Автоматика и телемеханика, № 11, 2022

Обзоры

© 2022 г. Г.А. КУРИНА, д-р физ.-мат. наук (kurina@math.vsu.ru)
(Воронежский государственный университет;
Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук, Москва),
М.А. КАЛАШНИКОВА, канд. физ.-мат. наук
(margarita.kalashnikova@mail.ru)
(Атос АйТи Солюшенс энд Сервисез, Воронеж)

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ С РАЗНОТЕМПОВЫМИ БЫСТРЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ[1]

Посвящается светлой памяти
А.Б. Васильевой (1926–2018), В.Ф. Бутузова (1939–2021),
А.М. Ильина (1932–2013)

Статья содержит обзор публикаций, в которых исследуются задачи, характеризующиеся наличием быстрых переменных с различными скоростями изменения. Рассматривается предельный переход решения возмущенной задачи к решению вырожденной, асимптотические решения начальных и краевых задач, устойчивость и управляемость, асимптотические решения задач оптимального управления, задачи со "скрытыми" разнотемповыми быстрыми переменными. Кроме этого, представлены задачи с ограничением на управление, игровые задачи и стохастические системы. В последнем разделе статьи приводятся практические задачи с многотемповыми быстрыми движениями.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, разнотемповые быстрые переменные, асимптотические разложения, задачи управления.

DOI: 10.31857/S0005231022110010, **EDN:** KDWMLX

1. Введение

Параметры, входящие в систему, могут влиять на ее динамику различным образом. Если при малых значениях параметров это влияние существенно, то такие системы получили название сингулярно возмущенных. В противном случае они называются регулярно возмущенными. Если в системе присутствуют переменные с различными порядками скоростей изменения, то системы называют разнотемповыми или многотемповыми.

[1] Работа первого автора поддержана Российским научным фондом (проект № 21-11-00202).

Необходимость использования асимптотических методов теории сингулярных возмущений для изучения практических задач возникает как при исследовании задач, имеющих разнотемповые движения, так и при исследовании задач, в процессе изучения которых возникают уравнения с разнотемповыми переменными, например, задач с “дешевыми” управлениями. Наиболее популярными при этом являются методы пограничных функций [1] и интегральных многообразий [2], которые приводят к понижению размерности исходной разнотемповой системы и ее сведению к задачам более простой структуры.

При решении сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений стандартными численными методами исследователь сталкивается со значительными трудностями, связанными с увеличением времени счета и, как следствие, с накоплением вычислительных ошибок. Для решения таких уравнений разрабатываются специальные численные методы (см., например, [3]), учитывающие асимптотическую структуру решения. При использовании итерационных методов асимптотический анализ решения помогает найти начальное приближение, обеспечивающее быструю сходимость метода [4]. При построении асимптотики решения используются численные методы для решения задач, из которых находятся члены разложения. Таким образом, численные и асимптотические методы решения сингулярно возмущенных задач взаимно дополняют друг друга.

Подавляющее большинство работ в теории сингулярных возмущений, включая задачи управления, имеет дело с задачами, характеризующимися наличием переменных со скоростями изменения двух порядков (медленных и быстрых). Такие работы указаны, например, в [5–11]. Но математические модели многих практических задач содержат разнотемповые быстрые переменные. В конце этой статьи приведены соответствующие примеры.

Если в системе дифференциальных уравнений с малыми параметрами при производных, обеспечивающих разнотемповый характер переменных, положить эти параметры равными нулю, то получим не разрешенную относительно производных систему, которая называется вырожденной (неявной, сингулярной, дескрипторной) системой или дифференциально-алгебраическим (алгебро-дифференциальным) уравнением. Изучению таких систем посвящена обширная литература (например, монографии [12–16]). Обзор публикаций, касающихся сингулярных возмущений задач управления с уравнением состояния, не разрешенным относительно производной, приведен в [17].

Дискретизация систем со многими параметрами при производных рассматривается в [18].

Иногда малые параметры вводятся в задачу искусственным образом. Например, при регуляризации вырожденных задач оптимального управления, а именно, если в линейно-квадратичной задаче в критерии качества отсутствует управление, то прибавляют к подынтегральной функции квадратичные формы от компонент управления с малыми параметрами перед ними. В результате получают задачу с “дешевыми” управлениями. В [19] для решения систем нелинейных уравнений с плохо обусловленной матрицей Якоби предложен метод дифференцирования по параметру, использующий систему обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных. Дополнительные быстрые переменные рассматриваются в [20, 21] при изучении стабилизации.

Выделение групп разнотемповых переменных при моделировании обсуждается в [22].

Данная статья представляет собой обзор публикаций, связанных с асимптотическими методами исследования задач, в постановке или в процессе решения которых присутствуют несколько быстрых переменных со скоростями изменения различных порядков. Отметим, что в п. 8.1 из [23] имеется краткий обзор публикаций 1976–1983 гг. на эту тему. Поводом к написанию этого обзора послужило знакомство авторов с обзорной статьей [24], посвященной детерминированным и стохастическим сингулярно возмущенным системам с несколькими малыми параметрами, в которой, к сожалению, не упомянуты первые основополагающие работы на эту тему.

Во втором разделе настоящей статьи обсуждаются работы, касающиеся предельного перехода при стремлении малых параметров к нулю решения исходной задачи с разнотемповыми переменными к решению вырожденной, получающейся из исходной при нулевых значениях малых параметров. Асимптотические решения начальных и краевых задач рассмотрены в третьем разделе. Следующий раздел имеет дело с проблемами устойчивости и управляемости. Пятый раздел посвящен задачам оптимального управления. Задачи со "скрытыми" разнотемповыми быстрыми переменными, в том числе задачи управления, в критерии качества которых имеется сумма квадратичных форм относительно управления с разными степенями малого параметра, т.е. некоторые компоненты управления являются "дешевыми", рассматриваются в шестом разделе. Многотемповые задачи с ограничением на управление в форме замкнутых неравенств приводятся в седьмом разделе. Следующие два раздела имеют дело соответственно с игровыми задачами и стохастическими системами. Последний раздел посвящен практическим задачам, в которых имеются быстрые переменные со скоростями изменения различных порядков.

Всюду в этой статье уравнения рассматриваются в конечномерном вещественном пространстве; штрих означает транспонирование; I_n — единичная матрица порядка n; ε, ε_j — неотрицательные малые параметры; положительно определенная матрица A обозначается через $A > 0$, а неотрицательно определенная $A \geqslant 0$. Через $\operatorname{diag}(A_1, \dots, A_n)$ обозначается матрица, у которой на главной диагонали стоят матрицы $A_1, \dots, A_n$, а остальные элементы нулевые. Коэффициент при ε^j в разложении функции $w(\varepsilon)$ в ряд по целым неотрицательным степеням ε обозначается как w_j. Если не оговорено противное, все функции, входящие в постановки задач, предполагаются достаточно гладкими по своим аргументам.

2. Предельный переход

Построение приближенного решения сингулярно возмущенной задачи обычно начинается с решения вырожденной задачи, которая имеет более низкий порядок по отношению к исходной. В связи с этим возникает необходимость исследования предельного перехода решения исходной возмущенной задачи к решению вырожденной. Краткий обзор публикаций, касающихся этой темы, содержится в [25].

Приведем некоторые сведения для систем с разнотемповыми быстрыми переменными.

Предельный переход при стремлении малых параметров к нулю для решения задачи вида

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = f(x, z_1, \dots, z_m, t), \\
&\varepsilon_j \frac{dz_j}{dt} = F_j(x, z_1, \dots, z_m, t), \quad j = \overline{1, m},
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
x(t_0) = x^0, \quad z_j(t_0) = z_j^0 \tag{2}
$$

при $t \in [t_0, T]$ изучался А.Н. Тихоновым и И.С. Градштейном в [26–30]. При этом предполагалось, что $\varepsilon_{j+1}/\varepsilon_j \to 0$. Статьи [26, 28], а также другие работы А.Н. Тихонова, касающиеся уравнений вида (1), приведены в [30]. Поведение производных решения по параметрам при стремлении этих параметров к нулю исследовалось в [25].

Заметим, что систему (1) можно привести к виду $\varepsilon dy/dt = F(y, t, \varepsilon)$ путем умножения уравнений системы на некоторые малые множители. Однако при этом уничтожатся свойства системы, которые важны в теории сингулярных возмущений, так как члены, которые оказывают решающее влияние на асимптотическое решение системы при стремлении малых параметров к нулю, могут стать малыми при умножении их на некоторые малые параметры.

Условия, обеспечивающие стремление решения исходной возмущенной задачи (1), (2) к некоторому решению вырожденной задачи при стремлении малых параметров к нулю, сформулированы в [26, 28] с помощью присоединенных систем разных порядков. Приведем здесь определение таких систем.

Под присоединенной системой первого порядка понимается система

$$
\frac{dz_m}{d\tau} = F_m(x, z_1, \dots, z_m, t), \tag{3}
$$

в которой $x, z_1, \dots, z_{m-1}, t$ являются параметрами. Предполагая, что система $F_m(x, z_1, \dots, z_m, t) = 0$ имеет единственный изолированный корень $z_m = \varphi_m(x, z_1, \dots, z_{m-1}, t)$ и подставляя его в предыдущие уравнения системы, из уравнения для z_{m-1} можно записать присоединенную систему второго порядка. Аналогичным образом получаем присоединенные системы j-го порядка для $j = \overline{3, m}$. Областью влияния устойчивого корня z_m при заданных значениях x^0, z_j^0, $j=\overline{1,m-1}$, t_0 называется совокупность таких точек $\{z_m^0\}$, что траектории присоединенной системы (3) при $x=x^0$, $z_j=z_j^0$, $j=\overline{1,m-1}$, $t=t_0$ и начальном условии $z_m(t_0)=z_m^0$ стремятся к $z_m=\varphi_m(x^0,z_1^0,\ldots,z_{m-1}^0,t_0)$ при $\tau\to+\infty$. Подобным способом определяются области влияния для изолированных устойчивых корней $z_j=\varphi_j$, $j=\overline{1,m-1}$ уравнений $F_j=0$, при помощи которых определяется вырожденная система.

В [28] (см. также [26, 31]) изучался предельный переход решения задачи (1), (2) при $t\in(t_0,T]$ к решению вырожденной системы для медленной переменной с начальным значением x^0 при стремлении к нулю малых параметров при условии, что корни $z_j=\varphi_j$ являются устойчивыми корнями присоединенных систем j-го порядка, $j=\overline{1,m}$, а начальные значения z_j^0 входят в область влияния корня z_j при заданных значениях x^0, $z_1^0,\ldots,z_{j-1}^0$, t_0.

Другой подход к исследованию систем дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных, связанный с применением теории устойчивости А.М. Ляпунова, рассматривался в [27, 29].

Сходимость на полупрямой при стремлении малых параметров к нулю решения возмущенной задачи (1), (2) к решению вырожденной задачи изучалась в [32] (см. также замечание о трехтемповых системах в [33]).

Предельный переход при $\varepsilon\to0$ к решению вырожденной задачи решения двухточечной краевой задачи для линейной системы с множителями 1, $\varepsilon^{k_2},\ldots,\varepsilon^{k_p}$ при производных, где k_i — целые числа такие, что $0<k_2<\ldots<k_p$, исследовался в [34].

В [35] установлены оценки близости решения нелинейной краевой задачи с двухтемповыми быстрыми переменными в условно устойчивом случае для системы вида

$$\frac{dx}{dt}=f(x,y,z,t),$$

$$\varepsilon_1\frac{dy}{dt}=g(x,y,z,t),$$

$$\varepsilon_2\frac{dz}{dt}=h(x,y,z,t),$$

где $\varepsilon_2/\varepsilon_1\to0$, к решению вырожденной задачи. Термин условная устойчивость в данном случае означает, что матрицы $\overline{h}_z$ и $\overline{g}_y-\overline{g}_z(\overline{h}_z)^{-1}\overline{h}_y$ имеют собственные значения как с отрицательными, так и с положительными действительными частями. Чертой сверху здесь обозначено значение функции на решении вырожденной задачи.

Для частного случая нелинейной управляемой системы с произведениями малых параметров при части производных и измеримыми управлениями со значениями из компактного множества в [36] приведен алгоритм последовательного понижения порядка системы. В итоге получается управляемая система для медленных переменных состояния.

Существование решения и предельный переход при стремлении к нулю малого параметра для системы

$$\varepsilon^6 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = f(u, v, t, \varepsilon),$$

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} \right) = g(u, v, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in (a, b) \times (0, +\infty),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, t, \varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial x}(b, t, \varepsilon) = \frac{\partial v}{\partial x}(a, t, \varepsilon) = \frac{\partial v}{\partial x}(b, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in (0, +\infty),$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = u^0(x), \quad v(x, 0, \varepsilon) = v^0(x), \quad x \in [a, b]$$

изучались в [37].

При некоторых условиях предельный переход решения начальной задачи для одного класса систем дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих два стремящихся к нулю малых параметра, обеспечивающих три временных масштаба, рассматривался в [38].

Для решения начальной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве с малыми параметрами при первой и второй производных в [39] изучался предельный переход при стремлении малых параметров к нулю.

3. Решение начальных и краевых задач

3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Первые работы, посвященные построению асимптотики решения сингулярно возмущенных начальных задач с несколькими малыми параметрами при производных, принадлежат А.Б. Васильевой (см., например, [40–43]). Для частного случая таких задач вида

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = f(x, y, z, t), \\ \varepsilon_1 \frac{dy}{dt} = g(x, y, z, t), \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{dz}{dt} = h(x, y, z, t), \\ x(t_0) = x^0, \quad y(t_0) = y^0, \quad z(t_0) = z^0, \quad t \in [t_0, T] \end{gathered} \tag{4}$$

асимптотическое разложение решения по степеням $\varepsilon_1^i \varepsilon_2^k$, построенное в [43], содержит пограничные функции от аргументов $\tau_1 = (t - t_0)/\varepsilon_1$ и $\tau_2 = (t - t_0)/\varepsilon_1 \varepsilon_2$, т.е.

$$w = (x', y', z')' = \sum_{i,k=0}^{\infty} \varepsilon_1^i \varepsilon_2^k \left(\overline{w}_{ik}(t - t_0) + \overset{(1)}{\Pi}_{ik} w(\tau_1) + \overset{(2)}{\Pi}_{ik} w(\tau_2) \right).$$

Уравнения, определяющие коэффициенты разложения, получаются в результате подстановки постулируемого разложения в условие задачи (4) и приравнивания членов с одинаковыми степенями ε_1 и ε_2, отдельно зависящих от t, τ_1, τ_2.

В случае правых частей и начальных условий в (4), зависящих от малых параметров, асимптотика решения построена в [44]. Асимптотическое решение начальной задачи с трехтемповыми переменными рассматривалось также в [45].

Как указано в [43, 44], используемые в этих статьях алгоритмы могут быть применены для построения асимптотики решения начальной задачи для сингулярно возмущенной системы со многими малыми параметрами при производных.

В [46] изложено применение метода пограничных функций для асимптотического решения различных сингулярно возмущенных задач для систем с разными степенями малого параметра при производных. Асимптотика периодического решения для таких систем с периодической правой частью построена в [47, стр. 352–381; 48].

Для краевой задачи вида

$$\varepsilon_1 a(t)\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon_2 b(t)\frac{dy}{dt} + c(t)y = f(t), \quad t \in (0,1), \tag{5}$$

$$y(0) = y^0, \quad y(1) = y^1 \tag{6}$$

при некоторых условиях в [49] построена асимптотика решения в двух случаях, когда $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^2 \to 0$ и $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-2} \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$.

В трех случаях зависимого стремления к нулю двух малых параметров в [50] построена асимптотика решения двухточечной краевой задачи на отрезке $[0,1]$ для уравнения вида

$$\varepsilon_1 My + \varepsilon_2 Ny + Ly = 0,$$

где M, N и L — линейные обыкновенные дифференциальные операторы порядков m_2, m_1 и m_0 соответственно, причем $m_2 > m_1 > m_0 \geqslant 0$, а краевые условия задаются в концах отрезка $[0,1]$. Исследование двухпараметрических сингулярно возмущенных задач, в том числе нелинейных, приведено также в [51, стр. 66–75, 94–102].

Асимптотическое разложение решений систем уравнений, содержащих малые параметры при производных, строится в основном, как в цитированных выше работах, в случае, когда малые параметры при производных стремятся к нулю зависимым образом. Представляет интерес асимптотическое разложение и в том случае, когда параметры при производных независимо друг от друга стремятся к нулю.

В [52] представлено асимптотическое разложение решения задачи вида (5), (6) при независимом стремлении ε_1 и ε_2 к нулю. Для этого сначала строится асимптотика решения, которая не является равномерно относительно ε_2

близкой к решению возмущенной задачи. Затем при условии $b(t) > 0$ (либо $b(t) < 0$), $t \in [0, 1]$, строится равномерная относительно ε_2 асимптотика.

Для решения начальной задачи с двумя независимыми малыми параметрами вида

$$\varepsilon_1 \frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y + f(t),$$

(7)
$$\varepsilon_2 \frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y + g(t),$$

$$x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0,$$

(8)
$$a(t) < 0, \quad d(t) < 0, \quad b(t)c(t) - a(t)d(t) < 0, \quad b(t)c(t) \geqslant 0,$$

в [53] приведен алгоритм построения асимптотического разложения решения, включающего пограничные функции, аргумент которых зависит от произведения малых параметров, т.е.

(9)
$$z(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \overline{z}(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \Pi z(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}, \quad z = (x, y).$$

Здесь

$$\overline{z}(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n z_{m,n}(t), \quad \Pi z(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n \Pi_{m,n} z(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

— пограничные функции в окрестности $t = 0$.

Обоснование асимптотики (9), равномерной по ε_1, ε_2, приведено в [54]. При этом доказывается, что

$$\|\Pi_{m,n} z(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2)\| \leqslant \frac{c}{\rho^i} \exp(-\sigma \rho \tau), \quad \tau \geqslant 0, \quad i = \min(m, n),$$

где $\rho = \rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, c и σ — положительные постоянные, не зависящие от ε_1, ε_2, τ.

Асимптотическое решение начальной задачи (7) в случае, когда последнее неравенство в (8) заменяется на $b(t)c(t) < 0$, $t \in [0, T]$, построено в [55].

Асимптотика решения начальной задачи для системы двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с двумя малыми параметрами при производных, независимо друг от друга стремящихся к нулю, приведена в [56].

Алгоритм построения асимптотики интегральных многообразий для систем с несколькими малыми параметрами при производных вида

(10)
$$\prod_{k=0}^{i} \varepsilon_k \frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x^{(n)}, x_n, \varepsilon, \varepsilon_n), \quad i = \overline{0, n},$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $x_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $x^{(n)} = (x_0, \ldots, x_{n-1})$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$, приведен в [2, стр. 116–127].

В [2, стр. 127–134] для системы (10) также рассматривается расщепление начальных и краевых задач. Изложенная в [2] схема расщепления наиболее просто реализуется для систем линейных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при производных. При этом расщепляющее преобразование является линейным, а результирующая система — блочно-диагональной. Приведение матрицы коэффициентов линейной системы с малыми параметрами при производных к виду, обеспечивающему расщепление на задачи с меньшим числом переменных, используется также в [47, стр. 339–352; 57–63].

Для решения краевой задачи для системы двух уравнений второго порядка

$$\varepsilon^4 \frac{d^2u}{dt^2} = f(u, v, t, \varepsilon),$$

$$\varepsilon^2 \frac{d^2v}{dt^2} = g(u, v, t, \varepsilon), \quad t \in (0, 1),$$

$$\frac{du}{dt}(0) = \frac{du}{dt}(1) = 0, \quad \frac{dv}{dt}(0) = \frac{dv}{dt}(1) = 0$$

в [64] строится асимптотика решения с переходным слоем в окрестности некоторой внутренней точки t^* отрезка $[0, 1]$. Наряду с функциями от аргумента t эта асимптотика содержит функции переходного слоя в окрестности точки t^* от аргументов $(t - t^*)/\varepsilon$ и $(t - t^*)/\varepsilon^2$ и функции пограничных слоев в окрестностях граничных точек $t = 0$ и $t = 1$ от аргументов t/ε^j, $(1 - t)/\varepsilon^j$, $j = 1, 2$.

Краевая задача для системы двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми малыми параметрами при высших производных рассматривается в [65].

Асимптотическое разложение матричной экспоненты $exp((A + B/\varepsilon + C/\varepsilon^r)t)$, $r > 1$ построено в [66].

В [67] предложен алгоритм выбора формы асимптотического представления решений линейных дифференциальных уравнений n-го порядка $(n > 1)$ с переменными коэффициентами и малым параметром при старшей производной.

Для системы вида

$$\frac{dx}{ds} = \varepsilon(\mu - f_1 y),$$

$$\frac{dy}{ds} = z - x,$$

$$\varepsilon \frac{dz}{ds} = -y + f_2 z^2 + f_3 z^3,$$

где $s = \varepsilon t$ — медленное время, в [68] при некоторых условиях изучается феномен возникновения так называемых “уток”. Приводятся асимптотические формулы.

Для системы двух уравнений с частными производными первого порядка и малым параметром в различных степенях перед производными

$$\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon b_1(x) \frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}(x,t)u + a_{12}(x,t)v + f_1(x,t,\varepsilon),$$
$$\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon^2 b_2(x) \frac{\partial v}{\partial x} = a_{21}(x,t)u + a_{22}(x,t)v + f_2(x,t,\varepsilon),$$
$$(x,t) \in G = (0,X] \times (0,T],$$

с краевыми условиями

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = v|_{t=0} = v|_{x=0} = 0$$

в [69] при некоторых условиях построено непрерывное асимптотическое решение четвертого порядка, содержащее четыре типа обыкновенных пограничных функций и три типа угловых пограничных функций вида

$$w = (u,v)' = \sum_{i=0}^{4} \varepsilon^i \Big(\overline{w}_i(x,t) + \Pi_i w(x,\tau_1) + \Omega_i w(x,\tau_2) + Q_i w(\xi_1,t) +$$
$$+ R_i w(\xi_2,t) + P_i w(\xi_1,\tau_1) + S_i w(\xi_1,\tau_2) + T_i w(\xi_2,\tau_1) \Big) + O(\varepsilon^5),$$

где $\overline{w}_i$ — члены регулярной части асимптотики, $\Pi_i w$, $\Omega_i w$ — пограничные функции, описывающие погранслой вблизи стороны $t = 0$ прямоугольника $\overline{G}$, $Q_i w$, $R_i w$ — пограничные функции, описывающие погранслой вблизи стороны $x = 0$ прямоугольника $\overline{G}$, $P_i w$, $S_i w$, $T_i w$ — угловые пограничные функции, $\tau_j = t/\varepsilon^j$, $\xi_j = x/\varepsilon^j$, $j = 1, 2$.

Асимптотическое решение краевой задачи для системы трех уравнений с частными производными первого порядка и разными степенями малого параметра при производных построено в [70].

Для уравнений эллиптического типа

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - A(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} - k^2(x,y)u = f(x,y,\varepsilon),$$

$$\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \varepsilon_1 A(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} - k^2(x,y)u = f(x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$$

соответственно в [71, 72] (параметры ε_1 и ε_2 считаются независимыми) при некоторых условиях построены асимптотические разложения решений краевых задач, содержащие разного типа пограничные функции от аргументов различных порядков. Для системы двух эллиптических уравнений с различными степенями малого параметра при производных в [73] доказано существование решения с внутренним переходным слоем в окрестности некоторой замкнутой кривой и построена асимптотика этого решения по малому параметру с произвольной точностью.

Асимптотика сингулярно возмущенных параболических уравнений, содержащая разнотемповые пограничные функции, построена в [74].

3.3. Дискретные уравнения

Асимптотическое решение двухточечной краевой задачи для дискретной трехтемповой системы вида

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \\ \varepsilon z(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \varepsilon A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \varepsilon A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & \varepsilon A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \\ z(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} u(k), \quad k = \overline{0, N-1},$$

$$x(0) = x^0 \quad \text{или} \quad x(N) = x^N, \quad y(0) = y^0, \quad z(N) = z^N$$

при предположении, что матрица A_{33} невырожденная, представлено в [75, стр. 120–126; 76, стр. 142–148].

В [77] рассмотрены три типа краевых задач для сингулярно возмущенных дискретных систем с двумя различными малыми параметрами. Для каждого из этих трех типов задач построены асимптотические решения, содержащие регулярные и пограничные функции. Соответствующие результаты для начальных задач получены в [78]. Асимптотика начальных и краевых задач для дискретных трехтемповых систем обсуждается также в [79, 80].

Метод пограничных функций асимптотического решения начальных и краевых задач для линейных сингулярно возмущенных дискретных систем со многими малыми параметрами использовался в [81].

3.4. Численное решение задач с двумя параметрами

Для численного решения сингулярно возмущенных задач с двумя малыми параметрами предложены различные методы. Укажем здесь некоторые публикации на эту тему.

Статьи [82–84] посвящены численным методам решения задач типа (5), (6). Для краевых задач этого вида в [85] предлагается метод решения, основанный на сплайнах. Случай разрывной правой части изучался в [86]. Для нелинейных уравнений численные методы использовались в [87, 88]. Начально-краевые задачи для параболического уравнения с двумя малыми параметрами при производных первого и второго порядков по пространственной переменной рассматривались в [89, 90], а начальная задача для уравнений такого типа — в [91]. Сеточная аппроксимация решения задачи Дирихле для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения конвекции-диффузии исследовалась в [92]. При этом тип пограничных слоев в окрестностях различных участков границы области зависит от соотношения между двумя параметрами. Случай неограниченных областей рассматривался в [93]. Статьи [94–96] имеют дело с запаздывающим аргументом, [97, 98] — с негладкими данными, [99] — с уравнением четвертого порядка, а [100] — с системой двух уравнений второго порядка. Для решения краевой задачи для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малыми множителями при вторых производных в [101] используется метод конечных элементов.

4. Качественные характеристики систем

Связь теории дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных с устойчивостью, по-видимому, впервые обсуждалась в работах И.С. Градштейна и А.Н. Тихонова (см., например, [26, 29]).

Один раздел в обзоре [24] посвящен асимптотической устойчивости линейных и нелинейных систем с малыми параметрами при производных. Полученные результаты основаны на асимптотической устойчивости системы меньшего порядка для медленных переменных и подсистем для быстрых переменных. Отметим, что ссылок на работы А.Б. Васильевой, И.С. Градштейна и А.Н. Тихонова в этом обзоре нет.

В [102] приводятся условия, обеспечивающие асимптотическую устойчивость многотемповой линейной системы с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = A_0 x + \sum_{j=1}^{N} A_{0j} z_j, \quad x(0) = x^0,$$

$$\varepsilon_i \frac{dz_i}{dt} = A_{i0} x + \sum_{j=1}^{N} A_{ij} z_j, \quad z_i(0) = z_i^0, \quad z_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad i = \overline{1, N},$$

для малых параметров одинакового порядка, т.е. предполагается, что отношения величин $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$ ограничены некоторыми положительными постоянными m_{ij}, M_{ij}:

$$m_{ij} \leqslant \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j} \leqslant M_{ij}. \tag{11}$$

Случай переменных коэффициентов и $m_{ij} = m$, $M_{ij} = M$ изучается в [103].

Как указано в [6], иногда сингулярно возмущенные задачи с малыми параметрами одинакового порядка сводятся к задаче с одним малым параметром μ посредством замены $\varepsilon_i = \beta_i \mu$. Недостаток такого подхода, состоящий в том, что коэффициенты β_i часто неизвестны, отмечен в [102, 103].

Система погранслоя в [102] записывается в виде

$$\frac{d\widetilde{z}}{d\tau} = D(\varepsilon) A_f \widetilde{z}, \quad \widetilde{z}(0) = z_0 - \overline{z}(0),$$

где

$$\tau = t/\mu, \quad \mu = \mu(\varepsilon) = (\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_N)^{1/N}, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)',$$
$$D(\varepsilon) = \mathrm{diag}(\mu/\varepsilon_1 I_{n_1}, \ldots, \mu/\varepsilon_N I_{n_N}),$$

$\overline{z}(t)$ — решение вырожденной системы, получающейся из исходной при $\varepsilon =$ $= 0$, а матрица A_f сформирована из коэффициентов исходной системы. В силу (11) все элементы матрицы $D(\varepsilon)$ ограничены. Используется понятие блочной D-устойчивости: матрица A_f называется блочной D-устойчивой, если

$$Re\lambda(DA_f) < 0$$

для всех $D = diag(\alpha_1 I_{n_1}, \ldots, \alpha_N I_{n_N})$ с произвольными положительными постоянными α_i.

В [104] рассматривается многотемповая линейная система с переменными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{k=1}^{r} B_{0k}(t)y_k + \sum_{k=1}^{s} C_{0k}(t)z_k,$$

$$\varepsilon_i \frac{dy_i}{dt} = A^{\varepsilon}_{i0}(t)x + \sum_{k=1}^{r} B^{\varepsilon}_{ik}(t)y_k + \sum_{k=1}^{s} C^{\varepsilon}_{ik}(t)z_k, \quad i = \overline{1, r}, \tag{12}$$

$$\mu_j \frac{dz_j}{dt} = A^{\mu}_{j0}(t)x + \sum_{k=1}^{r} B^{\mu}_{jk}(t)y_k + \sum_{k=1}^{s} C^{\mu}_{jk}(t)z_k, \quad j = \overline{1, s},$$

где $x \in \mathbb{R}^{n_0}$, $y_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $z_j \in \mathbb{R}^{l_j}$, а для положительных малых параметров ε_i, μ_j справедливы неравенства

$$\underline{\varepsilon} \leqslant \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k} \leqslant \overline{\varepsilon}, \quad \underline{\mu} \leqslant \frac{\mu_j}{\mu_k} \leqslant \overline{\mu},$$

$\underline{\varepsilon}$, $\overline{\varepsilon}$, $\underline{\mu}$, $\overline{\mu}$ — некоторые положительные числа. Введем обозначения $\varepsilon =$ $= (\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r)^{1/r}$, $\mu = (\mu_1 \ldots \mu_s)^{1/s}$, $y = (y'_1, \ldots, y'_r)'$, $z = (z'_1, \ldots, z'_s)'$. Предполагая, что $\mu/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, исходную систему можно записать в виде системы для переменных со скоростями изменения трех порядков

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + A_{01}(t)y + A_{02}(t)z,$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = D_1 A_{10}(t)x + D_1 A_{11}(t)y + D_1 A_{12}(t)z,$$

$$\mu \frac{dz}{dt} = D_2 A_{20}(t)x + D_2 A_{21}(t)y + D_2 A_{22}(t)z,$$

где

$$D_1 = \mathrm{diag}(\varepsilon/\varepsilon_1 I_{m_1}, \ldots, \varepsilon/\varepsilon_r I_{m_r}), \quad D_2 = \mathrm{diag}(\mu/\mu_1 I_{l_1}, \ldots, \mu/\mu_s I_{l_s}).$$

При некоторых условиях в [104] доказывается глобальная экспоненциальная устойчивость положения равновесия системы (12) (см. также [58]).

Используя теорию сингулярных возмущений и метод Ляпунова, в [105] (см. также [106]) изучается асимптотическая устойчивость для нелинейной нестационарной системы вида (1), где $\varepsilon_j = \varepsilon_1/\pi_j$, $j = \overline{1, m}$, $\pi_1 = 1$, значения $\pi_j \in [\pi_{jm}, 1]$, $j = \overline{2, m}$, не известны, но нижние границы этих значений $\pi_{jm} \in (0, 1]$ заданы. При этом находится верхняя граница параметров, при которых исходная возмущенная система асимптотически устойчива.

Приближенное решение уравнения Ляпунова для трехтемповых переменных путем решения трех систем меньшего порядка обсуждается в [107].

Условия асимптотической устойчивости нелинейных по медленной переменной и линейных по быстрым переменным систем получены в [108] в случае различных малых параметров одинакового порядка при производных.

Устойчивость интегрального многообразия медленных движений для системы вида (10) обсуждается в [2, стр. 129; 109, стр. 220–221].

Граница D-устойчивости дискретных многотемповых сингулярно возмущенных систем изучается в [110].

Достаточные условия асимптотической устойчивости для линейных систем с параметрами при производных и постоянным запаздыванием представлены в [111].

Различные вопросы, связанные с устойчивостью линейных и нелинейных систем с многотемповыми переменными, рассматривались также в [18, 112–119]. В [120] изучалась асимптотическая устойчивость для систем с малыми и большими параметрами при производных.

Стабилизация для достаточно малых значений параметров линейных стационарных сингулярно возмущенных систем с неизвестными малыми параметрами ε_i при производных в уравнениях для быстрых переменных, удовлетворяющих (11), где m_{ij}, M_{ij} известны, изучалась в [121]. Для нелинейных по медленной переменной и линейных по n быстрым переменным систем, для которых в [108, 122] исследовалась устойчивость, в [123] для такого класса систем при $n = 2$ изучается стабилизация. При этом используется алгебраическое матричное уравнение Риккати с коэффициентами, зависящими от медленной переменной.

Вопросы устойчивости адаптивных систем стабилизации с разнотемповыми процессами исследовались в [124]. В частности, рассматривался случай, когда процессы в фильтре являются быстрыми, процессы в адаптере — средними по скорости, а процессы, описываемые вырожденной системой, — медленными.

Для управляемой линейной сингулярно возмущенной системы с разными параметрами при производных и заданными ограничениями на значения управляющей функции и медленной переменной в [125] изучалось поведение множества достижимости возмущенной системы при стремлении к нулю малых параметров.

В [126–128] при формулировке условий управляемости для системы

$$\frac{dx}{dt} = A_{11}x + A_{12}y + B_1u,$$

$$E(\varepsilon)\frac{dy}{dt} = A_{21}x + A_{22}y + B_2u,$$

где $E(\varepsilon) = \mathrm{diag}(\varepsilon_1 I_{n_1}, \ldots, \varepsilon_N I_{n_N})$, $\det A_{22} \neq 0$, для подсистемы быстрых движений используется понятие D-управляемости. Приведем соответствующее определение. Пара (A, B) называется D-управляемой, если для любой диагональной матрицы D с положительными элементами на диагонали пара (DA, DB) управляема.

Условия управляемости линейной многотемповой системы

$$\varepsilon^{k_i}\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(\varepsilon)x_j + B_i(\varepsilon)u(t), \quad i = \overline{1, n}, \tag{13}$$

где k_i — целые числа такие, что $k_1 > k_2 > \ldots > k_n \geqslant 0$, $x_i = x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ и матрицы $\begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1j} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{j1} & \ldots & A_{jj} \end{pmatrix}$, $j = \overline{1, n-1}$, при $\varepsilon = 0$ обратимы, установлены в [129] на основе свойств управляемости систем меньшей размерности, к которым сводится исходная система при помощи замены переменных. При этом для достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ используется алгоритм сведения путем линейной замены переменных системы

$$\varepsilon^{k}\frac{dx}{dt} = (C_{11} + O(\varepsilon))x + (C_{12} + O(\varepsilon))y + (D_1 + O(\varepsilon))u(t),$$

$$\varepsilon^{m}\frac{dy}{dt} = C_{21}(\varepsilon)x + C_{22}(\varepsilon)y + D_2(\varepsilon)u(t),$$

где k, m — целые числа такие, что $k > m \geqslant 0$, а C_{11} — обратимая матрица, к двум уравнениям вида

$$\varepsilon^{k}\frac{d\xi}{dt} = (C_{11} + O(\varepsilon))\xi + (D_1 + O(\varepsilon))u(t),$$

$$\varepsilon^{m}\frac{d\eta}{dt} = (C_{22}(\varepsilon) - H(C_{12} + O(\varepsilon))\eta + (D_2(\varepsilon) - H(D_1 + O(\varepsilon)))u(t),$$

где матрица H определяется в виде разложения по степеням ε. Применив этот алгоритм к системе (13) $n-1$ раз, получим n уравнений

$$\varepsilon^{k_i}\frac{d\xi_i}{dt} = (E_i + O(\varepsilon))\xi_i + (G_i + O(\varepsilon))u(t), \quad \xi_i = \xi_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

При условии $\mathrm{rank}(G_i, E_iG_i, \ldots, E_i^{n_i-1}G_i) = n_i$ доказано, что система (13) полностью управляема при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$.

Для частного случая системы (13) ($n = 3$) в [130] получены условия полной управляемости в терминах решения рекуррентных матричных алгебраических уравнений, называемых определяющими уравнениями системы, которые, по-видимому, впервые были использованы для исследования относительной управляемости линейных динамических систем с запаздыванием в [131]. Метод определяющих уравнений используется также в [132] для изучения полной и относительной управляемости трехтемповых систем с множителями при производных 1, ε^k, ε^m, где k, m — целые положительные числа.

Наряду с обсуждением управляемости линейных трехтемповых систем в [2, стр. 170–172] приводится утверждение для нелинейных трехтемповых систем, касающееся локальной управляемости вблизи начала координат. Управляемости и наблюдаемости вблизи начала координат многотемповых нелинейных систем, линейных по быстрым переменным и управлению, посвящена статья [133].

5. Асимптотический анализ задач оптимального управления без ограничений на управление

При построении асимптотических решений задач оптимального управления используются два подхода. Более распространенный состоит в построении асимптотического решения задачи, вытекающей из условий оптимальности управления. Другой подход, называемый прямой схемой (см., например, [9, 134]), заключается в непосредственной подстановке постулируемого асимптотического разложения решения в условие задачи и построении серии задач для нахождения членов асимптотики. Этот подход позволяет использовать пакеты программ решения задач оптимального управления для нахождения членов асимптотического разложения решения и устанавливать невозрастание значений минимизируемого функционала при использовании членов разложения оптимального управления высших порядков.

В обзоре [24] имеется раздел, посвященный линейно-квадратичным регуляторам на бесконечном промежутке времени. Там же приводятся алгоритмы различных методов решения алгебраических матричных уравнений Риккати с несколькими малыми параметрами. В частности, в [135] для алгебраического уравнения Риккати со знаконеопределенным квадратичным членом, возникающего в теории H_∞, изучается асимптотическая структура решения и предлагается итерационный метод его нахождения.

Задачи оптимального управления на бесконечном промежутке в случае малых параметров одинакового порядка (см. (11)), стоящих перед производными в уравнении состояния, исследовались в [102, 136–141].

В [102] асимптотическое поведение решения задачи минимизации квадратичного функционала

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} (y'y + u'Ru)\,dt, \quad R > 0, \quad y = C_0 x + \sum_{j=1}^{N} C_j z_j, \tag{14}$$

на траекториях линейной системы

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = A_0 x + \sum_{j=1}^{N} A_{0j} z_j + B_0 u, \quad x(0) = x^0,\\
&\varepsilon_i \frac{dz_i}{dt} = A_{i0} x + \sum_{j=1}^{N} A_{ij} z_j + B_i u, \quad z_i(0) = z_i^0, \quad i = \overline{1, N},
\end{aligned}
$$

в случае малых параметров при производных одинакового порядка изучалось при некоторых условиях на основе асимптотики решения алгебраического матричного уравнения Риккати, имеющего следующую структуру:

$$
\begin{pmatrix} K_1(\varepsilon) & \mu(\varepsilon)K_2(\varepsilon) \\ \mu(\varepsilon)K_2(\varepsilon)' & \mu(\varepsilon)K_3(\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \mu(\varepsilon) = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N)^{1/N}.
$$

Подобная (14), (15) задача для уравнения состояния с одним малым и одним большим параметрами при производных рассматривалась в [142].

Отметим здесь статью [136], где, в отличие от [102], для задачи (14), (15) изучался критический (нестандартный) случай, когда быстрая переменная состояния не может быть однозначно выражена из ее уравнения при нулевом значении малого параметра.

На практике часто малые параметры ε_i в (15) не известны. Поэтому представляет интерес построение регуляторов, не зависящих от малых параметров. Значение критерия качества для построенных в [102, 136] регуляторов отличается от оптимального на $O(\|\varepsilon\|)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$.

Для критического случая со специальным видом уравнений для быстрых переменных, связанных между собой посредством медленных переменных, в [139] предложен алгоритм построения регулятора, не зависящего от неизвестных малых параметров, значение критерия качества для которого отличается от оптимального на $O(\|\varepsilon\|^2)$. Для одного класса линейно-квадратичных задач на бесконечном промежутке с трехтемповыми переменными состояния в [137, стр. 117–132] подробно описан алгоритм сведения решения к решению трех независимых алгебраических матричных уравнений Риккати, которые предлагается решать итерационным методом Ньютона (см. также [138]).

В [140] для задачи минимизации функционала

$$
J = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} z(t)' z(t)\, dt, \quad z(t) = Cx(t) + Du(t),
$$

$$
x(t) = (x_0(t)', x_1(t)', x_2(t)')', \quad u(t) = (u_1(t)', u_2(t)')',
$$

на траекториях системы со слабосвязанными быстрыми переменными

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = A_{00}x_0(t) + A_{01}x_1(t) + A_{02}x_2(t) + B_{01}u_1(t) + B_{02}u_2(t), \quad x_0(0) = x_0^0,$$

$$\varepsilon_1 \frac{dx_1(t)}{dt} = A_{10}x_0(t) + A_{11}x_1(t) + \varepsilon_3 A_{12}x_2(t) + B_{11}u_1(t), \quad x_1(0) = x_1^0,$$

$$\varepsilon_2 \frac{dx_2(t)}{dt} = A_{20}x_0(t) + \varepsilon_4 A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_{22}u_2(t), \quad x_2(0) = x_2^0$$

построен регулятор, не зависящий от неизвестных значений малых параметров, значение критерия качества для которого отличается от оптимального на $O(\varepsilon_1\varepsilon_2)$.

Для последней задачи при помощи итерационного метода в [141] построен регулятор, обеспечивающий лучшее приближение значения критерия качества к оптимальному, а именно, значение критерия качества для построенного регулятора отличается от оптимального на $O(\|\varepsilon\|^{2^{i+1}})$, где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)'$, i — номер итерации.

Для системы вида (15) при некоторых условиях в [143] построено субоптимальное стабилизирующее управление в форме обратной связи для задачи минимизации квадратичного функционала на бесконечном промежутке.

Декомпозиция на N однотемповых подсистем системы уравнений с множителями $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$ при производных $(0 < \varepsilon_N << \varepsilon_{N-1} << \ldots << \varepsilon_2 << \varepsilon_1)$ для переменных состояния и сопряженных переменных, полученной из условия оптимальности управления для задачи минимизации квадратичного функционала на бесконечном промежутке, описана в [144]. В этой статье также приводится декомпозиция соответствующего алгебраического матричного уравнения Риккати на системы низшего порядка.

Задача об оптимальном линейном регуляторе, минимизирующем квадратичный функционал

$$J = \frac{1}{2}y(1)'Fy(1) + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (y(t)'Q(t)y(t) + u(t)'R(t)u(t))\,dt$$

на траекториях трехтемповой линейной системы

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + A_{13}y_3 + B_1u, \\ \varepsilon_1\frac{dy_2}{dt} &= A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + A_{23}y_3 + B_2u, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\frac{dy_3}{dt} &= A_{31}y_1 + A_{32}y_2 + A_{33}y_3 + B_3u \end{aligned} \tag{16}$$

с закрепленным левым концом, где $y_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $u \in \mathbb{R}^r$, $A_{ij} = A_{ij}(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $B_i = B_i(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, рассматривается в [109, стр. 262–273] (см., также [2, стр. 195–200]).

Оптимальное управление для этой задачи имеет вид $u = -R^{-1}B'Ky$, где K — положительно определенное решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\frac{dK}{dt} = -KA - A'K + KSK - Q, \quad S = BR^{-1}B',$$

с конечным условием

$$K(1, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = F.$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21}/\varepsilon_1 & A_{22}/\varepsilon_1 & A_{23}/\varepsilon_1 \\ A_{31}/\varepsilon_1\varepsilon_2 & A_{32}/\varepsilon_1\varepsilon_2 & A_{33}/\varepsilon_1\varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2/\varepsilon_1 \\ B_3/\varepsilon_1\varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & \varepsilon_1 F_{12} & \varepsilon_1\varepsilon_2 F_{13} \\ \varepsilon_1 F'_{12} & \varepsilon_1 F_{22} & \varepsilon_1\varepsilon_2 F_{23} \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 F'_{13} & \varepsilon_1\varepsilon_2 F'_{23} & \varepsilon_1\varepsilon_2 F_{33} \end{pmatrix}.$$

Учитывая вид F, матрица K ищется в аналогичном виде. Ее блоки K_{ij}, $j = \overline{1,3}$, $i = \overline{1,j}$, должны удовлетворять трехтемповой сингулярно возмущенной системе. При некоторых условиях для построения асимптотического решения этой системы производится асимптотическое расщепление уравнений и конечных условий с помощью метода интегральных многообразий, изложенного, например, в [109, п. 9].

Алгоритм приведения к блочно-диагональной форме линейной нестационарной управляемой системы с множителями при производных вида (16) описан в [109, стр. 246–248] (см. также [2, стр. 146–148]). При этом расщепляющие преобразования ищутся в виде асимптотических разложений. Для большего числа параметров частный случай обсуждается в [145, п. 9].

Приведем алгоритм метода прямой схемы из [146] для асимптотического решения нелинейной задачи оптимального управления с трехтемповыми переменными состояния вида

$$J_\varepsilon(u) = \int_0^T F(x, y, z, u, t, \varepsilon)\, dt \to \min_u,$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z, u, t, \varepsilon), \quad x(0) = x^0, \tag{17}$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = g(x, y, z, u, t, \varepsilon), \quad y(0) = y^0,$$

$$\varepsilon^2\frac{dz}{dt} = h(x, y, z, u, t, \varepsilon), \quad z(0) = z^0.$$

Используя идеи метода пограничных функций из [1, стр. 114–123; 43], решение задачи (17) ищется в виде разложения

$$v(t,\varepsilon) = \overline{v}(t,\varepsilon) + \sum_{i=0}^{1}(\Pi_i v(\tau_i,\varepsilon) + Q_i v(\sigma_i,\varepsilon)), \quad v = (x', y', z', u')', \tag{18}$$

где

$$\overline{v}(t,\varepsilon) = \sum_{j\geqslant 0} \varepsilon^j \overline{v}_j(t), \quad t \in [0,T], \quad \tau_i = t/\varepsilon^{i+1} \geqslant 0, \quad \sigma_i = (t-T)/\varepsilon^{i+1} \leqslant 0,$$

$$\Pi_i v(\tau_i,\varepsilon) = \sum_{j\geqslant 0} \varepsilon^j \Pi_{ij} v(\tau_i), \quad Q_i v(\sigma_i,\varepsilon) = \sum_{j\geqslant 0} \varepsilon^j Q_{ij} v(\sigma_i), \quad i = 0,1,$$

$\overline{v}_j(t)$ — регулярные функции от аргумента t, $\Pi_{ij}v(\tau_i)$ — пограничные функции экспоненциального типа в окрестности $t = 0$ от аргумента τ_i, $Q_{ij}v(\sigma_i)$ — пограничные функции экспоненциального типа в окрестности $t = T$ от аргумента σ_i, т.е. справедливы неравенства

$$\| \Pi_{ij} v(\tau_i) \| \leqslant c \exp(-\text{æ}\tau_i), \quad \tau_i \geqslant 0, \quad \| Q_{ij} v(\sigma_i) \| \leqslant c \exp(\text{æ}\sigma_i), \quad \sigma_i \leqslant 0,$$

где $c > 0$ и $\text{æ} > 0$ означают постоянные, не зависящие от аргументов рассматриваемых функций.

Подставим разложение (18) в уравнения системы (17) и правую часть представим в виде асимптотической суммы слагаемых, зависящих от t, τ_i, σ_i, $i = 0,1$ (соответствующие формулы для такого представления см., например, в [147]). Затем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, отдельно зависящие от t, τ_i, σ_i, $i = 0,1$, получаем соотношения для нахождения регулярных и пограничных членов асимптотики. Подставим (18) в функционал $J_\varepsilon(u)$ и представим подынтегральную функцию в виде асимптотической суммы слагаемых, зависящих от t, τ_i, σ_i, $i = 0,1$. Далее произведем разложение по степеням малого параметра, при этом в интегралах от выражений, зависящих от τ_i и σ_i, $i = 0,1$, перейдем к интегрированию соответственно по промежуткам $[0,+\infty)$ и $(-\infty,0]$. В итоге получим разложение функционала по степеням ε

$$J_\varepsilon(u) = \sum_{j\geqslant 0} \varepsilon^j J_j.$$

Анализируя коэффициенты J_j, находим более простые, чем исходная, задачи оптимального управления для определения членов ряда (18). В [146] объясняется получение явного вида задач для нахождения асимптотического решения нулевого порядка, а также приводятся оценки близости построенного асимптотического решения к точному решению для управления, траектории состояния и критерия качества.

Для линейно-квадратичного случая задачи (17) при помощи метода прямой схемы в [148] построено асимптотическое приближение решения нулевого порядка, а в [149] — произвольного порядка. При этом доказано, что соотношения для членов асимптотического решения двухточечной краевой задачи, вытекающей из условия оптимальности управления для исходной возмущенной задачи, соответствуют краевым задачам, полученным из условий оптимальности управления построенных задач для отыскания членов асимптотики при помощи метода прямой схемы.

Для нечеткой сингулярно возмущенной модели, определяемой дифференциальными уравнениями с разными малыми параметрами при производных, в [150] рассматривается многоцелевое управление.

В [151, 152] на основе асимптотики решения двухточечной краевой задачи, вытекающей из условия оптимальности управления, построена асимптотика решения задачи минимизации квадратичного функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(w(k)'Qw(k) + u(k)'Ru(k)),$$

где $w(k) = (x(k)', \varepsilon_1 y(k)', \varepsilon_1\varepsilon_2 z(k)')'$, на траекториях трехтемповой системы

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(k) \\ \varepsilon_1 y(k) \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 z(k) \end{pmatrix} + Bu(k)$$

с заданными начальными условиями

$$x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \quad z(0) = z^0.$$

Обобщение этой задачи на случай многих малых параметров рассматривается в [153] (см. также [154]).

6. “Скрытые” разнотемповые быстрые переменные

Иногда разнотемповые быстрые переменные могут быть “скрытыми”, т.е. их наличие не видно из постановки задачи, а уравнения для них появляются в результате дополнительных преобразований (например, задачи с “дешевыми” управлениями, цены которых имеют разный порядок, сингулярно возмущенные уравнения в специальном критическом случае и в случае кратных корней вырожденного уравнения).

Особенность задач с дешевым управлением заключается в том, что при нулевом значении малого параметра и отсутствии ограничений на управление получаются задачи с особым управлением, т.е. из принципа максимума Понтрягина [155] нельзя выразить управление через сопряженную переменную и переменную состояния. Большинство работ в этом направлении посвящено линейно-квадратичным задачам, в критерии качества которых перед управлениями стоит один малый параметр, т.е. управления имеют одинаковый порядок “дешевизны”. Такие работы приведены, например, в [8, 9, 17, 147].

В качестве мотивации изучения задач с дешевыми управлениями разных порядков в [156] указана необходимость обеспечения "бесконечных" собственных значений различных порядков в задаче распределения полюсов. Задачи такого типа возникают также при исследовании моделей многосекторной экономики, когда управляющие функции имеют разный уровень "дешевизны". Если использовать известный метод линейной свертки критериев для многокритериальных задач, где "цена" некоторых управлений мала по сравнению с другими, то получаются задачи с дешевыми управлениями.

Приведем работы, посвященные дешевым управлениям, при изучении которых возникают разнотемповые быстрые переменные.

На основе асимптотики решения алгебраического уравнения Риккати в [156] исследуется асимптотическая структура оптимального управления в форме обратной связи и оптимальной траектории для задачи

$$\int_0^{+\infty} \left(x'Wx + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j^2 u_j' u_j \right) dt \to \min,$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{j=1}^{N} B_j u_j, \quad x(0) = x^0,$$

где ε_j — возрастающая функция малого параметра ε такая, что $\varepsilon_j = \varepsilon_j(\varepsilon) > > 0$ и $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon_{j+1}(\varepsilon)/\varepsilon_j(\varepsilon) = 0$, $\varepsilon_0(\varepsilon) = 1$. Обзор работ в этом направлении, включая критический случай, приведен в [24].

Асимптотическое решение произвольного порядка, содержащее пограничные функции четырех типов, при помощи метода прямой схемы построено в [157] для линейно-квадратичной задачи с дешевыми управлениями двух различных порядков малости вида

$$\frac{1}{2}\int_0^{T} \left(z'W(t,\varepsilon)z + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon^{2k} (\overset{(k)}{v})' \overset{(k)}{R}(t,\varepsilon) \overset{(k)}{v} \right) dt \to \min,$$

$$\frac{dz}{dt} = A(t,\varepsilon)z + C(t,\varepsilon)v, \quad t \in [0,T], \quad z(0,\varepsilon) = z^0,$$

где

$$\overset{(k)}{v}(t,\varepsilon) \in \mathrm{I\!R}^{n_k}, \quad v(t,\varepsilon) = \left(\overset{(1)}{v}(t,\varepsilon)', \overset{(2)}{v}(t,\varepsilon)' \right)', \quad z(t,\varepsilon) \in \mathrm{I\!R}^{n}, \quad n = n_1 + n_2,$$

при всех $t \in [0,T]$ матрицы $W(t,\varepsilon)$ и $\overset{(k)}{R}(t,\varepsilon)$ симметричны, $W(t,0) > 0$, $\overset{(k)}{R}(t,0) > 0$, $k = 1, 2$, а матрица $C(t,0)$ обратима. Путем замены переменных рассматриваемая задача преобразуется к задаче оптимального управления с трехтемповыми переменными состояния в критическом случае, когда вырожденное уравнение состояния не разрешимо однозначно относительно быстрой переменной. Оценки близости построенного асимптотического решения к точному и факт невозрастания значений минимизируемого функционала при использовании следующего приближения оптимального управления доказаны в [158]. Подробное изложение алгоритма построения асимптотики для конкретного примера приведено в [159].

В [160] (см. также [161]) при некоторых условиях построено асимптотическое решение начальной задачи для слабонелинейного уравнения вида

$$\varepsilon^2 \frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon f(x,t,\varepsilon), \quad t \in [0,T], \tag{19}$$

в критическом случае (матрица $A(t)$ вырождена). При этом асимптотика содержит пограничные функции двух типов от аргументов $\tau_1 = t/\varepsilon$ и $\tau_2 = t/\varepsilon^2$:

$$x(t,\varepsilon) = \overline{x}(t,\varepsilon) + \Pi_1 x(\tau_1,\varepsilon) + \Pi_2 x(\tau_2,\varepsilon). \tag{20}$$

Для понимания алгоритма построения асимптотического решения начальной задачи для уравнения (19) полезен предложенный в [162] проекторный подход, использующий ортогональные проекторы на $\mathrm{Ker}\mathrm{A}(t)$ и $\mathrm{Ker}A(t)'$.

В [160] рассматривался также дискретный аналог начальной задачи для уравнения (19)

$$x(t+\varepsilon^2) = B(t)x(t) + \varepsilon f(x(t),t,\varepsilon), \quad x(0) = x^0,$$

где $t = 0, \varepsilon^2, 2\varepsilon^2, \ldots$ $(t \leqslant T)$, а матрица $B(t)$ имеет собственное значение $\lambda(t) \equiv$ $\equiv 1$. Асимптотика решения этой задачи строится в виде (20).

Асимптотика решения двухточечной краевой задачи для линейной системы с множителями 1 и ε при производных в критическом случае, содержащая пограничные функции от аргументов

$$\frac{t}{\varepsilon^i}, \quad \frac{t-T}{\varepsilon^i}, \quad i = 1,2, \tag{21}$$

построена в [163].

Асимптотическое решение нулевого порядка получено при помощи метода прямой схемы в [164] для линейно-квадратичной задачи управления слабоуправляемой системой вида

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^T (x'W(t,\varepsilon)x + 2x'g(t,\varepsilon) + \varepsilon^2 u'R(t,\varepsilon)u)\,dt \to \min,$$

$$\varepsilon^2 \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + \varepsilon^2 B(t,\varepsilon)u + \varepsilon f(t,\varepsilon), \quad x(0,\varepsilon) = x^0$$

в критическом случае (матрица $A(t,0)$ вырождена). Асимптотика решения содержит пограничные функции четырех типов от аргументов (21).

Построению и обоснованию асимптотики решения краевой задачи

$$\varepsilon^4 \frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon \frac{dx}{dt} A\left(\varepsilon^3 \frac{dx}{dt}, x, t\right) + B\left(\varepsilon^3 \frac{dx}{dt}, x, t\right), \quad t \in (0,1),$$

$$x(0,\varepsilon) = x^0, \quad x(1,\varepsilon) = x^1$$

посвящена статья [165]. При этом левая пограничная функция зависит от аргумента t/ε^3, а правая — от $(t-1)/\varepsilon$. Такая асимптотика для более простого уравнения рассмотрена в [166].

Параболическая задача с двумя малыми параметрами (ε^2 при u_{xx}, μ при u_x) и разрывными данными, асимптотика решения которой при $\varepsilon << \mu$ содержит быстрые переменные относительно t и x со скоростями изменения различных порядков, изучалась в [167].

Параболическому уравнению с разными степенями малого параметра при производных и условием периодичности по временному аргументу, асимптотическое решение которого имеет внутренний и пограничные слои, зависящие от растянутых переменных разного порядка, посвящена статья [168].

В.Ф. Бутузовым и его учениками проводилось активное исследование сингулярно возмущенных задач с кратным корнем вырожденного уравнения, которые, по-видимому, впервые изучались А.Б. Васильевой [169]. Оказалось, что во многих таких задачах поведение решения в пограничном (внутреннем) слое качественно отличается от поведения в случае простого корня вырожденного уравнения. Пограничный (внутренний) слой становится многозонным с различным поведением решения в разных зонах. В частности, в случае двукратного корня вырожденного уравнения $f(x,t,0) = 0$ в [170] построено асимптотическое решение краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

$$\varepsilon^2 \frac{d^2x}{dt^2} = f(x,t,\varepsilon), \quad t \in (0,1),$$

$$x(0,\varepsilon) = x^0, \quad x(1,\varepsilon) = x^1.$$

Последнее уравнение с краевыми условиями

$$x(0,\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon^\alpha p, \quad x(1,\varepsilon) = \varphi(1) + \varepsilon^\alpha q,$$

где $\varphi(t)$ — двукратный корень вырожденного уравнения, рассматривалось в [171]. Доказано, что при $0 < \alpha < 1/2$, $p > 0$, $q > 0$ пограничные слои являются трехзонными, как и при $\alpha = 0$ в [170], но масштабы погранслойных переменных зависят от α; при $\alpha = 1/2$ пограничные слои становятся однозонными и остаются таковыми для $\alpha > 1/2$, причем масштабы погранслойных переменных уже не зависят от α.

Асимптотическое решение краевой задачи для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с множителями ε^2 и ε при вторых производных построено в [172] в случае, когда вырожденное уравнение для первой неизвестной переменной имеет двукратный корень относительно этой переменной. При этом для первой неизвестной переменной рассматриваются краевые условия Дирихле, а для второй — краевые условия Неймана. Асимптотика подобной задачи в случае краевых условий Неймана для обеих переменных приведена в [173], а в случае краевых условий Неймана для первой неизвестной и условий Дирихле для второй неизвестной — в [174].

Асимптотика начально-краевой задачи для параболического уравнения

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=f(u,x,t,\varepsilon),$$

$$u(x,0,\varepsilon)=u^0(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t,\varepsilon)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon)=0,$$

где

$$(x,t)\in(0,1)\times(0,T],\quad f(u,x,t,\varepsilon)=-h(x,t)(u-\varphi(x,t))^3+\varepsilon f_1(u,x,t,\varepsilon),$$

т.е. корень вырожденного уравнения является трехкратным, при некоторых условиях построена в [175]. Погранслойные переменные имеют вид $\tau_1=t/\varepsilon^2$, $\tau_2=t/\varepsilon^{4/3}$, $\zeta_1=x/\varepsilon^{2/3}$, $\zeta_2=(1-x)/\varepsilon^{2/3}$, регулярная и погранслойные части представляют собой ряды по целым степеням $\varepsilon^{1/3}$, а пограничный слой в окрестности начального момента времени имеет три зоны. Еще одной особенностью случая трехкратного корня вырожденного уравнения является то, что теперь важную роль в построении асимптотики играют члены порядка ε, входящие в правую часть уравнения. Периодические по t решения для параболического уравнения изучаются в [176–178] при различных предположениях на кратный корень вырожденного уравнения.

Построение и обоснование асимптотики по малому параметру решения краевой задачи для сингулярно возмущенной стационарной частично диссипативной системы уравнений в случае, когда одно из уравнений вырожденной системы имеет двукратный корень, рассматривается в [179]. Кратность корня является причиной того, что пограничный слой оказывается многозонным, а стандартный алгоритм построения асимптотики погранслойного решения становится недостаточным и требует существенной модификации.

Отметим здесь цикл работ, выполненных А.М. Ильиным вместе со своими учениками (см. [180]), посвященных классу задач с малым параметром, характеризующихся тем, что при построении асимптотики их решения по степеням малого параметра в коэффициентах рядов обнаруживаются разного типа сингулярности. Такого рода задачи названы, по-видимому, впервые в [181] бисингулярными. В [182] (последней работе из этого цикла в [180]) изучалась начальная задача вида

$$\varepsilon \frac{dx_1}{dt} = -x_1^2 + x_2^3 + t,$$

$$\varepsilon \frac{dx_2}{dt} = x_1^3 - x_2^2 + t^3,$$

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad t \in [0, T].$$

Построенное асимптотическое решение имеет вид различных рядов на четырех промежутках из отрезка $[0, T]$, коэффициенты которых зависят от аргументов t/ε, $t/\varepsilon^{2/3}$, $t/\varepsilon^{4/7}$ и t соответственно.

Обзор результатов, связанных с дополнительными асимптотическими слоями в асимптотике решений сингулярно возмущенных систем нелинейных дифференциальных уравнений типа А.Н. Тихонова в случае нарушения условия устойчивости, которое предполагалось в [1], приведен в [183, п. 5].

Быстрые переменные со скоростями изменения различных порядков рассматриваются и при применении метода согласования асимптотических разложений для задачи Дирихле в прямоугольнике для уравнения

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - a(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y),$$

где $a(x, y) > 0$ (см. [184]).

Процесс согласования асимптотических разложений используется также в [185, стр. 142–154] при построении асимптотики решения бисингулярных краевых задач вида

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} - xp(x) \frac{du}{dx} - q(x)u = f(x), \quad x \in [0, 1], \quad p(x) > 0, \quad q(x) > 0,$$
$$u(0, \varepsilon) = 0, \quad u(1, \varepsilon) = 0.$$

Асимптотика решения бисингулярной начально-краевой задачи для одной системы линейных параболических уравнений построена в [186] без использования процедуры согласования.

Многопараметрические сингулярно возмущенные начальные и краевые дискретные задачи для уравнения вида $\sum\limits_{i=n}^{0} a_i x(k+i) = au(k)$, где коэффициенты a_i представляют собой постоянные числа, умноженные на произведение некоторых степеней малых параметров, изучались в [187]. Асимптотическое разложение решений таких задач содержит регулярную функцию и различные пограничные функции, число которых равно числу исчезающих при вырождении дополнительных условий.

7. Задачи с ограничением на управление

Использование асимптотических методов встречает значительные трудности при решении сингулярно возмущенных задач с ограничением на управление в форме замкнутых неравенств, поскольку возникают негладкие решения. Эффективным методом асимптотического решения задач такого типа является построение асимптотики точек переключения управления (см., например, [188]). Этот подход реализован в [189] для следующей задачи оптимального быстродействия для линейной стационарной системы

$$\frac{dw}{dt} = A(\varepsilon)w + b(\varepsilon)u, \quad w(0) = w^0, \quad w = (x', y', z')', \tag{22}$$

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2/\varepsilon & B_2/\varepsilon & C_2/\varepsilon \\ A_3/\varepsilon^2 & B_3/\varepsilon^2 & C_3/\varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad b(\varepsilon) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2/\varepsilon \\ b_3/\varepsilon^2 \end{pmatrix},$$

$$u(t) \in \mathbb{R}, \quad |u(t)| \leqslant 1, \quad t \in [0, T],$$

$$w(T) = 0, \quad J(u) = T \to \min.$$

Здесь x, y, z — векторы произвольной размерности и предполагается выполненным условие

I: матрицы C_3 и $B_2 - C_2 C_3^{-1} B_3$ устойчивые.

Как следует из принципа максимума Понтрягина, оптимальное управление в этой задаче является релейным. Опираясь на метод пограничных функций, в [189] предложен алгоритм, позволяющий строить асимптотические приближения к решению рассматриваемой задачи произвольного порядка точности. Суть алгоритма состоит в построении асимптотики точек переключения оптимального управления и момента оптимального быстродействия в виде разложений по неотрицательным целым степеням малого параметра. При применении алгоритма происходит своеобразная декомпозиция исходной задачи на три задачи меньшей размерности, одной из которых является вырожденная задача.

В [190] исследуется линейная стационарная терминальная задача оптимального управления с уравнением состояния (22) и ограничением типа равенства на правый конец траектории, т.е.

$$Hw(T) = g, \quad H = \operatorname{diag}(H_1, H_2, H_3), \quad g = (g_1', g_2', g_3')',$$

$$c(\varepsilon)'w(T) \to \max, \quad c(\varepsilon) = (c_1', \varepsilon c_2', \varepsilon^2 c_3')'.$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $z \in \mathbb{R}^{n_3}$, $g_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $i = \overline{1,3}$, $m_1 < n_1$, $m_2 \leqslant n_2$, $m_3 \leqslant n_3$. Считается выполненным условие I.

Предложенный в [190] алгоритм решения рассматриваемой задачи в идейном плане близок алгоритму из [189]. Он основан на построении асимптотических приближений к точкам переключения оптимального управления.

Одни из этих точек близки к соответствующим точкам переключения оптимального управления в вырожденной задаче, а остальные группируются вблизи конечного момента T и отстоят от него на величины порядка ε и ε^2. Реализация алгоритма предполагает решение трех невозмущенных задач оптимального управления, в которых переменные состояния размерности n_1, n_2, n_3 соответственно, причем первой из них является вырожденная задача.

Разработанный в [190] алгоритм может быть применен (см. [191]) для асимптотического решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с большой длительностью процесса

$$\frac{dy}{dt} = A_1 y + A_2 z + b_1 v, \quad y(0) = y^0,$$

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = A_3 y + A_4 z + b_2 v, \quad z(0) = z^0,$$

$$v(t) \in \mathbb{R}, \quad |v(t)| \leqslant 1, \quad t \in [0, T/\varepsilon], \quad H_1 y(T/\varepsilon) = g_1, \quad H_2 z(T/\varepsilon) = g_2,$$

$$J(v) = \int\limits_0^{T/\varepsilon} (c_1' y(t) + c_2' z(t) + h v(t))\, dt \to \max,$$

где $y \in \mathbb{R}^{n_1}$, $z \in \mathbb{R}^{n_2}$, $g_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $i = 1, 2$, и $m_1 \leqslant n_1$, $m_2 \leqslant n_2$. Переходя к медленному времени $s = \varepsilon t$ и полагая $u(s) = v(s/\varepsilon)$, последнюю задачу можно записать в виде эквивалентной задачи терминального управления

$$\frac{dx}{ds} = c_1' y + c_2' z + h u, \quad x(0) = 0,$$

$$\varepsilon \frac{dy}{ds} = A_1 y + A_2 z + b_1 u, \quad y(0) = y^0,$$

$$\varepsilon^2 \frac{dz}{ds} = A_3 y + A_4 z + b_2 u, \quad z(0) = z^0,$$

$$|u(s)| \leqslant 1, \quad s \in [0, T], \quad H_1 y(T) = g_1, \quad H_2 z(T) = g_2,$$

$$J_0(u) = x(T) \to \max.$$

Эта задача является частным случаем задачи из [190] и, следовательно, может быть решена с помощью предложенного в этой статье алгоритма, если выполнено условие I, которое в данном случае заключается в требовании устойчивости матриц A_4 и $A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3$.

Опираясь на алгоритм построения программных асимптотически оптимальных управлений из [190], в [192] предложен алгоритм построения асимптотически оптимального регулятора типа обратной связи в задаче терминального управления линейной стационарной сингулярно возмущенной системой со скалярными управлениями, значения которых принадлежат замкнутому интервалу, и с множителями при производных 1, ε и ε^2.

В [193] для нелинейной трехтемповой системы управления с компактным множеством значений управления используется метод усреднения для построения предельной системы в форме дифференциального включения для траектории медленного движения. Приводятся достаточные условия равномерной сходимости медленных траекторий при стремлении к нулю малых параметров, стоящих при производных в уравнении состояния. Эти результаты распространяются при помощи другой техники на случай систем управления с многотемповыми переменными в [194].

8. Игровые задачи

В [195] для системы

$$E_\varepsilon \frac{dx}{dt} = Ax + B_1 u_1 + B_2 u_2, \quad x(0) = x^0, \tag{23}$$

где

$$x = (x_0', x_1', x_2')', \quad x_j \in \mathbb{R}^{n_j}, \quad j = 0,1,2, \quad u_i \in \mathbb{R}^{m_i}, \quad i = 1,2,$$

$$E_\varepsilon = \operatorname{diag}(I_{n_0}, \varepsilon_1 I_{n_1}, \varepsilon_2 I_{n_2}), \quad A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{10} & A_{11} & 0 \\ A_{20} & 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_{01} \\ B_{11} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} B_{02} \\ 0 \\ B_{22} \end{pmatrix},$$

ε_1, ε_2 — одинакового порядка малые параметры, для которых существует $\lim\limits_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0} \varepsilon_1/\varepsilon_2$, ищется оптимальная по Парето ситуация u, представляющая собой пару стратегий $u = (u_1', u_2')'$, минимизирующая линейную свертку функций выигрыша $J = \gamma_1 J_1 + \gamma_2 J_2$, $\gamma_j \in (0,1)$, $j = 1,2$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, где J_j задается формулой

$$J_j = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} (y_j(t)' y_j(t) + u_j(t)' R_j u_j(t)) dt, \quad R_j > 0, \tag{24}$$
$$y_j = C_{j0} x_0 + C_{jj} x_j, \quad j = 1,2.$$

Заметим, что в (23) матрицы A_{jj} могут быть вырожденными. Решение этой задачи в форме обратной связи задается формулой

$$u_j^*(t) = -\frac{1}{\gamma_j} R_j^{-1} B_{j\varepsilon}' P_\varepsilon x(t), \quad j = 1,2,$$

где P_ε удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению Риккати

$$A_\varepsilon' P_\varepsilon + P_\varepsilon A_\varepsilon - P_\varepsilon S_\varepsilon P_\varepsilon + Q = 0. \tag{25}$$

Здесь

$$A_\varepsilon = E_\varepsilon^{-1}A, \quad S_\varepsilon = 1/\gamma_1 S_{1\varepsilon} + 1/\gamma_2 S_{2\varepsilon}, \quad S_{j\varepsilon} = B_{j\varepsilon}R_j^{-1}B'_{j\varepsilon}, \quad j = 1, 2,$$

$$B_{1\varepsilon} = \begin{pmatrix} B_{01} \\ \varepsilon_1^{-1}B_{11} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{2\varepsilon} = \begin{pmatrix} B_{02} \\ 0 \\ \varepsilon_2^{-1}B_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \gamma_1 Q_1 + \gamma_2 Q_2,$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} C'_{10}C_{10} & C'_{10}C_{11} & 0 \\ C'_{11}C_{10} & C'_{11}C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} C'_{20}C_{20} & 0 & C'_{20}C_{22} \\ 0 & 0 & 0 \\ C'_{22}C_{20} & 0 & C'_{22}C_{22} \end{pmatrix}.$$

При некоторых условиях изучается асимптотическая структура решения уравнения (25) — матрицы P_ε вида $\begin{pmatrix} P_{00} & \varepsilon_1 P'_{10} & \varepsilon_2 P'_{20} \\ \varepsilon_1 P_{10} & \varepsilon_2 P_{11} & \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}P'_{21} \\ \varepsilon_2 P_{20} & \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}P_{21} & \varepsilon_2 P_{22} \end{pmatrix}$, где $P_{00} = P'_{00}$, $P_{11} = P'_{11}$, $P_{22} = P'_{22}$. Далее, используя решения уравнений низшего порядка, находятся стратегии, значения функции выигрыша для которых отличаются от оптимальных значений на величину порядка $O(\|\varepsilon\|)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)'$.

Парето-оптимальные стратегии изучались также в [196] для систем со слабосвязанными быстрыми переменными при условии обратимости матриц при быстрых переменных в вырожденных уравнениях для этих переменных.

Антагонистические линейно-квадратичные дифференциальные игры, динамика которых описывается системой

$$\frac{dx_1}{dt} = A_{11}(t)x_1 + A_{12}(t)x_2 + A_{13}(t)x_3 + B_1(t)u_1 + D_1(t)u_2, \quad x_1(0) = x_1^0,$$

$$\varepsilon_1\frac{dx_2}{dt} = A_{21}(t)x_1 + A_{22}(t)x_2 + A_{23}(t)x_3 + B_2(t)u_1 + D_2(t)u_2, \quad x_2(0) = x_2^0,$$

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{dx_3}{dt} = A_{31}(t)x_1 + A_{32}(t)x_2 + A_{33}(t)x_3 + B_3(t)u_1 + D_3(t)u_2, \quad x_3(0) = x_3^0,$$

причем первый игрок старается минимизировать функцию выигрыша

$$J = x(T)'Fx(T) + \int_0^T (x(t)'W(t)x(t) + u_1(t)'u_1(t) - \gamma^2 u_2(t)'u_2(t))dt,$$

а второй — максимизировать, изучались на конечном и бесконечном промежутках в [197].

Примеры, в которых обсуждаются различные подходы к построению предельной задачи, приводящие к разным результатам, рассматриваются в [102] для дифференциальной бескоалиционной игры двух лиц, изменение управляемой системы в которой описывается линейной системой с малыми параметрами $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$ одинакового порядка (см. (11)) при производных. Эта система может быть записана в виде

$$\frac{dx}{dt} = A_0 x + A_{0f} z + B_{01} u_1 + B_{02} u_2, \quad x(0) = x^0,$$

$$\mu(\varepsilon)\frac{dz}{dt} = D(\varepsilon)(A_{f0} x + A_f z + B_{f1} u_1 + B_{f2} u_2), \quad z(0) = z^0,$$

где $\mu(\varepsilon) = (\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_N)^{1/N}$, $D(\varepsilon) = \mathrm{diag}(\mu/\varepsilon_1 I_{n_1}, \ldots, \mu/\varepsilon_N I_{n_N})$. Здесь i-й игрок $(i = 1, 2)$ выбирает свою стратегию u_i, стараясь добиться по возможности меньшего значения функции выигрыша, задаваемой функционалом

$$J_i(u_i, u_j) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \left(\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}' Q_i \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + u_i' R_{ii} u_i + u_j' R_{ij} u_j \right) dt, \quad R_{ii} > 0, \quad Q_i \geqslant 0,$$

$$i, j = 1, 2, i \neq j.$$

Равновесие по Нэшу в этой игре определяется ситуацией (u_1^*, u_2^*) такой, что $J_i(u_i^*, u_j^*) \leqslant J_i(u_i, u_j^*)$, $i \neq j$, $i = 1, 2$. Стратегии u_i^* ищутся в форме линейной обратной связи

$$u_i^* = -R_{ii}^{-1} B_i' K_i \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

где K_1, K_2 — решение взаимосвязанных алгебраических уравнений Риккати, удовлетворяющих некоторому условию устойчивости.

Случай слабосвязанных уравнений для двухтемповых быстрых переменных изучался в [198].

Равновесные по Нэшу стратегии рассматриваются в [199] для дифференциальной игры двух лиц, динамика которой задается уравнением (23), а функции выигрыша

$$J_i(u_i, u_j) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} (y_i(t)' y_i(t) + u_i(t)' R_{ii} u_i(t) + \mu u_j(t)' R_{ij} u_j(t))\, dt,$$

где $y_i = C_{i0} x_0 + C_{ii} x_i$, $R_{ii} > 0$, $R_{ij} \geqslant 0$, $\mu = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$. Малые положительные параметры ε_1, ε_2 не известны, но их границы известны, а именно, $\bar{\varepsilon}_j - \sigma_j \bar{\mu}^\eta \leqslant$ $\leqslant \varepsilon_j \leqslant \bar{\varepsilon}_j + \sigma_j \bar{\mu}^\eta$, $j = 1, 2$, $\bar{\mu} = \sqrt{\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2}$, $\bar{\varepsilon}_j, \sigma_j, \eta$ — известные величины, и существует $\lim\limits_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0} \varepsilon_1/\varepsilon_2$. Не предполагается обратимость матриц A_{ii}, $i = 1, 2$, т.е. рассматривается и критический случай теории сингулярных возмущений. Предлагается итерационный метод нахождения с высокой точностью стратегий, выражающихся через решения взаимосвязанных алгебраических уравнений Риккати. Доказывается, что если $\eta = n + 1$, то при некоторых условиях функции выигрыша для приближения n-го порядка отличаются от оптимальных на $O(\bar{\mu}^{n+1})$.

Итерационный метод, основанный на методе Ньютона, для решения взаимосвязанных алгебраических уравнений Риккати, возникающих при изучении ситуации равновесия по Нэшу в линейно-квадратичной дифференциальной игре с уравнением состояния (23) в критическом случае и функциями выигрыша (24) при условии существования $\lim\limits_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0}\varepsilon_1/\varepsilon_2$, излагается в [200]. При указанных в этой статье предположениях значения функций выигрыша для приближения n-го порядка построенных стратегий отличаются от оптимальных на $O(\|\varepsilon\|^{2^n})$, $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)'$.

В [201] рассматривается оптимальная по Нэшу ситуация в игре N лиц, динамика управляемой системы в которой задается дифференциальным уравнением вида

$$E_\varepsilon\frac{dx}{dt}=Ax+Bu,\quad E_\varepsilon=\mathrm{diag}(I_{n_0},\varepsilon_1 I_{n_1},\ldots,\varepsilon_N I_{n_N}),$$

где $x=(x_0',\ldots,x_N')'$,

$$A=\begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & \ldots & A_{0N}\\ A_{01} & A_{11} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ A_{0N} & 0 & \ldots & A_{NN}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{01} & B_{02} & \ldots & B_{0N}\\ B_{11} & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & B_{NN}\end{pmatrix},$$

а функции выигрыша представляют собой функционалы

$$J_i(u_1,\ldots,u_N)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}(y_i'y_i+u_i'R_{ii}u_i)\,dt,$$
$$y_i=C_{i0}x_0+C_{ii}x_i,\quad R_{ii}>0,\quad i=\overline{1,N}.$$

Предполагается, что существует $\lim\limits_{\varepsilon_i,\varepsilon_j\to 0}\varepsilon_j/\varepsilon_i$. Требуется найти ситуацию $u^*= =(u_1^*,\ldots,u_N^*)$ с линейной обратной связью такую, что $J_i(u_1^*,\ldots,u_N^*)\leqslant \leqslant J_i(u_1^*,\ldots,u_{i-1}^*,u_i,u_{i+1}^*,\ldots,u_N^*)$, $i=\overline{1,N}$. Искомые стратегии, образующие равновесную по Нэшу ситуацию u^*, определяются формулой $u_i^*(t)= =-R_{ii}^{-1}B_i'P_ix(t)$, где P_i — решение системы взаимосвязанных алгебраических уравнений Риккати. Построены не зависящие от малых параметров стратегии, выигрыши для которых отличаются от выигрышей равновесных по Нэшу стратегий на $O(\|\varepsilon\|)$, $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N)'$.

Отметим здесь обзор [24], в котором один раздел посвящен равновесию по Нэшу в дифференциальных играх с разнотемповыми быстрыми переменными.

9. Стохастические системы

В [144] рассматривается построение оптимального фильтра Калмана для системы

$$\varepsilon_k \frac{dx_k(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{N} A_{kj} x_j(t) + G_k w(t), \quad k = \overline{1, N}, \tag{26}$$

с измеряемой функцией

$$y(t) = Cx(t) + v(t), \tag{27}$$

где $0 < \varepsilon_N << \varepsilon_{N-1} \ldots << \varepsilon_2 << \varepsilon_1$, а $w(t)$ и $v(t)$ — гауссовские случайные процессы белого шума. Используется метод декомпозиции соответствующих матричных алгебраических уравнений Риккати.

В этой статье также изучается задача минимизации критерия качества

$$J = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} M \left(\int_0^T (x(t)' W x(t) + u(t)' R u(t))\, dt \right), \quad W \geqslant 0, \quad R > 0,$$

на траекториях системы

$$\varepsilon_k \frac{dx_k(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{N} A_{kj} x_j(t) + B_k u(t) + G_k w(t), \quad k = \overline{1, N},$$

с выходной переменной (27).

Декомпозиция оптимального фильтра Калмана подробно описана в [137, стр. 132–139] для частного случая системы (26).

Стохастические игры Нэша с разнотемповыми быстрыми переменными изучались в [202].

В обзоре [24] имеется раздел, посвященный стохастическим системам, управляемым сингулярно возмущенными уравнениями Ито с несколькими малыми параметрами.

Линейно-квадратичная стохастическая задача для случая N-темповых быстрых переменных с неизвестными скоростями изменения одинакового порядка рассматривается в [203].

Детальное изучение зависимости стабилизирующих решений алгебраического матричного уравнения Риккати от двух малых параметров, определяющих скорость изменения быстрых переменных в задаче оптимального управления с уравнением состояния

$$\begin{gathered} \varepsilon_k dx_k(t) = (A_k x(t) + B_k u(t))dt + \varepsilon_k^{\delta}(C_k x(t) + D_k u(t))dw(t), \\ x_k(0) = x_k^0, \quad k = \overline{0, 2}, \quad x = (x_0', x_1', x_2')', \end{gathered} \tag{28}$$

и минимизируемым критерием качества

$$J(u) = M\left(\int\limits_0^{+\infty}(x(t)'Wx(t) + 2x(t)'Su(t) + u(t)'Ru(t))\,dt\right) \tag{29}$$

приведено в [204]. Здесь $W = W'$, $R = R'$, $x_k(t) \in \mathrm{I\!R}^{n_k}$, $k = \overline{0,2}$, $u(t) \in \mathrm{I\!R}^r$, $\{w(t)\}_{t\geqslant 0}$ — одномерный стандартный винеровский процесс, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_k = \varepsilon_k(\varepsilon)$, $\varepsilon_k : [0,\varepsilon^*] \to [0,+\infty)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon_k(\varepsilon) = 0$, $k = 1,2$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon_2(\varepsilon)/\varepsilon_1(\varepsilon) = 0$, $\delta > 1/2$. Получено управление в форме обратной связи, близкое к оптимальному, определяемое матрицей, не зависящей от малых параметров, которые могут быть неизвестными. Установлена оценка близости значения критерия качества для найденного приближенного управления к оптимальному значению.

В [205] рассматривается задача минимизации математического ожидания квадратичного функционала вида (29) на траекториях сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений Ито (28), где все коэффициенты могут зависеть от ε, $\delta = 1/2$, а ε_k — неубывающие функции, удовлетворяющие условиям из [204], причем $\varepsilon_k(\varepsilon) = 0$ в том и только том случае, если $\varepsilon = 0$, $k = 1, 2$.

При некоторых условиях в этой статье изучается асимптотическая структура стабилизирующего решения матричного алгебраического уравнения Риккати, возникающего при отыскании оптимального управления рассматриваемой стохастической задачи в форме обратной связи. При этом, в отличие от детерминированного случая, где система предельных алгебраических уравнений Риккати получается из матричного уравнения Риккати для возмущенной задачи при нулевых значениях малых параметров, в рассматриваемом стохастическом случае система предельных уравнений Риккати не может быть получена таким образом. Она зависит от матриц, определяющих влияние винеровского процесса, которые входят в уравнения состояния для быстрых переменных с малыми параметрами. Алгоритм получения системы предельных алгебраических уравнений Риккати для изучаемой задачи подробно обсуждается.

10. Приложения

В различных областях науки и практики исследователи сталкиваются с необходимостью изучения задач, содержащих быстрые и медленные переменные. Далее перечисляются некоторые практические задачи с разнотемповыми быстрыми переменными.

Многотемповые системы возникают в теории цепных химических реакций [43], где присутствуют активные центры, константы скорости реакции для которых различны (активными центрами называются те частицы — валентные атомы, радикалы, благодаря наличию которых реакция начинается и развивается). В качестве малых параметров, стоящих при производных, здесь выступают отношения константы скорости медленного активного центра к константам скоростей остальных активных центров. В [206] приведено обоснование метода квазистационарных концентраций Семенова-Боденштейна, состоящего в отбрасывании производных от концентраций быстрых активных центров и решении вырожденной задачи. Как указано в [43], системы рассмотренного в [206] типа также возникают при описании цепи превращений радиоактивных ядер, из которых некоторые являются наиболее долгоживущими.

Кинетика вспомогательного механизма реакции фермента, где появляется система нелинейных дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных, анализируется в [207].

В [208] изучается понижение размерности для появляющихся в биохимии систем, число различных скоростей изменения переменных в которых больше двух.

В монографии [145, стр. 90–96] методами теории сингулярных возмущений изучается линеаризованная модель управления с разнотемповыми быстрыми переменными для топливных элементов с протонообменной мембраной (см. также [63, 209, 210]).

Теорема Тихонова используется в [211] для анализа трехтемповых сингулярно возмущенных систем, описывающих биомолекулярные модели. Приведен пример системы, возникающей в фосфорилировании.

Быстрые переменные со скоростями изменения разных порядков появляются при исследовании моделей океанических течений (см., например, [212]).

Система с двумя малыми параметрами различного порядка малости при производных, описывающая пусковой режим электродвигателя постоянного тока при одновременном включении цепи якоря и обмотки возбуждения, обсуждается в [43].

Условия устойчивости разнотемповых систем, возникающих в различных моделях электрических цепей, рассмотрены в [102, 115]. Многотемповые системы, описывающие модель электрической цепи с туннельным диодом [108] и электромеханические процессы в демпфированной синхронной машине с изменяющимися потокосцеплениями, исследуются в [2, стр. 137–144; 109, стр. 254–262] методом интегральных многообразий. Устойчивость синхронной машины изучалась в [213].

Анализ устойчивости системы с трехтемповыми переменными, возникающей при изучении одного класса микросетей переменного тока для распределенных генераторов, проводится в [214].

Эффективность полученного в [202] алгоритма построения приближенных стратегий в стохастических играх Нэша с разнотемповыми быстрыми переменными демонстрируется в этой статье на примере многоаппаратной энергетической системы. Управление в форме обратной связи для линеаризованной модели угольной электростанции с трехтемповыми переменными построено в [215]. Асимптотический анализ начальных и краевых задач для дискретных линейных сингулярно возмущенных систем седьмого порядка с тремя малыми параметрами, возникающих при моделировании управления частотой нагрузки двухзонной энергосистемы, приведен в [81]. Различные модели энергосистем с разнотемповыми быстрыми переменными исследуются также в [79; 80; 137, стр. 139–141; 141; 196; 203; 216–218].

Используя асимптотику решения двухточечной краевой задачи, вытекающей из условия оптимальности управления, в [152] построено асимптотическое разложение второго порядка для оптимального управления в дискретной модели энергосистемы пятого порядка. Приближение второго порядка для асимптотического решения начальной задачи для такой модели представлено в [79].

Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами изучается в [219]. В частности (стр. 118), рассматривается случай, когда в модели объекта управления, эталонной модели желаемого поведения выхода и в алгоритме управления присутствуют различные параметры при производных. Трехтемповые процессы используются также при синтезе систем экстремального регулирования [220].

Система для трехтемповых переменных, возникающая при использовании устройства управления двигателем Уорда Леонарда, исследовалась в [221].

В математических моделях управления и эксплуатации ядерных реакторов присутствуют переменные с разными скоростями изменения. В монографии [222] рассматриваются декомпозиция таких моделей и построение композитного (составного) управления, причем исследование в основном акцентируется на трехтемповых системах.

При некоторых значениях параметров системы с трехтемповыми переменными присутствуют в модели воспламенения в дизельном двигателе [223; 224, стр. 94–98], а также в системе уравнений Лоренца-Хакена (класс B по терминологии [225, стр. 11, 15]), описывающей одну из основных моделей динамической теории лазеров в случае твердотельных лазеров на слаболегированных кристаллах и стеклах, волоконных, полупроводниковых и некоторых молекулярных газовых лазеров низкого давления. Траектории-утки для таких систем обсуждаются в [224, стр. 139–140].

Изучаются и системы с несколькими малыми параметрами при производных, возникающие в механике. Например, задача терминального управления линейной трехтемповой системой с ограничениями на состояние в конечный момент времени в виде равенства и со значениями скалярного управления из замкнутого интервала, описывающая движение под действием управляющих сил двух материальных точек с массами различных порядков малости, соединенных между собой пружиной, решается в [190] с помощью построения асимптотики точек переключения трех базовых задач. Подобная задача в случае, когда к точке с большей массой приложена возмущающая сила, изучается в [192].

Метод интегральных многообразий применяется для анализа трехтемповой модели колебаний гироскопа в кардановом подвесе с упругим валом и неуравновешенным ротором в [2, стр. 137–136; 109, стр. 248–250].

Система с трехтемповыми переменными, описывающая процесс намотки для непрерывных прокатных станов, изучается в [226].

Системы с трехтемповыми переменными рассматриваются и при изучении стабилизации верхнего положения равновесия маятника вращением инерциального маховика [20], а также стабилизации поступательных движений вращением эксцентрикового маховика [21]. При этом в качестве малых параметров при производных выступают временные константы фильтров.

Начально-краевая задача с разнотемповыми быстрыми переменными для линейной системы дифференциальных уравнений, содержащей обыкновенное дифференциальное уравнение и два уравнения в частных производных, описывающей поворот твердого тела с жестко закрепленным в нем упругим стержнем постоянного сечения, исследуется в [227].

В [228] рассматривается модель движения двухколесного экипажа с передне-задним расположением колес, движущегося по горизонтальной шероховатой поверхности. Эта модель содержит две быстрые переменные разных порядков изменения. Конструкция экипажа считается абсолютно жесткой, переднее колесо фиксировано в плоскости продольной симметрии экипажа, боковых наклонов нет. Последнее допущение оправдано для общепринятой в литературе “велосипедной” модели автомобиля либо для велосипеда или мотоцикла в пренебрежении эффектами, связанными с наклонами корпуса. Показано, что при определенном сочетании параметров потеря сцепления колеса с дорогой приводит к заносу экипажа. Исследования на эту тему продолжены в [229] для разных режимов заноса.

Системы с быстрыми переменными двух порядков появляются также при изучении модели качения с конечными углами поворота передних колес относительно корпуса [230, стр. 84] и при исследовании вкатывания гребня колеса железнодорожного экипажа на головку рельса — одного из наиболее опасных режимов движения, чреватого сходом [231]. Для таких систем в этих работах обсуждается предельный переход решения возмущенной задачи к решению вырожденной.

В [137, стр. 141–143] для математической модели с трехтемповыми переменными движения легковой машины по неровной дороге решается задача Калмановской фильтрации при помощи фильтров Калмана меньшего порядка.

Если в модели однозвенного робота-манипулятора [232] величины моментов инерции для двигателя и звена имеют различный порядок малости, то получаем сингулярно возмущенную систему с двухтемповыми быстрыми движениями. Группы роботов, характеризующиеся разнотемповыми быстрыми движениями, рассматривались в [233].

Методами теории сингулярных возмущений в [234] изучаются многотемповые системы с неопределенностями, возникающими при моделировании автономных подводных аппаратов, являющихся важным инструментом для морских изысканий, исследования портов, обнаружения мин и прокладки подводных трубопроводов. Задачи управления и анализ устойчивости для таких аппаратов с динамикой, ограниченной горизонтальной плоскостью, представлены в [235].

Статья [236] посвящена моделированию различных переходных процессов для системы преобразования энергии ветра на основе синхронного генератора с постоянными магнитами. При этом используются сингулярно возмущенные системы с трехтемповыми переменными. Такого типа системы применяются также в [237] при изучении гибких ветряных турбин.

В [238] представлен обзор работ, связанных с приложением теории сингулярно возмущенных задач с несколькими малыми параметрами к изучению динамики летательных аппаратов, при этом рассмотрены несколько моделей самолетов и ракет. Уравнения движения с трехтемповыми переменными приведены в [239, 240]. В [241, стр. 221–290; 242, 243] на основе декомпозиции исходной системы с последующим построением составной функции Ляпунова изучается устойчивость нелинейной трехтемповой системы, возникающей при моделировании динамики вертолета. Гироскопическая стабилизация космических летательных аппаратов, движение которых описывается многотемповыми переменными, рассматривается в [117]. Используя теорию сингулярных возмущений для трехтемповой системы, описывающей движение гиперзвукового воздушного летательного аппарата, в [244] предложен эффективный метод управления, обеспечивающий возможность восстановления после сбоев. Управление нелинейными четырехтемповыми моделями самолета с неопределенностями и беспилотного летательного аппарата изучаются соответственно в [245, 246], а трехтемповая модель, описывающая регулирование вертикальным положением радиоуправляемого вертолета, — в [247].

В [248] рассматривается приближение нулевого порядка для решения задачи быстродействия в плоской задаче перехвата, в которой используется нелинейная система дифференциальных уравнений для трехтемповых переменных.

Системы с трехтемповыми переменными появляются и при анализе одной модели дофаминергических нейронов в [249], а также в модели, состоящей из пары взаимосвязанных систем Морриса–Лекара [250].

В модели вирусной эволюции возникает начально-краевая задача с трехтемповыми переменными для сингулярно возмущенной системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, содержащей два малых параметра при производных. Асимптотическое решение такой задачи при помощи метода пограничных функций построено в [251].

В [252] рассматриваются линейно-квадратичные задачи оптимального управления на бесконечном промежутке с дешевыми управлениями двух различных порядков малости, получившиеся в результате линеаризации эпидемической модели (SIRC). С помощью решения матричного алгебраического уравнения Риккати находится оптимальное управление в форме обратной связи. Используемые в численных расчетах параметры основаны на клинических наблюдениях.

Теория сингулярных возмущений применяется в [253] при изучении динамики биологической модели Розенцвейга–Макартура для тритрофной пищевой цепи в случае хищников двух типов.

Трехтемповые переменные появляются и в модели лесного вредителя [254]. Вредитель питается старыми деревьями и растет быстро, молодые деревья — в среднем темпе, а старые — в медленном.

Описание социально-экономической модели транснациональной корпорации, представляющей собой линейную иерархическую трехуровневую систему Центр-Регионы-Предприятия, где Центр характеризуется медленным темпом, а Предприятия — сверхбыстрым, приведено в [255]. Обсуждается возможность декомпозиции исходной системы на три подсистемы. Задаче управления производственной моделью, содержащей процессы с тремя масштабами изменения скорости, посвящена статья [256].

В [257] рассматривается сеточная аппроксимация решения и его производной на конечной области, содержащей переходный слой, для сингулярно возмущенного уравнения Блэка–Шоулза с негладкими начальными данными, возникающего при математическом моделировании в финансовой математике. При этом порядок изменения скорости у пограничного и внутреннего слоев разный.

11. Заключение

Как видно из раздела “Приложения”, имеется значительный интерес к прикладным задачам с разнотемповыми быстрыми переменными. Идеи А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова и А.М. Ильина, впервые построивших асимптотику решения для некоторых классов такого рода задач, продолжают развиваться в разных направлениях и широко использоваться на практике.

Приведенный в этой статье список публикаций не претендует на абсолютную полноту. Просим прощения у авторов, чьи работы по теме статьи не были упомянуты.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам статьи за указание полезной информации, а также А.В. Влаховой, Н.В. Воропаевой, А.Р. Данилину, М.Г. Дмитриеву, Ю.Е. Гликлиху, В.Г. Задорожнему, А.И. Калинину, О.О. Коврижных, А.С. Костенко, К.Н. Кудрявцеву, Д.А. Макарову, М.Е. Семенову, Н.Т. Хоай, О.Б. Цехан и G. Marinoschi за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

2. *Воропаева Н.В., Соболев В.А.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. М.: Физматлит, 2009.
3. *Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У.* Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983.

   Doolan E.P., Miller J.J.H., Schilders W.H.A. Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers. Dublin: Boole Press, 1980.
4. *Дмитриев М.Г., Клишевич А.М.* Итерационные методы решения сингулярно возмущенных краевых задач условно устойчивого типа // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 12. С. 1812–1823.

   Dmitriev M.G., Klishevich A.M. Iterative Methods for Solving Singularly Perturbed Boundary Value Problems of Conditionally Stable Type // USSR Comput. Math. Math. Phys. 1987. V. 27. Iss. 6. P. 137–144.
5. *Васильева А.Б.* Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // УМН. 1963. Т. XVIII. Вып. 3(111). С. 15–86.
   Vasil'eva A.B. Asymptotic Behaviour of Solutions to Certain Problems Involving Non-linear Differential Equations Containing a Small Parameter Multiplying the Highest Derivatives // Russian Math. Surveys. 1963. V. 18. No. 3. P. 13–84.
6. *Kokotovic P.V., O'Malley R.E. Jr., Sannuti P.* Singular Perturbations and Order Reduction in Control Theory — An Overview // Automatica. 1976. V. 12. P. 123–132.
7. *Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техн. Сер. Матем. анализ. 1982. Т. 20. С. 3–77.
   Vasil'eva A.B., Dmitriev M.G. Singular Perturbations in Optimal Control Problems // J. Soviet Mathematics. 1986. V. 34. P. 1579–1629.
   https://doi.org/10.1007/BF01262406
8. *Курина Г.А., Долгополова Е.Ю.* Сингулярные возмущения в задачах управления. Библиогр. указатель (1982–2002). Воронеж: ВГЛТА, 2004.
9. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // АиТ. 2006. № 1. С. 3–51.
   Dmitriev M.G., Kurina G.A. Singular Perturbations in Control Problems // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 1. P. 1–43.
   https://doi.org/10.1134/S0005117906010012
10. *Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y.* Singular Perturbation and Time Scales in Control Theory and Applications: an Overview 2002–2012 // Int. J. Inf. Syst. Sci. 2014. V. 9. No. 1. P. 1–36.
11. *Kurina G.A., Dmitriev M.G., Naidu D.S.* Discrete Singularly Perturbed Control Problems (A Survey) // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B: Appl. Algorithms. 2017. V. 24. P. 335–370.
    https://www.semanticscholar.org/paper/Discrete-singularly-perturbed-control-problems-(A-Kurina-Dmitriev/f4a005e6d3045c169ff54df3ffcc56598b271233
12. *Бояринцев Ю.Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1980.
13. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск: Наука, 2003.

14. *Kunkel P., Mehrmann V.* Differential-Algebraic Equations Analysis and Numerical Solution. Zürich: EMS Publishing House, 2006. https://doi.org/10.4171/017

15. *Duan G.-R.* Analysis and Design of Descriptor Linear Systems. New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2010. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6397-0

16. *Lamour R., März R., Tischendorf C.* Differential-Algebraic Equations: A Projector Based Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. https://doi.org/10.1007/978-3-642-27555-5

17. *Курина Г.А.* Сингулярные возмущения задач управления с уравнением состояния, не разрешенным относительно производной. Обзор // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. № 4. С. 20–48.
Kurina G.A. Singular Perturbations of Control Problems with Equation of State not Solved for the Derivative (a Survey) // J. Comput. Syst. Sci. Int. 1993. V. 31. No. 6. P. 17–45.

18. *Abed E.H.* On Multiparameter Singularly Perturbed Discrete-Time Systems // Proc. 26th IEEE Conf. Decision and Control. Los Angeles, California, USA, 1987. P. 2104–2105. https://doi.org/10.1109/CDC.1987.272925. https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/4049669

19. *Вуйтович М.* Метод дифференцирования по параметру при решении нелинейных уравнений // Нелинейная динамика и управление. М.: Физматлит, 2007. Вып. 5. С. 213–218.

20. *Хорошун А.С.* О стабилизации верхнего положения равновесия маятника вращением инерциального маховика // Прикл. механика. 2016. Т. 52. № 5. С. 125–136.
Khoroshun A.S. Stabilization of the Upper Equilibrium Position of a Pendulum by Spinning an Inertial Flywheel // Int. Appl. Mech. 2016. V. 52. No. 5. P. 547–556. https://doi.org/10.1007/s10778-016-0775-1

21. *Хорошун А.С.* О стабилизации поступательных движений вращением эксцентрикового маховика // Прикл. механика. 2018. Т. 54. № 5. С. 123–135.
Khoroshun A.S. Stabilization of Translation by an Eccentric Flywheel // Int. Appl. Mech. 2018. V. 54. No. 5. P. 600–610. https://doi.org/10.1007/s10778-018-0914-y

22. *Kokotovic P.V.* Subsystems, Time Scales and Multimodeling // IFAC Proceedings Volumes. 1980. V. 13. Iss. 6. P. xxvii–xxxiii. https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)64778-5

23. *Saksena V.R., O'Reilly J., Kokotovic P.V.* Singular Perturbations and Time-Scale Methods in Control Theory: Survey 1976–1983 // Automatica. 1984. V. 20. No. 3. P. 273–293. https://doi.org/10.1016/0005-1098(84)90044-X

24. *Mukaidani H., Dragan V.* Control of Deterministic and Stochastic Systems with Several Small Parameters — a Survey // Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl. 2009. V. 1. No. 1. P. 112–158.

25. *Васильева А.Б.* О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры // Матем. сб. 1952. Т. 31(73). № 3. С. 587–644.

26. *Тихонов А.Н.* О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Матем. сб. Новая серия. 1950. Т. 27(69). № 1. С. 147–156.

27. *Градштейн И.С.* Дифференциальные уравнения, в которых множителями при производных входят различные степени малого параметра // Докл. АН СССР. 1952. Т. LXXXII. № 1. С. 5–8.

28. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Матем. сб. 1952. Т. 31(73). № 3. С. 575–586.

29. *Градштейн И.С.* Применение теории устойчивости А.М. Ляпунова к теории дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных // Матем. сб. 1953. Т. 32(74). № 2. С. 263–286.

30. *Тихонов А.Н.* Сборник научных трудов в 10 томах; РАН. Т. 1. Математика (в 2 ч.). Часть 1. М.: Наука, 2012.

31. *Hoppensteadt F.* Stability in Systems with Parameter // J. Math. Anal. Appl. 1967. V. 18. P. 129–134. https://doi.org/10.1016/0022-247X(67)90187-4

32. *Hoppensteadt F.* On Systems of Ordinary Differential Equations with Several Parameters Multiplying the Derivatives // J. Different. Equat. 1969. V. 5. P. 106–116. https://doi.org/10.1016/0022-0396(69)90106-5

33. *Градштейн И.С.* О решениях на временной полупрямой дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных // Матем. сб. 1953. Т. 32(74). № 3. С. 533–544.

34. *Harris W.A. Jr.* Singular Perturbations of Two-Point Boundary Problems for Systems of Ordinary Differential Equations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1960. V. 5. P. 212–225. https://doi.org/10.1007/BF00252904

35. *Козловская Т.Д.* Краевая задача для систем условно устойчивого типа с различными малыми параметрами при старших производных // Дифференц. уравнения. 1973. Т. IX. № 5. С. 832–845.

36. *Grammel G.* On Nonlinear Control Systems with Multiple Time Scales // J. Dyn. Control Syst. 2004. V. 10. No. 1. P. 11–28.
https://doi.org/10.1023/B:JODS.0000012015.69096.f1

37. *Бутузов В.Ф., Недельько И.В.* О формировании решения с внутренним слоем в параболической системе с разными степенями малого параметра // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 3. С. 356–367.
Butuzov V.F., Nedelko I.V. On the Formation of a Solution with an Internal Layer in a Parabolic System with Different Powers of a Small Parameter // Different. Equat. 2004. V. 40. No. 3. P. 382–395.
https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000035776.65916.d7

38. *Cheng B., Ju Q., Schochet S.* Three-Scale Singular Limits of Evolutionary PDEs // Arch. Ration. Mech. Anal. 2018. V. 229. P. 601–625.
https://doi.org/10.1007/s00205-018-1233-5

39. *Perjan A., Rusu G.* Convergence Estimates for Abstract Second Order Differential Equations with Two Small Parameters and Monotone Nonlinearities // Topol. Methods Nonlinear Anal. 2019. V. 54. No. 2B. P. 1093–1110.
https://doi.org/10.12775/TMNA.2019.089

40. *Васильева А.Б.* О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры // Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1951.

41. *Васильева А.Б.* Асимптотические формулы для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих при производных параметры различных порядков малости // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128. № 6. С. 1110–1113.

42. *Васильева А.Б.* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных // Дисс. докт. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1961.

43. *Васильева А.Б.* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3. № 4. С. 611–642.
Vasil'eva A.B. Asymptotic Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations with Small Parameters Multiplying the Highest Derivatives // Comput. Math. Math. Phys. 1963. V. 3. Iss. 4. P. 823–863.
44. *O'Malley R.E. Jr.* On Initial Value Problems for Nonlinear Systems of Differential Equations with Two Small Parameters // Arch. Ration. Mech. Anal. 1971. V. 40. P. 209–222. https://doi.org/10.1007/BF00281482
45. *Huang Wei-zhang, Chen Yu-sen.* Initial Layer Phenomena for a Class of Singular Perturbed Nonlinear System with Slow Variables // Appl. Math. Mech. 2004. V. 25. No. 7. P. 836–844. https://doi.org/10.1007/bf02437577
46. *Кузьмина Р.П.* Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2003.
Kuzmina R.P. Asymptotic Methods for Ordinary Differential Equations. Dordrecht: Springer, 2000.
47. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
Wasow W. Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations. New York, London, Sydney: A Division of Jonh Wiley & Sons. Inc., 1965.
48. *Wasow W.* Periodic Singular Perturbations of Ordinary Differential Equations // Тр. Междунар. симпозиума по нелинейным колебаниям Международного союза по теоретической и прикладной механике. Киев 12–18 сентября 1961. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. Т. I. Киев, 1963. С. 172–180.
49. *O'Malley R.E. Jr.* Two-Parameter Singular Perturbation Problems for Second-Order Equations // J. Math. Mech. 1967. V. 16. No. 10. P. 1143–1164.
50. *O'Malley R.E. Jr.* Singular Perturbations of Boundary Value Problems for Linear Ordinary Differential Equations Involving Two Parameters // J. Math. Anal. Appl. 1967. V. 19. P. 291–308. https://doi.org/10.1016/0022-247X(67)90124-2
51. *O'Malley R.E. Jr.* Introduction to Singular Perturbations. New York and London: Academic Press Inc., 1974.
52. *Шишкин Г.И.* Первая краевая задача для уравнения второго порядка с малыми параметрами при производных // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 376–378.
53. *Ильин А.М., Коврижных О.О.* Асимптотика решения системы линейных уравнений с двумя малыми параметрами // Докл. АН. 2004. Т. 396. № 1. С. 23–24.
54. *Коврижных О.О.* Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной системы линейных уравнений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 10. С. 1322–1331.
Kovrizhnykh O.O. Asymptotic Expansion of a Solution of a Singularly Perturbed System of Linear Equations // Different. Equat. 2005. V. 41. No. 10. P. 1392–1402. https://doi.org/10.1007/s10625-005-0291-2
55. *Данилин А.Р., Коврижных О.О.* Об асимптотике решения системы линейных уравнений с двумя малыми параметрами // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 6. С. 738–747.
Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. On the Asymptotics of the Solution of a System of Linear Equations with Two Small Parameters // Different. Equat. 2008. V. 44. No. 6. P. 757–767. https://doi.org/10.1134/S0012266108060025

56. *Коврижных О.О.* Об асимптотическом решении сингулярно возмущенной системы с двумя малыми параметрами // Тр. ИММ УрО РАН. 2007. Т. 13. № 2. С. 124–134.
Kovrizhnykh O.O. On an Asymptotic Solution of a Singularly Perturbed System with Two Small Parameters // Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl). 2007. V. 259. Suppl. 2. P. S178–S189. https://doi.org/10.1134/S0081543807060120

57. *O'Malley R.E. Jr.* Boundary Value Problems for Linear Systems of Ordinary Differential Equations Involving Many Small Parameters // J. Math. Mech. 1969. V. 18. No. 9. P. 835–855.

58. *Ladde G.S., Rajalakshmi S.G.* Diagonalization and Stability of Multi-Time-Scale Singularly Perturbed Linear Systems // Appl. Math. Comput. 1985. V. 16. P. 115–140. https://doi.org/10.1016/0096-3003(85)90003-7

59. *Ladde G.S., Rajalakshmi S.G.* Singular Perturbations of Linear Systems with Multiparameters and Multiple Time Scales // J. Math. Anal. Appl. 1988. V. 129. P. 457–481.

60. *Kathirkamanayagan M., Ladde G.S.* Singularly Perturbed Linear Boundary Value Problems // J. Math. Anal. Appl. 1992. V. 168. P. 430–459. https://doi.org/10.1016/0022-247X(92)90171-9

61. *Prljaca N., Gajic Z.* General Transformation for Block Diagonalization of Multi Time-scale Singularly Perturbed Linear Systems // Proc. 2007 American Control Conf. New York, 2007. P. 1670–1675.

62. *Cherevko I., Osypova O.* Asymptotic Decomposition of Linear Singularly Perturbed Multiscale Systems // Miskolc Math. Notes. 2015. V. 16. No. 2. P. 729–745. https://doi.org/10.18514/MMN.2015.1627

63. *Kodra K., Zhong N.* Singularly Perturbed Modeling and LQR Controller Design for a Fuel Cell System // Energies. 2020. 13. 2735. https://doi.org/10.3390/en13112735

64. *Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 11. С. 1983–2003.
Butuzov V.F., Levashova N.T., Mel'nikova A.A. Steplike Contrast Structure in a Singularly Perturbed System of Equations with Different Powers of Small Parameter // Comput. Math. Math. Phys. 2012. V. 52. No. 11. P. 1526–1546. https://doi.org/10.1134/S096554251211005X

65. *Roos H.-G.* Special Features of Strongly Coupled Systems of Convection-Diffusion Equations with Two Small Parameters // Appl. Math. Lett. 2012. V. 25. Iss. 8. P. 1127–1130. https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.02.018

66. *Campbell S.L., Rose N.J.* Singular Perturbation of Autonomous Linear Systems III // Houston J. Math. 1978. V. 4. No. 4. P. 527–539.

67. *Жукова Г.С.* Асимптотическое интегрирование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1988.

68. *Krupa M., Popović N., Kopell N.* Mixed-Mode Oscillations in Three Time-Scale Systems: A Prototypical Example // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2008. V. 7. No. 2. P. 361–420. https://doi.org/10.1137/070688912

69. *Бутузов В.Ф., Деркунова Е.А.* О сингулярно возмущенной системе уравнений в частных производных первого порядка с разными степенями малого параметра // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 6. С. 775–789.

Butuzov V.F., Derkunova E.A. On a Singularly Perturbed System of First-Order Partial Differential Equations with Various Degrees of a Small Parameter // Different. Equat. 2006. V. 42. No. 6. P. 826–841.
https://doi.org/10.1134/S0012266106060073

70. *Деркунова Е.А.* Об одной сингулярно возмущенной системе трех уравнений в частных производных первого порядка // Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер.: Матем. Мех. Физ. 2012. Вып. 7. С. 153–156.
71. *Бутузов В.Ф.* Об асимптотике решений сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 1975. Т. XI. № 6. С. 1030–1041.
72. *Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенное уравнение эллиптического типа с двумя малыми параметрами // Дифференц. уравнения. 1976. Т. XII. № 10. С. 1793–1803.
73. *Бутузов В.Ф., Неделько И.В.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений с разными степенями малого параметра // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 6. С. 877–899.
Butuzov V.F., Nedelko I.V. A Steplike Contrast Structure in a Singularly Perturbed System of Elliptic Equations with Different Power of a Small Parameter // Comput. Math. Math. Phys. 2000. V. 40. No. 6. P. 837–859.
74. *Бутузов В.Ф., Нестеров А.В.* Об асимптотике решения уравнения параболического типа с малыми параметрами при старших производных // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22. № 4. С. 865–870.
Butuzov V.F., Nesterov A.V. The Asymptotics of a Solution of an Equation of Parabolic Type with Small Parameters Multiplying the Highest Derivatives // USSR Comput. Math. Math. Phys. 1982. V. 22. No. 4. P. 100–105.
https://doi.org/10.1016/0041-5553(82)90011-8
75. *Naidu D.S., Rao A.K.* Singular Perturbation Analysis of Discrete Control Systems. Lecture Notes in Math. V. 1154. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
https://doi.org/10.1007/BFb0074760
76. *Naidu D.S.* Singular Perturbation Methodology in Control Systems. IEE Control Eng. Ser. V. 34. London: Peter Peregrinus Ltd, 1988.
77. *Krishnarayalu M.S., Naidu D.S.* Singular Perturbation Method for Boundary Value Problems in Two-Parameter Discrete Control Systems // Int. J. Syst. Sci. 1988. V. 19. No. 10. P. 2131–2143. https://doi.org/10.1080/00207728808964105
78. *Naidu D.S., Krishnarayalu M.S.* Singular Perturbation Method for Initial Value Problems in Two-Parameter Discrete Control Systems // Int. J. Syst. Sci. 1987. V. 18. Iss. 12. P. 2197–2208. https://doi.org/10.1080/00207728708967181
79. *Kishore Babu G., Krishnarayalu M.S.* An Application of Discrete Two Parameter Singular Perturbation Method // Int. J. Eng. Res. Technol. 2012. V. 1. Iss. 10. P. 1–10.
80. *Kishor Babu G., Krishnarayalu M.S.* Application of Singular Perturbation Method to Two Parameter Discrete Power System Model // J. Control Instrument. Eng. 2017. V. 3. Iss. 3. P. 1–13.
81. *Kishor Babu G., Krishnarayalu M.S.* Discrete Multi Parameter Singular Perturbation Method with Power System Application // Int. J. Recent Techn. Eng. 2019. V. 8. Iss. 2. P. 236–244. https://doi.org/10.35940/ijrte.A3081.078219

82. *O'Riordan E., Pickett M.L., Shishkin G.I.* Singularly Perturbed Problems. Modeling Reaction-Convection-Diffusion Processes // Comput. Methods Appl. Math. 2003. V. 3. No. 3. P. 424–442. https://doi.org/10.2478/cmam-2003-0028
83. *O'Riordan E., Pickett M.L.* Numerical Approximations to the Scaled First Derivatives of the Solution to a Two Parameter Singularly Perturbed Problem // J. Comput. Appl. Math. 2019. V. 347. P. 128–149. https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.08.004
84. *Zhang J., Lv Y.* High-Order Finite Element Method on a Bakhvalov-Type Mesh for a Singularly Perturbed Convection-Diffusion Problem with Two Parameters // Appl. Math. Comput. 2021. V. 397. 125953. https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.125953
85. *Khandelwal P., Khan A.* Singularly Perturbed Convection-Diffusion Boundary Value Problems with Two Small Parameters Using Nonpolynomial Spline Technique // Math. Sci. 2017. V. 11. No. 2. P. 119–126. https://doi.org/10.1007/s40096-017-0215-3
86. *Chandru M., Prabha T., Shanthi V.* A Parameter Robust Higher Order Numerical Method for Singularly Perturbed Two Parameter Problems with Non-Smooth Data // J. Comput. Appl. Math. 2017. V. 309. P. 11–27. https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.06.009
87. *Tikhovskaya S.V., Korbut M.F.* Two-Grid Algorithm for the Solution of Singularly Perturbed Two-Parameter Problem on Shishkin Mesh // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1210. 012142. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1210/1/012142
88. *Rao S.C.S., Chawla S.* Parameter-Uniform Convergence of a Numerical Method for a Coupled System of Singularly Perturbed Semilinear Reaction-Diffusion Equations with Boundary and Interior Layers // J. Comput. Appl. Math. 2019. V. 352. P. 223–239. https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.11.021
89. *O'Riordan E., Pickett M.L., Shishkin G.I.* Parameter-Uniform Finite Difference Schemes for Singularly Perturbed Parabolic Diffusion-Convection-Reaction Problems // Math. Comp. 2006. V. 75. No. 255. P. 1135–1154. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-06-01846-1
90. *Das P., Mehrmann V.* Numerical Solution of Singularly Perturbed Convection-Diffusion-Reaction Problems with Two Small Parameters // BIT Numer. Math. 2016. V. 56. Iss. 1. P. 51–76. https://doi.org/10.1007/s10543-015-0559-8
91. *Шишкин Г.И.* Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенных параболических уравнений при наличии слабых и сильных переходных слоев, порождаемых разрывной правой частью // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 3. С. 407–420.
Shishkin G.I. Grid Approximation of Singularly Perturbed Parabolic Equations in the Presence of Weak and Strong Transient Layers Induced by a Discontinuous Right-Hand Side // Comput. Math. Math. Phys. 2006. V. 46. No. 3. P. 388–401. https://doi.org/10.1134/S0965542506030067
92. *Шишкин Г.И.* Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенного эллиптического уравнения с конвективными членами при наличии различных типов пограничных слоев // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. № 1. С. 110–125.
Shishkin G.I. Grid Approximation of a Singularly Perturbed Elliptic Equation with Convective Terms in the Presence of Various Boundary Layers // Comput. Math. Math. Phys. 2005. V. 45. No. 1. P. 104–119.

93. *Shishkin G.* Multiscale Problems with Various Boundary Layers for PDE'S in Unbounded Domains // Math. Model. Anal. Proc. 10th Int. Conf. MMA2005 & CMAM2. Trakai, 2005. P. 251–257.
94. *Kalaiselvan S.S., Miller J.J.H., Sigamani V.* A Parameter Uniform Numerical Method for a Singularly Perturbed Two-Parameter Delay Differential Equation // Appl. Numer. Math. 2019. V. 145. P. 90–110. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2019.05.028
95. *Govindarao L., Sahu S.R., Mohapatra J.* Uniformly Convergent Numerical Method for Singularly Perturbed Time Delay Parabolic Problem with Two Small Parameters // Iran. J. Sci. Technol. Trans. A: Sci. 2019. V. 43. Iss. 5. P. 2373–2383. https://doi.org/10.1007/s40995-019-00697-2
96. *Sumit, Kumar S., Kuldeep, Kumar M.* A Robust Numerical Method for a Two-Parameter Singularly Perturbed Time Delay Parabolic Problem // Comput. Appl. Math. 2020. V. 39. Article number: 209. https://doi.org/10.1007/s40314-020-01236-1
97. *Chandru M., Das P., Ramos H.* Numerical Treatment of Two-Parameter Singularly Perturbed Parabolic Convection Diffusion Problems with Non-Smooth Data // Math. Methods Appl. Sci. 2018. V. 41. P. 5359–5387. https://doi.org/10.1002/mma.5067
98. *Kumar D., Kumari P.* Uniformly Convergent Scheme for Two-Parameter Singularly Perturbed Problems with Non-Smooth Data // Numer. Methods Partial Different. Equat. 2020. V. 37. P. 796–817. https://doi.org/10.1002/num.22553
99. *Brdar M., Franz S., Roos H.-G.* Numerical Treatment of Singularly Perturbed Fourth-Order Two-Parameter Problems // Electron. Trans. Numer. Anal. 2019. V. 51. P. 50–62. https://doi.org/10.1553/etna_vol51s50
100. *Das P., Rana S., Vigo-Aguiar J.* Higher Order Accurate Approximations on Equidistributed Meshes for Boundary Layer Originated Mixed Type Reaction Diffusion Systems with Multiple Scale Nature // Appl. Numer. Math. 2020. V. 148. P. 79–97. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2019.08.028
101. *Roos H.-G., Schopf M.* Layer Structure and the Galerkin Finite Element Method for a System of Weakly Coupled Singularly Perturbed Convection-Diffusion Equations with Multiple Scales // ESAIM: Math. Model. Numer. Anal. M2AN. 2015. V. 49. No. 5. P. 1525–1547. https://doi.org/10.1051/m2an/2015027
102. *Khalil H.K., Kokotovic P.V.* Control of Linear Systems with Multiparameter Singular Perturbations // Automatica. 1979. V. 15. Iss. 2. P. 197–207. https://doi.org/10.1016/0005-1098(79)90070-0
103. *Khalil H.K., Kokotovic P.V.* D-Stability and Multi-Parameter Singular Perturbation // SIAM J. Control Optim. 1979. V. 17. No. 1. P. 56–65. https://doi.org/10.1137/0317006
104. *Ladde G.S., Šiljak D.D.* Multiparameter Singular Perturbations of Linear Systems with Multiple Time Scales // Automatica. 1983. V. 19. No. 4. P. 385–394. https://doi.org/10.1016/0005-1098(83)90052-3
105. *Grujić L.T.* Singular Perturbations, Large-Scale Systems and Asymptotic Stability of Invariant Sets // Int. J. Syst. Sci. 1979. V. 10. No. 12. P. 1323–1341. https://doi.org/10.1080/00207727908941662
106. *Grujić L.T.* Singular Perturbations and Large-Scale Systems // Int. J. Control. 1979. V. 29. No. 1. P. 159–169. https://doi.org/10.1080/00207177908922687

107. *Tellili A., Abdelkrim N., Challouf A., Abdelkrim M.N.* Adaptive Fault Tolerant Control of Multi-time-scale Singularly Perturbed Systems // Int. J. Autom. Comput. 2018. V. 15. No. 6. P. 736–746. https://doi.org/10.1007/s11633-016-0971-9

108. *Khalil H.K.* Asymptotic Stability of Nonlinear Multiparameter Singularly Perturbed Systems // Automatica. 1981. V. 17. No. 6. P. 797–804. https://doi.org/10.1016/0005-1098(81)90067-4

109. *Воропаева Н.В., Соболев В.А.* Декомпозиция многотемповых систем. Самара: СМС, 2000.

110. *Hsiao F.-H., Pan S.-T., Teng C.-C.* D-Stability Bound Analysis for Discrete Multiparameter Singularly Perturbed Systems // IEEE Trans. Circuits Syst.–I: Fundamental Theory and Applications. 1997. V. 44. No. 4. P. 347–351. https://doi.org/10.1109/81.563624

111. *Chiou J.-S., Wang C.-J.* An Infinite ε-Bound Stability Criterion for a Class of Multiparameter Singularly Perturbed Time-Delay Systems // Int. J. Syst. Sci. 2005. V. 36. No. 8. P. 485–490. https://doi.org/10.1080/00207720500156421

112. *Abed E.H., Tits A.L.* On the Stability of Multiple Time-Scale Systems // Int. J. Control. 1986. V. 44. No. 1. P. 211–218. https://doi.org/10.1080/00207178608933591

113. *Abed E.H.* Decomposition and Stability of Multiparameter Singular Perturbation Problems // IEEE Trans. Automat. Control. 1986. V. AC-31. No. 10. P. 925–934. https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104130

114. *Abed E.H.* New Results in Multiparameter Singular Perturbations // Proc. 25th Conf. Decision and Control. Athens, Greece, 1986. P. 1385–1387. https://doi.org/10.1109/CDC.1986.267612

115. *Desoer C.A., Shahruz S.M.* Stability of Nonlinear Systems with Three Time Scale // Circuits Syst. Signal Proc. 1986. V. 5. No. 4. P. 449–464. https://doi.org/10.1007/BF01599620

116. *Miladzhanov V.G.* Stability of Singular Large-Scale Systems in the Presence of Structural Perturbations // Int. Appl. Mech. 1993. V. 29. P. 480–486. https://doi.org/10.1007/BF00846912

117. *Martynyuk A.A., Miladzhanov V.G.* Stability Theory of Large-Scale Dynamical Systems. bookboon.com, 2014.

118. *Cardin P.T., Teixeira M.A.* Fenichel Theory for Multiple Time Scale Singular Perturbation Problems // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2017. V. 16. No. 3. P. 1425–1452. https://doi.org/10.1137/16M1067202

119. *Cardin P.T., Teixeira M.A.* A Geometric Singular Perturbation Theory Approach to Constrained Differential Equations // Math. Nachr. 2019. V. 292. Iss. 4. P. 892–904. https://doi.org/10.1002/mana.201700444

120. *Abed E.H., Silva-Madriz R.I.* Stability of Systems with Multiple Very Small and Very Large Parasitics // IEEE Trans. Circuits Syst. 1987. V. CAS-34. No. 9. P. 1107–1110. https://doi.org/10.1109/TCS.1987.1086248

121. *Khalil H.K.* Stabilization of Multiparameter Singularly Perturbed Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1979. V. 24. No. 5. P. 790–791. https://doi.org/10.1109/TAC.1979.1102145

122. *Khalil H.K.* Asymptotic Stability of Non-linear Multiparameter Singularly Perturbed Systems // IFAC Control Science and Technology (8th Triennial World Congress), Kyoto, Japan. 1981. P. 137–142.

123. *Dmitriev M., Makarov D.* Stabilization of Quasilinear Systems with Multiparameter Singular Perturbations // 13th Int. Conf. Management of Large-Scale System Development (MLSD). 2020. https://doi.org/10.1109/MLSD49919.2020.9247844
124. *Шпилевая О.Я.* Исследование разнотемповых процессов в адаптивной системе // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 55–61.
125. *Dontchev A.L.* Time-Scale Decomposition of the Reachable Set of Constrained Linear Systems // Math. Control Sygnal Syst. 1992. V. 5. P. 327–340.
126. *Abed E.H., Silva-Madriz R.I.* Controllability of Multiparameter Singularly Perturbed Systems // IFAC 10th Triennial World Congress. Munich, FRG, 1987. P. 127–130.
127. *Kekang X., Zhenquan W.* D-controllability and Strong D-controllability and Control of Multiparameter and Multiple Time-Scale Singularly Perturbed Systems / Syst. Analysis and Simulation I. Advances in Simulation. V. 1. New York: Springer. 1988. P. 255–258. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-6389-7_53
128. *Kekang X., Zhenquan W.* D-controllability and Control of Multiparameter and Multiple Time-Scale Singularly Perturbed Systems // J. Syst. Sci. Math. Sci. 1989. V. 2. No. 3. P. 243–251.
129. *Курина Г.А.* О полной управляемости разнотемповых сингулярно возмущенных систем // Матем. заметки. 1992. Т. 52. Вып. 4. С. 56–61.
Kurina G.A. Complete Controllability of Various-Speed Singularly Perturbed Systems // Math. Notes. 1992. V. 52. No. 4. P. 1029–1033.
https://doi.org/10.1007/BF01210436
130. *Копейкина Т.Б.* Управляемость разнотемповых сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений // Тр. БГТУ. Сер. 3: Физ.-мат. науки и информатика. 2011. № 6. С. 7–11.
131. *Кириллова Ф.М., Чуракова С.В.* Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1260–1263.
132. *Копейкина Т.Б., Грекова А.В.* Управляемость существенно разнотемповых сингулярно возмущенных динамических систем // Наука и техника. 2013. № 5. С. 75–82.
133. *Семенова М.М.* Декомпозиция многотемповых моделей управляемых и наблюдаемых систем // Изв. Самар. научного центра РАН. Информатика, вычислительная техника и управление. 2020. Т. 22. № 1. С. 93–97.
134. *Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г.* Решение классических задач оптимального управления с погранслоем // АиТ. 1989. № 7. С. 71–82.
Belokopytov S.V., Dmitriev M.G. Solution of Classical Optimal Control Problems with a Boundary Layer // Autom. Remote Control. 1989. V. 50. No. 7. P. 907–917.
135. *Mukaidani H.* A Numerical Algorithm for Finding Solution of Sign-Indefinite Algebraic Riccati Equations for General Multiparameter Singularly Perturbed Systems // Appl. Math. Comput. 2007. V. 189. Iss. 1. P. 255–270.
https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.088
136. *Wang Y-Y., Frank P.M., Wu N.E.* Near-Optimal Control of Nonstandard Singularly Perturbed Systems // Automatica. 1994. V. 30. No. 2. P. 277–292.
https://doi.org/10.1016/0005-1098(94)90030-2
137. *Gajić Z., Lim M.* Optimal Control of Singularly Perturbed Linear Systems and Applications. High-Accuracy Techniques. Control Engineering Series. Marcel Dekker, 2000.

138. *Coumarbatch C., Gajić Z.* Exact Decomposition of the Algebraic Riccati Equation of Deterministic Multimodeling Optimal Control Problems // IEEE Trans. Automat. Control. 2000. V. 45. No. 4. P. 790–794. https://doi.org/10.1109/9.847124

139. *Mukaidani H., Xu H., Mizukami K.* New Results for Near-Optimal Control of Linear Multiparameter Singularly Perturbed Systems // Automatica. 2003. V. 39. P. 2157–2167. https://doi.org/10.1016/S0005-1098(03)00248-6

140. *Mukaidani H., Xu H., Mizukami K.* Feedback Control of Linear Multiparameter Singularly Perturbed Systems // IFAC 15th Triennial World Congress. Barcelona, Spain, 2002.

141. *Mukaidani H., Shimomura T., Xu H.* Near-Optimal Control of Linear Multiparameter Singularly Perturbed Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2002. V. 47. No. 12. P. 2051–2057. https://doi.org/10.1109/TAC.2002.805676

142. *Mahmoud M.S., Hassan M.F., Singh M.G.* Approximate Feedback Design for a Class of Singularly Perturbed Systems // IEE Proceedings D (Control Theory and Applications). 1982. V. 129. No. 2. P. 49–56. https://doi.org/10.1049/ip-d.1982.0011

143. *Drăgan V., Halanay A.* Suboptimal Stabilization of Linear Systems with Several Time Scales // Int. J. Control. 1982. V. 36. Iss. 1. P. 109–126. https://doi.org/10.1080/00207178208932879

144. *Prljaca N., Gajic Z.* A Method for Optimal Control and Filtering of Multitime-Scale Linear Singularly-Perturbed Stochastic Systems // Automatica. 2008. V. 44. P. 2149–2156. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2007.12.001

145. *Radisavljević-Gajić V., Milanović M., Rose P.* Multi-Stage and Multi-Time Scale Feedback Control of Linear Systems with Applications to Fuel Cells. Mechanical Engineering Series. Cham, Switzerland: Springer, 2019. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10389-7

146. *Калашникова М.А., Курина Г.А.* Асимптотика решения трехтемповой задачи оптимального управления // Тр. XII Всерос. сов. по проблемам управления. Москва, ВСПУ 2014. М.: ИПУ РАН, 2014. С. 1560–1570.

147. *Калашникова М.А., Курина Г.А.* Асимптотическое решение линейно-квадратичных задач с дешевыми управлениями разной цены // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 124–139.

148. *Калашникова М.А.* Асимптотика приближения нулевого порядка решения трехтемповой линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22. № 1. С. 85–104.

149. *Калашникова М.А., Курина Г.А.* Приближения любого порядка асимптотического решения трехтемповой линейно-квадратичной задачи оптимального управления методом прямой схемы // Вест. ВГУ. Сер.: Системный анализ и информационные технологии. 2018. № 3. С. 33–43. https://doi.org/10.17308/sait.2018.3/1228

150. *Yuan Y., Sun F., Hu Y.* Decentralized Multi-objective Robust Control of Interconnected Fuzzy Singular Perturbed Model with Multiple Perturbation Parameters // WCCI 2012 IEEE World Congress on Computational Intelligence. Brisbane, Australia, 2012. https://doi.org/10.1109/FUZZ-IEEE.2012.6251367

151. *Krishnarayalu M.S.* Singular Perturbation Method Applied to the Open-Loop Discrete Optimal Control Problem with Two Small Parameters // Int. J. Syst. Sci. 1989. V. 20. No. 5. P. 793–809. https://doi.org/10.1080/00207728908910170

152. *Kishore Babu G., Krishnarayalu M.S.* Suboptimal Control of Singularly Perturbed Two Parameter Discrete Control System // Int. Electr. Eng. J. 2014. V. 5. No. 11. P. 1594–1604.

153. *Kishore Babu G., Krishnarayalu M.S.* Suboptimal Control of Singularly Perturbed Multiparameter Discrete Control System // 2015 IEEE Int. Conf. on Power, Instrumentation, Control and Computing. Thrissur, India, 2015. https://doi.org/10.1109/PICC.2015.7455794

154. *Kishore Babu G.* Singular Perturbation Method for Boundary Value and Optimal Problems to Power Factor Correction Converter Application // WSEAS Trans. Electronics. 2020. V. 11. P. 42–53. https://doi.org/10.37394/232017.2020.11.6

155. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

156. *Drăgan V.* Cheap Control with Several Scales // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1988. V. 33. No. 8. P. 663–677.

157. *Kurina G., Kalashnikova M.* High Order Asymptotic Solution of Linear-Quadratic Optimal Control Problems under Cheap Controls with Two Different Costs // 21st Int. Conf. Syst. Theory, Control and Computing. Sinaia, 2017. P. 499–504. https://doi.org/10.1109/ICSTCC.2017.8107083

158. *Калашникова М.А., Курина Г.А.* Прямая схема асимптотического решения линейно-квадратичных задач с дешевыми управлениями разной цены // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 1. С. 83–102.
Kalashnikova M.A., Kurina G.A. Direct Scheme for the Asymptotic Solution of Linear-Quadratic Problems with Cheap Controls of Different Costs // Differ. Equat. 2019. V. 55. No. 1. P. 84–104. https://doi.org/10.1134/S0012266119010099

159. *Kalashnikova M., Kurina G.* Estimates of Asymptotic Solution of Linear-Quadratic Optimal Control Problems with Cheap Controls of Two Different Orders of Smallness // Math. Numer. Aspects Dynam. Syst. Anal. DSTA. Lodz, 2017. P. 253–264.

160. *Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Об одной задаче теории сингулярных возмущений // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 10. С. 1736–1747.

161. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ, 1978.
Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. Singularly Perturbed Equations in the Critical Case. Madison: University of Wisconsin-Madison, 1980.

162. *Курина Г.А., Хоай Н.Т.* Проекторный подход к алгоритму Бутузова-Нефедова асимптотического решения одного класса сингулярно возмущенных задач в критическом случае // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 12. С. 2073–2084. https://doi.org/10.31857/S0044466920120078
Kurina G.A., Hoai N.T. Projector Approach to the Butuzov-Nefedov Algorithm for Asymptotic Solution of a Class of Singularly Perturbed Problems in a Critical Case // Comput. Math. Math. Phys. 2020. V. 60. No. 12. P. 2007–2018. https://doi.org/10.1134/S0965542520120076

163. *O'Malley R.E. Jr.* A Singular Singularly-Perturbed Linear Boundary Value Problem // SIAM. J. Math. Anal. 1979. V. 10. No. 4. P. 695–708.

164. *Kurina G., Nguyen T.H.* Zero-Order Asymptotic Solution of a Class of Singularly Perturbed Linear-Quadratic Problems with Weak Controls in a Critical Case // Optim. Control Appl. Meth. 2019. V. 40. Iss. 5. P. 859–879. https://doi.org/10.1002/oca.2514

165. *Букжалев Е.Е.* Сингулярно возмущенное уравнение с погранслойным решением, растянутые переменные которого зависят от различных степеней параметра возмущения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 12. С. 1775–1785.
Bukzhalev E.E. A Singularly Perturbed Equation with a Boundary-Layer Solution whose Expanded Variables Depend on Various Powers of a Perturbation Parameter // Comput. Math. Math. Phys. 2003. V. 43. No. 12. P. 1707–1717.

166. *Васильева А.Б., Давыдова М.А.* Сингулярно возмущенное уравнение второго порядка с малыми параметрами при первой и второй производных // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. № 9. С. 1504–1512.
Vasil'eva A.B., Davydova M.A. Singularly Perturbed Second-Order Equation with Small Parameters Multiplying the First and Second Derivatives // Comput. Math. Math. Phys. 1999. V. 39. No. 9. P. 1441–1448.

167. *Капустина Т.О.* Асимптотика по малым параметрам для решения параболической задачи с разрывными данными // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 1. С. 124–125.
Kapustina T.O. Asymptotics with Respect to Small Parameters of the Solution of a Parabolic Problem with Discontinuous Data // Different. Equat. 2001. V. 37. No. 1. P. 138–140. https://doi.org/10.1023/A:1019236818987

168. *Букжалев Е.Е., Васильева А.Б.* Решения сингулярно возмущенного параболического уравнения с внутренними и пограничными слоями, зависящими от растянутых переменных разного порядка // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 3. С. 424–437.
Bukzhalev E.E., Vasil'eva A.B. Solutions to a Singularly Perturbed Parabolic Equation with Internal and Boundary Layers Depending on Stretched Variables of Different Orders // Comput. Math. Math. Phys. 2007. V. 47. No. 3. P. 407–419.

169. *Васильева А.Б.* Об особенностях решений сингулярно возмущенных краевых задач при слиянии корней вырожденного уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 4. С. 554–561.
Vasil'eva A.B. On Singularities of Solutions of Singularly Perturbed Boundary Value Problems when the Roots of a Degenerate Equation Merge // Comput. Math. Math. Phys. 2003. V. 43. No. 4. P. 529–536.

170. *Бутузов В.Ф.* Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. заметки. 2013. Т. 94. № 1. С. 68–80. https://doi.org/10.4213/mzm10106
Butuzov V.F. On the Special Properties of the Boundary Layer in Singularly Perturbed Problems with Multiple Root of the Degenerate Equation // Math. Notes. 2013. V. 94. P. 60–70. https://doi.org/10.1134/S0001434613070067

171. *Бутузов В.Ф.* О зависимости структуры пограничного слоя от краевых условий в сингулярно возмущенной краевой задаче с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. заметки. 2016. Т. 99. Вып. 2. С. 201–214. https://doi.org/10.4213/mzm10832
Butuzov V.F. On the Dependence of the Structure of Boundary Layers on the Boundary Conditions in a Singularly Perturbed Boundary-Value Problem with Multiple Root of the Related Degenerate Equation // Math. Notes. 2016. V. 99. No. 2. P. 210–221. https://doi.org/10.1134/S0001434616010247

172. *Бутузов В.Ф.* Об одной сингулярно возмущенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с кратным корнем вырожденного уравнения //

Нелінійні коливання. 2018. Т. 21. № 1. С. 6–28.
Butuzov V.F. On One Singularly Perturbed System of Ordinary Differential Equations with Multiple Root of the Degenerate Equation // J. Math. Sci. 2019. V. 240. No. 3. P. 224–248. https://doi.org/10.1007/s10958-019-04350-6

173. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика решения системы сингулярно возмущенных уравнений в случае кратного корня вырожденного уравнения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 2. С. 175–186.
Butuzov V.F. Asymptotics of the Solution of a System of Singularly Perturbed Equations in the Case of a Multiple Root of the Degenerate Equation // Different. Equat. 2014. V. 50. No. 2. P. 177–188. https://doi.org/10.1134/S0012266114020050

174. *Бутузов В.Ф.* О сингулярно возмущенных системах ОДУ с кратным корнем вырожденного уравнения // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 2. С. 60–89. https://doi.org/10.4213/im8829
Butuzov V.F. On Singularly Perturbed Systems of ODE with a Multiple Root of the Degenerate Equation // Izv. Math. 2020. V. 84. No. 2. P. 262–290. https://doi.org/10.1070/IM8829

175. *Бутузов В.Ф., Бычков А.И.* Асимптотика решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае трехкратного корня вырожденного уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 4. С. 605–624. https://doi.org/10.7868/S0044466916040074
Butuzov V.F., Bychkov A.I. Asymptotics of the Solution to an Initial Boundary Value Problem for a Singularly Perturbed Parabolic Equation in the Case of a Triple Root of the Degenerate Equation // Comput. Math. Math. Phys. 2016. V. 56. No. 4. P. 593–611. https://doi.org/10.1134/S0965542516040060

176. *Бутузов В.Ф.* О периодических решениях сингулярно возмущенных параболических задач в случае кратных корней вырожденного уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 1. С. 44–55.
Butuzov V.F. On Periodic Solutions to Singularly Perturbed Parabolic Problems in the Case of Multiple Roots of the Degenerate Equation // Comput. Math. Math. Phys. 2011. V. 51. No. 1. P. 40–50. https://doi.org/10.1134/S0965542511010064

177. *Бутузов В.Ф.* Об асимптотике решения сингулярно возмущенной параболической задачи с многозонным внутренним переходным слоем // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 6. С. 961–987. https://doi.org/10.7868/S0044466918060108
Butuzov V.F. On Asymptotics for the Solution of a Singularly Perturbed Parabolic Problem with a Multizone Internal Transition Layer // Comput. Math. Math. Phys. 2018. V. 58. No. 6. P. 925–949. https://doi.org/10.1134/S0965542518060040

178. *Butuzov V.F., Nefedov N.N., Recke L., Schneider K.R.* Existence, Asymptotics, Stability and Region of Attraction of a Periodic Boundary Layer Solution in Case of a Double Root of the Degenerate Equation // Comput. Math. Math. Phys. 2018. V. 58. No. 12. P. 1989–2001. https://doi.org/10.1134/S0965542518120072

179. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика решения частично диссипативной системы уравнений с многозонным пограничным слоем // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 10. С. 1731–1751. https://doi.org/10.1134/S0044466919100053
Butuzov V.F. Asymptotic Expansion of the Solution to a Partially Dissipative System of Equations with a Multizone Boundary Layer // Comput. Math. Math. Phys. 2019. V. 59. No. 10. P. 1672–1692. https://doi.org/10.1134/S0965542519100051

180. *Ильин А.М.* Избранные научные труды. Математика. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2018.

181. *Ильин А.М.* Пограничный слой // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. 1988. Т. 34. С. 175–213.

182. *Ильин А.М., Хачай О.Ю.* Структура пограничных слоев в сингулярных задачах // Докл. АН. 2012. Т. 445. № 3. С. 256–258.
Il'in A.M., Khachai O.Yu. Structure of Boundary Layers in Singular Problems // Dokl. Math. 2012. V. 86. No. 1. P. 497–499.
https://doi.org/10.1134/S1064562412040187

183. *Данилин А.Р., Захаров С.В., Коврижных О.О., Леликова Е.Ф., Першин И.В., Хачай О.Ю.* Екатеринбургское наследие Арлена Михайловича Ильина // Тр. ИММ Уро РАН. 2017. Т. 23. № 2. С. 42–66.
https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-42-66

184. *Ильин А.М., Леликова Е.Ф.* Метод сращивания асимптотических разложений для уравнения $\varepsilon\Delta u - a(x,y)u_y = f(x,y)$ в прямоугольнике // Матем. сб. 1975. Т. 96(138). № 4. С. 568–583.

185. *Ильин А.М., Данилин А.Р.* Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009.

186. *Бутузова М.В.* Асимптотика решения бисингулярной задачи для системы линейных параболических уравнений. I // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20. № 1. С. 5–17.
https://doi.org/10.18255/1818-1015-2013-1-5-17

187. *Krishnarayalu M.S.* Singular Perturbation Methods for a Class of Initial and Boundary Value Problems in Multi-Parameter Classical Digital Control Systems // ANZIAM J. 2004. V. 46. P. 67–77. https://doi.org/10.1017/S1446181100013675

188. *Калинин А.И.* Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. Минск: УП "Экоперспектива", 2000.

189. *Грибковская И.В., Калинин А.И.* Асимптотика решения задачи быстродействия для линейной сингулярно возмущенной системы, содержащей при производных параметры различных порядков малости // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 8. С. 1275–1284.
Gribkovskaya I.V., Kalinin A.I. Asymptotic Behavior of the Solution of the Time Optimality Problem for a Linear Singularly Perturbed System that Contains Parameters of Variable Orders of Smallness at the Derivatives // Differ. Equat. 1995. V. 31. No. 8. P. 1219–1228.

190. *Грибковская И.В., Калинин А.И.* Асимптотическая оптимизация линейной сингулярно возмущенной системы, содержащей при производных параметры различных порядков малости // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 9. С. 1299–1312.
Gribkovskaya I.V., Kalinin A.I. Asymptotic Optimization of a Linear Singularly Perturbed System Containing Parameters of Different Orders of Smallness in the Derivatives // Comput. Math. Math. Phys. 1995. V. 35. No. 9. P. 1041–1051.

191. *Калинин А.И., Грибковская И.В.* Асимптотическая оптимизация линейных динамических систем, содержащих при производных параметры различных порядков малости // Вест. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Матем. Информат. 1996. № 3. С. 52–55.

192. *Грибковская И.В., Калинин А.И.* Асимптотически оптимальный регулятор для линейной динамической системы, содержащей при производных параметры различных порядков малости // Изв. АН. Теория и системы управления. 1997. № 4. С. 78–82.

193. *Gaitsgory V., Nguyen M.-T.* Averaging of Three Time Scale Singularly Perturbed Control Systems // Syst. Control Lett. 2001. V. 42. P. 395–403. https://doi.org/10.1016/S0167-6911(00)00111-0

194. *Gaitsgory V., Nguyen M.-T.* Multiscale Singularly Perturbed Control Systems: Limit Occupational Measures Sets and Averaging // SIAM J. Control Optim. 2002. V. 41. No. 3. P. 954–974. https://doi.org/10.1137/S0363012901393055

195. *Mukaidani H.* Pareto Near-Optimal Strategy of Multimodeling Systems // IECON'01. 27th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society. 2001. V. 1. P. 500–505. https://doi.org/10.1109/IECON.2001.976533

196. *Khalil H.K., Kokotović P.V.* Control Strategies for Decision Makers Using Different Models of the Same System // IEEE Trans. Automat. Control. 1978. V. 23. No. 2. P. 289–298. https://doi.org/10.1109/TAC.1978.1101712

197. *Pan Z., Başar T.* Multi-Time Scale Zero-Sum Differential Games with Perfect State Measurements // Dynam. Control. 1995. V. 5. P. 7–29. https://doi.org/10.1109/CDC.1993.325835

198. *Khalil H.K.* Multimodel Design of a Nash Strategy // J. Optim. Theory Appl. 1980. V. 31. No. 4. P. 553–564. https://doi.org/10.1007/BF00934477

199. *Mukaidani H., Xu H.* Near-Optimal Nash Strategy for Multiparameter Singularly Perturbed Systems // 43rd IEEE Conf. on Decision and Control. Atlantis, Paradise Island, Bahamas, 2004. P. 4868–4873. https://doi.org/10.1109/CDC.2004.1429568

200. *Mukaidani H.* A New Design Approach for Solving Linear Quadratic Nash Games of Multiparameter Singularly Perturbed Systems // IEEE Trans. Circuits Syst.–I. Regular Papers. 2005. V. 52. No. 5. P. 960–974. https://doi.org/10.1109/TCSI.2005.846668

201. *Mukaidani H.* Local Uniqueness for Nash Solutions of Multiparameter Singularly Perturbed Systems // IEEE Trans. Circuits Syst. II: Express Briefs. 2006. V. 53. No. 10. P. 1103–1107. https://doi.org/10.1109/TCSII.2006.882211

202. *Mukaidani H., Xu H., Dragan V.* Soft-Constrained Stochastic Nash Games for Multimodeling Systems via Static Output Feedback Strategy // Joint 48th IEEE Conf. Decision and Control and 28th Chinese Control Conf. Shanghai, P.R. China, 2009. P. 5786–5791. https://doi.org/10.1109/CDC.2009.5400302

203. *Sagara M., Mukaidani H., Dragan V.* Near-Optimal Control for Multiparameter Singularly Perturbed Stochastic Systems // Optim. Control Appl. Methods. 2011. V. 32. Iss. 1. P. 113–125. https://doi.org/10.1002/oca.934

204. *Dragan V.* Near Optimal Linear Quadratic Regulator for Controlled Systems Described by Itô Differential Equations with Two Fast Time Scales // Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl. 2017. V. 9. No. 1. P. 89–109.

205. *Drăgan V.* On the Linear Quadratic Optimal Control for Systems Described by Singularly Perturbed Itô Differential Equations with Two Fast Time Scales // Axioms. 2019. 8. 30. https://doi.org/10.3390/axioms8010030

206. *Саясов Ю.С., Васильева А.Б.* Обоснование и условия применимости метода квазистационарных концентраций Семенова-Боденштейна // Журн. физ. химии. 1955. Т. 29. № 5. С. 802–808.

207. *Eilertsen J., Stroberg W., Schnell S.* Characteristic, Completion or Matching Timescales? An Analysis of Temporary Boundaries in Enzyme Kinetics // J. Theoret. Biol. 2019. V. 481. P. 28–43. https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2019.01.005

208. *Kruff N., Walcher S.* Coordinate-Independent Singular Perturbation Reduction for Systems with Three Time Scales // Math. Biosci. Eng. 2019. V.16. Iss. 5. P. 5062–5091. https://doi.org/10.3934/mbe.2019255

209. *Kodra K., Zhong N., Gajić Z.* Multi-time-scale Systems Control via Use of Combined Controllers // 2016 Eur. Control Conf. Aalborg, Denmark, 2016. P. 2638–2643. https://doi.org/10.1109/ECC.2016.7810688

210. *Milanovic M., Radisavljevic-Gajic V.* Multi-Timescale-Based Partial Optimal Control of a Proton-Exchange Membrane Fuel Cell // Energies. 2020. V. 13. Iss. 1. 166. https://doi.org/10.3390/en13010166

211. *Jayanthi S., Del Vecchio D.* Retroactivity Attenuation in Bio-Molecular Systems Based on Timescale Separation // IEEE Trans. Automat. Control. 2011. V. 56. No. 4. P. 748–761. https://doi.org/10.1109/TAC.2010.2069631

212. *Ильин А.М., Каменкович В.М.* О структуре пограничного слоя в двумерной теории океанических течений // Океанология. 1964. Т. 4. Вып. 5. С. 756–769.

213. *Drăgan V., Halanay A.* Stability Problems for Synchronous Machines by Singular Perturbation Methods // Rev. Roum. Sci. Techn.-Electrotechn. Energ. 1982. V. 27. No. 2. P. 199–209.

214. *Meng X., Wang Q., Zhou N., Xiao S., Chi Y.* Multi-Time Scale Model Order Reduction and Stability Consistency Certification of Inverter-Interfaced DG System in AC Microgrid // Energies. 2018. V. 11. Iss. 1. 254. https://doi.org/10.3390/en11010254

215. *Munje R., Lin S., Zhang G., Zhang W.* Observer-Based Output Feedback Integral Control for Coal-Fired Power Plant: A Three-Time-Scale Perspective // IEEE Trans. Control Syst. Tech. 2020. V. 28. Iss. 2. P. 601–608. https://doi.org/10.1109/TCST.2018.2879045

216. *Семенова М.М.* Декомпозиция задач устойчивости линейных многотемповых систем // Матем. моделирование и краевые задачи. Тр. Всерос. науч. конф. 2004. Часть 3. С. 192–194.

217. *Chen Y., Liu Y.* Summary of Singular Perturbation Modeling of Multi-time Scale Power Systems // 2005 IEEE/PES Transmission and Distribution Conference & Exhibition: Asia and Pacific. Dalian, China, 2005. P. 1–4. https://doi.org/10.1109/TDC.2005.1546882. https://ieeexplore.ieee.org/document/1546882

218. *Shen F., Ju P., Shahidehpour M., Li Z., Wang C., Shi X.* Singular Perturbation for the Dynamic Modeling of Integrated Energy Systems // IEEE Trans. on Power Systems. 2020. V. 35. Iss. 3. P. 1718–1728. https://doi.org/10.1109/TPWRS.2019.2953672

219. *Юркевич В.Д.* Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами. СПб.: Наука, 2000.

220. *Французова Г.А.* Синтез систем экстремального регулирования // Научный вестник НГТУ. 2011. № 2(43). С. 47–58.

221. *González G.A., Barrera N.G., Ayala G., Padilla J.A., Alvarado D.Z.* Quasi-Steady-State Models of Three Timescale Systems: A Bond Graph Approach // Math. Probl. Eng. 2019. Article ID 9783740. https://doi.org/10.1155/2019/9783740

222. *Shimjith S.R., Tiwari A.P., Bandyopadhyay B.* Lecture Notes in Control and Information Sciences. Modeling and Control of a Large Nuclear Reactor. A Three-Time-Scale Approach. Berlin, Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer-Verlag, 2013. https://doi.org/10.1007/978-3-642-30589-4

223. *Sazhin S.S., Feng G., Heikal M.R., Goldfarb I., Gol'dstein V., Kuzmenko G.* Thermal Ignition Analysis of a Monodisperse Spray with Radiation // Combustion and Flame. 2001. V. 124. Iss. 4. P. 684–701.
https://doi.org/10.1016/S0010-2180(00)00237-6

224. *Соболев В.А., Щепакина Е.А.* Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М.: Физматлит, 2010.

225. *Ханин Я.И.* Основы динамики лазеров. М.: Наука, Физматлит, 1999.

226. *Jamshidi M.* Three-Stage Near-Optimum Design of Nonlinear-Control Processes // Proc. Inst. Elect. Engin. 1974. V. 121. No. 8. P. 886–892.
https://doi.org/10.1049/piee.1974.0205

227. *Кубышкин Е.П., Хребтюгова О.А.* Обобщенное решение одной начально-краевой задачи, возникающей в механике дискретно-континуальных систем // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19. № 1. С. 84–96.
https://doi.org/10.18255/1818-1015-2012-1-84-96

228. *Влахова А.В., Новожилов И.В.* О заносе колесного экипажа при "блокировке" и "пробуксовке" одного из колес // Фундамент. и прикл. матем. 2005. Т. 11. № 7. С. 11–20.
Vlakhova A.V., Novozhilov I.V. On Skidding of a Wheeled Vehicle when One of the Wheels Locks or Slips // J. Math. Sci. 2007. V. 146. P. 5803–5810.
https://doi.org/10.1007/s10958-007-0396-7

229. *Влахова А.В., Новодерова А.П.* Моделирование заноса аппарата с повернутыми передними колесами // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2019. № 1. С. 23–49.
https://doi.org/10.1134/S0572329919010112
Vlakhova A.V., Novoderova A.P. The Skidding Modeling of an Apparatus with Turned Front Wheels // Mech. Solids. 2019. V. 54. P. 19–38.
https://doi.org/10.3103/S0025654419010023

230. *Влахова А.В.* Математические модели движения колесных аппаратов. Москва-Ижевск: АНО "Ижев. ин-т компьют. исслед.", 2014.

231. *Влахова А.В.* К оценке опасности схода железнодорожного экипажа при вкатывании гребня колеса на рельс // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2015. № 1. С. 25–41.
Vlakhova A.V. Risk Assessment of Flange Climb Derailment of a Rail Vehicle // Mech. Solids. 2015. V. 50. No. 1. P. 19–32.
https://doi.org/10.3103/S0025654415010033

232. *Ghadami S.M., Amjadifard R., Khaloozadeh H.* Designing SDRE-Based Controller for a Class of Nonlinear Singularly Perturbed Systems // Int. J. Robot. Autom. 2013. V. 4. Iss. 1. P. 1–18.
https://www.cscjournals.org/library/manuscriptinfo.php?mc=IJRA-85

233. *Sarkar S., Kar I.N.* Formation of Multiple Groups of Mobile Robots: Multi-Timescale Convergence Perspective // Nonlinear Dynam. 2016. V. 85. P. 2611–2627.
https://doi.org/10.1007/s11071-016-2848-4

234. *Xia G., Zhang Y., Zhang W., Chen X., Yang H.* Multi-Time-Scale 3-D Coordinated Formation Control for Multi-Underactuated AUV with Uncertainties: Design and Stability Analysis Using Singular Perturbation Methods // Ocean Engineering. 2021. V. 230. 109053. https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.109053

235. *Lei M., Li Y.* Model-Based Control and Stability Analysis of Underactuated Autonomous Underwater Vehicles Via Singular Perturbations // J. Comput. Nonlinear

Dynam. 2020. V. 15. Iss. 6. 061006. Paper. No. CND-19-1446. https://doi.org/10.1115/1.4046880

236. *Ye H., Yue B., Li X., Strunz K.* Modeling and Simulation of Multi-Scale Transients for PMSG-based Wind Power Systems // Wind Energ. 2017. V. 20. P. 1349–1364. https://doi.org/10.1002/we.2097

237. *Oulad Ben Zarouala R., Acosta J.Á.* Timescale Separation Via Rayleigh Quotient in Flexible Wind Turbines: a Singularly Perturbed Approach // Nonlinear Dynam. 2019. V. 97. P. 2723–2738. https://doi.org/10.1007/s11071-019-05158-4

238. *Naidu D.S., Calise A.J.* Singular Perturbations and Time Scales in Guidance and Control of Aerospace Systems: A Survey // J. Guid. Control Dyn. 2001. V. 24. No. 6. P. 1057–1078. https://doi.org/10.2514/2.4830

239. *Calise A.J.* Singular Perturbation Methods for Variational Problems in Aircraft Flight // IEEE Trans. Automat. Control. 1976. V. AC-21. No. 3. P. 345–353. https://doi.org/10.1109/TAC.1976.1101221

240. *Hao Yang, Hailong Pei.* Two Time-Scale Assignment with State Extension for an Autonomous Helicopter // Asian J. Control. 2020. V. 23. Iss. 4. P. 1707–1719. https://doi.org/10.1002/asjc.2324

241. *Roncero S.E.* Three-Time-Scale Nonlinear Control of an Autonomous Helicopter on a Platform. PhD Thesis. Sevilla: Universidad de Sevilla, 2011. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.4530.8881. https://www.researchgate.net/publication/265013409_Three-Time-Scale_Nonlinear_Control_of_an_Autonomous_Helicopter_on_a_Platform

242. *Esteban S., Vazquez R., Gordillo F., Aracil J.* Singular Perturbation Stability Analysis for a Three-Time-Scale Autonomous Helicopter // Proc. 2nd Int. Conf. Advances in Control and Optimization of Dynamic Systems. Bangalore, India, 2012.

243. *Esteban S., Gordillo F., Aracil J.* Three-Time Scale Singular Perturbation Control and Stability Analysis for an Autonomous Helicopter on a Platform // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2013. V. 23. Iss. 12. P. 1360–1392. https://doi.org/10.1002/rnc.2823

244. *Ren W., Jiang B., Yang H.* Singular Perturbation-Based Fault-Tolerant Control of the Air-Breathing Hypersonic Vehicle // IEEE/ASME Trans. on Mechatronics. 2019. V. 24. Iss. 6. P. 2562–2571. https://doi.org/10.1109/TMECH.2019.2946645

245. *Saha D., Valasek J., Leshikar C., Reza M.M.* Multiple-Timescale Nonlinear Control of Aircraft with Model Uncertainties // J. Guidance, Control, Dynam. 2020. V. 43. No. 3. P. 1–17. https://doi.org/10.2514/1.G004303

246. *Garcia-Baquero L., Esteban S., Raffo G.V.* Singular Perturbation Control for the Longitudinal and Lateral-Directional Flight Dynamics of a UAV // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51. Iss. 12. P. 124–129. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.07.099

247. *Esteban S., Aracil J., Gordillo F.* Three-Time Scale Singular Perturbation Control for a Radio-Control Helicopter on a Platform // AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit. San Francisco, California, 2005. 6236. https://doi.org/10.2514/6.2005-6236

248. *Hepner S.A.R.* Analysis of the Planar Intercept and Tracking Problem by Application of Optimal Control and Singular Perturbation Theory. Doctoral Thesis. Diss. ETH. No. 8170. Zurich: ETH, 1986. https://doi.org/10.3929/ethz-a-000409856

249. *Krupa M., Popović N., Kopell N., Rotstein H.G.* Mixed-Mode Oscillations in a Three Time-Scale Model for the Dopaminergic Neuron // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2008. V. 18. Iss. 1. 015106. https://doi.org/10.1063/1.2779859

250. *Nan P., Wang Y., Kirk V., Rubin J.E.* Understanding and Distinguishing Three-Time-Scale Oscillations: Case Study in a Coupled Morris-Lecar System // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2015. V. 14. No. 3. P. 1518–1557. https://doi.org/10.1137/140985494

251. *Арчибасов А.А., Коробейников А., Соболев В.А.* Асимптотические разложения решений в сингулярно возмущенной модели вирусной эволюции // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 2. С. 242–252. https://doi.org/10.7868/S0044466915020039
Archibasov A.A., Korobeinikov A., Sobolev V.A. Asymptotic Expansions of Solutions in a Singularly Perturbed Model of Virus Evolution // Comput. Math. Math. Phys. 2015. V. 55. No. 2. P. 240–250. https://doi.org/10.1134/S0965542515020037

252. *Di Giamberardino P., Iacoviello D.* A Linear Quadratic Regulator for Nonlinear SIRC Epidemic Model // 23rd Int. Conf. System Theory, Control and Computing. Sinaia, Romania, 2019. P. 733–738. https://doi.org/10.1109/ICSTCC.2019.8885727

253. *Cardin P.T., da Silva P.R., Teixeira M.A.* Three Time Scale Singular Perturbation Problems and Nonsmooth Dynamical Systems // Quart. Appl. Math. 2014. V. 72. No. 4. P. 673–687. https://doi.org/10.1090/S0033-569X-2014-01360-X

254. *Brøns M., Desroches M., Krupa M.* Mixed-Mode Oscillations Due to a Singular Hopf Bifurcation in a Forest Pest Model // Math. Popul. Stud. An Int. J. of Mathematical Demography. 2015. V. 22. Iss. 2. P. 71–79. https://doi.org/10.1080/08898480.2014.925344

255. *Грибковская И.В., Дмитриев М.Г.* Управляемость в больших социально-экономических системах с позиции разделения движений // Теория активных систем. Тр. междунар. научно-практической конф. “Управление большими системами – 2011”. Том II. ИПУ РАН Москва, Россия, 2011. P. 93–96.

256. *Jiang J., Lou S.X.C.* Production Control of Manufacturing Systems: A Multiple Time Scale Approach // IEEE Trans. Automat. Control. 1994. V. 39. No. 11. P. 2292–2297. https://doi.org/10.1109/9.333779

257. *Li S., Shishkin G.I., Shishkina L.P.* Approximation of the Solution and Its Derivative for the Singularly Perturbed Black-Scholes Equation with Nonsmooth Initial Data // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 3. С. 460–480.
Li S., Shishkin G.I., Shishkina L.P. Approximation of the Solution and Its Derivative for the Singularly Perturbed Black-Scholes Equation with Nonsmooth Initial Data // Comput. Math. Math. Phys. 2007. V. 47. No. 3. P. 442–462. https://doi.org/10.1134/S0965542507030098

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 12.12.2021

После доработки 25.05.2022

Принята к публикации 28.07.2022