© 2022 г. Е.А. КАРАЦУБА, д-р. физ.-мат. наук
(ekaratsuba@gmail.com)
(ФИЦ "Информатика и управление" РАН, Москва)

БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПСИ-ФУНКЦИИ[1]

Памяти Константина Владимировича Рудакова

Построен быстрый алгоритм вычисления логарифмической производной гамма-функции Эйлера, основанный на БВЕ методе. Сложность алгоритма близка к оптимальной. Структура алгоритма допускает его распараллеливание.

Ключевые слова: быстрые алгоритмы, пси-функция, гамма-функция Эйлера, сложность вычисления, метод БВЕ.

DOI: 10.31857/S0005231022100105, **EDN:** ALDLAI

1. Введение. Быстрые алгоритмы. Метод БВЕ

Быстрые алгоритмы предназначены для оптимизации высокоточных вычислений. Основным критерием оценки быстрых алгоритмов является сложность вычисления. Первые задачи по оценке (битовой) сложности вычисления функции/арифметической операции с точностью до n знаков были сформулированы А.Н. Колмогоровым в 1950-х гг. (см. [1, 2]), первый быстрый алгоритм (алгоритм умножения n-значных чисел) был найден А.А. Карацубой в 1960 г. (см. [1–3]), что привело в дальнейшем к созданию серии алгоритмов быстрого вычисления различных функций (алгоритм умножения эквивалентен алгоритму вычисления функции $y = x^2$) со сложностью $O\left(n^{1+\varepsilon}\right)$ для любого $\varepsilon > 0$ и $n > n_1(\varepsilon)$ (вместо $O\left(n^{2+\varepsilon}\right)$ — лучшей сложности вычисления функций до эры быстрых алгоритмов).

Далее считаем, что числа записаны в двоичной системе счисления, знаки которой 0 и 1 называются битами.

Определение 1. Запись знаков 0, 1, *плюс, минус, скобка; сложение, вычитание и умножение двух битов назовем одной элементарной или битовой операцией.*

Определение 2. Вычислить (вещественную) функцию $y = f(x)$ *в точке* $x = x_0$ *с точностью до* n *знаков, значит найти такое число* A, *что* $|f(x_0) - A| \leqslant 2^{-n}$.

Определение 3. Количество битовых операций, достаточное для вычисления функции $f(x)$ *в точке* x_0 *с точностью до* n *знаков посредством данного алгоритма, называется сложностью вычисления* $f(x)$ *в точке* x_0 *и обозначается* $s_f(n) = s_{f,x_0}(n)$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 22-21-00727).

Будем далее предполагать, что для сложности умножения двух n-значных чисел справедлива оценка

$$M(n) = O\left(n^{1+\varepsilon}\right), \tag{1}$$

т.е. сложность используемого алгоритма умножения не хуже, чем $M(n) = O(n \log^C n)$, где C — константа (см. алгоритмы из [4, 5]).

Определение 4. Будем называть **быстрыми** *такие алгоритмы вычисления функции f, что для этих алгоритмов*

$$s_f(n) = O\left(n^{1+\varepsilon}\right) \text{ для любого } \varepsilon > 0 \text{ и } n > n_1(\varepsilon).$$

В теории быстрых алгоритмов основным растущим параметром является точность вычисления n, $n \to \infty$. Поскольку только запись некоторого числа с точностью до n знаков требует не менее, чем $n+1$ операций, из определения 4 следует, что быстрым вычислительным алгоритмам соответствует правильный порядок оценки сверху сложности вычисления $s_f(n)$ по n, $n \to \infty$,

$$n < s_f(n) < n^{1+\varepsilon}.$$

В 1975 г. были предложены первые алгоритмы быстрого вычисления элементарных алгебраических функций [6]. Например, самый простой алгоритм деления числа a на число b заключается в вычислении методом Ньютона обратной величины $\frac{1}{b}$ с точночтью до n знаков с последующим умножением на a по алгоритму быстрого умножения.

В 1976 г. (см., например, [7]) были предложены первые быстрые алгоритмы вычисления константы π, а затем и простейших трансцендентных функций, основанные на АГС-методе Гаусса (см., например, [8]). В [9], кроме алгоритмов вычисления простейших трансцендентных функций, основанных на АГС-методе Гаусса, содержатся также алгоритмы вычисления некоторых высших трансцендентных функций (гамма-функции Эйлера, например). Однако сложность этих алгоритмов несколько хуже определенной выше сложности быстрых алгоритмов и оценивается как

$$O\left(n^{3/2+\varepsilon}\right).$$

В 1991 г. автором был построен новый быстрый метод — метод Быстрого Вычисления Е-функций (БВЕ) (см. [10], см. также [11, 12], о Е-функциях — см. [13]).

В настоящее время известны два быстрых метода вычисления простейших трансцендентных функций — метод АГС и метод БВЕ. При этом с помощью БВЕ удается построить быстрые алгоритмы и для вычисления некоторых высших трансцендентных функций.

Иногда метод БВЕ по ошибке принимают за вариант метода Байнэри Сплиттинг (Binary Splitting). В 2010 г. Билл Роско (Andrew William Roscoe) глава факультета информатики Оксфордского университета (Department of Computer Science, University of Oxford), ученик Тони Хоара (Charles Antony

Richard Hoare) ученика Андрея Николаевича Колмогорова протестировал оба метода — БВЕ и Байнэри Сплиттинг и, отметив, что ошибки от шага к шагу в этих методах "копятся" по-разному, сделал объективный вывод о том, что это разные методы. С другой стороны, ни в одной из публикаций до 1991 г. не содержалось ни одного быстрого алгоритма вычисления какой-либо трансцендентной функции или классической константы, основанного на Байнэри Сплиттинг. Похоже, метод Байнэри Сплиттинг был неудачной попыткой воспользоваться методом А.А. Карацубы (изложен в [1–3]) для получения алгоритмов эффективного вычисления трансцендентных функций. При этом только ошибки в сложности вычисления могли неправильно сориентировать тех, кто решил, что Байнэри Сплиттинг является быстрым методом вычисления трансцендентных функций.

Метод БВЕ — это метод суммирования рядов специального вида. С помощью БВЕ можно вычислить любую элементарную трансцендентную функцию для любого аргумента, классические константы e, π, постоянную Эйлера γ, постоянные Апери и Каталана, такие высшие трансцендентные функции как гамма-функцию Эйлера, гипергеометрические функции, сферические функции, цилиндрические функции и т.д. для алгебраических значений аргумента и параметров, такие специальные интегралы, как интеграл вероятности, интегралы Френеля, интегральную экспоненциальную функцию, интегральные синус и косинус и т.д. с оценкой сложности

$$s_f(n) = O\left(M(n)\log^2 n\right) = O\left(n^{1+\varepsilon}\right),$$

для любого $\varepsilon > 0$ и $n > n_1(\varepsilon)$. Структура метода БВЕ дает возможность распараллеливания основанных на БВЕ алгоритмов.

В 2008 г. профессор Эрик Бах (Eric Bach, Univ. of Wisconsin, Madison) в письме заметил, что никто не знает, как быстро вычислить пси-функцию (про ψ-функцию см., например, [14]). Алгоритм вычисления пси-функции, основанный на БВЕ-методе, казался мне достаточно очевидным, но поскольку за эти годы никто его не описал, настоящая статья призвана восполнить это упущение.

2. Гамма-функция и пси-функция

Одна из самых широко распространенных в анализе и математической физике высших трансцендентных функций гамма-функция Эйлера определяется соотношением (см., например, [14])

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt, \qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad Re\, z > 0, \tag{2}$$

$\Gamma(N+1) = N!$, где N — натуральное число. Логарифмическая производная гамма-функции называется пси-функцией

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\log\Gamma(z), \quad \psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z). \tag{3}$$

Представление пси-функции в виде ряда

$$\psi(z) = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{z+k} \right), \quad z \neq 0, -1, -2, \ldots, \tag{4}$$

где γ есть константа Эйлера

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right),$$

не дает возможности быстро вычислить эту функцию ввиду медленной сходимости ряда из правой части (4) (о быстром алгоритме вычисления константы Эйлера см. [10, 15]).

Далее для простоты будем рассматривать лишь случаи вещественного аргумента (для комплексного аргумента все рассуждения нужно проводить отдельно для каждой из частей — вещественной и мнимой).

Так же, как и асимптотическое выражение для гамма-функции, получаемое потенциированием ряда Стирлинга (см., например, [14]), асимптотическое выражение для пси-функции (см. доказательство в [15])

$$\psi(x) = \log x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{\theta}{126x^6}, \quad 0 \leqslant \theta = \theta(x) \leqslant 1,$$

не может служить основой для построения быстрого процесса.

Быстрый алгоритм вычисления ψ-функции можно построить, воспользовавшись уже существующим БВЕ-алгоритмом вычисления гамма-функции и построив БВЕ-алгоритм вычисления производной (обычной, не логарифмической) гамма-функции. Из формулы (3) легко видеть, что

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}. \tag{5}$$

Таким образом, вычислив значения $\Gamma'(x)$ и $\Gamma(x)$ в точке $x = x_0$ с точностью $2^{-(n+1)}$ за $O\left(n^{1+\varepsilon}\right)$ операций, а затем разделив одно число на другое с точностью 2^{-n} методом Ньютона за

$$O\left(M(n)\log n\right) \tag{6}$$

операций, получим с учетом (1) значение пси-функции, вычисленное в точке $x = x_0$ с точностью 2^{-n} за $O\left(n^{1+\varepsilon}\right)$ операций.

В настоящее время как для гамма-функции, так и для пси-функции быстрые алгоритмы на основе метода БВЕ можно построить только для алгебраического аргумента. Как правило, задача изучения, а также уменьшения константы в знаке O в сложности вычисления (что приводит к практическому улучшению эффективности вычисления в частных случаях) редко рассматривается в теории быстрых алгоритмов (см. [16]), однако по построению алгоритма можно заметить, что алгоритм для алгебраического нерационального аргумента предполагает гораздо большую константу “в O”, чем алгоритм для рационального аргумента. Поэтому, хотя рациональные числа являются подмножеством алгебраических, отдельно строится алгоритм для рационального аргумента.

3. БВЕ алгоритмы вычисления гамма-функции

На основе применения метода БВЕ можно доказать следующие утверждения относительно сложности вычисления гамма-функции Эйлера (рассмотрим для простоты случай вещественного аргумента, для комплексного аргумента соответствующие теоремы доказываются отдельно для вещественной и мнимой частей аргумента).

Теорема 1. Пусть $y = \Gamma(x_0)$; $x_0 = p/q$; p, q — *целые*, $(p, q) = 1$. *Тогда*

$$s_{\Gamma(p/q)}(n) = O\left(M(n)\log^2 n\right). \tag{7}$$

Теорема 2. Пусть $y = \Gamma(x_0)$; $x_0 = \alpha$; α — *алгебраическое число, которое является корнем многочлена с целыми (заранее известными) коэффициентами. Тогда*

$$s_{\Gamma(\alpha)}(n) = O\left(M(n)\log^2 n\right). \tag{8}$$

Для удобства читателя напомним основные моменты доказательства теоремы 1 из [10]. Вычисляем значение $\Gamma(x_0)$, предполагая сначала, что $0 < x_0 < 1$, т.е. что $0 < p < q$. Воспользовавшись представлением гамма-функции в виде интеграла из (2) и тем, что в разложении этого интеграла на сумму двух интегралов

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{x_0-1}dt = \int\limits_0^{a} e^{-t}t^{x_0-1}dt + \int\limits_a^{+\infty} e^{-t}t^{x_0-1}dt,$$

для последнего интеграла при $a = n$, $0 < x_0 < 1$, справедлива оценка

$$\int\limits_a^{+\infty} e^{-t}t^{x_0-1}dt \leqslant \frac{1}{a^{1-x_0}} \int\limits_a^{+\infty} e^{-t}dt = \theta_1 2^{-n}, \quad 0 < \theta_1 < 1,$$

получаем отсюда, что

$$\Gamma(x_0) = \int\limits_0^{n} e^{-t}t^{x_0-1}dt + \theta_1 2^{-n} = n^{x_0}S + \theta_2 2^{-n}, \quad |\theta_1| \leqslant 1, \quad |\theta_2| \leqslant 1, \tag{9}$$

где

$$S = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j \frac{n^j}{j!(x_0 + j)}, \quad r + 1 \geqslant 4n, \quad n \geqslant 8. \tag{10}$$

Будем вычислять $\Gamma(x_0) = \Gamma(p/q)$ по формулам (9)–(10). Заметим, что для вычисления $n^{x_0} = n^{p/q}$, с точностью до n знаков достаточно $O(M(n)\log n) = O(n\log^2 n \log\log n)$ операций (методом Ньютона (см. [6]) при выполнении умножения методом Шенхаге–Штрассена (см. [4])). Чтобы вычислить S,

возьмем в (10) $r+1=2^k$, $2^{k-1}<4n\leqslant 2^k$, $k\geqslant 1$. Вычисляем сумму S с помощью ББЕ-процесса за k шагов, имея на j-м шаге ($j\leqslant k$)

$$S=S_1(j)+S_2(j)+\cdots+S_{r_j-1}(j)+S_{r_j}(j),\quad r_j=\frac{r+1}{2^j},$$

где $S_{r_j-\nu}(j)$; $\nu=0,1,\ldots,r_j-1$; определяются равенствами

$$S_{r_j-\nu}(j)=S_{r_{j-1}-2\nu}(j-1)+S_{r_{j-1}-2\nu-1}(j-1)=\frac{n^{r-(2^j\nu+2^j-1)}}{(r-2^j\nu)!}\frac{p_{r_j-\nu}(j)}{q_{r_j-\nu}(j)}.$$

При этом на 1-м шаге ($j=1$) вычисляются целые числа

$$p_{r_1-\nu}(1)=-qn(qr-2q\nu-q+p)+(qr-2q\nu)(qr-2q\nu+p);$$
$$q_{r_1-\nu}(1)=(qr-2q\nu+p)(qr-2q\nu-q+p);$$
$$\nu=0,1,\ldots,\frac{r+1}{2}-1;\quad r+1=2^k,\quad k\geqslant 1;$$

а на j-м шаге ($1<j\leqslant k$) вычисляются целые числа

$$p_{r_j-\nu}(j)=n^{2^{j-1}}p_{r_{j-1}-2\nu}(j-1)q_{r_{j-1}-2\nu-1}(j-1)+$$
$$+\frac{(r-2^j\nu)!}{(r-2^{j-1}(2\nu+1))!}p_{r_{j-1}-2\nu-1}(j-1)q_{r_{j-1}-2\nu}(j-1);$$
$$q_{r_j-\nu}(j)=q_{r_{j-1}-2\nu}(j-1)q_{r_{j-1}-2\nu-1}(j-1);$$
$$\nu=0,1,\ldots,r_j-1;\quad r_j=(r+1)/2^j;\quad r+1=2^k,\quad k\geqslant 1.$$

На k-м (последнем) шаге вычисляются целые числа $p_{r_k}(k)=p_1(k)$, $q_{r_k}(k)=q_1(k)$, $r!$ и производится одно деление с точностью до 2^{-2n} знаков по формуле

$$S=S_1(k)=\frac{p_{r_k}(k)}{q_{r_k}(k)}\frac{1}{r!},$$

что дает сумму S с точностью 2^{-n-1}, а следовательно и значение $\Gamma(x_0)=\Gamma(p/q)$ с точностью 2^{-n+1}, $n\geqslant 1$. Сложность такого вычисления есть (см. [10])

$$s_{\Gamma(p/q)}(n)=O\left(M(n)\log^2 n\right). \tag{11}$$

Представим доказательство теоремы 2 и алгоритм быстрого вычисления гамма-функции Эйлера при алгебраическом аргументе α в виде, удобном для его применении для быстрого вычисления пси-функции.

Доказательство. Как и для случая рационального аргумента, в соответствии с замечанием 1 сведем вычисление $\Gamma(x_0)$ при алгебраическом x_0 к вычислению $\Gamma(\alpha)$, $0<\alpha<1$, где α есть алгебраическое число степени N, $N\geqslant 2$. Для простоты рассмотрим случай, когда α является вещественным

числом. Предполагается, что известен многочлен $g(x)$, наименьшей степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число α, т.е.

$$g(x) = g_N x^N + g_{N-1}x^{N-1} + \cdots + g_1 x + g_0; \quad g(\alpha) = 0; \tag{12}$$

$g_N, g_{N-1}, \ldots, g_0$ — целые числа, $N \geqslant 2$. Как и в случае рационального аргумента, воспользуемся формулами (9), (10). Отметим, что вычисление n^α с точностью 2^{-2n} по формуле $n^\alpha = e^{\alpha \log n}$ требует $O(M(n)\log^2 n)$ операций. Сумма S из (10) принимает вид

$$S = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{n^j}{j!(j+\alpha)}, \tag{13}$$

и

$$S = S_1(0) + S_2(0) + \cdots + S_{r+1}(0), \tag{14}$$

где

$$S_{r+1-\nu}(0) = (-1)^{r-\nu} \frac{n^{r-\nu}}{(r-\nu)!(r-\nu+\alpha)}; \quad \nu = 0, 1, \ldots, r. \tag{15}$$

Вычисление S выполняется за k шагов, $r+1 = 2^k$; $2^{k-1} < 4n \leqslant 2^k$; $k \geqslant 1$, БВЕ процесса для "алгебраического случая", особенностью которого является использование основного свойства алгебраических чисел для ограничения роста сложности вычисления.

До шага i, где i определяется условиями $1 \leqslant i \leqslant k$; $2^{i-1} < N \leqslant 2^i$, производим с суммой (14), (15) действия, аналогичные описанным выше для случая рационального аргумента. Однако, группируя слагаемые суммы (14) таким же образом, теперь вычисляем на каждом шаге не числитель и знаменатель дробей, находящихся в скобках, а лишь целые коэффициенты при степенях α, многочленов, находящихся в числителе и знаменателе дробей "из скобок".

На 1-м шаге в скобках находятся дроби

$$\beta_{r_1-\nu}(1) = \frac{\alpha(r-2\nu-n) + (r-2\nu)^2 - n(r-2\nu-1)}{\alpha^2 + \alpha(2r-4\nu-1) + (r-2\nu)(r-2\nu-1)},$$
$$\nu = 0, 1, 2, \ldots; \frac{r+1}{2} - 1;$$

вычисляются числа

$$\delta_{r_1-\nu}(0,1) = (r-2\nu)^2 - n(r-2\nu-1); \quad \delta_{r_1-\nu}(1,1) = r-2\nu-n;$$
$$\rho_{r_1-\nu}(0,1) = (r-2\nu)(r-2\nu-1); \quad \rho_{r_1-\nu}(1,1) = 2r-4\nu-1.$$

На i-м шаге $(1 < i \leqslant k)$ в скобках находятся дроби

$$\beta_{r_i-\nu}(i) = \frac{\delta_{r_i-\nu}(i)}{\rho_{r_i-\nu}(i)}, \tag{16}$$

где

$$\delta_{r_i-\nu}(i)=\sum_{m=0}^{2^i-1}\delta_{r_i-\nu}(m,i)\alpha^m;\quad \rho_{r_i-\nu}(i)=\sum_{l=0}^{2^i}\rho_{r_i-\nu}(l,i)\alpha^l; \tag{17}$$

вычисляются числа

$$\delta_{r_i-\nu}(m,i)=\sum_{\substack{m_1+m_2=m\\ 0\leqslant m_1\leqslant 2^{i-1}-1\\ 0\leqslant m_2\leqslant 2^{i-1}}}\Bigg(n^{2^{i-1}}\delta_{r_{i-1}-2\nu}(m_1,i-1)\rho_{r_{i-1}-2\nu-1}(m_2,i-1)+$$

$$+\frac{(r-2^i\nu)!}{(r-2^i\nu-2^{i-1})}\delta_{r_{i-1}-2\nu-1}(m_1,i-1)\rho_{r_{i-1}-2\nu}(m_2,i-1)\Bigg);$$

$$\rho_{r_i-\nu}(l,i)=\sum_{\substack{l_1+l_2=l\\ 0\leqslant l_1\leqslant 2^{i-1}\\ 0\leqslant l_2\leqslant 2^{i-1}}}\rho_{r_{i-1}-2\nu}(l_1,i-1)\rho_{r_{i-1}-2\nu-1}(l_2,i-1);$$

$$m=0,1,2,\ldots,2^i-1,\quad l=0,1,2,\ldots,2^i,\quad \nu=0,1,2,\ldots,\frac{r+1}{2^i}-1.$$

Заметим, что умножение на степень α и вычисление δ и ρ, так же как и деление δ на ρ, не производится до последнего шага. Перед $i+1$-м шагом ($1\leqslant i\leqslant k$, $2^{i-1}<N\leqslant 2^i$) многочлены (17) редуцируются по модулю многочлена $g(x)$ из (12) при $x=\alpha$. Таким образом, если

$$\delta_{r_i-\nu}(i)=P(x)=p_{N-1}x^{N-1}+p_{N-2}x^{N-2}+\cdots+p_1x+p_0,$$
$$\rho_{r_i-\nu}(i)=Q(x)=q_Nx^N+q_{N-1}x^{N-1}+\cdots+q_1x+q_0,$$

где $p_{N-1},\ldots,p_0;q_N,\ldots,q_0$ — целые, $N=2^i$, то мы делим $P(x)$ и $Q(x)$ на $g(x)$ с остатками:

$$P(x)=g(x)P_0(x)+P_1(x),\quad Q(x)=g(x)Q_0(x)+Q_1(x),$$

где $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ есть многочлены с рациональными коэффициентами, и при этом степени многочленов $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ не превышают $N-1$. Отсюда и из (12) получаем

$$P(\alpha)=P_1(\alpha),\quad Q(\alpha)=Q_1(\alpha),$$

т.е. в (16) имеем

$$\beta_{r_i-\nu}(i)=\frac{P_1(\alpha)}{Q_1(\alpha)}. \tag{18}$$

Домножая, если нужно, числитель и знаменатель дроби (18) на целый общий множитель, получаем в числителе и знаменателе дробей “из скобок” многочлены с целыми коэффициентами степени не большей, чем $N-1$.

Начиная с шага i, на каждом шаге $i, i+1, \ldots, k$, производится редукция многочленов от α, расположенных в числителе и знаменателе $\beta_\mu(j)$, по модулю $g(x)$. Поскольку коэффициенты $g(x)$, так же как и степень $g(x)$ являются абсолютными постоянными, то значения этих коэффициентов, участвующие в представленных выше редукциях, могут возрасти лишь не более чем в g^N раз, где

$$g = \max_{0 \leqslant i \leqslant N} |g_i|,$$

что не влияет на оценку сложности проводимых вычислений. На последнем k-м шаге такого процесса получаем

$$S = S_1(k) = \frac{\beta_{r_k}(k)}{r!} = \frac{\delta_{r_k}(k)}{r!\rho_{r_k}(k)},$$

где

$$\delta_{r_k}(k) = \delta_{r_k}(0,k) + \delta_{r_k}(1,k)\alpha + \cdots + \delta_{r_k}(j,k)\alpha^j,$$
$$\rho_{r_k}(k) = \rho_{r_k}(0,k) + \rho_{r_k}(1,k)\alpha + \cdots + \rho_{r_k}(\hat{j},k)\alpha^{\hat{j}};$$

$j, \hat{j} \leqslant N-1$, и вычисляем $\delta_{r_k}(k)$, $\rho_{r_k}(k)$ и S, и следовательно, $\Gamma(\alpha)$ с точностью 2^{-n+1}.

Следовательно, сложность вычисления

$$s_{\Gamma(\alpha)}(n) = O\left(M(n)\log^2 n\right).$$

Что и требовалось доказать. Из (1) и оценок (7), (8) следует, что

$$s_{\Gamma(x_0)}(n) = O\left(n^{1+\varepsilon}\right),$$

для любого $\varepsilon > 0$ и $n > n_1(\varepsilon)$, и любого алгебраического аргумента x_0.

Замечание 1. Мы вычислили $\Gamma(x_0)$, предполагая, что $0 < x_0 < 1$. Если $x_0 \geqslant 1$, то пользуясь соотношением $\Gamma(x+m) = x(x+1)(x+2)\ldots$ $\ldots(x+m-1)\Gamma(x)$, сводим вычисление в нужной точке к вычислению в точке из интервала $(0,1)$ и вычислению фиксированного (константа) числа перемножений, что, хотя и увеличивает константу в O из оценок (7), (8), сами оценки не меняет.

4. БВЕ-алгоритмы вычисления производной гамма-функции

При вещественном x, $x > 0$, дифференцируя (2) по параметру x, получаем

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\log t dt. \tag{19}$$

Далее считаем, что $0 < x < 1$. Представим интеграл (19) в виде суммы двух интегралов

$$\Gamma'(x) = \int_0^a t^{x-1}e^{-t}\log t dt + \int_a^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\log t dt, \quad a \geqslant 1. \tag{20}$$

Оценим последний интеграл в (20). Так как при $t \geqslant 1$, $t > \log t$, то

$$\int_a^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\log t dt < \int_a^{+\infty} t^x e^{-t} dt \leqslant \int_a^{+\infty} te^{-t} dt \leqslant (a+1)e^{-a}. \tag{21}$$

Рассмотрим теперь первый интеграл правой части формулы (20):

$$I = \int_0^a t^{x-1}e^{-t}\log t dt. \tag{22}$$

Разложим функцию e^{-t} в знакопеременный ряд Тейлора по степеням t. Для $0 \leqslant t \leqslant a$, $m \geqslant a$,

$$e^{-t} = 1 - \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^{2m}}{(2m)!} + \theta\frac{t^{2m}}{(2m)!}, \quad |\theta| \leqslant 1. \tag{23}$$

Подставляя разложение (23) в (22), находим

$$I = I_1 + R(a), \tag{24}$$

где

$$I_1 = \sum_{j=0}^{2m} \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^a t^{j+x-1}\log t dt, \tag{25}$$

$$R(a) = \theta \int_0^a \frac{t^{2m+x-1}}{(2m)!}\log t dt, \quad |\theta| \leqslant 1. \tag{26}$$

Оценим остаточный член $R(a)$. Имеем из (26)

$$|R(a)| \leqslant \int_0^a \frac{t^{2m+x-1}|\log t|}{(2m)!}dt = \tag{27}$$

$$= -\int_0^1 \frac{t^{2m+x-1}\log t}{(2m)!}dt + \int_1^a \frac{t^{2m+x-1}\log t}{(2m)!}dt \leqslant \frac{a^{2m+x}\log a}{(2m)!(2m+x)}.$$

Рассмотрим интеграл I_1 из (25). Интегрируя $\int_0^a t^{j+x-1}\log t dt$ по частям, получаем

$$I_1 = \log a \sum_{j=0}^{2m} \frac{(-1)^j}{j!}\frac{a^{j+x}}{j+x} - \sum_{j=0}^{2m}\frac{(-1)^j}{j!}\frac{a^{j+x}}{(j+x)^2} = a^x \log a G_1 - a^x G_2, \tag{28}$$

где

$$G_1 = \sum_{j=0}^{2m}\frac{(-1)^j}{j!}\frac{a^j}{j+x}, \tag{29}$$

$$G_2 = \sum_{j=0}^{2m}\frac{(-1)^j}{j!}\frac{a^j}{(j+x)^2}. \tag{30}$$

Из (20), (21), (24), (27)–(30) находим, что

$$\Gamma'(x) = a^x \log a G_1 - a^x G_2 + O\left(\frac{a^{2m+x}\log a}{(2m)!(2m+x)}\right) + O\left((a+1)e^{-a}\right), \tag{31}$$

откуда при $m = 2n$, $a = n$, $n \geqslant 8$, имеем следующее приближение для производной гамма-функции в точке $x = x_0$:

$$\Gamma'(x_0) = n^{x_0}\log n \sum_{j=0}^{4n}(-1)^j \frac{n^j}{j!(j+x_0)} - \tag{32}$$

$$- n^{x_0}\sum_{j=0}^{4n}(-1)^j\frac{n^j}{j!(j+x_0)^2} + \theta_0 2^{-n}, \quad |\theta_0| \leqslant 1.$$

Легко видеть из (13), (32), что сумма (29) совпадает с суммой (13) и поэтому вычисляется быстро с помощью ББВ процесса для любого алгебраического аргумента в соответствии с теоремами 1 и 2. Заметим, что как и ранее, быстрое вычисление функций $\log n$ и $n^{x_0} = e^{x_0 \log n}$ требует не более $O(M(n)\log^2 n)$ операций, что не ухудшает общую оценку сложности вычисления первого слагаемого в (32), которая совпадает с оценкой (8).

Вычислим сумму (30), сначала предполагая, что $x_0 = p/q$, $(p,q) = 1$. Запишем эту сумму в виде ($r = 2m \geqslant 4n$)

$$S = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\frac{n^j}{j!(j+p/q)^2}. \tag{33}$$

Возьмем

$$r+1 = 2^k, 2^{k-1} < 4n \leqslant 2^k, k \geqslant 1; \tag{34}$$

членов ряда, из которого выделена сумма S. Пусть

$$S_{r+1-\nu}(0) = (-1)^{r-\nu}\frac{n^{r-\nu}}{(r-\nu)!(r-\nu+p/q)^2}; \quad \nu = 0,1,2,\ldots,r.$$

Тогда (33) можно записать в виде

$$S = S_1(0) + S_2(0) + \cdots + S_{r+1}(0).$$

Вычислим сумму S с помощью БВЕ-процесса за k шагов, объединяя на каждом шаге слагаемые S последовательно попарно и вынося за скобки "очевидный" общий множитель. При этом на каждом шаге будут вычисляться целый числитель и целый знаменатель дроби, стоящей в скобках (деление не производится до последнего шага).

На 1-м шаге имеем

$$S = S_1(1) + S_2(1) + \cdots + S_{r_1}(1); \quad r_1 = \frac{r+1}{2},$$

$$S_{r_1-\nu}(1) = S_{r+1-2\nu}(0) + S_{r-2\nu}(0) = (-1)^{r-1}\frac{n^{r-2\nu-1}}{(r-2\nu)!}\frac{p_{r_1-\nu}(1)}{q_{r_1-\nu}(1)} = \\ = \frac{n^{r-2\nu-1}}{(r-2\nu)!}\frac{p_{r_1-\nu}(1)}{q_{r_1-\nu}(1)}.$$

На 1-м шаге вычисляем целые числа

$$p_{r_1-\nu}(1) = q^2\left(-n(qr-2q\nu-q+p)^2 + (r-2\nu)(qr-2q\nu+p)^2\right), \tag{35}$$

$$q_{r_1-\nu}(1) = (qr-2q\nu+p)^2(qr-2q\nu-q+p)^2, \tag{36}$$

$\nu = 0, 1, \ldots, \dfrac{r+1}{2} - 1;\ r+1 = 2^k,\ k \geqslant 1.$

На j-м шаге ($j \leqslant k$) имеем

$$S = S_1(j) + S_2(j) + \cdots + S_{r_j-1}(j) + S_{r_j}(j); \quad r_j = \frac{r+1}{2^j};$$

где $S_{r_j-\nu}(j);\ \nu = 0, 1, \ldots, r_j - 1$; определяются равенствами

$$S_{r_j-\nu}(j) = S_{r_{j-1}-2\nu}(j-1) + S_{r_{j-1}-2\nu-1}(j-1) = \frac{n^{r-(2^j\nu+2^j-1)}}{(r-2^j\nu)!}\frac{p_{r_j-\nu}(j)}{q_{r_j-\nu}(j)}.$$

На j-м шаге ($j \leqslant k$) вычисляем целые числа

$$p_{r_j-\nu}(j) = n^{2^{j-1}}p_{r_{j-1}-2\nu}(j-1)q_{r_{j-1}-2\nu-1}(j-1) + \\ + \frac{(r-2^j\nu)!}{(r-2^{j-1}(2\nu+1))!}p_{r_{j-1}-2\nu-1}(j-1)q_{r_{j-1}-2\nu}(j-1), \tag{37}$$

$$q_{r_j-\nu}(j) = q_{r_{j-1}-2\nu}(j-1)q_{r_{j-1}-2\nu-1}(j-1), \tag{38}$$

$\nu = 0, 1, \ldots, r_j - 1;\ r_j = (r+1)/2^j$. И так далее.

На k-м (последнем) шаге вычисляем целые числа $p_{r_k}(k) = p_1(k)$, $q_{r_k}(k) = q_1(k)$, $r!$ и производим одно деление с точностью до 2^{-2n} знаков по формуле

$$S = S_1(k) = \frac{p_{r_k}(k)}{q_{r_k}(k)} \frac{1}{r!},$$

что дает сумму S с точностью 2^{-n-1}. Следовательно, значение $\Gamma'(x_0) = \Gamma'(p/q)$ вычислено с точностью 2^{-n+1}, $n \geqslant 1$.

При алгебраическом $x_0 = \alpha$ первая сумма из (32) совпадает с суммой (13) и вычисляется так же. Вычисление суммы

$$S = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{n^j}{j!(j+\alpha)^2} \tag{39}$$

проводится аналогично.

5. Сложность вычисления пси-функции

Оценим сложность вычисления $\Gamma'(x_0)$, если $x_0 = p/q$. Подсчитаем сложность вычисления суммы (33). Сначала, пользуясь формулами (37), (38), подсчитаем количество операций, достаточное для вычисления на $j+1$-м шаге, $j+1 \leqslant k$, чисел $p_{r_{j+1}-\nu}(j+1)$, $q_{r_{j+1}-\nu}(j+1)$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots, r_{j+1} - 1$, $r_{j+1} = (r+1)/2^{j+1}$, предполагая при этом, что числа $p_{\mu_1}(j)$, $q_{\mu_2}(j)$; $\mu_1 = 1, 2, \ldots, k-1$, $\mu_2 = 1, 2, \ldots, k-1$; уже вычислены. Для этого, прежде всего, оценим сверху разрядность чисел, с которыми проводятся вычисления на $j+1$-м шаге. Пусть

$$p(j) = \max_{\mu_1} p_{\mu_1}(j), \quad q(j) = \max_{\mu_2} q_{\mu_2}(j).$$

Поскольку

$$\frac{(r - 2^{j+1}\nu)!}{(r - 2^{j+1}\nu - 2^j)!} \leqslant r^{2^j}$$

из (37), (38) находим

$$p(j+1) \leqslant p(j)q(j)(n^{2^j} + r^{2^j}) \leqslant p(j)q(j)(nr)^{2^j}; \quad q(j+1) \leqslant (q(j))^2.$$

Отсюда и из (36), (38) получаем

$$\frac{p\,(j+1)}{p\,(1)} \leqslant q\,(j)\,q\,(j-1)\ldots q\,(1)\,(nr)^{2^j+2^{j-1}+\cdots+2} \leqslant$$

$$\leqslant (q\,(1))^{2^{j-1}+2^{j-2}+\cdots+1}\,(nr)^{2^{j+1}-2}.$$

Следовательно,

$$p(j+1) \leqslant p(1)(q(1))^{2^j-1}(nr)^{2^{j+1}-2}, \quad q(j+1) \leqslant (q(1))^{2^j}. \tag{40}$$

Учитывая, что из (35), (36)

$$p(1) \leqslant q^4 r^3 p^2, \quad q(1) \leqslant q^4 r^4 p^4,$$

из (40) имеем

$$p(j+1) \leqslant (nqp)^{2^{j+2}} r^{3(2^{j+1}-1)} \leqslant (qprn)^{2^{j+3}}, \quad q(j+1) \leqslant (qpr)^{2^{j+2}}. \tag{41}$$

Рассмотрим формулу (37). Сложность вычисления значений произведений

$$\frac{(r-2^{j+1}\nu)!}{(r-2^{j+1}\nu-2^j)!}; \quad \nu = 0,1,2,\dots,r_{j+1}-1, \quad r_{j+1} = \frac{r+1}{2^{j+1}},$$

составляет

$$O\left(\sum_{\tau=1}^{j} M(2^\tau \log r)\right) \tag{42}$$

операций. Из (41), (42) получаем, что для вычисления $p_{r_{j+1}-\nu}(j+1)$ достаточно $O(B(j+1))$ операций, где

$$B(j+1) = \sum_{\tau=1}^{j} M(2^\tau \log r) + M\left(2^{j+3} \log qprn\right).$$

Чтобы вычислить все $\alpha_{r_{j+1}-\nu}(j+1)$, которых ровно $r_{j+1} = 2^{-(j+1)}(r+1)$, достаточно $O(r_{j+1}B(j+1))$ операций. Предполагая для сложности умножения $M(\mu)$ оценку Шенхаге–Штрассена (см. [4]), получаем, что для вычисления $\alpha_1(k)$ на последнем шаге достаточно

$$O\left(\sum_{j=1}^{k-1} r_{j+1} B(j+1)\right) =$$

$$= O\left(\sum_{j=1}^{k-1} (r+1)2^{-(j+1)} \sum_{\tau=1}^{j} 2^\tau \log r(\tau + \log\log r)\log(\tau+\log\log r) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{k-1} (r+1)2^{-(j+1)} 2^{j+3} \log qprn(j+3+\log\log qprn)\log(j+3+\log\log qprn)\right) =$$

$$= O\left(\sum_{j=1}^{k-1} r \log qprn(j+\log\log qprn)\log(j+\log\log qprn)\right) =$$

$$= O(r\log^2 r \log qprn \log\log qprn) \tag{43}$$

операций. Учитывая, что q и p — это фиксированные константы, а параметр r удовлетворяет условиям (34), получаем из (43) оценку сложности вычисления суммы S

$$s_S(n) = O(n\log^3 n \log\log n). \tag{44}$$

Сложность вычисления суммы (30) при алгебраическом аргументе $x = \alpha$ до момента редукции по модулю многочлена (12), скажем до шага i, оценивается так же, как и в изложенном выше случае рационального аргумента. Затем, как и ранее, на каждом шаге: $i,\ i+1,\ i+2, \ldots$; проводится редукция многочленов от α, стоящих в числителе и знаменателе дробей "в скобках" по модулю $g(x)$ при $x = \alpha$. Поскольку коэффициенты в $g(x)$ являются абсолютными постоянными, степень $g(x)$ также абсолютная постоянная, при таких редукциях значения участвующих в вычислениях коэффициентов могут увеличиваться лишь в постоянное число раз, что не меняет оценку сложности вычисления.

Тем самым, учитывая (8), (10), (32), (33), (44), для сложности вычисления производной гамма функции при любом алгебраическом аргументе справедлива оценка

$$s_{\Gamma'(\alpha)}(n) = O(n \log^3 n \log\log n) = O\left(n^{1+\varepsilon}\right). \tag{45}$$

Замечание 2. Мы вычисляли $\Gamma'(x_0)$, предполагая, что $0 < x_0 < 1$. Если $x_0 \geqslant 1$, то пользуясь соотношением

$$\Gamma'(x+m) = ((x+1)(x+2)\ldots(x+m-1) + x(x+2)\ldots(x+m-1) + \ldots + \\ + x(x+1)\ldots(x+m-2))\,\Gamma(x) + x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)\Gamma'(x),$$

сводим вычисление производной гамма функции в нужной точке к вычислению в точке из интервала $(0,1)$ и вычислению фиксированного (константа) числа произведений, вычислению гамма-функции и произведению гамма функции на сумму произведений фиксированных чисел, что, хотя и увеличивает константу в O из оценки (45), саму оценку не меняет.

Таким образом, доказаны следующие утверждения

Теорема 3. Пусть $y = \Gamma'(x_0)$; $x_0 = p/q$; p, q – целые, $(p,q) = 1$. Тогда

$$s_{\Gamma'(p/q)}(n) = O\left(M(n)\log^2 n\right).$$

Теорема 4. Пусть $y = \Gamma'(x_0)$; $x_0 = \alpha$; α — алгебраическое число, которое является корнем многочлена с целыми (заранее известными) коэффициентами. Тогда

$$s_{\Gamma'(\alpha)}(n) = O\left(M(n)\log^2 n\right).$$

На основе формулы (5) и теорем 1, 2, 3, 4, а также оценки (8) получаем доказательство следующего утверждения

Теорема 5. Пусть $y = \psi(x_0)$; $x_0 = \alpha$; α — алгебраическое число. Тогда

$$s_{\psi(\alpha)}(n) = O\left(M(n)\log^2 n\right). \tag{46}$$

6. Заключение

Отметим, что аналогичные быстрые алгоритмы можно построить для логарифмических производных гамма функции любого порядка. Например, для производной пси-функции находим

$$\frac{d}{dx}\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)} - \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)^2. \tag{47}$$

Легко видеть, что для второй производной гамма функции

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\log^2 t dt,$$

можно построить ББЕ-процесс, аналогичный представленному выше. Другие функции и другое слагаемое из (47) у нас уже вычислены со сложностью (46). Таким образом, последовательно вычислив все производные до порядка K и переходя к порядку $K+1$, можно вычислять логарифмические производные любого порядка со сложностью (46). Поскольку K здесь константа, общая сложность вычисления не изменится, обеспечивая тем самым справедливость утверждения

Теорема 6. Пусть $F(z_0) = \frac{d^K}{dz^K}\log\Gamma(z_0)$; $z_0 = \alpha$; α — *алгебраическое число. Тогда*

$$s_{F(\alpha)}(n) = O\left(M(n)\log^2 n\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dynkin E.B., Kolmogorov A.N., Kostrikin A.I., et. al.* Six Lectures Delivered at the International Congress of Mathematicians in Stockholm, 1962 (American Mathematical Society Translations–series 2). 31. Publ. by AMS, 1963.
2. *Карацуба А.А.* Сложность вычислений // Тр. МИАН. 1995. № 211. С. 186–202.
3. *Карацуба А., Офман Ю.* Умножение многозначных чисел на автоматах // Докл. Академии наук СССР. 1962. Т. 145. № 2. С. 293–294.
4. *Schönhage A., Strassen V.* Schnelle Multiplikation grosser Zahlen // Computing. 1971. No. 7. P. 281–292.
5. *Fürer M.* Faster Integer Multiplication // SIAM J. Comput. 2009. V. 39. No. 3. P. 979–1005.
6. *Бендерский Ю.В.* Быстрые вычисления // Докл. Академии наук СССР. 1975. Т. 223. № 5. С. 1041–1043.
7. *Salamin E.* Computation of π using arithmetic-geometric mean // Math. Comp. 1976. V. 30. No. 135. P. 565–570.
8. *Carlson B.C.* Algorithms involving arithmetic and geometric means // Amer. Math. Monthly. 1971. No. 78. P. 496–505.
9. *Borwein J.M., Borwein P.B.* Pi and the AGM–A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity. New York: Wiley, 1987.

10. *Карацуба Е.А.* Быстрые вычисления трансцендентных функций // Пробл. передачи информ. 1991. Т. 27. № 4. С. 76–99.
11. *Карацуба Е.А.* О вычислении функции Бесселя путем суммирования рядов // Сиб. журн. вычисл. мат. 2019. Т. 27. № 4. С. 76–99.
12. *Lozier D.W., Olver F.W.J.*, Numerical Evaluation of Special Functions // Mathematics of Computation 1943–1993: A Half -Century of Computational Mathematics, Gautschi W., eds., Proc. Sympos. Applied Mathematics. AMS. 1994. No. 48. P. 79–125.
13. *Siegel C.L.* Transcendental numbers. Princeton: Princeton University Press, 1949.
14. *Temme N.M.* Special Functions. An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics. New York: J. Wiley and Sons, 1996.
15. *Karatsuba E.A.* On the computation of the Euler constant γ // Numerical Algorithms. 2000. No. 24. P. 83–97.
16. *Bach E.* The complexity of number-theoretic constants // Info. Proc. Letters. 1997. No. 62. P. 145–152.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 01.02.2022

После доработки 28.04.2022

Принята к публикации 29.06.2022