

© 2022 г. Б.Т. ПОЛЯК, д-р техн. наук (boris@ipu.ru),
М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
Национальный исследовательский университет
“Московский физико-технический институт”, Москва)

НОВЫЕ КРИТЕРИИ НАСТРОЙКИ ПИД-РЕГУЛЯТОРОВ¹

Предлагается новый подход к задаче настройки и оптимизации параметров ПИД-регулятора, основанный на сведении проблемы к задаче оптимизации. При этом качество регулятора оценивается по квадратичному критерию от выхода системы: ПИД-регулятор настраивается против неопределенности в начальных условиях так, чтобы выход системы был равномерно малым; при этом дополнительно гарантируется заданная степень устойчивости замкнутой системы. Выписан градиентный метод для отыскания параметров ПИД-регулятора.

Как показывают многочисленные примеры, предлагаемая рекуррентная процедура является весьма эффективной и приводящей к вполне удовлетворительным по инженерным критериям качества ПИД-регуляторам. Статья продолжает серию работ авторов, посвященную синтезу обратной связи в задачах управления с позиций оптимизации.

Ключевые слова: линейная система, ПИД-регулятор, оптимизация, уравнение Ляпунова, градиентный метод, сходимость.

DOI: 10.31857/S0005231022110022, EDN: KDYNHU

1. Введение

Теория ПИД-регуляторов имеет 80-летнюю историю, восходя к работе [1] Циглера и Николса 1942 г. С тех пор появилось множество работ, посвященных теории и практике их настройки, были предложены различные принципы их настройки (см., например, [2]). Здесь можно упомянуть монографии [3–6] и многие другие. Однако до настоящего времени есть не так много работ, где формулируются явные критерии оптимальности ПИД-регуляторов, например такие, как H_∞ -оптимальность [7, 8].

В целом регуляторы низкого порядка настраивают по самым разным критериям, используя при этом, как правило, подбор, прямой поиск, перебор по сетке и т.п., см., например, [9, 10]. В настоящей работе предлагается новый подход к настройке ПИД-регуляторов, а именно предлагается как новая

¹ Исследование выполнено при частичной поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-30005).

постановка задачи, решение которой определяет ПИД-регулятор, так и алгоритм ее решения, явным образом выписывая градиент для квадратичного функционала и применяя градиентный метод.

В отличие от упомянутых выше критериев, будем рассматривать в некотором смысле близкую к LQR постановку. А именно, неопределенность содержится не во входах системы, а в начальных условиях, при этом критерий качества близок по своей структуре к LQR-задаче: качество оценивается по квадратичному критерию от выхода системы. Таким образом, искомый ПИД-регулятор настраивается против неопределенности в начальных условиях так, чтобы выход системы был равномерно малым (в квадратичном смысле).

В связи с этим напомним о новых подходах для классической проблемы линейно-квадратичного регулирования. Ее можно рассматривать как задачу оптимизации, где переменной является матрица обратной связи, а минимизируется интегральный квадратичный показатель качества переходного процесса. Градиент такой функции (для управления по состоянию) выписан еще в основополагающей работе Калмана [11], а для обратной связи по выходу — в статье Левина и Атанса [12]. С тех пор неоднократно применялись итеративные методы оптимизации градиентного типа (см., например, обзор [13]), однако обоснование подобных методов появилось лишь недавно в [14–18].

Помимо малости выхода, естественно стремиться к тому, чтобы синтезированный ПИД-регулятор удовлетворял и инженерным критериям качества. Так, если замкнутая система окажется близкой к границе устойчивости, это приведет к ее неудовлетворительной реакции на внешнее возмущение. Поэтому вполне естественно требовать, чтобы ПИД-регулятор дополнительно гарантировал замкнутой системе некоторую (заданную) степень устойчивости.

Настоящая статья продолжает серию работ [18–20], посвященную синтезу обратной связи в задачах управления с позиций оптимизации. Предложенный в ней подход позволяет, с одной стороны, конструктивно решать задачи настройки и оптимизации параметров регулятора, а с другой, он предоставляет “хорошие” по обычным инженерным показателям регуляторы. Как показывают многочисленные примеры, предлагаемая рекуррентная процедура является весьма эффективной и приводящей к вполне удовлетворительным ПИД-регуляторам. Вычислительным аспектам предлагаемого подхода посвящена публикация [22].

Статья организована следующим образом. Раздел 2 содержит постановку задачи; в разделе 3 обсуждается подход к ее решению; в разделе 4 представлен алгоритм решения оптимизационной задачи, а раздел 5 посвящен разнообразным примерам. Раздел 6 содержит обсуждение и возможные обобщения полученных результатов.

Всюду далее $|\cdot|$ — евклидова норма вектора, T — символ транспонирования, tr — след матрицы, I — единичная матрица соответствующей размерности, а $\lambda_i(A)$ — собственные значения матрицы A .

2. Постановка задачи

Рассмотрим SISO-систему управления

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, & x(0) &= x_0, \\ y &= c^T x, \end{aligned}$$

с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, выходом $y(t) \in \mathbb{R}$ и управлением $u(t) \in \mathbb{R}$ в виде ПИД-регулятора

$$(2) \quad u(t) = -k_P y(t) - k_I \int_0^t y(\tau) d\tau - k_D \dot{y}(t)$$

с некоторыми числовыми параметрами k_P , k_I и k_D .

Целью является определение параметров $K = (k_P \ k_I \ k_D)$ стабилизирующей обратной связи (2), которая

- а) доставляет замкнутой системе степень устойчивости $\sigma > 0$ и
- б) минимизирует квадратичный функционал

$$(3) \quad J(K) = \mathbb{E}_{x(0)} \int_0^\infty y^2(t) dt + \rho |K|^2, \quad \rho > 0.$$

Вторая компонента в (3) представляет собой штраф за величину управления (при этом коэффициент $\rho > 0$ регулирует его важность). Ее наличие позволяет избежать появления больших значений коэффициентов ПИД-регулятора.

Далее будем предполагать, что начальные условия $x(0)$ распределены с нулевым средним и ковариационной матрицей Σ .

3. Сведение к параметрической LQR-задаче

Введем в рассмотрение вспомогательную скалярную переменную z следующим образом:

$$\dot{z} = y, \quad z(0) = 0.$$

Тогда, вводя расширенный вектор состояния

$$g = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

системе (1) можно придать эквивалентный вид

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{g} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^T & 0 \end{pmatrix} g + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} u, & g(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ y &= (c^T \ 0) g. \end{aligned}$$

При этом согласно (1), (2) имеем:

$$\begin{aligned} u &= -k_P y(t) - k_I \int_0^t y(\tau) d\tau - k_D \dot{y}(t) = \\ &= -k_P c^T x - k_I z - k_D c^T \dot{x} = -k_P c^T x - k_I z - k_D c^T (Ax + bu) = \\ &= -k_P (c^T \ 0) g - k_I (0 \ 1) g - k_D (c^T A \ 0) g - k_D c^T b u, \end{aligned}$$

откуда

$$(1 + k_D c^T b) u = -k_P (c^T \ 0) g - k_I (0 \ 1) g - k_D (c^T A \ 0) g$$

или

$$(5) \quad u = -\frac{k_P}{1 + k_D c^T b} (c^T \ 0) g - \frac{k_I}{1 + k_D c^T b} (0 \ 1) g - \frac{k_D}{1 + k_D c^T b} (c^T A \ 0) g.$$

Если ввести новые переменные

$$k_1 = \frac{k_P}{1 + k_D c^T b}, \quad k_2 = \frac{k_I}{1 + k_D c^T b}, \quad k_3 = \frac{k_D}{1 + k_D c^T b},$$

то (5) примет вид

$$(6) \quad u = -(k_1 c^T + k_3 c^T A \ k_2) g.$$

Замыкая систему (4) обратной связью (6), приходим к замкнутой системе

$$(7) \quad \dot{g} = \begin{pmatrix} A - k_1 b c^T - k_3 b c^T A & -k_2 b \\ c^T & 0 \end{pmatrix} g, \quad g(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которой можно придать вид

$$(8) \quad \dot{g} = (A_0 + k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3) g, \quad g(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^T & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -b c^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -b c^T A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом исходные параметры ПИД-регулятора восстанавливаются единственным образом:

$$k_P = \frac{k_1}{1 - k_3 c^T b}, \quad k_I = \frac{k_2}{1 - k_3 c^T b}, \quad k_D = \frac{k_3}{1 - k_3 c^T b}.$$

Замечание 1. Обратим внимание, что если векторы b и c ортогональны, то

$$k_1 = k_P, \quad k_2 = k_I, \quad k_3 = k_D.$$

Как показывают многочисленные примеры, это вполне типичная ситуация, так что — для упрощения записи — все дальнейшие выкладки относятся именно к этому случаю.

Для удобства введем обозначение:

$$\{A, K\} = k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3.$$

Для того, чтобы гарантировать желаемую степень устойчивости $\sigma > 0$ замкнутой системы, введем в ее матрицу компоненту σI :

$$(9) \quad \dot{g} = (A_0 + \{A, K\} + \sigma I)g.$$

В самом деле, для стабилизирующего систему (9) регулятора K матрица $A_0 + \{A, K\} + \sigma I$ является гурвицевой. Отсюда непосредственно вытекает, что

$$\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A_0 + \{A, K\} + \sigma I) = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A_0 + \{A, K\}) + \sigma < 0,$$

т.е. степень устойчивости исходной системы не меньше σ :

$$\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A_0 + \{A, K\}) < -\sigma.$$

Продолжим и перейдем к преобразованию функционала (3). Поскольку

$$x = \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} g,$$

то начальные условия $g(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ будут распределены с нулевым средним и ковариационной матрицей

$$\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По лемме Беллмана для системы (7) имеем:

$$\begin{aligned} J(K) &= \mathbb{E}_{x(0)} \int_0^{\infty} y^2(t) dt + \rho |K|^2 = \\ &= \mathbb{E}_{g(0)} \int_0^{\infty} g^T(t) \begin{pmatrix} cc^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} g(t) dt + \rho |K|^2 = \\ &= \mathbb{E}_{g(0)} g^T(0) Q g(0) + \rho |K|^2 = \operatorname{tr} Q \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \rho |K|^2. \end{aligned}$$

Здесь $Q \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ — решение уравнения Ляпунова

$$(10) \quad A_K^T Q + Q A_K = - \begin{pmatrix} cc^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$A_K = A_0 + \{A, K\} + \sigma I.$$

Сделаем следующее

Предположение. Пусть известен регулятор $K_0 = (k_1^0 \ k_2^0 \ k_3^0)$, стабилизирующий систему с заданным запасом устойчивости σ , т.е. такой, что матрица $A_{K_0} = A_0 + \{A, K_0\} + \sigma I$ гурвицева.

Перейдем к описанию свойств функции $J(K)$.

Лемма 1. Функция $J(K)$ определена и положительна на множестве \mathcal{S} стабилизирующих регуляторов.

Действительно, если матрица A_K гурвицева, то решение $Q \succcurlyeq 0$ уравнения Ляпунова (10) существует; тем самым, определена функция $J(K) > 0$. Множество ее определения \mathcal{S} может быть невыпуклым и несвязным, причем его границы могут быть негладкими.

Перейдем к вычислению градиента функции $J(K)$.

Лемма 2. Функция $J(K)$ определена на множестве стабилизирующих обратных связей K . На этом допустимом множестве она дифференцируема, причем градиент дается выражениями

$$(11) \quad \frac{\partial J(K)}{\partial k_i} = \nabla_i J(K) = 2 \operatorname{tr} Y Q A_i + 2 \rho k_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где матрица Y является решением уравнения Ляпунова

$$(12) \quad A_K Y + Y A_K^T + \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Доказательство этого утверждения приведено в Приложении.

4. Алгоритм решения

Авторы предлагают следующий итеративный подход к решению этой задачи; в его основе лежит применение градиентного метода по переменной K . Приведем принципиальную схему алгоритма.

Алгоритм 1 для минимизации $J(K)$:

1. Задаемся параметрами $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $0 < \tau < 1$ и начальным стабилизирующим приближением K_0 .

2. На j -й итерации задано K_j . Вычисляем $A_{K_j} = A_0 + \{A, K_j\}$, решаем уравнения (10), (12) и находим матрицы Q и Y ; вычисляем градиент

$$H_j = \nabla J(K_j)$$

из уравнения (11). Если $\|H_j\| \leq \varepsilon$, то K_j принимаем за приближенное решение.

3. Делаем шаг градиентного метода

$$K_{j+1} = K_j - \gamma_j H_j.$$

Длину шага $\gamma_j > 0$ подбираем дроблением γ до выполнения условий:

а. K_{j+1} — стабилизирующий регулятор;

б. $J(K_{j+1}) \leq J(K_j) - \tau \gamma_j \|H_j\|^2$.

4. Переходим к п. 2.

Сделаем несколько замечаний. Прежде всего, нетривиальным моментом является выбор начального стабилизирующего регулятора K_0 . Здесь можно прибегнуть к помощи D-разбиения [21] или воспользоваться методами прямого поиска (см., например, [9]). В некоторых случаях может оказаться полезным следующий прием: для некоторой положительно-определенной матрицы Q попытаться разрешить неравенство Ляпунова $A_{K_0}^T Q + Q A_{K_0} \prec 0$ относительно K_0 . Также часто в практических задачах требуется улучшить качество уже имеющегося ПИД-регулятора путем настройки его параметров. Наконец, если исходная система управления является устойчивой (как часто и бывает на практике), вопрос выбора начального регулятора решается очевидным образом.

Еще одним важным моментом является выбор пробного шага градиентного метода. Весьма перспективным является его выбор из следующих соображений. Найдем для некоторого стабилизирующего регулятора K_j решение Q уравнения Ляпунова

$$(A_0 + \sigma I + \{A, K_j\})^T Q + Q(A_0 + \sigma I + \{A, K_j\}) = -I.$$

Рассмотрим приращение по K :

$$K_j \rightarrow K_j - \gamma H_j, \quad H_j = \nabla J(K_j),$$

и найдем, для каких γ матрица Q останется матрицей квадратичной функции Ляпунова для $A_{K_j - \gamma H_j} = A_0 + \sigma I + \{A, K_j - \gamma H_j\}$, т.е.

$$(A_0 + \sigma I + \{A, K_j - \gamma H_j\})^T Q + Q(A_0 + \sigma I + \{A, K_j - \gamma H_j\}) \prec 0.$$

С учетом исходного уравнения имеем

$$\gamma(-\{A, H_j\}^T Q - Q\{A, H_j\}) \prec I,$$

откуда

$$\gamma < \lambda_{\max}^{-1}(-\{A, H_j\}^T Q - Q\{A, H_j\}).$$

5. Примеры

Рассматриваемые далее примеры взяты из статьи [23]. Всюду в этом разделе будем полагать $\Sigma = I$.

Пример 1. Рассмотрим передаточную функцию

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+\alpha s)(1+\alpha^2 s)(1+\alpha^3 s)}, \quad \alpha = 0,5.$$

МАТЛАВ-процедура `tf2ss` доставляет матрицы системы в пространстве состояний:

$$A = \begin{pmatrix} -15 & -70 & -120 & -64 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 64 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\sigma = 0,25, \quad \rho = 10.$$

При выборе в качестве начального стабилизирующего регулятора

$$K_0 = (9,5717 \quad 4,8538 \quad 8,0028),$$

оптимизационная процедура приводит к регулятору

$$K_* = (7,6296 \quad 3,4331 \quad 3,1795), \quad |K_*| = 8,9502,$$

доставляющему интегральной части функционала $J(K)$ значение $3,5327 \cdot 10^3$.

Возьмем теперь начальное приближение

$$K'_0 = (4,3141 \quad 9,1065 \quad 1,8185);$$

в результате получим регулятор

$$K'_* = (7,6265 \quad 3,4327 \quad 3,1782), \quad |K'_*| = 8,9469,$$

и значение функционала, равное $J(K'_*) = 3,5333 \cdot 10^3$.

Как видно, значения функционала и нормы получившихся регуляторов отличаются на доли процента.

Передаточная функция ПИД-регулятора с коэффициентами K_* имеет вид

$$G_{\text{PID}}(s) = 7,6296 + \frac{3,4331}{s} + 3,1795s.$$

Система, замкнутая ПИД-регулятором K_* , является устойчивой по критерию Найквиста; ее минимальный запас устойчивости по модулю составляет 7,41 дБ, а по фазе — $27,5^\circ$, см. рис. 1.

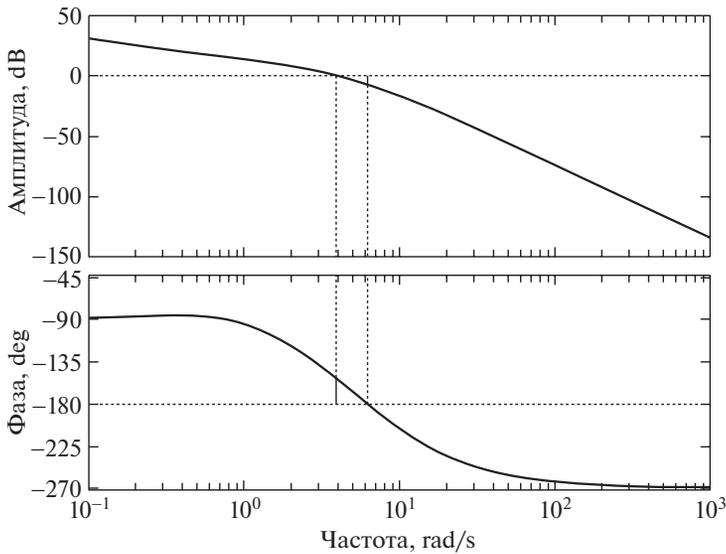


Рис. 1. ЛАФЧХ замкнутой системы из примера 1.

Сравним полученный ПИД-регулятор с регуляторами, полученными по методу Циглера–Николса (ZN) [1], гармонического поиска (Harmony Search, HS) [24], улучшенной версии алгоритма пчел (Improved Bees' Algorithm, IBA) [25] и алгоритма пчелиной колонии (Artificial Bee Colony, ABC) [26], подробнее см. [27]. Соответствующие результаты представлены в табл. 1.

На рис. 2 показана динамика выхода $y(t)$ рассматриваемой системы при некотором начальном условии

$$x_0 = \begin{pmatrix} -0,5715 \\ -0,1249 \\ 0,6635 \\ 0,4664 \end{pmatrix}$$

из единичного шара: при замыкании найденным ПИД-регулятором K_* (жирная линия) и регуляторами из табл. 1.

Таблица 1. Сравнение ПИД-регуляторов по интегральной части функционала и запасам устойчивости для примера 1

	k_P	k_I	k_D	$\mathbb{E}_{x(0)} \int_0^{\infty} y^2(t) dt$	G_m (дБ)	P_m (град)
Алгоритм 1	7,6296	3,4331	3,1795	$2,7303 \cdot 10^3$	7,41	27,5
ZN	3,9706	3,5749	1,1026	$4,3752 \cdot 10^3$	12,4	35,0
HS	2,8206	1,8022	1,4330	$3,6654 \cdot 10^3$	15,6	68,0
IBA	2,7852	1,7873	1,4157	$3,6872 \cdot 10^3$	15,7	68,5
ABC	2,8458	1,8278	1,4535	$3,6545 \cdot 10^3$	15,5	67,8

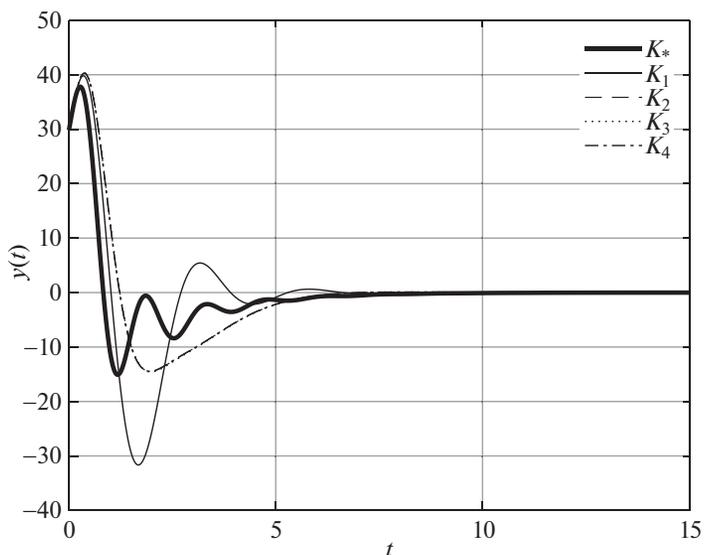


Рис. 2. Траектории выхода системы из примера 1.

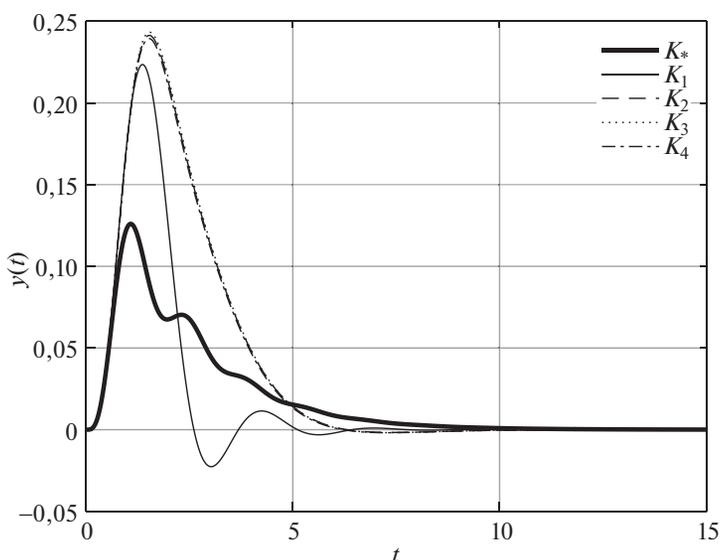


Рис. 3. Траектории выхода системы из примера 1 при единичном ступенчатом возмущении.

На рис. 3 показана динамика выхода $y(t)$ рассматриваемой системы, замкнутой найденным ПИД-регулятором K_* (жирная линия) и регуляторами из табл. 1 при единичном ступенчатом возмущении (и нулевом начальном условии).

Как видно, синтезированный ПИД-регулятор вполне удовлетворителен по своим характеристикам.

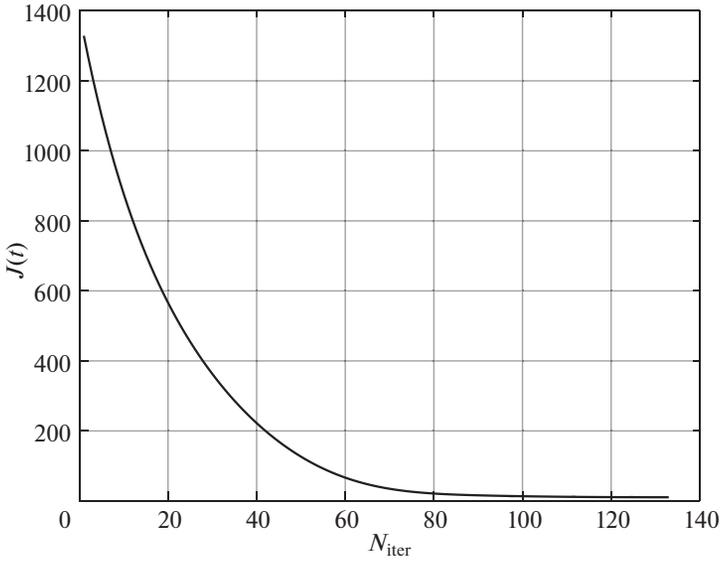


Рис. 4. Оптимизационная процедура в примере 2.

Пример 2. Рассмотрим передаточную функцию

$$G(s) = \frac{1 - \alpha s}{(s + 1)^2}, \quad \alpha = 0,1.$$

МАТЛАВ-процедура `tf2ss` доставляет матрицы системы в пространстве состояний:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Полагая $\rho = 10$, $\sigma = 0,1$ и выбрав

$$K_0 = (3,8710 \quad 6,1308 \quad 8,9234)$$

в качестве начального стабилизирующего регулятора, при завершении оптимизационной процедуры получаем регулятор

$$K_* = (0,4010 \quad 0,1870 \quad 0,0382),$$

доставляющий интегральной части функционала $J(K)$ значение 8,5440, см. рис. 4.

Передаточная функция ПИД-регулятора с коэффициентами K_* имеет вид

$$G_{\text{PID}}(s) = 0,4010 + \frac{0,1870}{s} + 0,0382s.$$

Замкнутая система с ПИД-регулятором K_* является устойчивой по критерию Найквиста; ее минимальный запас устойчивости по модулю составляет 21,1 дБ, а по фазе $78,9^\circ$, см. рис. 5.

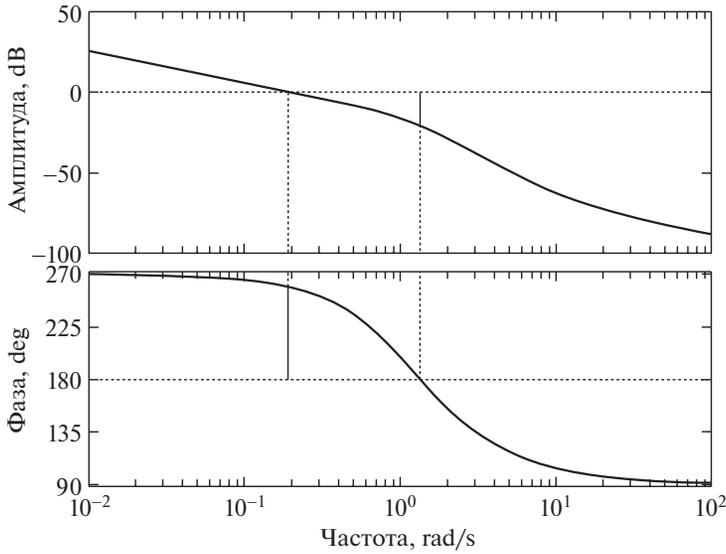


Рис. 5. ЛАФЧХ замкнутой системы из примера 2.

Пример 3. Рассмотрим передаточную функцию

$$G(s) = \frac{(s + 6)^2}{s(s + 1)^2(s + 36)}.$$

МАТЛАВ-процедура `tf2ss` доставляет матрицы системы в пространстве состояний:

$$A = \begin{pmatrix} -39 & -111 & -109 & -36 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

При

$$\rho = 10, \quad \sigma = 0,1,$$

и выборе в качестве начального стабилизирующего регулятора

$$K_0 = (10,1955 \quad 9,8265 \quad 2,4392),$$

оптимизационная процедура приводит к регулятору

$$K_* = (6,7538 \quad 1,2114 \quad 2,2965),$$

доставляющему интегральной части минимизируемого функционала значение $1,4774 \cdot 10^3$.

Замкнутая система с ПИД-регулятором K_* является устойчивой по критерию Найквиста; ее минимальный запас устойчивости по модулю бесконечен, а по фазе равен $55,2^\circ$, см. рис. 6.

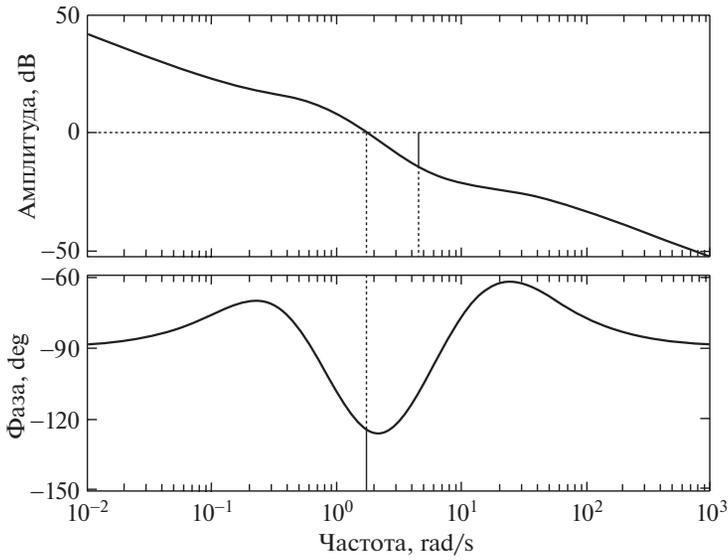


Рис. 6. ЛАФЧХ замкнутой системы из примера 3.

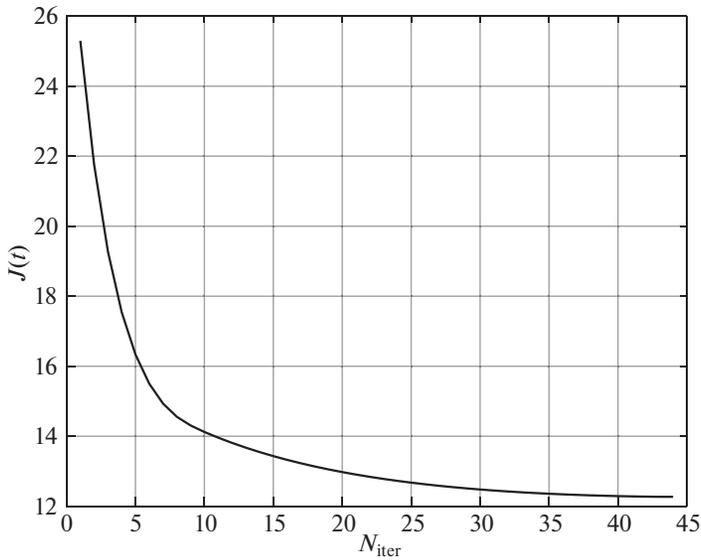


Рис. 7. Оптимизационная процедура в примере 4.

Пример 4. Вернемся к примеру 1 и положим в нем $\alpha = 1$. Оптимизационная процедура (при $\rho = 0,5$, $\sigma = 0,07$) завершается нахождением регулятора

$$G_{\text{PID}}(s) = 1,7408 + \frac{0,2849}{s} + 1,8615s,$$

см. рис. 7.

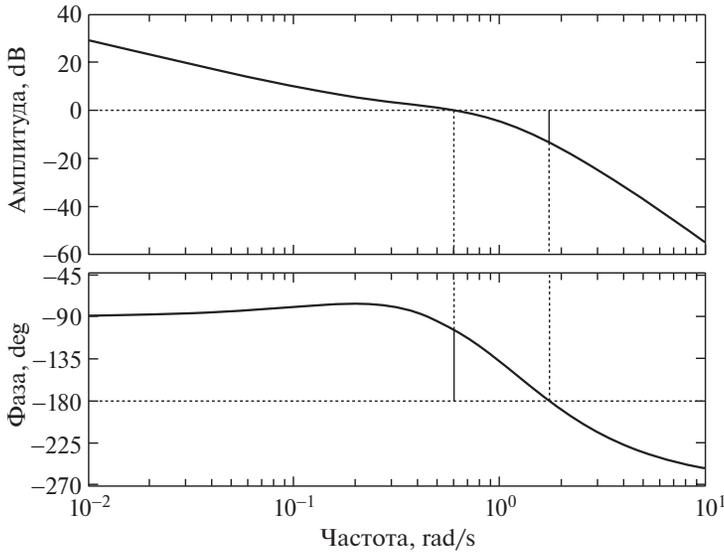


Рис. 8. ЛАФЧХ замкнутой системы из примера 4.

Он доставляет интегральной части минимизируемого функционала значение 8,9878 и обладает минимальным запасом устойчивости по модулю 13,2 дБ, а по фазе $76,2^\circ$, см. рис. 8.

Сравнение найденного регулятора с тремя ПИД/ПИ-регуляторами, предложенными для этого же примера в работах [28–30], представлено в табл. 2.

На рис. 9 показана динамика изменения выхода $y(t)$ рассматриваемой системы при некотором начальном условии

$$x_0 = \begin{pmatrix} -0,2456 \\ -0,6435 \\ -0,6921 \\ -0,2161 \end{pmatrix}$$

из единичного шара: при замыкании найденным ПИД-регулятором K_* (жирная линия) и регуляторами из табл. 2.

На рис. 10 показана динамика выхода $y(t)$ рассматриваемой системы, замкнутой найденным ПИД-регулятором K_* (жирная линия) и регуляторами

Таблица 2. Сравнение ПИД-регуляторов по интегральной части функционала и запасам устойчивости для примера 4

	k_P	k_I	k_D	$\mathbb{E}_{x(0)} \int_0^\infty y^2(t) dt$	G_m (дБ)	P_m (град)
Алгоритм 1	1,7408	0,2849	1,8615	8,9878	13,2	76,2
Из работы [28]	0,925	0,9	2,86	9,6715	14,87	43,0
Из работы [29]	0,83	0,318	0,3569	10,7752	14,34	62,5
Из работы [30]	1,031	0,3529	0	12,5559	17,25	96,2

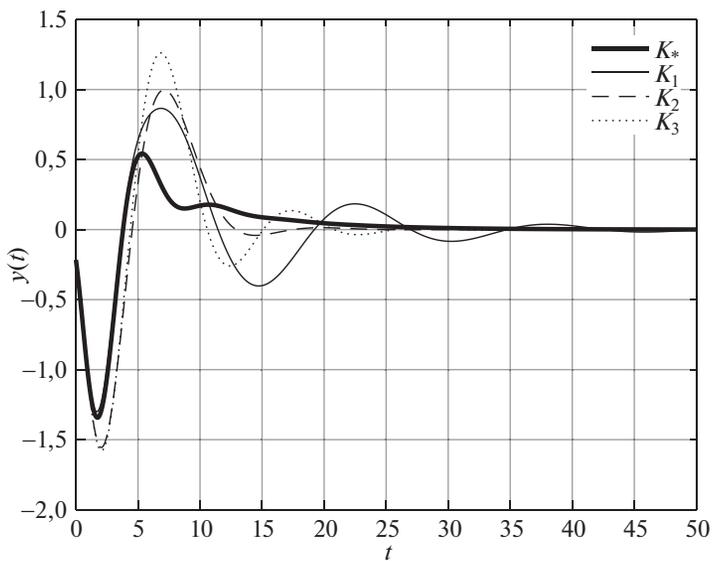


Рис. 9. Траектории выхода системы из примера 4.

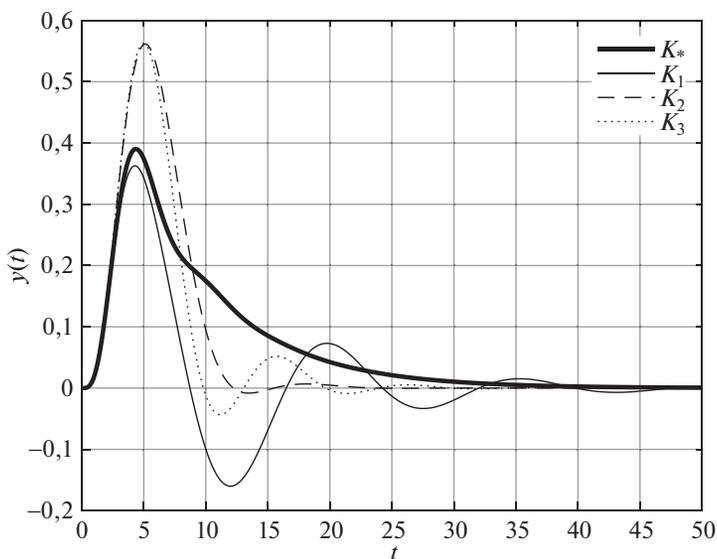


Рис. 10. Траектории выхода системы из примера 4 при единичном ступенчатом возмущении.

из табл. 2 при единичном ступенчатом возмущении (и нулевом начальном условии).

Как видно, синтезированный ПИД-регулятор обладает вполне удовлетворительными характеристиками.

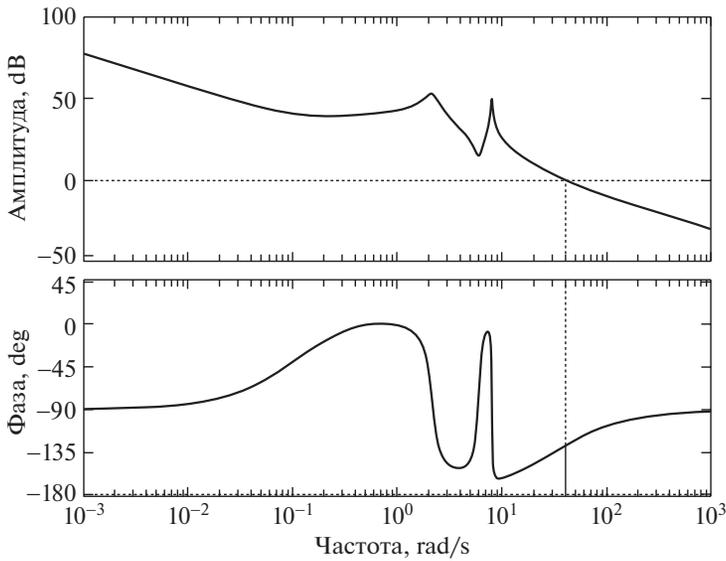


Рис. 11. ЛАФЧХ замкнутой системы из примера 5.

Пример 5. Рассмотрим передаточную функцию

$$G(s) = \frac{10s^3 + 9s^2 + 362,4s + 36,16}{2s^5 + 2,7255s^4 + 138,4292s^3 + 156,471s^2 + 637,6472s + 360,1779}$$

из статьи [7].

Предложенный алгоритм (при $\rho = 0,001$, $\sigma = 0,01$) дает ПИД-регулятор

$$G_{\text{PID}}(s) = 201,1057 + \frac{75,9364}{s} + 6,2735s,$$

доставляющий интегральной части минимизируемого функционала значение $1,0614 \cdot 10^3$ и обладающий бесконечным запасом устойчивости по модулю и запасом по фазе $52,2^\circ$, см. рис. 11.

Его сравнение с тремя ПИД-регуляторами, предложенными для рассматриваемой системы в работе [8], представлено в табл. 3.

Синтезированный ПИД-регулятор обладает весьма удовлетворительными характеристиками. На рис. 12 показана динамика изменения выхода $y(t)$ рас-

Таблица 3. Сравнение ПИД-регуляторов по интегральной части функционала и запасам устойчивости для примера 5

	k_P	k_I	k_D	$\mathbb{E}_{x(0)} \int_0^\infty y^2(t) dt$	G_m (дБ)	P_m (град)
Алгоритм 1	201,1057	75,9364	6,2735	$1,0614 \cdot 10^3$	∞	52,2
#1 из [8]	185	2986	9	$1,7338 \cdot 10^3$	-10,2	60,8
#2 из [8]	20	800	9	$1,3503 \cdot 10^4$	-7,79	87,5
#3 из [8]	19	200	9	$1,3769 \cdot 10^4$	-10	78,6

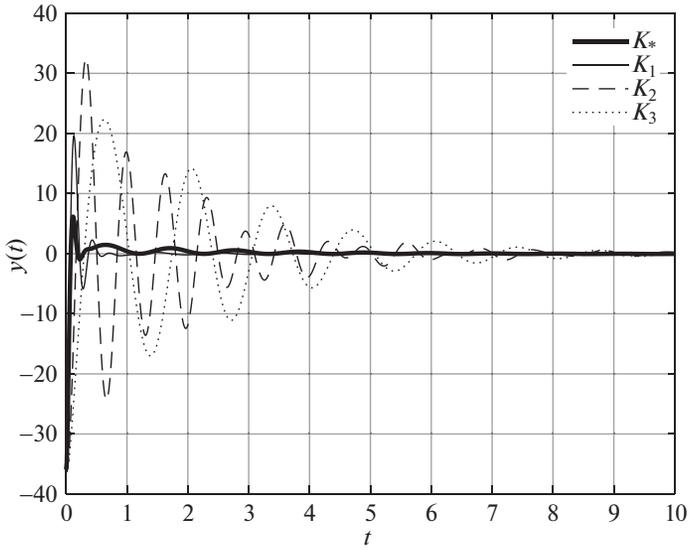


Рис. 12. Траектории выхода системы из примера 5.

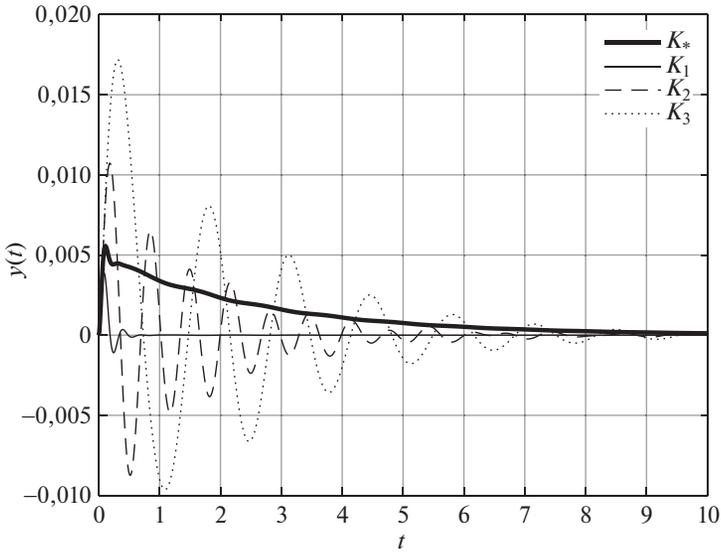


Рис. 13. Траектории выхода системы из примера 5 при единичном ступенчатом возмущении.

сма триваемой системы при некотором начальном условии

$$x_0 = \begin{pmatrix} -0,5228 \\ -0,4387 \\ -0,3609 \\ -0,1148 \\ -0,6251 \end{pmatrix}$$

из единичного шара при замыкании найденным ПИД-регулятором K_* (жирная линия) и регуляторами из работы [8].

На рис. 13 показана динамика выхода $y(t)$ рассматриваемой системы, замкнутой найденным ПИД-регулятором K_* (жирная линия) и регуляторами из табл. 3 при единичном ступенчатом возмущении (и нулевом начальном условии).

Таким образом, синтезированный ПИД-регулятор обладает вполне удовлетворительными характеристиками.

6. Заключение

В статье рассмотрены только SISO-системы, однако предлагаемый подход полностью может быть перенесен и на многомерный случай. При этом выкладки становятся несколько более громоздкими, в то время как идейная сторона меняется мало.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма П.1. Пусть X и Y – решения двойственных уравнений Ляпунова с гурвицевой матрицей A :

$$A^T X + X A + W = 0 \quad \text{и} \quad A Y + Y A^T + V = 0.$$

Тогда

$$\text{tr} X V = \text{tr} Y W.$$

Доказательство леммы П.1. В самом деле, прямым вычислением имеем

$$\begin{aligned} \text{tr}(XV) &= \text{tr}(X(-AY - YA^T)) = -\text{tr}(XAY) - \text{tr}(XYA^T) = \\ &= -\text{tr}(XAY)^T - \text{tr}(A^T XY)^T = \text{tr}(Y(-A^T X - XA)) = \text{tr}(YW). \end{aligned}$$

Лемма П.1 доказана.

Доказательство леммы 2. В уравнении (10) придадим величине K приращение ΔK и обозначим соответствующее приращение Q через ΔQ :

$$A_{K+\Delta K}^T(Q + \Delta Q) + (Q + \Delta Q)A_{K+\Delta K} = - \begin{pmatrix} cc^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

или

$$(A_K + \{A, \Delta K\})^T(Q + \Delta Q) + (Q + \Delta Q)(A_K + \{A, \Delta K\}) = - \begin{pmatrix} cc^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда после линеаризации имеем

$$(П.1) \quad A_K^T \Delta Q + \Delta Q A_K + Q\{A, \Delta K\} + \{A, \Delta K\}^T Q = 0.$$

Вычислим приращение функционала $f(K)$, линеаризуя соответствующие величины:

$$\begin{aligned}\Delta J(K) &= \operatorname{tr}(Q + \Delta Q) \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \rho|K + \Delta K|^2 - \operatorname{tr} Q \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \rho|K|^2 = \\ &= \operatorname{tr} \Delta Q \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\rho(K, \Delta K).\end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение Ляпунова (12), двойственное к (П.1). По лемме П.1 из уравнений (П.1) и (12) имеем

$$\Delta J(K) = \operatorname{tr} \Delta Q \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\rho(K, \Delta K) = 2 \operatorname{tr} YQ\{A, \Delta K\} + 2\rho(K, \Delta K),$$

так что

$$dJ(K) = 2 \operatorname{tr} YQ \sum_{i=1}^3 A_i dk_i + 2\rho(K, dK),$$

откуда имеем (11). Лемма 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ziegler J.B., Nichols N.B.* Optimum Settings for Automatic Controllers // *Transact. ASME.* 1942. V. 64. P. 759–768.
2. *Visioli A.* Practical PID Control. London: Springer-Verlag, 2006.
3. *Åström K.J., Hägglund T.* PID Controllers: Theory, Design, and Tuning. Research Triangle Park: Instrument Society of America, 1995.
4. *Åström K.J., Hägglund T.* Advanced PID Control. Research Triangle Park: The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 2006.
5. *Bhattacharyya S.P., Keel L.H.* Linear Multivariable Control Systems. Cambridge University Press, 2022.
6. *Wang Q.-G., Ye Z., Cai W.-J., Hang C.-C.* PID Control for Multivariable Processes. Berlin: Springer, 2008.
7. *Blanchini F., Lepschy A., Miani S., Viaro U.* Characterization of PID and Lead/Lag Compensators Satisfying Given H_∞ Specifications // *IEEE Transact. Autom. Control.* 2004. V. 49. No. 5. P. 736–740.
8. *Han S., Keel L.H., Bhattacharyya S.P.* PID Controller Design with an H_∞ Criterion // *IFAC-PapersOnLine.* 2018. V. 51. No. 4. P. 400–405.
9. *Киселев О.Н., Поляк Б.Т.* Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H_∞ и по критерию максимальной робастности // *АиТ.* 1999. № 3. С. 119–130.
Kiselev O.N., Polyak B.T. Design of Low-Order Controllers by the H_∞ -criterion and Maximum-Robustness Performance Indices // *Autom. Remote Control.* 1999. V. 60. No. 3. P. 393–402.

10. *Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H_∞ : параметрический подход // *АиТ.* 2007. № 3. С. 94–105.
Gryazina E.N., Polyak B.T., Tremba A.A. Design of the Low-Order Controllers by the H_∞ Criterion: A Parametric Approach // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 3. P. 456–466.
11. *Kalman R.E.* Contributions to the Theory of Optimal Control // *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana.* 1960. V. 5. No. 1. P. 102–119.
12. *Levine W., Athans M.* On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1970. V. 15. No. 1. P. 44–48.
13. *Mäkilä P.M., Toivonen H.T.* Computational Methods for Parametric LQ Problems – A Survey // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1987. V. 32. No. 8. P. 658–671.
14. *Fazel M., Ge R., Kakade S., Mesbahi M.* Global Convergence of Policy Gradient Methods for the Linear Quadratic Regulator // *Proc. 35th Int. Conf. Machine Learning.* Stockholm, Sweden, July 10–15, 2018. V. 80. P. 1467–1476.
15. *Mohammadi H., Zare A., Soltanolkotabi M., Jovanović M.R.* Global Exponential Convergence of Gradient Methods Over the Nonconvex Landscape of the Linear Quadratic Regulator // *Proc. 2019 IEEE 58th Conf. Decision Control.* Nice, France, December 11–13, 2019. P. 7474–7479.
16. *Zhang K., Hu B., Başar T.* Policy Optimization for \mathcal{H}_2 Linear Control with \mathcal{H}_∞ Robustness Guarantee: Implicit Regularization and Global Convergence // *arXiv:1910.09496*, 2020.
17. *Bu J., Mesbahi A., Fazel M., Mesbahi M.* LQR through the Lens of First Order Methods: Discrete-Time Case // *arXiv:1907.08921*, 2019.
18. *Fatkhullin I., Polyak B.* Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method // *SIAM J. Control Optim.* 2021. V. 59. No. 5. P. 3887–3911.
19. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // *АиТ.* 2021. № 9. С. 86–115.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Static Controller Synthesis for Peak-to-Peak Gain Minimization as an Optimization Problem // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 9. P. 1530–1553.
20. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Синтез обратной связи по выходу при помощи наблюдателя как задача оптимизации // *АиТ.* 2022. № 3. С. 7–32.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Observer-Aided Output Feedback Synthesis as an Optimization Problem // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 3. P. 303–324.
21. *Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Современное состояние метода D-разбиения // *АиТ.* 2008. № 12. С. 3–40.
Gryazina E.N., Polyak B.T., Tremba A.A. D-Decomposition Technique State-of-the-art // *Autom. Remote Control.* 2008. V. 69. No. 12. P. 1991–2026.
22. *Шатов Д.В.* Синтез параметров пропорционально-интегрирующих и пропорционально-интегрально-дифференцирующих регуляторов для стационарных линейных объектов с ненулевыми начальными условиями // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2023. № 1. (в печати)
23. *Åström K.J., Häggglund T.* Benchmark Systems for PID Control // *IFAC Proceedings Volumes.* 2000. V. 33. Iss. 4. P. 165–166.

24. *Geem Z.W., Kim J.H., Loganathan G.V.* A New Heuristic Optimization Algorithm: Harmony Search // Simulation. 2002. V. 76. No. 2. P. 60–68.
25. *Pham D.T., Sholedolu M.* The Bees Algorithm with Attraction to Global Best Solutions // Proc. 5th I*PROMS International Virtual Conference on Innovative Production Machines and Systems (IPROMS 2009). Cardiff, UK, July 6–17, 2009.
26. *Karaboga D.* An Idea Based on Honey Bee Swarm for Numerical Optimization. Technical Report TR06. Erciyes University, 2005.
27. *Karaboga D., Akay B.* Proportional-Integral-Derivative Controller Design by Using Artificial Bee Colony, Harmony Search, and the Bees Algorithms // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part I: J. Syst. Control Engineer. 2010. V. 224. No. 7. P. 869–883.
28. *Panagopoulos H., Åström K.J., Hägglund T.* Design of PID Controllers Based on Constrained Optimization // Proc. 1999 American Control Conference. San Diego, USA, June 2–4, 1999. V. 6. P. 3858–3862.
29. *Li Y., Ang K.H., Chong G.C.Y.* PID Control System Analysis and Design // IEEE Control Syst. Magaz. 2006. V. 26. No. 1. P. 32–41.
30. *Leva A., Papadopoulos A.V.* Tuning of Event-Based Industrial Controllers with Simple Stability Guarantees // J. Process Control. 2013. V. 23. P. 1251–1260.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 15.05.2022

После доработки 20.07.2022

Принята к публикации 28.07.2022