$

где Π_i — функция полезности (прибыль) i -го агента; Q — суммарный объем рынка; a, b — коэффициенты обратной функции спроса, $a > 0$, $b > 0$, $a \gg b$.

Равновесие Нэша в модели (2) есть вектор действий агентов при выбранных действиях окружения (т.е. других агентов), который определяется из уравнений

$$(3) \quad \frac{\partial \Pi_i(Q_i, \rho_{ij})}{\partial Q_i} = 0, \quad i, j \in N,$$

где $\rho_{ij} = Q'_{jQ_i}$ — предположительная вариация i -го агента, т.е. предполагаемое изменение выпуска j -го агента в ответ на единичный прирост выпуска i -го агента. Сумма вариаций i -го агента $S_i = \sum_{l \in N \setminus i} \rho_{il}$ выражает *ментальный параметр типа* агента.

Стратегическая игра Γ есть кортеж множества агентов, множества стратегий (действий), множества функций полезности и множества уровней лидерства по Штакельбергу:

$$(4) \quad \Gamma = \langle N, \{Q_i, i \in N\}, \{\Pi_i, i \in N\}, G \rangle,$$

где $G = (M_0, M_1, \dots, M_L)$ — множество уровней лидерства агентов; L — количество уровней лидерства агентов; M_r ($r = 0, \dots, L$) — множества агентов; M_0 — множество ведомых агентов; M_r ($r = 1, \dots, L$) — множество лидеров r -го уровня. Формально уровни лидерства определяются следующим образом. Нулевой уровень, соответствующий ведомому η_0 -му агенту, имеет место, если в η_0 -м уравнении системы (3) полагается $\rho_{\eta_0 j}^0 = 0 \quad \forall j \in N \setminus \eta_0$, где верхний индекс вариации обозначает уровень лидерства r . Первый уровень лидерства η_1 -го агента возникает, если в η_1 -м уравнении системы (3) вариации $\rho_{\eta_1 j}^1$ вычисляются дифференцированием по Q_{η_1} остальных $(n - 1)$ уравнений (3), в которых полагается $\rho_{ij}^0 = 0 \quad \forall j \in N \setminus i$. Произвольный r -й уровень лидерства η_r -го агента возникает, если в η_r -м уравнении системы (3) вариации $\rho_{\eta_r j}^r$ вычисляются дифференцированием по Q_{η_r} остальных $(n - 1)$ уравнений (3), в которых полагается $\rho_{ij} = \rho_{ij}^{r-1} \quad \forall j \in N \setminus i$.

Рефлексией [7] будем называть выполняемую η_r -м агентом мыслительную операцию вычисления вариации $\rho_{\eta_r j}^r$ из системы (3) в предположении $\rho_{ij} = \rho_{ij}^{r-1} \quad \forall j \in N \setminus i$; соответственно, индекс r для агента, выполнившего эту операцию, есть ранг рефлексии.

¹ Условие существования стационарной точки функции полезности.

Ростом рефлексии будем называть увеличение параметра S_i^r по абсолютной величине, поскольку в модели с линейными издержками с увеличением r модуль ρ_{ij} растет.

Обозначим нормированное действие агента как $y_i = \frac{Q_i}{Q_{\max}} \in (0, 1)$, где $Q_{\max} = \frac{a}{b}$ есть максимальный объем рынка. Введем обозначения:

$$\alpha_i = \frac{\hat{a} - \hat{B}_i \beta_i (2 - \beta_i) x_i^{\beta_i - 1}}{\hat{b}}, \quad \delta_i = 2 + \frac{\hat{B}_i \beta_i (\beta_i - 1)}{\hat{b}} x_i^{\beta_i - 2} + S_i^r,$$

$$\hat{a} = Q_{\max} a, \quad \hat{b} = Q_{\max}^2 b, \quad \hat{B}_i = Q_{\max}^{\beta_i} B_i,$$

где параметры x_i удовлетворяют следующим условиям:

$$(5) \quad \begin{aligned} y_i - x_i < \varepsilon_i, \quad x_i < y_i, \quad \Omega_i = x_i + \xi_i (y_i - x_i), \\ \xi_i, x_i \in (0, 1), \quad \varepsilon_i \in (0, \Omega_i), \quad i \in N. \end{aligned}$$

Переменные x_i представляют собой параметры линеаризации системы (3), поэтому имеют ту же размерность, что и равновесные действия y_i , и должны быть им равны с точностью до малых положительных чисел ε_i .

Решение системы (3) было получено [18] в виде следующей формулы равновесия:

$$(6a) \quad y_i = \frac{a_{0i} + a_{1i} x_i^{\theta_i}}{b_{0i} + b_{1i} x_i^{\theta_i - 1}},$$

где коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$(6b) \quad \begin{aligned} \theta_i = \beta_i - 1 \in (-1, 1), \quad a_{0i} = \frac{1 - \lambda_i}{\bar{B}_i}, \quad a_{1i} = \theta_i^2 - 1 < 0, \\ b_{0i} = \frac{1 + S_i^r + \tau_i}{\bar{B}_i}, \quad b_{1i} = \theta_i (\theta_i + 1), \end{aligned}$$

при условии² [19]

$$(6в) \quad S_i^r \in \Xi_i, \quad i \in N, \quad \Xi_i = \{S_i^r : \delta_i > 0\},$$

где

$$(6г) \quad \bar{B}_i = \frac{B_i}{b Q_{\max}^{2-\beta_i}}, \quad \lambda_i = \tau_i \sum_{j \neq i}^n \frac{\alpha_j}{\omega_j}, \quad \tau_i = \frac{1}{1 + \sum_{j \neq i}^n \frac{1}{\omega_j}},$$

$$\omega_i = \delta_i - 1, \quad b_{1i} \begin{cases} > 0, & \theta_i \in (0, 1), \\ < 0, & \theta_i \in (-1, 0). \end{cases}$$

Поставим задачу анализа влияния параметров функций издержек агентов и суммы предположительных вариаций S_i на функцию равновесного действия агента (6а).

² Условие максимума функции полезности в стационарной точке.

3. Результаты

Опишем свойства равновесий, определяемых формулой (6а), для различных типов функций издержек и ментальных типов агентов. В дальнейшем рассмотрим i -го агента, поэтому для упрощения записи опустим индекс « i », а если рассуждения касаются окружения, используем индекс « $-i$ »; также опустим индекс « r », считая, что каждый агент имеет некоторый ранг рефлексии, приводящий к сумме вариаций S^r .

Для оценки свойств равновесий важную роль играют характеристики параметров (6г), которые представим в виде следующего вспомогательного результата.

Лемма 1. Коэффициенты τ и λ при различных параметрах типа окружения в равновесии удовлетворяют следующим условиям:

$$(7a) \quad \tau \in \begin{cases} (0, 1), & \text{если } \theta_{-i} \in [0, 1), \\ (0, 1), & \text{если } \theta_{-i} \in (-1, 0) \text{ при } \tilde{S}_{-i} \in [\bar{S}, \infty), \\ \left(-\frac{1}{n-2}, 0\right), & \text{если } \theta_{-i} \in (-1, 0) \text{ при } \tilde{S}_{-i} \in (\bar{S}-1, \bar{S}), \end{cases}$$

$$(7b) \quad \lambda \in \begin{cases} (0, 1), & \text{если } \theta_{-i} \in [0, 1), \\ (0, 1), & \text{если } \theta_{-i} \in (-1, 0) \text{ при } \tilde{S}_{-i} \in [\bar{S}, \infty), \\ (0, 1), & \text{если } \theta_{-i} \in (-1, 0) \text{ при } \tilde{S}_{-i} \in (\bar{S}-1, \bar{S}) \text{ и } n \in (n_2, \infty), \\ (1, 2), & \text{если } \theta_{-i} \in (-1, 0) \text{ при } \tilde{S}_{-i} \in (\bar{S}-1, \bar{S}) \text{ и } n \in (n_1, n_2), \end{cases}$$

$$(7b) \quad \frac{\partial \tau}{\partial S_{-i}} > 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial S_{-i}} < 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial S} = \frac{\partial \lambda}{\partial S} = 0,$$

где

$$\bar{S} = b^{-1} \tilde{B} \left| \tilde{\theta} \right| \left(\tilde{\theta} + 1 \right) Q^{\tilde{\theta}-1} - 1, \quad n_1 = \frac{4 - \tilde{\alpha}_{\max}}{2 - \tilde{\alpha}_{\max}}, \quad n_2 = \frac{2 - \tilde{\alpha}_{\max}}{1 - \tilde{\alpha}_{\max}},$$

$$\tilde{\alpha}_{\max} = 1 - \frac{\tilde{B} (1 - \tilde{\theta}^2) Q^{\tilde{\theta}}_{\max}}{a} \in (0, 1), \quad \tilde{S}_{-i} = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n S_j;$$

$\tilde{\theta}$, $\tilde{B}$ подобраны из условий

$$\omega(\tilde{\theta}, \tilde{B}) = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n \omega_j, \quad \alpha(\tilde{\theta}, \tilde{B}) = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n \alpha_j.$$

Содержательно коэффициент τ характеризует интенсивность рефлексии окружения данного агента, так как если $S_{-i} < 0$, то с увеличением $|S_{-i}|$ параметр ω_{-i} уменьшается и τ стремится к нулю, а если параметр $S_{-i} > 0$, то его рост приводит к повышению τ . Коэффициент λ — это комплексная оценка типа окружения, он объединяет коэффициент τ и характеристику нелинейности функций издержек окружения α : чем больше $|\theta|$, т.е. чем более выпуклы

(или вогнуты) функции издержек, тем коэффициент α ближе к единице, а чем меньше $|\theta|$, тем α ближе к нулю.

Таким образом, коэффициенты τ и λ положительны и не превышают единицы в случаях линейных или выпуклых функций издержек окружения (постоянного или отрицательного эффектов расширения масштаба), а также в случае вогнутых функций издержек окружения, если средняя сумма вариаций окружения S_{-i} не меньше $\bar{S}$; если эта величина меньше $\bar{S}$, то коэффициент τ отрицательный и по модулю меньше $\frac{1}{n-2}$, а коэффициент λ либо также не превышает единицы при большом числе агентов (больше n_2), либо не превышает двух при меньшем числе агентов (от n_1 до n_2). Важно, что с ростом рефлексии окружения, т.е. с увеличением $|S_{-i}|$, в случае $S_{-i} > 0$ коэффициент τ растет, а α снижается, а в случае $S_{-i} < 0$ — наоборот. Опосредованно через функцию $y(S, S_{-i})$ коэффициенты τ и λ испытывают также влияние изменения равновесия, но эта зависимость будет исследована в нижеследующих утверждениях.

Равновесие³ (6а) отклоняется от классического равновесия Курно [20] вследствие двух факторов — нелинейности функции издержек агента, характеризуемой параметром θ , а также рефлексии агента (параметр S) и его окружения (параметры λ и τ). Поэтому для факторного анализа устраним влияние нелинейности, т.е. рассмотрим случай $\theta = 0$ (или $\beta = 1$), что позволяет выявить чистое влияние фактора рефлексии.

Утверждение 1. В игре агентов с линейными функциями издержек ($\beta = 1$) равновесное действие $y_{\beta=1}$

i) единственное, конечное, отличное от нуля, вычисляется по формуле

$$(8a) \quad y_{\beta=1} = \chi_{\beta=1} \frac{a - B}{Q_{\max} b},$$

ii) растет с ростом рефлексии агента и снижается с ростом рефлексии окружения

$$(86) \quad \frac{\partial \chi_{\beta=1}}{\partial S} < 0, \quad \frac{\partial \chi_{\beta=1}}{\partial S_{-i}} > 0,$$

iii) превышает равновесное действие по Курно $y_K = \frac{a-B}{(n+1)Q_{\max}b}$, т.е. $\chi_{\beta=1} > \chi_K$, при следующих ограничениях:

$$(8b) \quad \kappa < 0 \vee (n < \kappa \wedge \kappa > 0),$$

где $\chi_{\beta=1} = \frac{\tau}{1+S+\tau}$, $\kappa = \frac{S+1}{S_{-i}-S} S_{-i}$, $\chi_K = \frac{1}{n+1}$, индекс K — равновесие Курно.

Содержательно коэффициент χ показывает изменение действия агента вследствие рефлексии по сравнению с равновесным действием по Курно.

Далее рассмотрим игру агентов, имеющих технологии с отрицательным эффектом расширения масштаба, т.е. выпуклыми функциями издержек.

³ Здесь и далее термин «равновесие» используется также как синоним термина «равновесное действие».

Утверждение 2. В игре агентов с выпуклыми функциями издержек ($\beta > 1$) равновесие агента $y_{\beta>1}$

i) существует при следующих условиях:

$$(9a) \quad S \in (\max \{-1, s_2\}, 0], \quad \text{если} \quad \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta>1},$$

причем $s_2 > -1$, если $\lambda + \tau < 1$ и $Q_{\max} < \widehat{Q}_{\max}$,

ii) при $\beta = 2$ вычисляется по формуле

$$(9б) \quad y_{\beta=2} = \chi_{\beta=2},$$

iii) меньше равновесия при линейных функциях издержек

$$(9в) \quad y_{\beta=2} < y_{\beta=1} \quad \text{при} \quad S < \widehat{S},$$

iiii) растет с ростом рефлексии агента и снижается с ростом рефлексии окружения

$$(9г) \quad \frac{\partial \chi_{\beta=2}}{\partial S} < 0, \quad \frac{\partial \chi_{\beta=2}}{\partial S_{-i}} > 0,$$

iiiii) влияние рефлексии ниже, чем при линейных функциях издержек

$$(9д) \quad \left| \frac{\partial \chi_{\beta=2}}{\partial S} \right| < \left| \frac{\partial \chi_{\beta=1}}{\partial S} \right|, \quad \frac{\partial \chi_{\beta=2}}{\partial S_{-i}} < \frac{\partial \chi_{\beta=1}}{\partial S_{-i}},$$

где

$$\chi_{\beta=2} = \frac{\tau}{1 + S + \tau + 2b^{-1}B}, \quad s_2 = -\beta\overline{B} - (\lambda + \tau),$$

$$\widehat{Q}_{\max} = \left(\frac{B}{a} \frac{\beta}{1 - \lambda - \tau} \right)^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad \widehat{S} = 2\frac{a}{b} \left(1 - \frac{B}{a} \right) - 1 - \tau,$$

$$\Omega_{\beta>1} = \{(S, \tau, \lambda) : a_0 > 0 \wedge b_0 > 0\}.$$

Наконец, исследуем игру агентов, имеющих технологии с положительным эффектом расширения масштаба, т.е. вогнутыми функциями издержек.

Утверждение 3. В игре агентов с вогнутыми функциями издержек ($\beta < 1$) равновесие агента $y_{\beta<1}$

i) существует при следующих условиях:

$$(10a) \quad S \in \begin{cases} (\max \{s_0, s_1\}, s_3) \quad \text{при} \quad a_0 > |a_1|, \\ (\max \{s_0, s_1\}, s_2) \quad \text{при} \quad a_0 < |a_1|, \end{cases} \quad \text{если} \quad \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta<1}^1,$$

$$\begin{cases} (\max \{s_0, s_2\}, s_4), \quad \text{если} \quad \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta<1}^2, \\ (s_0, s_2), \quad \text{если} \quad \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta<1}^3, \\ (s_0, \min \{s_1, s_2\}), \quad \text{если} \quad \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta<1}^4, \end{cases}$$

ii) при $\beta = 0,5$ вычисляется по формуле

$$(106) \quad y_{\beta=0,5} = \begin{cases} y_{\beta=0,5}^{+,-} = \frac{\zeta \pm \sqrt{d}}{2(1+S+\tau)}, & \text{если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta<1}^2, \\ \left(\frac{0,5\bar{B}}{1+S+\tau} \right)^{\frac{2}{3}}, & \text{если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta<1}^1 \cup \Omega_{\beta<1}^3 \cup \Omega_{\beta<1}^4, \end{cases}$$

iii) соотносится с равновесием при линейных функциях издержек как

$$(10в) \quad \begin{aligned} y_{\beta=0,5}^+ &> y_{\beta=1} \wedge y_{\beta=0,5}^- < y_{\beta=1} \quad \text{при } \lambda < \bar{\lambda}, \quad \text{если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta<1}^2, \\ y_{\beta=1} &< y_{\beta=0,5} \quad \text{при } Q_{\max} > \bar{Q}_{\max}, \quad \text{если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta<1}^1, \end{aligned}$$

iiii) зависит от рефлексии агента и рефлексии окружения следующим образом:

$$(10г) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial y_{\beta=0,5}^+}{\partial S} < 0, \quad \frac{\partial y_{\beta=0,5}^-}{\partial S} > 0, \\ \frac{\partial y_{\beta=0,5}^+}{\partial S_{-i}} > 0, \quad \frac{\partial y_{\beta=0,5}^-}{\partial S_{-i}} < 0 \quad \text{при } \lambda > \widehat{\lambda}, \end{aligned} \right\} \quad \text{если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta<1}^2,$$

$$\frac{\partial y_{\beta=0,5}}{\partial S} < 0, \quad \frac{\partial y_{\beta=0,5}}{\partial S_{-i}} < 0, \quad \text{если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta<1}^1 \cup \Omega_{\beta<1}^3 \cup \Omega_{\beta<1}^4,$$

iiiii) влияние рефлексии по сравнению со случаем линейных функций издержек сказывается следующим образом:

$$(10д) \quad \left. \begin{aligned} \left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S} \right| &> \left| \frac{\partial y_{\beta=0,5}^+}{\partial S} \right| \quad \text{при } \lambda > \widehat{\lambda}^+, \\ \left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S} \right| &> \left| \frac{\partial y_{\beta=0,5}^-}{\partial S} \right| \quad \text{при } \lambda > \widehat{\lambda}^-, \\ \left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S_{-i}} \right| &> \left| \frac{\partial y_{\beta=0,5}^{+,-}}{\partial S_{-i}} \right| \quad \text{при } \lambda > \widehat{\lambda} + \widehat{\lambda}_{-i}, \end{aligned} \right\} \quad \text{если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta<1}^2,$$

$$\left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0,5}}{\partial S} \right|, \quad \left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S_{-i}} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0,5}}{\partial S_{-i}} \right|$$

$$\text{при } Q_{\max} > \bar{Q}_{\max}, \quad \text{если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta<1}^1,$$

где

$$\Omega_{\beta<1}^1 = \{(S, \tau, \lambda) : a_0 > 0 \wedge b_0 > 0 \wedge b_0 < |b_1|\},$$

$$\Omega_{\beta<1}^2 = \{(S, \tau, \lambda) : a_0 > 0 \wedge b_0 > 0 \wedge b_0 > |b_1| \wedge a_0 > |a_1|\},$$

$$\Omega_{\beta<1}^3 = \{(S, \tau, \lambda) : a_0 < 0 \wedge b_0 < 0\},$$

$$\Omega_{\beta<1}^4 = \{(S, \tau, \lambda) : a_0 > 0 \wedge b_0 < 0\},$$

$$\begin{aligned}
\zeta &= 1 - \lambda, \quad d = \zeta^2 - 2\bar{B}(1 + S + \tau), \quad \bar{\lambda} = 1 - \tau(1 - B/a), \\
\widehat{\lambda}^+ &= 1 - \frac{2\tau(1 - B/a)}{\Delta_1 + 2}, \quad \widehat{\lambda}^- = 1 - \frac{2\tau(1 - B/a)}{\Delta_1}, \\
s_0 &= \beta(1 - \beta)\bar{B}y^{\beta-2} - 2, \quad s_1 = -(1 + \tau), \quad s_2 = -\beta\bar{B} - (\lambda + \tau), \\
s_3 &= \beta(1 - \beta)\bar{B} - (1 + \tau), \quad s_4 = \beta(1 - \beta)\psi - (1 + \tau), \\
\widehat{\lambda}_{-i} &= \frac{2(1 - B/a)(1 + S) - \Delta_2}{2 + \Delta_1}, \quad \bar{Q}_{\max} = \frac{(0,5B/a)^2}{\tau^3(1 - B/a)^3}, \quad \widehat{\lambda} = 1 - (1 + S + \tau)\alpha, \\
\Delta_1 &= \frac{Q_{\max}^{0,25}(1 - \tau\alpha(n - 1))}{\varphi^{0,5}} - 1, \quad \Delta_2 = \frac{(B/a)^{0,5}(1 + \tau)^{0,5}}{\varphi^{0,5}}, \\
\varphi &= Q_{\max}^{0,5}(1 - \tau\alpha(n - 1))^2 - 2\frac{B}{a}(1 + \tau), \\
y^-, y^+ & \text{ — меньшее и большее равновесия.}
\end{aligned}$$

Таким образом, исследована полная совокупность возможных игровых ситуаций, возникающих при различных технологических и ментальных типах агентов олигополии.

4. Численный эксперимент и обсуждение результатов

Игра агентов с линейными функциями издержек, свойства равновесия в которой описаны в утверждении 1, является референтным случаем. В этом случае равновесные действия агентов выше, чем в классическом случае Курно, если рефлексия агента выше рефлексии окружения (т.е. $|S| > |S_{-i}|$) при любых $n > 1$, а если окружение рефлексит сильнее (т.е. $|S| < |S_{-i}|$), то при некотором ограниченном числе агентов, т.е. $n < \kappa$. Кроме того, поскольку в случае линейных издержек $S < 0$ и $S_{-i} < 0$, то рост рефлексии агента всегда ведет к росту его равновесия, а рост рефлексии окружения способствует снижению равновесия агента.

В игре агентов, имеющих технологии с отрицательным эффектом масштаба, т.е. выпуклые функции издержек, описанной в утверждении 2, область значений S , при которых равновесие в игре существует, может сужаться по сравнению с линейным случаем, когда $S \in (-1, 0]$. Это проявляется при малых значениях λ и τ , т.е. когда $S_{-i} \rightarrow -1$ (окружение интенсивно рефлексит) и $|\theta| \rightarrow 0$ (функции издержек окружения близки к линейным). Выпуклость функций издержек приводит к уменьшению равновесного действия по сравнению с моделью линейных издержек при условии $S < \widehat{S}$, что является типичным случаем, поскольку $\widehat{S} \gg 1$, так как $\frac{a}{b} \gg 1$. Кроме того, при выпуклых функциях издержек снижается влияние рефлексии по сравнению с линейным случаем, а тип влияния рефлексии на равновесие остается прежним: рост рефлексии агента повышает его равновесное действие, а рост рефлексии окружения — снижает.

Коэффициенты функций издержек телекоммуникационных компаний РФ

i	Агент	B_i	β_i
1	ПАО «МТС»	2,41	0,76
2	ПАО «МегаФон»	1,36	0,85
3	ПАО «ВымпелКом»	2,46	0,81

Игра агентов, технологии которых характеризуются положительным эффектом расширения масштаба, когда у всех агентов вогнутые функции издержек, описана в утверждении 3. При этом равновесие существует в менее широком диапазоне, чем $S \in (-\infty, \infty)$ [19]. Следовательно, в этом случае S может быть как положительным, так и отрицательным, поэтому понятие роста рефлексии можно трактовать двояко: при $S < 0$, как и ранее, ростом рефлексии будем считать увеличение параметра S по абсолютной величине, т.е. уменьшение S ; при $S > 0$ будем называть ростом рефлексии увеличение параметра S .

Возможны две ситуации: существование двух равновесий в случае $\{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta < 1}^2$ или одного равновесия в случае $\{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta < 1}^1 \cup \Omega_{\beta < 1}^3 \cup \Omega_{\beta < 1}^4$.

В ситуации двух равновесий одно из них больше равновесия в линейном случае, а другое меньше, если $\lambda < \bar{\lambda}$, а поскольку $\bar{\lambda}$ близко к единице при достаточно большом n , то эта закономерность типична. Кроме того, в этой ситуации рост рефлексии агента при $S < 0$ влечет за собой увеличение большего равновесия и уменьшение меньшего, а при $S > 0$, наоборот, приводит к снижению большего равновесия и повышению меньшего. В свою очередь, рост рефлексии окружения вызывает противоположный эффект при условии $\lambda > \hat{\lambda}$.

В ситуации единственного равновесия его значение больше равновесия в линейном случае при условии $Q_{\max} > \bar{Q}_{\max}$, которое выполняется при малых значениях $\bar{Q}_{\max}$, т.е. когда $B \ll a$. Кроме того, в данной ситуации при $S < 0$ рост рефлексии агента и окружения способствует уменьшению равновесия, а при $S > 0$ ведет к увеличению равновесия.

При вогнутых функциях издержек влияние рефлексии на равновесие отличается от случая линейных издержек следующим образом: 1) в ситуации двух равновесий рефлексия агента в линейном случае влияет сильнее, чем в нелинейном, при условии $\lambda > \hat{\hat{\lambda}}^+$ для большего равновесия и $\lambda > \hat{\hat{\lambda}}^-$ для меньшего равновесия, а рефлексия окружения при условии $\lambda > \hat{\lambda} + \hat{\lambda}_{-i}$; 2) в ситуации одного равновесия рефлексия агента и окружения влияет сильнее в линейном случае при условии $Q_{\max} > \bar{Q}_{\max}$.

Проведем моделирование равновесий на основе параметров функций спроса $a = 1,77$, $b = 0,0009$ и издержек (таблица), полученных для телекоммуникационных компаний РФ [19], причем $C_{Fi} = 0$, $i = 1, 2, 3$. Поскольку $\beta_i < 1$, $i = 1, 2, 3$, то для всех агентов имеет место наиболее интересный случай положительного эффекта масштаба, описанный в утверждении 3, в котором могут наблюдаться два равновесия.

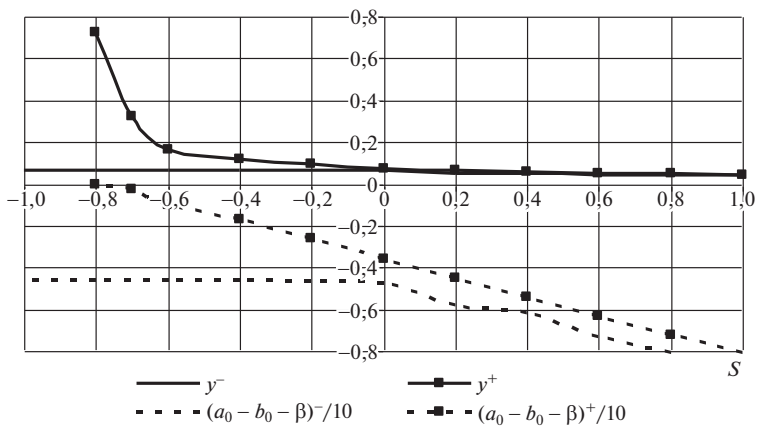


Рис. 1. Влияние рефлексии агента 1 на точки и условия равновесия.

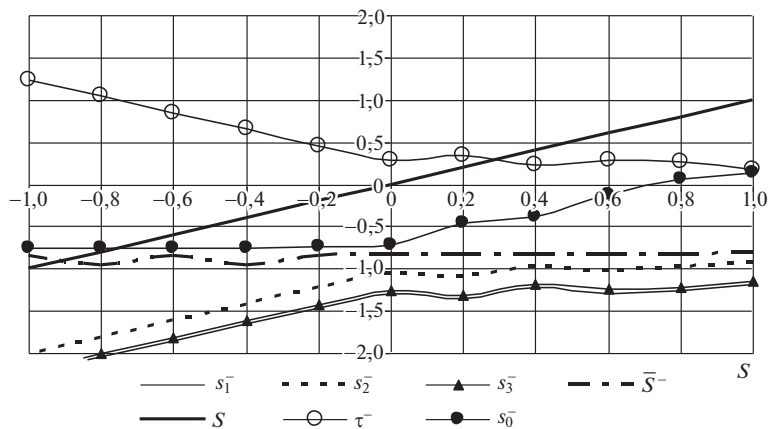


Рис. 2. Ограничения на рефлекссию агента 1 в первой точке равновесия.

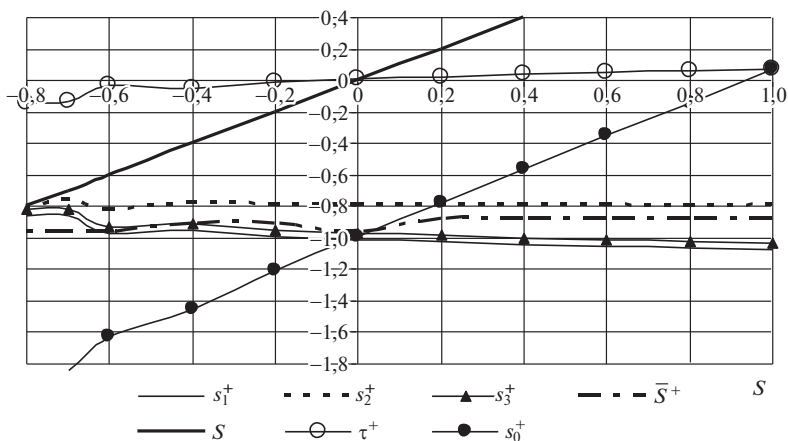


Рис. 3. Ограничения на рефлекссию агента 1 во второй точке равновесия.

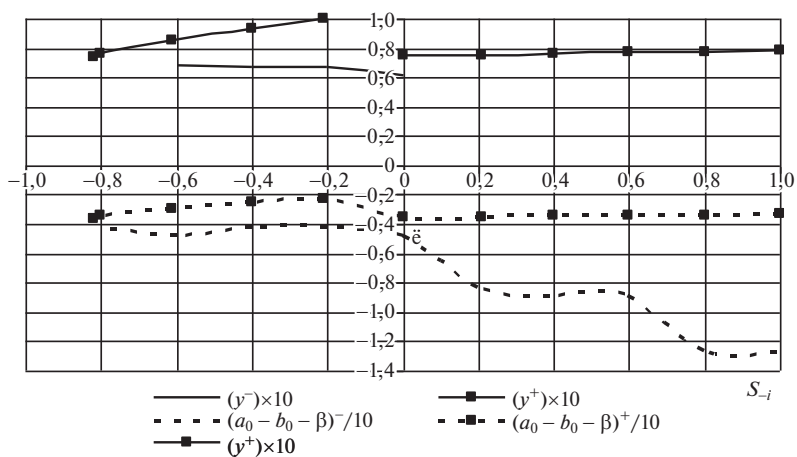


Рис. 4. Влияние рефлексии окружения агента 1 на точки и условия равновесия.

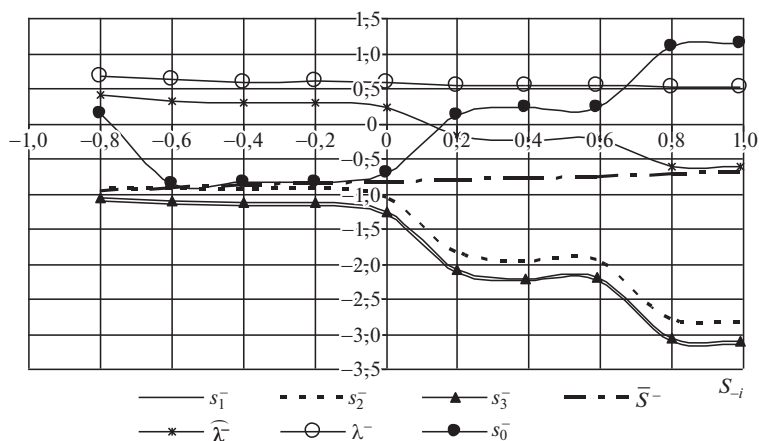


Рис. 5. Ограничения на рефлексии окружения агента 1 в первой точке равновесия.

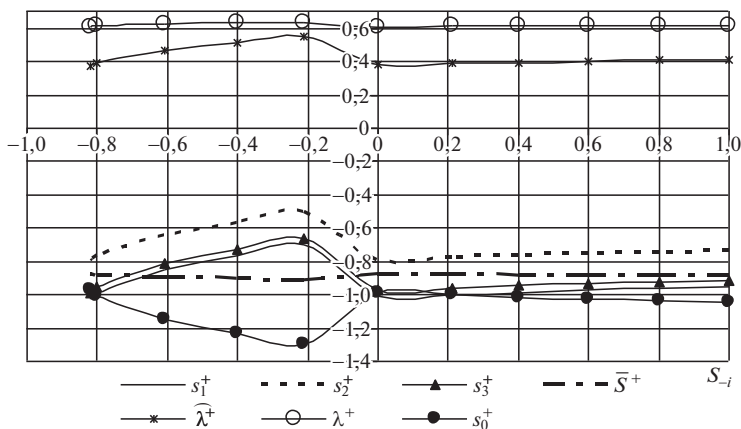


Рис. 6. Ограничения на рефлексии окружения агента 1 во второй точке равновесия.

Поскольку для таких исходных данных не выполняются условия применимости приближенных формул (10) [18], то равновесия рассчитаны путем численного решения уравнения (9а) [18], т.е. $f(y) = \frac{b_0}{a_0}y + \frac{b_1 - a_1}{a_0}y^{\beta-1} = 1$. Для всех агентов выполняются условия $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $b_0 > |b_1|$, $a_0 > |a_1|$ [18], при которых может быть два равновесия, а условия существования двойного равновесия $a_0 - b_0 - \beta < 0$ и $u_\infty > 0$ соблюдаются в определенных диапазонах S и S_{-i} . Во всех точках равновесия выполняется условие $S = s_4$, т.е. $u_\infty = 0$ (или $f(y) = 1$). Кроме того, моделирование показало, что при равновесии соблюдается соотношение $\omega_i = -\tau_i \forall i \in N$; это свойство не было установлено аналитически.

Рассмотрим влияние на равновесия рефлексии агента (рис. 1–3), считая $S_{-i} = 0$. Для равновесия y^+ при $S < -0,8$ нарушается условие $a_0 - b_0 - \beta < 0$ (рис. 1), т.е. условие $S > s_2$ (рис. 3). Для равновесия y^- при $S < -0,8$ нарушается условие (6в), т.е. $S > s_0$, в результате становится $\tau > 1$ (рис. 2). Поэтому равновесия рассчитаны в указанных диапазонах. Характер изменения равновесий с ростом S подтверждает условия (10г): с ростом S равновесие y^+ уменьшается, а равновесие y^- возрастает.

Рассмотрим влияние на равновесия рефлексии окружения (рис. 4–6), полагая $S = 0$. Изменение S_{-i} не ведет к нарушению условий $a_0 - b_0 - \beta < 0$ и $u_\infty > 0$ в данных диапазонах (рис. 4), однако условие (6в), т.е. $S > s_0$, для равновесия y^- выполняется только в диапазоне $S_{-i} \in (-0,6; 0)$, поэтому y^- представлено в указанном диапазоне. В соответствии с условиями (10г) с ростом S_{-i} равновесие y^- уменьшается, а равновесие y^+ возрастает, если $\lambda > \hat{\lambda}$ (рис. 6).

5. Заключение

Исследование совместного влияния технологического и ментального портретов агентов на равновесие в игре олигополии продемонстрировало зависимость количества равновесий и величины равновесных действий как от выпуклости (вогнутости) функций издержек агентов, так и от их рефлексивного поведения. Если в случае линейных функций издержек существует единственное равновесие и рост рефлексии агента всегда ведет к увеличению его равновесия, а рост рефлексии окружения способствует снижению равновесия агента, то нелинейный характер издержек приводит к существенным особенностям.

Первая особенность игры агентов с нелинейными функциями издержек состоит в сужении допустимого диапазона суммы предположительных вариаций агента, в котором существует игровое равновесие, по сравнению с возможным значением этой суммы с точки зрения менталитета агента.

Вторая особенность присуща игре агентов с вогнутыми издержками, в которой может существовать два равновесия, одно из которых меньше равновесия в линейном случае, а другое больше; если же равновесие единственно, то оно, как правило, больше равновесного действия в линейном случае. В случае

с выпуклыми издержками равновесие, как правило, меньше, чем в линейном случае.

Третье свойство касается степени влияния рефлексии на равновесие при выпуклых или вогнутых издержках. Выпуклость функций издержек приводит к ослаблению влияния рефлексии по сравнению с линейным случаем, но характер влияния совпадает с линейным случаем. В случае вогнутых издержек рефлексия агента и рефлексия окружения, как правило, слабее, чем в линейном случае, влияют на изменение единственного равновесия, а если равновесия два, то рефлексия окружения может влиять как сильнее, так и слабее.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Поскольку условия (5) определяют неподвижную точку, т.е. $x = y$, то преобразуем выражения α , δ и ω :

$$\alpha = \frac{a - B(1 - \theta^2)Q^\theta}{Q_{\max}b}, \quad \delta = 2 + S + b^{-1}B\theta(\theta + 1)Q^{\theta-1},$$

$$\omega = 1 + S + b^{-1}B\theta(\theta + 1)Q^{\theta-1}.$$

Введем следующее упрощение: так как параметры τ и λ зависят от сумм $\frac{\alpha_{-i}}{\omega_{-i}}$ и $\frac{1}{\omega_{-i}}$ по множеству $-i = \{N \setminus i\}$, то без ограничения общности положим параметры α и ω равными средним в этом множестве, т.е. $\alpha_{-i} = \tilde{\alpha}$, $\omega_{-i} = \tilde{\omega}$ (символом « $\sim$ » обозначим также $\tilde{\theta}$, $\tilde{B}$, $\tilde{S}_{-i}$, при которых $\tilde{\omega} = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n \omega_j$, $\tilde{\alpha} = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n \alpha_j$). Тогда

$$\tau = \frac{1}{1 + (n-1)\frac{1}{\tilde{\omega}}} = \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} + n - 1}, \quad \lambda = \tau(n-1)\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\omega}} = \frac{(n-1)\tilde{\alpha}}{\tilde{\omega} + n - 1}.$$

Из этих формул следует:

$$\frac{\partial \tau}{\partial S} = \frac{\tilde{\omega}'_S(\tilde{\omega} + n - 1) - \tilde{\omega}\tilde{\omega}'_S}{(\tilde{\omega} + n - 1)^2} = \frac{\tilde{\omega}'_S(n-1)}{(\tilde{\omega} + n - 1)^2},$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial S} = \frac{-\tilde{\omega}'_S(n-1)\tilde{\alpha}}{(\tilde{\omega} + n - 1)^2}, \quad \left| \frac{\partial \lambda}{\partial S} \right| = \tilde{\alpha} \frac{\partial \tau}{\partial S}.$$

Производные

$$\omega'_S = 1 + b^{-1}B\theta(\theta + 1)(\theta - 1)Q^{\theta-2}Q'_S,$$

$$\omega'_{S_{-i}} = b^{-1}B\theta(\theta + 1)(\theta - 1)Q^{\theta-2}Q'_{S_{-i}}$$

учитывают неявную зависимость $Q(S, S_{-i})$, но поскольку оцениваются знаки производных $\frac{\partial \tau}{\partial S}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial S}$ с целью последующего вывода о знаках Q'_S , $Q'_{S_{-i}}$, которые связаны со знаками τ'_{S_i} , $\tau'_{S_{-i}}$, то эта зависимость не учитывается и

считается, что в равновесии $Q(S, S_{-i}) = \text{const}$. Поэтому $\omega'_S = 1$, $\omega'_{S_{-i}} = 0$. Тогда $\frac{\partial \tau}{\partial S_{-i}} = \frac{(n-1)}{(\tilde{\omega}+n-1)^2} > 0$, $\frac{\partial \lambda}{\partial S_{-i}} = \frac{-(n-1)\tilde{\alpha}}{(\tilde{\omega}+n-1)^2} < 0$, $\frac{\partial \tau}{\partial S_i} = \frac{\partial \lambda}{\partial S_i} = 0$. Заметим, что так как $Q_{\max}b = a$, то $\tilde{\alpha} = 1 - \frac{\tilde{B}(1-\tilde{\theta}^2)Q^{\tilde{\theta}}}{a} < 1 \quad \forall Q > 0$. Кроме того, из условия (2а) следует, что $\tilde{\alpha} > 0$, так как $a - \tilde{B}(1 - \tilde{\theta}^2)Q^{\tilde{\theta}} > 0$ при $\theta_{-i} \in (0, 1)$, если $a > C'_{iQ_i}$, т.е. $a > \tilde{B}(1 + \tilde{\theta})Q^{\tilde{\theta}}$, и $a - \tilde{B}(1 - \tilde{\theta}^2)Q^{\tilde{\theta}} > 0$ при $\theta_{-i} \in (-1, 0)$, если $a > \beta^{-1}C'_{iQ_i}$, т.е. $a > \tilde{B}Q^{\tilde{\theta}}$. Поэтому $\tilde{\alpha} \in (0, 1)$.

В случае $\theta_{-i} \in [0, 1)$ доказано, что $S_{-i} \in (-1, 0]$ [19], поэтому $\omega_{-i} > 0$, значит, $\tau \in (0, 1)$; при этом $\lambda \in (0, 1)$, так как $\frac{(n-1)\tilde{\alpha}}{\tilde{\omega}+n-1} > 0 \quad \forall n > 1$ и $(n-1)(\tilde{\alpha} - 1) < < \tilde{\omega} \quad \forall n > 1$. В случае $\theta_{-i} \in (-1, 0)$ по [19] $S_{-i} \in (-\infty, \infty)$, но с учетом (6в), из которого следует $\tilde{\omega} > -1$, возможны два варианта: i) $\tilde{\omega} \geq 0$ при условии $\tilde{S} \geq \geq b^{-1}\tilde{B}|\tilde{\theta}|(\tilde{\theta} + 1)Q^{\tilde{\theta}-1} - 1 = \bar{S}$; в этом случае, как и в предыдущем, $\tau \in (0, 1)$, $\lambda \in (0, 1)$; ii) $\tilde{\omega} < 0$ при условии $\tilde{S} < \bar{S}$ и $\tilde{\omega} > -1$ при условии $\tilde{S} > \bar{S} - 1$; тогда $\tau \in \left(-\frac{1}{n-2}, 0\right)$, а $\lambda \in \left(0, \frac{n-1}{n-2}\tilde{\alpha}\right)$ при $n > 2$, причем $\lambda \in (0, 1)$, если $\tilde{\alpha} < \frac{n-2}{n-1} = n_2$, т.е. если $\tilde{\alpha}_{\max} = 1 - \frac{\tilde{B}(1-\tilde{\theta}^2)Q^{\tilde{\theta}_{\max}}}{a} < \frac{n-2}{n-1}$, откуда $n > \frac{2-\tilde{\alpha}_{\max}}{1-\tilde{\alpha}_{\max}}$; а при $\lambda > 1$ условие $\lambda - 1 \leq 1$ выполняется, если $n \geq \frac{4-\tilde{\alpha}_{\max}}{2-\tilde{\alpha}_{\max}} = n_1$, тогда $\lambda \in (1, 2)$.

Доказательство утверждения 1. В случае $\beta = 1$ (или $\theta = 0$) показано [19], что $S < 0$, $|S| \in [0, 1)$, поэтому $\delta = 2 + S > 1$, значит, $\omega = \delta - 1 = S + 1 \in (0, 1)$. Если все агенты окружения интенсивно рефлексировать, т.е. $|S_{-i}| \rightarrow 1$, то $\omega_{-i} \rightarrow 0$, поэтому по (6г) $\tau \rightarrow 0$; если окружение не рефлексировать, т.е. $|S_{-i}| = 0$, то $\omega_{-i} = 1$, поэтому $\tau = \frac{1}{n}$. Поскольку $a_1 = -1$, $b_1 = 0$, $\alpha = \frac{aQ_{\max} - BQ_{\max}}{Q_{\max}^2b} = \frac{a-B}{Q_{\max}b}$ при $\theta = 0$, то, во-первых, из (6а) следует $y = \frac{\frac{a}{Q_{\max}b} - \lambda - \frac{B}{Q_{\max}b}}{1+S+\tau}$, во-вторых, $\lambda = \alpha\tau \sum_{j \neq i}^n \frac{1}{\omega_j} = \alpha\tau \sum_{j=1 \setminus i}^n \frac{1}{\omega_j} = \alpha\tau(\tau - 1)$. При этом из (2а) следует, что $a > B$. Следовательно, $y = \chi \frac{a-B}{Q_{\max}b}$, где $\chi = \frac{\tau}{\omega+\tau}$. Сравним данное решение с равновесным действием при условии гипотезы Курно $Q_i^K = \frac{a-B}{(n+1)b}$ или $y^K = \frac{a-B}{(n+1)Q_{\max}b}$ [20], т.е. когда предположительные вариации всех агентов равны нулю ($S = 0$, $S_{-i} = 0$), поэтому $\omega = 1$, $\tau = \frac{1}{n}$, $\chi^K = \frac{1}{n+1}$. Покажем, как рефлексивное поведение агентов влияет на увеличение действия, т.е. при каких n выполняется неравенство $\frac{\chi}{\chi^K} = \frac{\tau(n+1)}{\omega+\tau} > 1$: пусть S_{-i} одинаковы для всех агентов окружения, тогда $\tau = \frac{S_{-i}+1}{S_{-i}+n}$, и $\frac{\chi}{\chi^K} > 1$ при условиях $n > \frac{S+1}{S_{-i}-S}S_{-i}$, если $S_{-i} - S > 0$ (т.е. $\kappa < 0$) или $n < \frac{S+1}{S_{-i}-S}S_{-i}$, если $S_{-i} - S < 0$ (т.е. $\kappa > 0$), где обозначено $\kappa = \frac{S+1}{S_{-i}-S}S_{-i}$; очевидно, что $n > \kappa \quad \forall n > 1$ при $\kappa < 0$. Поскольку $\frac{\partial \omega}{\partial S} > 0$, $\frac{\partial \tau}{\partial S} = 0$, то $\frac{\partial \chi}{\partial S} = -\frac{\tau}{(\omega+\tau)^2}\omega' < 0$, а с учетом (7в) получим $\frac{\partial \chi}{\partial S_{-i}} = \frac{\tau'(\omega+\tau) - \tau\tau'}{(\omega+\tau)^2} = \frac{\tau'\omega}{(\omega+\tau)^2} > 0$.

Доказательство утверждения 2. В случае $\beta > 1$ (или $\theta > 0$) показано, что $S \in (-1, 0]$ [19], и $\bar{B} = \frac{B}{bQ_{\max}Q_{\max}^{1-\beta}} = \frac{B}{aQ_{\max}^{1-\beta}}$; из условия (2а) вытекает, что $\bar{B} < 1$, так как из $a > \beta BQ^{\beta-1}$ следует $\frac{B}{aQ^{1-\beta}} < \frac{1}{\beta} < 1$.

Рассмотрим случай $t = 1$ [18], когда $a_0 = \frac{1-\lambda}{B} > 0$, $b_0 = \frac{1+S+\tau}{B} > 0$, т.е. $\lambda < 1$, $1 + S + \tau > 0$. Условие равновесия $a_0 - b_0 - \beta < 0$ имеет вид $-\frac{1}{B}(\lambda + S + \tau) - \beta < 0$, откуда следует $\lambda + S + \tau > -\beta B$. Поэтому получаем систему: $S > -(1 + \tau) = s_1$, $S > -\beta B - (\lambda + \tau) = s_2$. С учетом $S \in (-1, 0]$ и (7а) ограничение $S > s_1$ не играет роли, так как $s_1 < -1$. Поэтому будет следующее решение: если $s_2 \leq -1$, то $S \in (-1, 0]$, а если $s_2 > -1$, то $S \in (s_2, 0]$. Вариант $s_2 > -1$ имеет место, если $\lambda + \tau < 1$ и $Q_{\max} < \left(\frac{B}{a} \frac{\beta}{1-\lambda-\tau}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$.

В случае $t = 2$ [18], когда $a_0 < 0$, $b_0 > 0$, равновесие отсутствует, поскольку $\lambda > 1$ противоречит (7б). Случаи $t = 3, 4$ [18], когда $b_0 < 0$, т.е. $1 + S + \tau < 0$, невозможны при $S \in (-1, 0]$ и (7а).

Получим аналитическое решение в случае $t = 1$ для наиболее характерного варианта нелинейности $\beta = 2$ (или $\theta = 1$), используя формулу (10а) [18]: $y_{\beta=2} = \frac{1}{k_1 + k_2}$, где $k_1 = \frac{b_0}{a_0} = \frac{1+S+\tau}{1-\lambda}$, $k_2 = \frac{b_1 - a_1}{a_0} = \frac{\theta+1}{1-\lambda} \bar{B}$. Тогда $y_{\beta=2} = \frac{1-\lambda}{1+S+\tau+2\bar{B}}$, причем при $\theta = 1$: $\bar{B} = b^{-1}B$, $\omega = 1 + S + 2b^{-1}B$, поэтому $y_{\beta=2} = \frac{1-\lambda}{\omega+\tau}$. Если $\theta = 1$ для всех агентов, то $\alpha_{-i} = 1$. Аналогично лемме 1 рассмотрим средние значения $\tilde{S}_{-i}$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{B}$, тогда $\lambda = \frac{(n-1)}{\omega+n-1}$, и $1 - \lambda = \tau$, поэтому $y_{\beta=2} = \frac{\tau}{\omega+\tau} = \chi_{\beta=2}$.

Сравним $y_{\beta=1}$ и $y_{\beta=2}$, пусть $y_{\beta=1} > y_{\beta=2}$, т.е. $\frac{\tau}{1+S+\tau} \frac{a-B}{a} \div \frac{\tau}{1+S+2b^{-1}B+\tau} > 1$, откуда $1 + S + \tau < 2\frac{a}{b} \left(1 - \frac{B}{a}\right)$, или $S < 2\frac{a}{b} \left(1 - \frac{B}{a}\right) - 1 - \tau = \hat{S}$. Как и в утверждении 1, доказывается, что $\frac{\partial \chi}{\partial S} = -\frac{\tau}{(\omega+\tau)^2} \omega' S < 0$, $\frac{\partial \chi}{\partial S_{-i}} = \frac{\tau'_{S_{-i}} \omega}{(\omega+\tau)^2} > 0$. Но поскольку $\omega'_{\beta=1S} = \omega'_{\beta=2S} = 1$, $\omega_{\beta=2} > \omega_{\beta=1}$, $\tau_{\beta=2} > \tau_{\beta=1}$ (так как $\frac{\partial \tau}{\partial \omega_{-i}} > 0$), то $\left| \frac{\partial \chi_{\beta=2}}{\partial S} \right| < \left| \frac{\partial \chi_{\beta=1}}{\partial S} \right|$, аналогично, $\frac{\partial \chi_{\beta=2}}{\partial S_{-i}} < \frac{\partial \chi_{\beta=1}}{\partial S_{-i}}$, так как $\tau'_{\beta=2S_{-i}} > \tau'_{\beta=1S_{-i}}$.

Доказательство утверждения 3. В случае $\beta < 1$ (или $\theta < 0$) показано $S \in (-\infty, \infty)$ [19], но из условия (6в) $\omega = 1 + S + b^{-1}B\theta(\theta + 1)Q^{\theta-1} = \delta - 1 > -1$, т.е. $S > b^{-1}B|\theta|(\theta + 1)Q^{\theta-1} - 2 = \beta(1 - \beta)\bar{B}y^{\beta-2} - 2 = s_0$, и $\bar{B} = \frac{B}{bQ_{\max}Q_{\max}^{1-\beta}} = \frac{B}{aQ_{\max}^{1-\beta}} < 1$ из условия (2а).

Рассмотрим случай $t = 5$ [18], когда $a_0 = \frac{1-\lambda}{B} > 0$, $b_0 = \frac{1+S+\tau}{B} > 0$, т.е. $\lambda < 1$, $1 + S + \tau > 0$.

Случай $t = 5.1$: введем множество параметров (S, τ, λ) , соответствующих этому случаю, в виде $\Omega_{\beta < 1}^1 = \{(S, \tau, \lambda) : a_0 > 0 \wedge b_0 > 0 \wedge b_0 < |b_1|\}$; условие $b_0 < |b_1|$ равносильно $\frac{1+S+\tau}{B} < |\theta|(\theta + 1) = \beta(1 - \beta)$, т.е. $1 + S + \tau < \beta(1 - \beta)\bar{B}$; условие равновесия $a_0 - b_0 - \beta > 0$ имеет вид $-\frac{1}{B}(\lambda + S + \tau) - \beta > 0$, откуда следует $\lambda + S + \tau < -\beta B$. Поэтому получаем систему: $S > \beta(1 - \beta)\bar{B}y^{\beta-2} - 2 = s_0$, $S > -(1 + \tau) = s_1$, $S < -\beta B - (\lambda + \tau) = s_2$, $S < \beta(1 - \beta)\bar{B} - (1 + \tau) = s_3$.

В этой системе $s_2 < s_3$, т.е. $1 - \lambda < \beta(2 - \beta)\bar{B}$ при условии $a_0 < |a_1|$, и $s_3 < s_2$ при $a_0 > |a_1|$; неравенство $s_1 < s_0$, т.е. $\frac{1-\tau}{\beta(1-\beta)\bar{B}} < y^{\beta-2}$ может выполняться при $y \rightarrow 0$, так как $y^{\beta-2}$ имеет порядок $Q_{\max}^{\beta-2}$, а $\bar{B}^{-1}$ имеет порядок $Q_{\max}^{\beta-1}$. Поэто-

му решением системы будет диапазон $S \in \left\{ \begin{array}{l} (\max \{s_0, s_1\}, s_3) \text{ при } a_0 > |a_1|, \\ (\max \{s_0, s_1\}, s_2) \text{ при } a_0 < |a_1|. \end{array} \right.$
Этот диапазон не пуст в частных случаях, например, $s_1 < s_3$ (так как $\beta(1-\beta)\overline{B} > 0$); $s_1 < s_2$, если $\beta\overline{B} < 1-\lambda$.

В случае $t = 5.1$ аналитическое решение для варианта нелинейности $\beta = 0,5$ (или $\theta = -0,5$) следует из формулы (10) [18]:

$$y_{\beta=0,5} = \left(\sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}} \right)^2,$$

где $k_1 = \frac{1+S+\tau}{1-\lambda} = \frac{\gamma}{\zeta}$, $k_2 = \frac{0,5\overline{B}}{1-\lambda} = \frac{0,5\overline{B}}{\zeta}$, $\gamma = 1 + S + \tau$, $\zeta = 1 - \lambda$, $q = \frac{k_2}{2k_1} = 0,25\frac{\overline{B}}{\gamma}$, $D = \frac{27k_2^2k_1-4}{108k_1^3} = \frac{27 \cdot 0,25\overline{B}^2\gamma-4\zeta^3}{108\gamma^3}$. Поскольку $\lambda < 1$, то $\zeta^3 \ll 1$, поэтому $D \approx \frac{0,25\overline{B}^2}{4\gamma^2}$, значит, $-q + \sqrt{D} = 0$, $-q - \sqrt{D} = -\frac{\overline{B}}{2\gamma}$, следовательно, $y_{\beta=0,5} = \left(\frac{0,5\overline{B}}{1+S+\tau} \right)^{\frac{2}{3}}$.

Сравним $y_{\beta=1}$ и $y_{\beta=0,5}$, учитывая, что из формулы (8а) следует $y_{\beta=1} = \frac{\tau(1-\vartheta)}{1+S+\tau}$, где $\vartheta = \overline{B}_{\beta=1} = \frac{B}{a} < 1$ при $a > B$ (но иное невозможно, так как $y_{\beta=1} < 0$ при $a < B$), а в формуле (9б) $\overline{B}_{\beta=0,5} = \frac{B}{aQ_{\max}^{0,5}}$. Пусть $y_{\beta=0,5} > y_{\beta=1}$, т.е. $\left(\frac{0,5\overline{B}_{\beta=0,5}}{1+S+\tau} \right)^{\frac{2}{3}} \div \left(\frac{\tau(1-\vartheta)}{1+S+\tau} \right) > 1$, откуда следует $\frac{\tau^3(1-\vartheta)^3}{(0,5\overline{B}_{\beta=0,5})^2} > 1 + S + \tau$; поскольку $0 < 1 + S + \tau < \beta(1-\beta)\overline{B} < 1$ по свойствам случая $t = 5.1$, то заменим это неравенство на более жесткое $\frac{\tau^3(1-\vartheta)^3}{(0,5\vartheta)^2} Q_{\max} > 1$, откуда $Q_{\max} > \frac{(0,5\vartheta)^2}{\tau^3(1-\vartheta)^3} = \overline{Q}_{\max}$.

Оценим влияние S и S_{-i} : $\frac{\partial y_{\beta=0,5}}{\partial S} = -\frac{2}{3} (0,5\overline{B}_{\beta=0,5})^{\frac{2}{3}} (1+S+\tau)^{-\frac{1}{3}} < 0$, $\frac{\partial y_{\beta=0,5}}{\partial S_{-i}} = -\frac{2}{3} (0,5\overline{B}_{\beta=0,5})^{\frac{2}{3}} (1+S+\tau)^{-\frac{1}{3}} \tau'_{S_{-i}} < 0$, так как $1+S+\tau > 0$ и $\tau'_{S_{-i}} > 0$ согласно (7в). Неравенство $\left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0,5}}{\partial S} \right|$, учитывая, что $\frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S} = -\frac{\tau(1-\vartheta)}{(1+S+\tau)^2}$, приводит к $\left(\frac{3}{2} \right)^3 \frac{\tau^3(1-\vartheta)^3}{(0,5\overline{B}_{\beta=0,5})^2} > (1+S+\tau)^5$, которое также выполняется при $Q_{\max} > \frac{(0,5\vartheta)^2}{\tau^3(1-\vartheta)^3} = \overline{Q}_{\max}$. Неравенство $\left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S_{-i}} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0,5}}{\partial S_{-i}} \right|$ верно по аналогии.

Случай $t = 5.2$: условие $b_0 > |b_1|$ равносильно $1 + S + \tau > \beta(1-\beta)\overline{B}$, условие $a_0 < |a_1| \Rightarrow \frac{1-\lambda}{\overline{B}} < 1 - \theta^2 \Rightarrow \lambda > 1 - \beta(2-\beta)\overline{B}$. Если суммировать эти два неравенства, то $\lambda + S + \tau > -\beta\overline{B}$, поэтому $a_0 - b_0 - \beta < 0$, т.е. производная функции (6а) не меняет знака при $y \in (0, 1)$, значит, равновесие не существует.

Случай $t = 5.3$: обозначим $\Omega_{\beta < 1}^2 = \left\{ (S, \tau, \lambda) : a_0 > 0 \wedge b_0 > 0 \wedge b_0 > |b_1| \wedge a_0 > |a_1| \right\}$; условие $b_0 > |b_1|$ равносильно $1 + S + \tau > \beta(1-\beta)\overline{B}$, условие $a_0 > |a_1| \Rightarrow 1 - \lambda > \beta(2-\beta)\overline{B}$. Условие равновесия $a_0 - b_0 - \beta < 0$ имеет

вид $-\frac{1}{B}(\lambda + S + \tau) - \beta < 0$, откуда следует $\lambda + S + \tau > -\beta\bar{B}$. Дополнительное условие $-\frac{a_0}{a_1} > \left|\frac{b_0}{b_1}\right|^{\frac{\theta}{\theta-1}}$ равносильно $1 + S + \tau < \beta(1 - \beta)\bar{B}\psi$, где $\psi = \left(\frac{a_0}{|a_1|}\right)^{\frac{\beta-2}{\beta-1}} = \left(\frac{1-\lambda}{\bar{B}\beta(2-\beta)}\right)^{\frac{\beta-2}{\beta-1}} > 1$ (в силу $\lambda < 1 - \beta(2 - \beta)\bar{B}$). Поэтому получаем систему: $S > \beta(1 - \beta)\bar{B}y^{\beta-2} - 2 = s_0$, $S > -(1 + \tau) = s_1$, $S > -\beta\bar{B} - (\lambda + \tau) = s_2$, $S > \beta(1 - \beta)\bar{B} - (1 + \tau) = s_3$, $S < \beta(1 - \beta)\psi - (1 + \tau) = s_4$.

В этой системе $s_3 < s_2$ (из условия $a_0 > |a_1|$), $s_1 < s_3$ (так как $\beta(1 - \beta)\bar{B} > 0$), т.е. $s_1 < s_3 < s_2$; а $s_0 < s_2$ в случае $\beta\bar{B}((1 - \beta)y^{\beta-2} + 1) < 2 - (\lambda + \tau)$. Поэтому решением системы будет диапазон $S \in (\max\{s_0, s_2\}, s_4)$, который может быть не пустым в частных случаях: например, $s_0 < s_4$, если $\beta(1 - \beta)\bar{B}(\psi - y^{\beta-2}) > \tau - 1$, т.е. когда $\psi > y^{\beta-2}$ (так как $\tau < 1$) или $y < \left(\frac{a_0}{|a_1|}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$, что выполняется для меньшего из двух равновесий [18]; кроме того, $s_2 < s_4$, если $\beta\bar{B}((1 - \beta)\psi + 1) > 1 - \lambda$; отметим, что более слабое неравенство $s_3 < s_4$ верно, так как соответствует $\psi > 1$.

В случае $t = 5.3$ найдем решение для варианта $\beta = 0,5$ (или $\theta = -0,5$), из формулы (10) [18] для $\beta = 0$, поскольку она отражает два равновесия, $y_{\beta=0,5} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4k_1k_2}}{2k_1}$, подставив параметры, соответствующие $t = 5.1$: $1 - 4k_1k_2 = 1 - 2\frac{\bar{B}\gamma}{\zeta^2} = \frac{\zeta^2 - 2\bar{B}\gamma}{\zeta^2}$. Тогда получим: $y_{\beta=0,5}^{\pm} = \frac{\zeta \pm \sqrt{d}}{2\gamma}$, $d = \zeta^2 - 2\bar{B}\gamma$, $\gamma = 1 + S + \tau$.

Сравним $y_{\beta=1}$ и $y_{\beta=0,5}^{\pm}$, пусть $y_{\beta=0,5}^+ > y_{\beta=1}$, т.е. $\frac{\zeta + \sqrt{d}}{2\gamma} \div \frac{\tau(1 - \vartheta)}{\gamma} > 1$, что приводит к неравенству $2\tau\zeta(1 - \vartheta) - 2\tau^2(1 - \vartheta)^2 - \bar{B}\gamma > 0$, в котором последним членом можно пренебречь, заменив неравенство на более жесткое, в результате получим $\zeta - \tau(1 - \vartheta) > 0$, откуда следует $\lambda < 1 - \tau(1 - B/a)$. Аналогично, $y_{\beta=0,5}^- < y_{\beta=1}$ при том же условии $\lambda < 1 - \tau(1 - B/a) = \bar{\lambda}$.

Оценим влияние S на равновесие: $\frac{\partial y_{\beta=0,5}^+}{\partial S} = \frac{0,5d^{-0,5}d'_S 2\gamma - 2(\zeta + \sqrt{d})}{4\gamma^2} = \frac{-2\bar{B}\gamma - 2(\zeta\sqrt{d} + d)}{4\sqrt{d}\gamma^2} = -\frac{\zeta^2 - d + 2(\zeta\sqrt{d} + d)}{4\sqrt{d}\gamma^2} = -\frac{(\zeta + \sqrt{d})^2}{4\sqrt{d}\gamma^2} < 0$, по аналогии, $\frac{\partial y_{\beta=0,5}^-}{\partial S} = \frac{(\zeta - \sqrt{d})^2}{4\sqrt{d}\gamma^2} > 0$.

Оценим влияние S_{-i} на равновесие, учитывая, что $d'_{S_{-i}} = 2\zeta\lambda'_{S_{-i}} - 2\bar{B}\tau'_{S_{-i}}$, $\zeta'_{S_{-i}} = -\lambda'_{S_{-i}}$, $\lambda'_{S_{-i}} = -\alpha\tau'_{S_{-i}}$: $\frac{\partial y_{\beta=0,5}^+}{\partial S_{-i}} = \frac{(\zeta'_{S_{-i}} + 0,5d^{-0,5}d'_{S_{-i}})2\gamma - 2\tau'_{S_{-i}}(\zeta + \sqrt{d})}{4\gamma^2} = \tau'_{S_{-i}} \frac{(\alpha\sqrt{d} + \alpha\zeta - \bar{B})\gamma - \zeta\sqrt{d} - d}{2\gamma^2\sqrt{d}} = \tau'_{S_{-i}} \frac{(\sqrt{d} + \zeta)(\gamma\alpha - \zeta) + \bar{B}\gamma}{2\gamma^2\sqrt{d}}$; аналогично, $\frac{\partial y_{\beta=0,5}^-}{\partial S_{-i}} = \tau'_{S_{-i}} \frac{(\sqrt{d} - \zeta)(\gamma\alpha - \zeta) - \bar{B}\gamma}{2\gamma^2\sqrt{d}}$. Поскольку $\tau'_{S_{-i}} > 0$ по (7в), то $\frac{\partial y_{\beta=0,5}^+}{\partial S_{-i}} > 0$ будет, если верно неравенство $(\sqrt{d} + \zeta)(\gamma\alpha - \zeta) + \bar{B}\gamma > 0$, которое заменим (учитывая, что $\bar{B}\gamma$ мало) на более жесткое $(\sqrt{d} + \zeta)(\gamma\alpha - \zeta) > 0$, верное при $\gamma\alpha - \zeta > 0$, откуда следует $\lambda > 1 - \gamma\alpha = \hat{\lambda}$. Аналогично, $\frac{\partial y_{\beta=0,5}^-}{\partial S_{-i}} < 0$ будет

при $(\sqrt{d} - \zeta)(\gamma\alpha - \zeta) > 0$, а поскольку $\zeta > \sqrt{d}$, то также при $\gamma\alpha - \zeta > 0$ или $\lambda > \widehat{\lambda}$.

Сравним $\left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S} \right|$ и $\left| \frac{\partial y_{\beta=0.5}^{+, -}}{\partial S} \right|$. Пусть $\left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0.5}^{+, -}}{\partial S} \right|$, т.е. $\frac{\tau(1-\vartheta)}{\gamma^2} \div \frac{(\zeta + \sqrt{d})^2}{4\sqrt{d}\gamma^2} > 1$; отсюда следует $2\tau(1-\vartheta) > \frac{\zeta^2 - \overline{B}\gamma}{\sqrt{d}} + \zeta$, поскольку $\frac{(\zeta + \sqrt{d})^2}{\sqrt{d}} = 2\left(\frac{\zeta^2 - \overline{B}\gamma}{\sqrt{d}} + \zeta\right)$; заменим это неравенство на более жесткое

$$(П.1) \quad 2\tau(1-\vartheta) > \frac{\zeta^2}{\sqrt{d}} + \zeta = \zeta \left(\frac{\zeta}{\sqrt{d}} + 1 \right)$$

(так как $\overline{B}\gamma \ll \frac{\zeta^2}{2}$ из условия $d > 0$); численные эксперименты показывают, что $\frac{\zeta}{\sqrt{d}} \approx 1$, поэтому сделаем замену $\frac{\zeta}{\sqrt{d}} \leq 1 + \Delta_1$, откуда $(1 + \Delta_1)^2 \geq \frac{1}{1 - \frac{2\overline{B}\gamma}{\zeta^2}}$;

правая часть этого неравенства наибольшая при наибольшем $\frac{\gamma}{\zeta^2}$, или когда $\gamma = 1 + \tau$ (т.е. $S = 0$) и $\lambda = \tau\alpha(n-1)$ (т.е. при $\omega = 1$, когда $S_{-i} = 0$), поэтому $\frac{\gamma}{\zeta^2} < \frac{1+\tau}{(1-\tau\alpha(n-1))^2}$; тогда $(1 + \Delta_1)^2 \geq \frac{1}{1 - \frac{2\vartheta}{Q_{\max}^{0.5} \frac{1+\tau}{(1-\tau\alpha(n-1))^2}}}$, откуда $\Delta_1 \geq \frac{Q_{\max}^{0.25}(1-\tau\alpha(n-1))}{\varphi^{0.5}} - 1$, где $\varphi = Q_{\max}^{0.5}(1-\tau\alpha(n-1))^2 - 2\vartheta(1+\tau)$; следовательно, из неравенства (П.1) вытекает $2\tau(1-\vartheta) > \zeta(\Delta_1 + 2)$, откуда $\lambda > 1 - \frac{2\tau(1-\vartheta)}{\Delta_1 + 2} = \widehat{\lambda}^+$. При аналогичных рассуждениях условие $\left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0.5}^{-}}{\partial S} \right|$ приводит к виду $2\tau(1-\vartheta) > \zeta\Delta_1$, или $\lambda > 1 - \frac{2\tau(1-\vartheta)}{\Delta_1} = \widehat{\lambda}^-$.

Поскольку $\frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S_{-i}} = \tau'_{S_{-i}} \frac{(1-\vartheta)(1+S)}{\gamma^2}$, то определим условие, при котором $\left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S_{-i}} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0.5}^{+, -}}{\partial S_{-i}} \right|$ (отметим, что поскольку $\left| \frac{\partial y_{\beta=0.5}^{+}}{\partial S_{-i}} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0.5}^{-}}{\partial S_{-i}} \right|$, то $\left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S_{-i}} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0.5}^{-}}{\partial S_{-i}} \right|$ будет также выполнено при таком условии), т.е. $\frac{2(1-\vartheta)(1+S)\sqrt{d}}{(\sqrt{d}+\zeta)(\gamma\alpha-\zeta)+\overline{B}\gamma} > 1$; запишем это в виде

$$(П.2) \quad 2(1-\vartheta)(1+S) > \left(1 + \frac{\zeta}{\sqrt{d}}\right)(\gamma\alpha - \zeta) + \frac{\overline{B}\gamma}{\sqrt{d}};$$

как было показано при анализе (П.1), $\frac{\zeta}{\sqrt{d}} \leq 1 + \Delta_1$; численные эксперименты показывают, что $\frac{\overline{B}\gamma}{\sqrt{d}} \approx 0$, поэтому $\frac{\overline{B}\gamma}{\sqrt{d}} \leq \Delta_2$, откуда $\Delta_2^2 \geq \frac{1}{\frac{\zeta^2}{\overline{B}\gamma} - 2}$ и наибольшее

значение правая часть неравенства принимает при наименьшем $\frac{\zeta^2}{\overline{B}\gamma}$ (как и для (П.1)), поэтому сделаем замену $\Delta_2^2 \geq \frac{1}{\frac{Q_{\max}^{0.5}(1-\tau\alpha(n-1))^2}{\vartheta} - 2}$, откуда $\Delta_2 \geq \frac{\vartheta^{0.5}(1+\tau)^{0.5}}{\varphi^{0.5}}$; значит, (П.2) можно записать в виде $2(1-\vartheta)(1+S) > (2 + \Delta_1)(\gamma\alpha - \zeta) + \Delta_2$, откуда следует $\lambda > 1 - \gamma\alpha + \frac{2(1-\vartheta)(1+S) - \Delta_2}{2 + \Delta_1} = \widehat{\lambda} + \widehat{\lambda}_{-i}$, где $\widehat{\lambda}_{-i} = \frac{2(1-\vartheta)(1+S) - \Delta_2}{2 + \Delta_1}$.

В случае $t = 6$ [18] обозначим $\Omega_{\beta < 1}^3 = \{(S, \tau, \lambda) : a_0 < 0 \wedge b_0 < 0\}$, $a_0 = \frac{1-\lambda}{B} < 0$, $b_0 = \frac{1+S+\tau}{B} < 0$, т.е. $\lambda > 1$, $1 + S + \tau < 0$. Условие равновесия $a_0 - b_0 - \beta > 0$ имеет вид $-\frac{1}{B}(\lambda + S + \tau) - \beta > 0$, откуда следует $\lambda + S + \tau < -\beta\overline{B}$. Поэтому получаем систему: $S > \beta(1 - \beta)\overline{B}y^{\beta-2} - 2 = s_0$, $S < -(1 + \tau) = s_1$, $S < -\beta\overline{B} - (\lambda + \tau) = s_2$. Поскольку $s_2 < s_1$ (в силу $\lambda - 1 > -\beta\overline{B}$), то решение будет $S \in (s_0, s_2)$; этот диапазон не пуст при условии $s_0 < s_2$, т.е. $\beta\overline{B}((1 - \beta)y^{\beta-2} + 1) < 2 - (\lambda + \tau)$. Решение вычисляется как при $t = 5.1$, но хотя $\lambda > 1$, тем не менее $\zeta^3 \ll 1$, так как при условии (76) $\lambda < 2$.

В случае $t = 7$ [18] обозначим $\Omega_{\beta < 1}^4 = \{(S, \tau, \lambda) : a_0 > 0 \wedge b_0 < 0\}$, $a_0 = \frac{1-\lambda}{B} > 0$, $b_0 = \frac{1+S+\tau}{B} < 0$, т.е. $\lambda < 1$, $1 + S + \tau < 0$. Условие равновесия $-\frac{1}{B}(\lambda + S + \tau) - \beta > 0$ дает $\lambda + S + \tau < -\beta\overline{B}$. Поэтому получаем систему: $S > \beta(1 - \beta)\overline{B}y^{\beta-2} - 2 = s_0$, $S < -(1 + \tau) = s_1$, $S < -\beta\overline{B} - (\lambda + \tau) = s_2$. В этом случае $s_2 < s_1$ не всегда, а только при условии $1 - \lambda > \beta\overline{B}$, поэтому решением является область $S \in (s_0, \min\{s_1, s_2\})$, которая не пуста при условиях $s_0 < s_1$, т.е. $\frac{1-\tau}{\beta(1-\beta)\overline{B}} > y^{\beta-2}$, и $s_0 < s_2$, т.е. $\beta\overline{B}((1 - \beta)y^{\beta-2} + 1) < 2 - (\lambda + \tau)$. Отметим, что в этом случае, как и при $t = 6$, сравнение $y_{\beta=1}$ и $y_{\beta=0.5}$, а также их производных по S и S_{-i} , невозможно, так как $y_{\beta=1} > 0$ не существует при $1 + S + \tau < 0$.

В случае $t = 8$ [18] $a_0 < 0$, $b_0 > 0$, и условие $a_0 - b_0 - \beta > 0$ не может быть выполнено, поэтому равновесие отсутствует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nash J. Non-cooperative Games // Ann. Math. 1951. No. 54. P. 286–295.
2. Cournot A.A. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838).
3. Stackelberg H. Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Bazin, Urch & Hill: Springer, 2011. (Original 1934).
4. Sarkar S., Tarafdar S. Investment Choice with Managerial Incentive Schemes. Int. Game Theory Rev. 2021. No. 23(2). P. 2050016.
5. Cao B.-B., Gong Z.-J., You T.-H. Stackelberg Pricing Policy in Dyadic Capital-Constrained Supply Chain Considering bank's Deposit and Loan Based on Delay Payment Scheme // J. Industr. Manag. Optimiz. 2021. No. 17(5). P. 2855–2887.
6. Li M., Zhang J., Xu Y., Wang W. Effect of disruption risk on a supply chain with price-dependent demand // J. Industr. Manag. Optimiz. 2020. No. 16(6). P. 3083–3103.
7. Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Reflexion and Control: Mathematical Models. London: CRC Press, 2014.
8. Novikov D., Korepanov V., Chkhartishvili A. Reflexion in mathematical models of decision-making // Int. J. Parall., Emergent Distribut. Syst. 2018. No. 33(3). P. 319–335.
9. Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Mathematical Models of Informational and Strategic Reflexion: a Survey // Advan. Syst. Sci. Appl. 2014. No. 3. P. 254–277.

10. *Chkhartishvili A.G., Korepanov V.O.* Adding Informational Beliefs to the Players Strategic Thinking Model // IFAC-PapersOnLine. 2016. No. 49(32). P. 19–23.
11. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Коллективное поведение в модели Штакельберга в условиях неполной информации // *АиТ*. 2017. № 9. С. 91–105.
Algazin G.I., Algazina D.G. Collective behavior in the Stackelberg model under incomplete information // *Autom. Remote Control*. 2017. No. 78(9). P. 1619–1630.
12. *Filatov A.Yu., Makolskaya Ya.S.* The equilibrium and socially effective number of firms in oligopoly: theory and empirics // VIII Moscow Int. Conf. Oper. Res. (ORM2016). 2016. P. 207–208.
13. *Korepanov V.* Strategic Thinking Models for Team Building // Proc. 2019 1st Int. Conf. Control Syst. Mathem. Modell., Autom. Energy Eff., SUMMA 2019. 2019. No. 8947593. P. 185–187.
14. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // *АиТ*. 2020. № 2. С. 115–133.
Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // *Autom. Remote Control*. 2020. No. 81(2). P. 287–301.
15. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером // *АиТ*. 2020. № 7. С. 113–128.
Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexion Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader // *Autom. Remote Control*. 2020. No. 81(7). P. 1258–1270.
16. *Уолтерс А.А.* Производственные функции и функции затрат: эконометрический обзор // Теория фирмы. Т. 2. СПб: Экономич. школа. 2000. С. 160–204.
Walters A.A. Production and cost functions: and econometric survey // *Econometr.* 1963. No. 31(1). P. 1–66.
17. *Гераськин М.И.* Свойства предположительных вариаций в нелинейной модели олигополии Штакельберга // *АиТ*. 2020. № 6. С. 105–130.
Geraskin M. The Properties of Conjectural Variations in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model // *Autom. Remote Control*. 2020. No. 81(6). P. 1051–1072.
18. *Гераськин М.И.* Анализ равновесий в нелинейной модели олигополии // *АиТ*. 2022. № 8. С. 140–158.
19. *Гераськин М.И.* Приближенное вычисление равновесий в нелинейной модели олигополии Штакельберга на основе линеаризации // *АиТ*. 2020. № 9. С. 120–143.
Geraskin M. Approximate Calculation of Equilibria in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model: A Linearization Based Approach // *Autom. Remote Control*. 2020. No. 81(9). P. 1659–1678.
20. *Intriligator M.D.* Mathematical Optimization and Economic Theory. New Jersey: Prentice-Hall. Englewood Cliffs. 1971.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 28.01.2022

После доработки 15.04.2022

Принята к публикации 10.06.2022