

© 2021 г. В.А. АЛЕКСАНДРОВ, канд. техн. наук (va.alexandrov@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН),
Е.Ю. ЗЫБИН, д-р техн. наук (zybin@mail.ru),
В.В. КОСЬЯНЧУК, д-р техн. наук (kos.vl.v@gmail.com),
Н.И. СЕЛЬВЕСЮК, д-р техн. наук (nis@gosniias.ru)
(ФГУП Государственный научно-исследовательский институт
авиационных систем),
А.А. ТРЕМБА, канд. физ.-мат. наук (atremba@ipu.ru),
М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН)

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫСОТНО-СКОРОСТНОГО ПРОФИЛЯ КРЕЙСЕРСКОГО ПОЛЕТА ВОЗДУШНОГО СУДНА ПРИ ФИКСИРОВАННОМ ВРЕМЕНИ ПРИБЫТИЯ¹

Рассматривается задача минимизации расхода топлива дозвуковых пассажирских и транспортных самолетов на этапе крейсерского полета. Для формирования высотно-скоростного профиля полета сформулирована задача оптимизации и предложено ее решение методом покоординатного спуска с учетом ограничений, совмещенного с использованием набора вспомогательных точек-кандидатов. Вычисление расхода топлива как целевой функции оптимизации реализовано через численное моделирование с фиксированным шагом переходных процессов скорости и высоты и упрощенный расчет значений секундного расхода по статическим уравнениям на участках полета с постоянной скоростью и высотой.

Ключевые слова: оптимизация, воздушное судно, расход топлива, крейсерский полет, моделирование полета, высотно-скоростной профиль.

DOI: 10.31857/S0005231021070047

1. Введение

Задача оптимизации маневрирования воздушных судов была и остается актуальной, требуя новых подходов и решений с развитием авиации и возможностей вычислительных систем [1, 2]. Проблема снижения расхода топлива обусловлена не только экономическими критериями, но и необходимостью сокращения выбросов CO₂. В настоящей работе рассматривается задача формирования высотно-скоростного профиля полета воздушного судна, обеспечивающего снижение расхода топлива в рамках уже совершающегося полета, когда задано время прибытия в конечную точку. При этом предполагается, что оптимизация профиля скорости и высоты периодически обновляется в процессе полета с учетом фактического местоположения воздушного судна и параметров полета. Поэтому важен вопрос разработки процедуры оптимизации с невысокой вычислительной сложностью для получения результата расчетов за несколько минут с учетом ограниченных вычислительных ресурсов на борту воздушного судна.

¹ Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-30005).

Сложность вычисления целевой функции оптимизации состоит в том, что секундный расход топлива зависит в том числе от массы воздушного судна, а масса, в свою очередь, постоянно уменьшается на величину расхода топлива. Поэтому для получения значения целевой функции необходимо промоделировать расход на всем оптимизируемом этапе полета.

В [3] рассмотрен выбор оптимальной скорости при полете на постоянной высоте как решение задачи оптимального управления (вариационной задачи). Получено аналитическое решение, при этом использована упрощенная модель расхода топлива, а также не учитываются ветровые условия. Изменение скорости для такого режима непрерывное.

Альтернативным подходом является разбиение траектории полета на интервалы и оптимизация скоростного профиля на этих интервалах (на постоянной высоте). В [4] сделана попытка найти точное решение задачи об оптимальной скорости на каждом из участков с учетом продольного ветрового воздействия. Для решения необходимо использовать явный вид функции расхода топлива, зависящей от скорости и массы, и ее особенность в виде выпуклости. Оптимальный профиль скоростей является решением системы уравнений и находится с помощью метода Ньютона. Существенной особенностью этого подхода является то, что задача с фиксированным временем полета заменяется задачей оптимизации по критерию “прямой цены полета” (direct operation cost), учитывающей как расход топлива, так и задержку по времени прибытия в конечную точку.

В [5] выполнена оптимизация профиля скорости и высоты по критерию “прямой цены полета” для случая, когда скорости и высоты являются дискретными, тем самым задача сводится к задаче смешанного целочисленно-нелинейного программирования, которая решалась стандартными методами среды МАТЛАВ. При этом число сегментов траектории выбиралось малым (до трех), что позволяло осуществлять прямой перебор вариантов.

Все три подхода являются многообещающими с точки зрения дальнейшей работы над оптимизацией полного профиля полета, но для их реализации требуется уточнение аналитической модели полета, которая должна учитывать как адекватную модель расхода топлива, так и динамику изменения скорости и высоты полета.

Вопрос модели полета, с одной стороны, позволяющей с достаточной точностью оценить расход топлива, а с другой стороны, достаточно простой, чтобы на ее основе можно было строить расчет целевой функции процедуры оптимизации, остается актуальным [6]. В [7] рассмотрена задача минимизации расхода топлива дальнемагистрального самолета. Для моделирования полета использована упрощенная система дифференциальных уравнений, где тяга и угол атаки вычисляются по статическим уравнениям. Сделан вывод, что маневрирование по скорости не дает заметного снижения расхода топлива, а оптимизация высоты полета эффективна при дальности полета более 5000 км. При этом не рассматривается быстроедействие используемых алгоритмов для применения в функции самолетовождения, реализуемой вычислительной системой на борту воздушного судна.

Таким образом, задача формирования высотно-скоростного профиля полета, обеспечивающего минимальный расход топлива на этапе крейсерского

полета, исследована недостаточно. Для оценки расхода топлива обычно используются статические уравнения или приближенные аппроксимации расхода в зависимости от массы воздушного судна, скорости и высоты полета. Такой подход не учитывает характер расхода топлива при переходных процессах, возникающих при изменении скорости или высоты полета.

В настоящей работе предлагается комбинированный подход, когда переходные процессы при изменении скорости или высоты полета моделируются системой дифференциальных уравнений, описывающей динамику полета, а расход топлива на участках с постоянной скоростью и высотой полета вычисляется по статическим уравнениям.

Для задач невыпуклой оптимизации с ограничениями (таких, как рассматриваемая задача) можно применять разные подходы, например градиентный или покоординатный спуск с проекцией на множество ограничений, метод доверительной области, случайный поиск и т.п. Часто применяются приемы глобальной оптимизации, использующие множественные начальные точки и рандомизацию поиска, а также эвристики типа генетических алгоритмов, так как невыпуклые задачи часто многоэкстремальные. Часть методов используют оценки градиента функции, которые требуют многократного вычисления самой функции, тем самым общее время выполнения алгоритма замедляется в число раз, кратное числу варьируемых компонент. В безградиентных методах чаще всего используется случайный поиск, что приводит к непредсказуемым результатам. В рассматриваемой задаче такие подходы признаны нецелесообразными из-за недетерминированности результата и с учетом, что вычислительная сложность — это один из основных критериев выбора метода оптимизации для реализации в бортовой вычислительной системе при ограниченном времени выполнения. Поэтому предлагается использовать детерминированный безградиентный поисковый метод оптимизации [8] с учетом ограничений.

Статья организована следующим образом: в разделе 2 сделана постановка задачи и сформулирована задача оптимизации расхода топлива; в разделе 3 рассмотрена динамическая модель движения центра масс воздушного судна; в разделе 4 приведены статические уравнения, по которым можно получить секундный расход топлива из текущих значений высоты и скорости полета и массы воздушного судна, считая их постоянными; в разделе 5 предложен алгоритм расчета расхода топлива на этапе крейсерского полета; в разделе 6 предлагается алгоритм оптимизации, решающий поставленную задачу; в разделе 7 предложенные алгоритмы проверяются на примере среднемагистрального пассажирского самолета; в разделе 8 приведены заключительные выводы.

2. Постановка задачи

Рассматривается крейсерский полет без учета маневрирования по курсу. Предполагается, что заданы

- 1) расстояние R , которое должно быть пройдено на этапе крейсерского полета;
- 2) время t_s , отведенное для прохождения этого расстояния;
- 3) интервал допустимых скоростей крейсерского полета $[V_{\min}, V_{\max}]$;

4) разрешенные значения эшелонов высоты $\{h_1, \dots, h_K\}$;

5) значения скорости V_0 и высоты h_0 в начале этапа крейсерского полета, а также высоты h_{N+1} , на которую необходимо выйти в конце этапа крейсерского полета;

6) масса воздушного судна в начале этапа крейсерского полета m_0 ;

7) параметры воздушного судна.

Задача состоит в том, чтобы определить требуемые скорость и высоту полета в каждый момент времени, которые передаются в бортовую систему управления, такие что суммарный расход топлива на этапе крейсерского полета будет минимальным для заданных расстояния, времени, других исходных данных и ограничений крейсерского полета. При определении высоты полета необходимо учитывать, что 1) высота должна быть равна одному из заданных допустимых значений, соответствующих эшелонам полета, 2) задается некоторое минимальное время нахождения в одном эшелоне, т.е. смена эшелонов может производиться не чаще, чем через некоторое заданное время. При этом требуемые скорость и высота полета будут определяться для некоторого количества участков, на которых эти значения остаются постоянными. Это означает, что требуемые скорость и высота полета не будут функциями времени с разными значениями в каждый момент, а будут кусочно-постоянными функциями. Количество участков по скорости и по высоте, на которые разбивается весь этап крейсерского полета, должно быть задано. Таким образом, можно сформулировать решаемую задачу.

Задача. Определить для этапа крейсерского полета требуемую скорость на каждом участке по скорости и требуемую высоту полета на каждом участке по высоте, минимизирующие суммарный расход топлива на всем этапе крейсерского полета при заданных времени и расстоянии полета, высотах в начале и в конце этапа крейсерского полета, массе и скорости в начале этапа крейсерского полета, ограничениях на допустимые минимальную и максимальную скорость и минимальное допустимое время между изменениями требуемой высоты, допустимые дискретные значения высоты полета, соответствующие эшелонам полета.

Чтобы сформулировать эту задачу как задачу оптимизации, необходимо выделить вектор варьируемых переменных, ограничения на эти переменные, целевую функцию и функции ограничений. Для скоростного профиля зададим число n участков равного размера $r = R/n$, для каждого из которых нужно выбрать скорость $V_i \in [V_{\min}, V_{\max}]$, $i = 1, \dots, n$, так чтобы выполнялось условие прибытия в заданное время t_s :

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \frac{r}{V_i} = t_s.$$

Предлагается использовать в качестве варьируемых переменных не скорости V_i , а периоды времени $x_i = r/V_i$, так как в этом случае вместо (1) получаем линейную функцию ограничения

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n x_i = t_s, \quad x_i \in \left[\frac{r}{V_{\max}}, \frac{r}{V_{\min}} \right].$$

Пусть для высотного профиля задано число N участков с различной высотой полета. Тогда следующая группа варьируемых переменных — это высота полета на каждом из N участков $x_i \in \{h_1, \dots, h_K\}$, $i = n + 1, \dots, n + N$, где K — число разрешенных эшелонов высоты.

Для каждого участка различной высоты необходимо определить его длительность. Высота полета не может меняться слишком часто, т.е. число N выбирается в пределах от 1 до 5 в зависимости от расстояния, которое должно быть пройдено на этапе крейсерского полета. Поэтому дополнительная группа варьируемых переменных — это время полета для каждого участка высоты $x_i \geq t_{h \min}$, $i = n + N + 1, \dots, n + 2N$, где $t_{h \min}$ — минимальное допустимое время между изменениями требуемой высоты. Тем самым участки для каждой высоты не имеют фиксированную длину, как для скорости, а время полета на каждом эшелоне может варьироваться. При этом должно выполняться условие

$$(3) \quad \sum_{i=n+N+1}^{n+2N} x_i = t_s - t_e,$$

где t_e — время, зарезервированное для выхода на заданную высоту в конце крейсерского полета.

Таким образом, задача оптимизации состоит в том, чтобы найти вектор

$$x = [x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+N}, x_{n+N+1}, \dots, x_{n+2N}],$$

минимизирующий целевую функцию

$$(4) \quad q_s = \int_0^{t_s} q_c(t) dt,$$

где q_c — секундный расход топлива, при соблюдении ограничений (2) и (3).

3. Динамическая модель

Динамика движения центра масс воздушного судна определяется действующими силами тяги двигателей, лобового сопротивления, подъемной силы и силы тяжести [9] с учетом того, что масса не постоянна, а уменьшается за счет расхода топлива [6] и может быть описана уравнениями

$$(5) \quad m\dot{V} = T \cos(\alpha + \varphi) - \frac{1}{2}c_x \rho S V^2 - mg \sin \Theta + V q_c,$$

$$(6) \quad mV\dot{\Theta} = T \sin(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2}c_y \rho S V^2 - mg \cos \Theta,$$

$$(7) \quad \dot{h} = V \sin \Theta,$$

$$(8) \quad \dot{L} = V \cos \Theta + V_w,$$

$$(9) \quad \dot{m} = -q_c,$$

$$(10) \quad \alpha = \theta - \Theta,$$

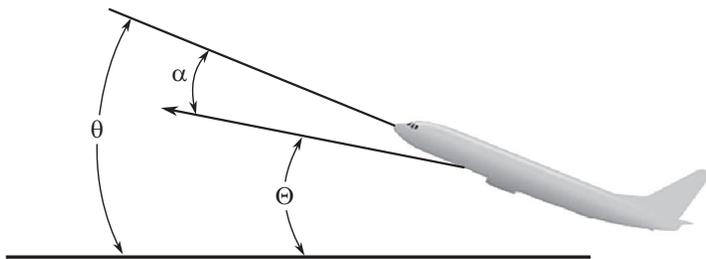


Рис. 1. Взаимосвязь угла атаки и тангажа.

где переменные состояния m — масса воздушного судна (кг), V — воздушная скорость (м/с), Θ — угол наклона траектории (рад), h — высота полета (м), L — пройденное расстояние (м); известные для исследуемой модели воздушного судна константы φ — угол установки двигателей (рад) и S — площадь крыла (м²), ускорение свободного падения будем считать константой $g = 9,80665$ м/с², плотность воздуха ρ (кг/м³) определяем из стандартной атмосферы [10] в зависимости от высоты h , α — угол атаки (рад) (его соотношение с углами наклона траектории и тангажа показано на рис. 1), c_x и c_y — аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы, q_c — секундный расход топлива (кг/с), V_w — известная или прогнозируемая скорость попутной/встречной составляющей ветра (м/с), значения T суммарной тяги двигателей (Н) и тангажа θ (рад) определяются работой регуляторов скорости и высоты бортовой системы управления.

Для исследуемой модели воздушного судна должны быть известны аппроксимирующие формулы зависимости аэродинамических коэффициентов от числа Маха и угла атаки $c_x(M, \alpha)$ и $c_y(M, \alpha)$ или заданы таблицы для интерполяции. Число Маха находим как

$$M = \frac{V}{a},$$

где a — скорость звука, определяемая из стандартной атмосферы в зависимости от высоты h . Кроме того, аэродинамические коэффициенты зависят от значения числа Рейнольдса, но так как в работе рассматривается только крейсерский полет, то в подразумеваемом диапазоне высот влияние этого значения несущественно и им пренебрегаем. Типовые зависимости $c_x(M, \alpha)$ и $c_y(M, \alpha)$ для диапазона значений M и α в режиме крейсерского полета показаны на рис. 2 и рис. 3.

Секундный расход топлива можно выразить как

$$(11) \quad q_c = \eta(M, T, h)T,$$

где $\eta(M, T, h)$ — удельный расход топлива (кг/с/Н) — известная для двигателей исследуемой модели воздушного судна функция от числа Маха, тяги, высоты полета и, возможно, других параметров [11].

ПИД-регулятор скорости формирует сигнал управления как функцию уставки и измеренного значения воздушной скорости. Коэффициенты регулятора должны быть известны. Следует учитывать, что существует некоторая

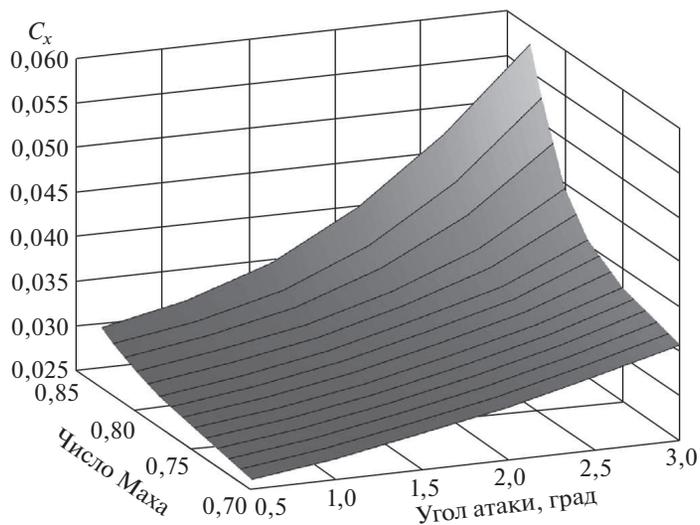


Рис. 2. Зависимость аэродинамического коэффициента лобового сопротивления c_x от числа Маха и угла атаки (градусы).

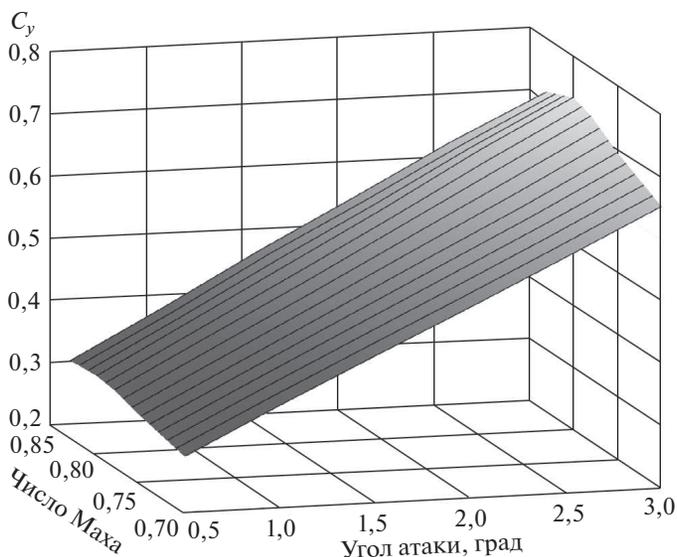


Рис. 3. Зависимость аэродинамического коэффициента подъемной силы c_y от числа Маха и угла атаки (градусы).

динамика тяги в зависимости от этого сигнала управления, и модель этой динамики также должна быть известна. В этой работе для моделирования динамики двигателей используется дифференциальное уравнение первого порядка. Аналогично работа регулятора высоты моделируется как ПИ-регулятор с известными коэффициентами, а инерционность тангажа к сигналу управления рулем высоты моделируется дифференциальным уравнением первого

порядка. Кроме того, в регуляторе высоты предусмотрено ограничение угла наклона траектории.

Таким образом, система уравнений (1)–(10), дополненная формулами расчета $c_x(M, \alpha)$, $c_y(M, \alpha)$ и $\eta(M, T, h)$, уравнениями регуляторов скорости и высоты и уравнениями динамики тяги и тангажа, позволяет моделировать крейсерский полет для заданных уставок скорости и высоты, определяющих высотно-скоростной профиль полета. Начальные условия должны быть заданными в соответствии с параметрами полета в начале этапа крейсерского полета.

В рассматриваемой задаче предполагается, что время t_s , отведенное на крейсерский полет, задано (и скорость выбирается так, что за это время будет преодолено планируемое расстояние крейсерского полета). Поэтому, моделируя полет в течение времени t_s , можно получить суммарный расход топлива на этапе крейсерского полета как разность заданной массы воздушного судна в начале этапа крейсерского полета и массы, полученной в конце моделирования.

4. Статическая модель

При решении задачи оптимизации целевая функция (4) вычисляется для каждого варианта варьируемых переменных, использованного в процедуре поиска минимального значения целевой функции. Поэтому время, необходимое для вычисления значения целевой функции, должно быть достаточно малым, и даже за счет некоторой потери точности расчета значения целевой функции нужно искать пути сокращения вычислений.

Статическая модель позволяет получить значение секундного расхода топлива для текущих значений скорости и высоты полета и массы воздушного судна. Так как существуют участки полета, когда скорость и высоту можно принять постоянными значениями, а при моделировании без учета возмущений — весь этап крейсерского полета, кроме участков переходного процесса между сформированными уставками скорости и высоты, то тогда

$$(12) \quad \dot{V} = 0, \quad \dot{\Theta} = 0, \quad \Theta = 0, \quad \dot{h} = 0.$$

Для этих условий из уравнения (5), приняв $q_c = \eta_0 T$, где η_0 — приближительное среднее значение удельного расхода топлива, получаем формулу расчета тяги

$$(13) \quad T = \frac{c_x \rho S V^2}{2(\cos(\alpha + \varphi) + V \eta_0)}.$$

Для использования формулы (13) необходимо определить значение $c_x(M, \alpha)$, т.е. нужно еще найти значение угла атаки α . Для этого запишем уравнение (6) при условиях (12):

$$(14) \quad T \sin(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2} c_y \rho S V^2 - mg = 0.$$

Так как в режиме крейсерского полета угол $\alpha + \varphi$ мал, то часто первым слагаемым в этом уравнении пренебрегают, и тогда можно получить значение

$$(15) \quad c_y = \frac{2mg}{\rho SV^2}.$$

Приблизительное значение $\hat{\alpha}$ определяется из известной зависимости $c_y(M, \alpha)$. В настоящей работе предлагается определять значение угла атаки α более точно. Для этого подставим в (14) вместо T выражение (13), где пренебрегаем малым слагаемым $V\eta_0$:

$$(16) \quad \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)c_x\rho SV^2 + c_y\rho SV^2 - 2mg = 0.$$

Для малых значений угла $\alpha + \varphi$ можно принять $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \approx \alpha + \varphi$ и из (16) получить

$$(17) \quad (\alpha + \varphi)c_x(M, \alpha) + c_y(M, \alpha) - \frac{2mg}{\rho SV^2} = 0.$$

Здесь важно помнить, что использование приближенных статических уравнений предполагается для сокращения времени вычислений. Поэтому для того, чтобы получение значения α как решение уравнения (17) не стало вычислительно сложной задачей, необходимо получить линейные аппроксимации

$$(18) \quad c_x(M, \alpha) = k_{x1}(M, \alpha)\alpha + k_{x0}(M, \alpha),$$

$$(19) \quad c_y(M, \alpha) = k_{y1}(M)\alpha + k_{y0}(M).$$

На рис. 3 видно, что зависимость $c_y(M, \alpha)$ практически линейна относительно α , и будем считать, что коэффициенты в линейной аппроксимации (19) зависят только от числа Маха M , которое при рассмотрении статических уравнений является известным значением для заданных воздушной скорости и высоты полета. На рис. 2 видно, что зависимость $c_x(M, \alpha)$ нелинейна относительно α , поэтому коэффициенты в линейной аппроксимации (18) зависят и от угла атаки α . Будем использовать оценку $\hat{\alpha}$, полученную из уравнений (15) и (19) для вычисления значений коэффициентов $k_{x1}(M, \alpha)$ и $k_{x0}(M, \alpha)$.

Таким образом, подставив (18) и (19) в (17), получим квадратное уравнение с неизвестным α , из которого легко находится его значение. Выбирается большее из двух решений квадратного уравнения с учетом, что значение угла атаки в рассматриваемых режимах должно быть положительным. Теперь можно посчитать тягу по формуле (13) и найти текущее значение расхода топлива (11).

Следует заметить, что в (17) использовано текущее значение массы m , которое постоянно уменьшается в соответствии с расходом топлива. Поэтому для получения расхода топлива на участке с постоянными скоростью и высотой полета нужно выбрать некоторый шаг времени, на котором изменением массы можно пренебречь, и с этим шагом повторять расчет секундного расхода топлива по формулам (11) и (13), обновляя значение массы на каждом

шаге с учетом расхода топлива и интегрируя расход. В рассматриваемом в разделе 7 примере расход топлива на участках без переходных процессов составляет не более 0,72 кг/с, и при выборе шага в 60 с изменение общей массы за один шаг будет менее 0,07 %, а изменение расхода топлива менее 0,04 %, что можно считать верхней оценкой возможной ошибки расчета расхода. Ошибка по сравнению с моделированием этого примера методом Рунге–Кутты четвертого порядка практически оказалась в несколько раз меньше.

5. Алгоритм расчета расхода топлива

Предлагается вычислять значение суммарного расхода топлива на этапе крейсерского полета (4), используя для участков с постоянными скоростью и высотой полета формулы (11) и (13), где значение массы будет уменьшаться на величину расхода топлива с шагом вычислений таким, на котором массу можно считать постоянной с достаточной степенью точности. То есть выбрав шаг моделирования Δ_{st} , принимаем длительность участка с постоянными скоростью и высотой полета равным

$$t_k = l\Delta_{st} + \Delta,$$

где l — натуральное число, $\Delta < \Delta_{st}$, и вычисляем расход топлива на этом участке как сумму

$$q_k = \sum_{i=1}^l \bar{q}_{c_i} \Delta_{st} + \bar{q}_{c_{l+1}} \Delta,$$

где \bar{q}_{c_i} — полученные значения секундного расхода топлива на каждом шаге.

Для переходных процессов при изменении скорости или высоты полета предлагается находить расход топлива, моделируя полет по уравнениям (5)–(11), формулам расчета $c_x(M, \alpha)$, $c_y(M, \alpha)$ и $\eta(M, T, h)$ и формулам регуляторов скорости и высоты, учитывая инерционность тяги и тангажа и используя простейший численный метод Эйлера первого порядка с шагом одна секунда. Использование этого метода для рассматриваемого в разделе 7 примера дает ошибку значения расхода топлива по сравнению с моделированием методом Рунге–Кутты четвертого порядка всего 0,004 % при повышении быстродействия в 3 раза.

Следует учитывать, что если принимать уставку скорости на каждом из n участков равной

$$(20) \quad V_i = \frac{r}{x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

то в результате моделирования пройденное расстояние может отличаться от заданного, так как в начале каждого участка во время переходного процесса от скорости V_{i-1} к скорости V_i реальная скорость еще не равна значению V_i . Поэтому для соблюдения условия, что необходимо преодолеть заданное расстояние за заданное время, уставка скорости на участке рассчитывается как

$$(21) \quad V_i = \frac{r - t_v V_{i-1}}{x_i - t_v}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где t_v — примерное усредненное значение, подбираемое экспериментально, соответствующее половине времени основной части переходного процесса, где скорость принимается как среднеарифметическое от скоростей предыдущего и текущего участков. Это позволяет скомпенсировать ошибку в итоговом пройденном расстоянии. В рассматриваемом в разделе 7 примере $t_v = 11$ с. При больших участках постоянной скорости, например, для $r = 500\,000$ м и $x_i = 2200$ с разницей значений, полученных по формуле (20) или (21), составит примерно 0,02 % при изменении скорости на 10 м/с и еще меньше при меньшем изменении. Такой разницей можно пренебречь. Но если значения r и x_i будут в 10 раз меньше, то ошибка вырастет в 10 раз и будет уже неприемлемой.

Кроме того, во время переходного процесса по высоте горизонтальная скорость должна учитывать угол наклона траектории. Поэтому уставка скорости на участке рассчитывается следующим образом:

$$(22) \quad V_i = \frac{r - t_v V_{i-1}}{x_i - t_v - t_{hi}(1 - \cos \Theta_{\max})}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где Θ_{\max} — максимально разрешенный угол наклона траектории в режиме крейсерского полета, t_{hi} — общее время переходных процессов по высоте на i -м участке по скорости (если их нет на этом участке, то $t_{hi} = 0$, и тогда (22) совпадает с (21)), которое находится как сумма длительностей переходных процессов по высоте, каждую из которых определяем как

$$\frac{|x_j - x_{j-1}|}{V_i \sin \Theta_{\max}},$$

где x_j — значение высоты. Такой расчет требуемой скорости носит оценочный характер, что может приводить к тому, что за заданное время при найденных значениях скоростей пройденное расстояние будет отличаться от заданного. Так, в примере раздела 7 при моделировании профиля полета длительностью 6 ч, показанного на рис. 7, расстояние полета получилось равным 5 000 031 м при заданном значении 5 000 000 м, т.е. ошибка составила менее 0,001 %. Практически требуемая точность моделирования расхода топлива составляет 0,05 %. При этом нужно учитывать, что задача — найти оптимальный высотно-скоростной профиль полета, а не значение расхода, т.е. важно, чтобы разные исходные данные моделирования не приводили к существенно разным ошибкам и таким образом влияли на полученный результат, а расхождение моделируемого и реального расхода топлива может быть более существенным.

6. Алгоритм оптимизации

Целевая функция расхода топлива моделируется нелинейными дифференциальными и алгебраическими уравнениями, поэтому ее градиент аналитически недоступен, а его численная оценка по непрерывным переменным требует $n + N$ дополнительных вычислений функций, что неприемлемо с точки зрения замедления алгоритма. Более того, функция невыпуклая и многоэкстремальная, что затрудняет применение ряда алгоритмов (ускоренных и

проксимальных), а также исключает гарантии нахождения глобального минимума методами оптимизации, не использующими переборный подход. Поэтому применяются эвристические и частично переборные алгоритмы, сходящиеся к локальному минимуму. Постановка задачи усложняется введением дискретных переменных (эшелоны высоты). Их полный перебор требует K^N вычислений целевой функции и представляется нереализуемым даже для небольшого числа переменных N (число участков полета на постоянной высоте) и доступных эшелонов K .

Обе сложности удалось преодолеть с помощью гибридного метода оптимизации, требующего небольшое количество вычислений целевой функции и одновременно учитывающего “разумный” перебор дискретных величин. Реализованный метод схож с методом покоординатного спуска [8, 12]. Метод отличается тем, что для соблюдения ограничений на каждом шаге может изменяться не одна, а несколько компонент вектора переменных. Кроме того, используется набор вспомогательных точек-кандидатов, что позволяет успешно решать проблему попадания в локальный минимум, в отличие от метода локальных вариаций [12]. Выбор точек-кандидатов детерминирован в отличие от метода роя частиц [13]. Алгоритм выполняется с фиксированным параметром шага, поэтому нужно учитывать, что это минимум на множестве варьируемых переменных, зависящем от выбранного параметра шага. При выполнении алгоритма генерируется последовательность точек $\{x^{(i)}, i = 1, 2, \dots\}$, образующих релаксирующую, убывающую последовательность

$$q_s(x^{(i+1)}) \leq q_s(x^{(i)}).$$

Вектор переменных $x = [x^1, x^2, x^3]$ состоит из трех групп: x^1 — время на каждый из n участков различной скорости, x^2 — высота из множества разрешенных эшелонов для каждого из N участков различной высоты, x^3 — время на каждый из N участков различной высоты. При изменении компоненты в первой или третьей группах необходимо соблюдать ограничения (2) или (3) соответственно. Например, при увеличении выбранной компоненты “соседние” с ней или все остальные компоненты группы уменьшаются так, чтобы выполнялись ограничения (2) и (3). По существу подзадача выбора точек-кандидатов состоит в подборе нескольких “соседних” по отношению к текущей точек, удовлетворяющих ограничениям. Изменение основной выбранной компоненты характеризуется внутренним параметром алгоритма, играющим роль длины шага. В группе варьируемых переменных x^2 (высота полета на каждом из N участков $x_i \in \{h_1, \dots, h_K\}$, $i = n + 1, \dots, n + N$) в качестве точек-кандидатов берутся все возможные варианты, т.е. все K эшелонов.

Алгоритм оптимизации.

Шаг 1. Выбрать начальную точку

$$x^{(0)} = [x^{1,(0)}, x^{2,(0)}, x^{3,(0)}],$$

удовлетворяющую всем ограничениям. Инициализировать общий счетчик итераций $k = 0$, внутренние счетчики для каждой группы переменных $k^1 = k^2 = k^3 = 1$ и счетчик неэффективных шагов $k^{\text{bad}} = 0$.

Шаг 2. Выбрать группу переменных $j = \text{mod}(k, 3) + 1$.

Шаг 3. В группе переменных x^j выбрать основную изменяемую компоненту и увеличить ее счетчик.

Шаг 4. Сформировать набор точек-кандидатов $X = \{x^a, x^b, \dots\}$ на основе выбранной группы и изменяемой компоненты. Число кандидатов зависит от группы.

Шаг 5. Вычислить целевую функцию во всех точках-кандидатах и выбрать среди них минимальное значение и соответствующую точку

$$x^{\text{cand}} = \arg \min_{x \in X} q_s(x).$$

Шаг 6. Если значение функции удалось улучшить, т.е.

$$q_s(x^{\text{cand}}) < q_s(x^{(k)}),$$

то изменить текущую точку $x^{(k+1)} \leftarrow x^{\text{cand}}$ и сбросить счетчик неэффективных шагов $k^{\text{bad}} \leftarrow 0$. В противном случае сохранить точку $x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)}$ и увеличить счетчик неэффективных шагов $k^{\text{bad}} \leftarrow k^{\text{bad}} + 1$.

Шаг 7. Если счетчик неэффективных шагов меньше числа переменных $k^{\text{bad}} < n + 2N$, то перейти к Шагу 2. Иначе

Завершить алгоритм: Вернуть в качестве решения текущую точку $x^{(k)}$.

7. Пример

Предложенные алгоритмы оптимизации и расчета целевой функции реализованы в среде МАТЛАВ. Проверка их работоспособности проведена на следующем примере. Рассмотрим среднемагистральный пассажирский самолет МС-21-300 с площадью крыла $S = 113 \text{ м}^2$ и следующими исходными данными крейсерского полета, представленными в табл. 1.

Проверим сначала эффективность варьирования скорости на постоянной высоте. Пусть для скорости задано $n = 10$ участков (тогда $r = R/n = 500 \text{ км}$), а высоту считаем постоянной: $N = 1$, $K = 1$, $h_0 = h_1 = h_{N+1} = 9144 \text{ м}$. Процедурой оптимизации найдены значения скоростей:

$$V = [235,33, 235,45, 235,58, 235,7, 234,96, \dots \\ \dots 227,37, 227,37, 227,48, 227,59, 228,64] \text{ м/с}.$$

Таблица 1. Исходные данные

Расстояние крейсерского полета	R	5 000 000 м (5000 км)
Время крейсерского полета	t_s	21 600 с (6 ч)
Минимальная скорость	V_{min}	210 м/с
Максимальная скорость	V_{max}	250 м/с
Начальная скорость	V_0	$R/t_s = 231,48 \text{ м/с}$
Начальная высота	h_0	9144 м (30 000 футов)
Конечная высота	h_{N+1}	9144 м (30 000 футов)
Разрешенный угол наклона траектории	Θ_{max}	1 градус
Масса в начале крейсерского полета	m_0	75 000 кг

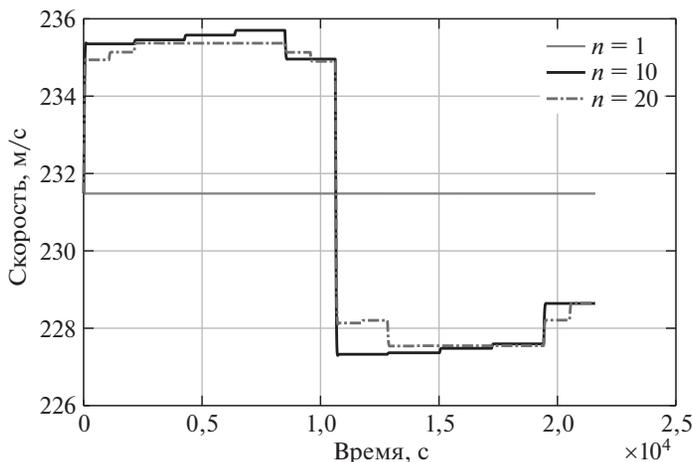


Рис. 4. Скорость при моделировании найденного профиля.

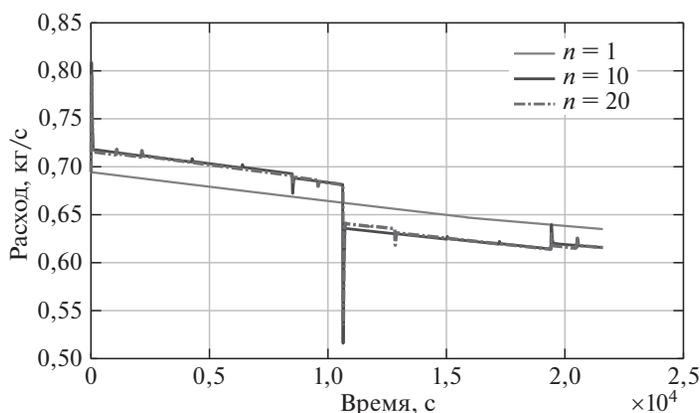


Рис. 5. Расход топлива при моделировании найденного профиля скорости.

Расход топлива составил 14 293 кг. Если менять скорость чаще и принять $n = 20$, то получим такой же расход топлива с точностью до 0,2 кг. То есть повышение вариативности скорости не дает дополнительной экономии. При моделировании полета с постоянной скоростью

$$V = \frac{5\,000\,000}{21\,600} = 231,481 \text{ м/с}$$

расход топлива составил 14 314 кг. Маневрирование по скорости дало экономии всего 21 кг. Графики моделирования скорости и секундного расхода топлива для этих трех вариантов показаны на рис. 4 и 5.

При оптимизации высоты и скорости для $n = 10$, $N = 4$, $K = 6$, $h_0 = h_{N+1} = 9144$ м и разрешенных значениях эшелонов высоты

$$\begin{aligned} \{h_1, \dots, h_K\} &= \{9144, 9753,6, 10363,2, 10972,8, 11582,4, 12192\} \text{ м} = \\ &= \{30\,000, 32\,000, 34\,000, 36\,000, 38\,000, 40\,000\} \text{ футов} \end{aligned}$$

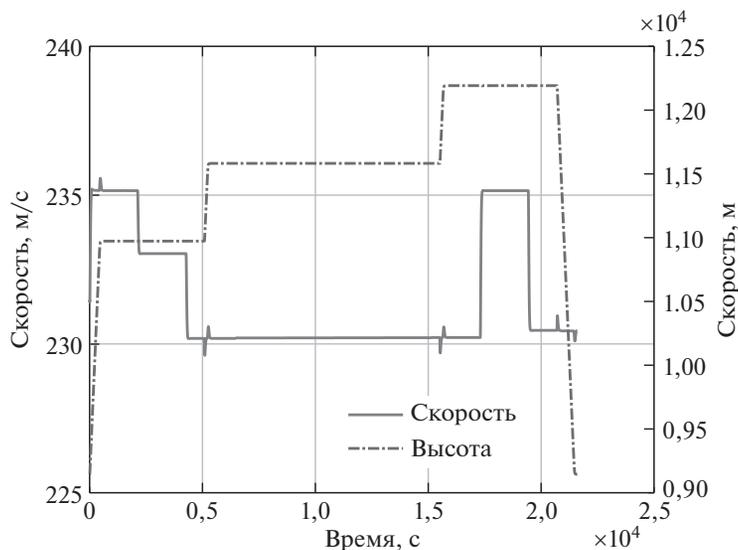


Рис. 6. Скорость и высота при моделировании найденного профиля.

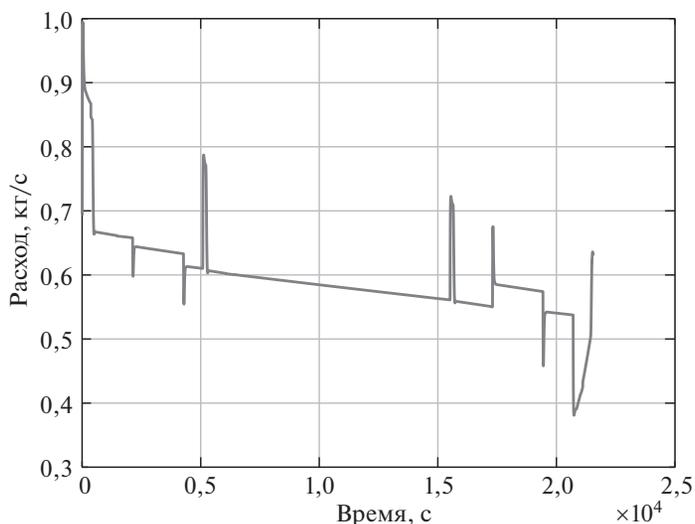


Рис. 7. Расход топлива при моделировании найденного профиля.

получен расход топлива 12838 кг при значениях скоростей на каждом из десяти участков:

$$V = [235,15, 233,04, 230,18, 230,20, 230,2, \dots \\ \dots 230,21, 230,21, 230,21, 235,15, 230,46] \text{ м/с.}$$

значениях высоты на каждом из четырех участков:

$$h = [10972,8, 11582,4, 11582,4, 12192] \text{ м,}$$

Таблица 2. Зависимость расхода топлива от высоты полета

Высота, м	9144	11582,4	12 192
Расход, кг	14 314	12 893	13 016

значениях длительности каждого из четырех участков высоты:

$$x^3 = [5082,4, 5224,2, 5204,1, 5189,3] \text{ с.}$$

Графики моделирования скорости и высоты показаны на рис. 6, график секундного расхода топлива — на рис. 7. При моделировании полета с постоянной скоростью $V = 231,481$ м/с и на постоянной высоте 11582,4 м расход топлива составил 12 893 кг. Маневрирование дало более заметную экономию 55 кг. Заметим, что даже если не менять высоту на этапе крейсерского полета ($N = 1$), важен выбор высоты полета в зависимости от массы. Для рассматриваемого примера при $m_0 = 75\,000$ кг при полете с постоянной скоростью $V = 231,481$ м/с и на постоянной высоте расход на разных высотах приведен в табл. 2.

Заметим, что в полученных значениях расхода топлива учтены набор высоты от начальной высоты крейсерского полета и снижение к высоте, требуемой в конце этапа крейсерского полета.

8. Заключение

Полученные результаты моделирования подтверждают результаты других исследований, что при решении задачи минимизации расхода топлива при условии заданных расстояния и времени крейсерского полета маневрирование по скорости и высоте не дает существенной экономии топлива. Так, в рассмотренном примере маневрирование только по скорости дало снижение расхода на 0,15 %, а при маневрировании по скорости и высоте — на 0,4 %. Тем не менее важен расчет экономической высоты полета при заданной массе воздушного судна, так как правильный выбор эшелона дает существенную экономию топлива. Кроме того, разработанные алгоритмы позволяют учитывать прогнозные значения скорости ветра. При этом оптимальное формирование высотно-скоростного профиля полета может давать более заметное снижение расхода. Таким образом, дальнейшее развитие работы предполагает исследование оптимизации расхода топлива с использованием данных о скорости ветра.

Авторы выражают признательность Борису Теодоровичу Поляку и Николаю Владимировичу Куланову за ценные советы при подготовке работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Русол В.А.* Оптимизация маневрирования воздушных судов. М.: Транспорт, 1986.
2. *Скрипниченко С.Ю.* Оптимизация режимов полета по экономическим критериям. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1988.

3. *Franco A., Rivas D., Valenzuela A.* Minimum-Fuel Cruise at Constant Altitude With Fixed Arrival Time // *J. Guidance, Control, Dynam.* 2010. V. 33. No. 1. P. 280–285.
4. *Saucier A., Maazoun W., Soumis F.* Optimal Speed-Profile Determination for Aircraft Trajectories // *Aerosp. Sci. Technol.* 2017. V. 67. P. 327–342.
5. *Valenzuela A., Rivas D.* Optimization of Aircraft Cruise Procedures Using Discrete Trajectory Patterns // *J. Aircraft.* 2014. V. 51. Iss. 5. P. 1632–1640.
6. *Григоров П.Ю., Куланов Н.В.* Применение концепции обратных задач динамики в задачах вертикальной навигации // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2016. № 3. С. 130–140.
7. *Губарева Е.А., Мозжорина Т.Ю.* Оптимизация программы полета дозвукового пассажирского самолета на участке крейсерского полета // *Инженерный журнал: наука и инновации.* 2014. Вып. 12(36).
8. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. 2-е изд., испр. и доп. М.: ЛЕНАНД, 2014.
9. *Hull D.G.* *Fundamentals of Airplane Flight Mechanics.* Berlin: Springer-Verlag, 2007.
10. ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. Параметры. М.: Изд-во стандартов, 2004.
11. *Bartel M., Trevor M.Y.* Simplified Thrust and Fuel Consumption Models for Modern Two-Shaft Turbofan Engines // *J. Aircraft.* 2008. V. 45. Iss. 4. P. 1450–1456.
12. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
13. *Kennedy J., Eberhart R.* Particle Swarm Optimization // *Proc. 1995 IEEE Int. Conf. Neural Networks.* 1995. Vol. 4. P. 1942–1948.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галляевым.

Поступила в редакцию 23.11.2020

После доработки 05.02.2021

Принята к публикации 16.03.2021