

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2021 г. В.А. АЛЕКСАНДРОВ, канд. техн. наук (va.alexandrov@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗМЕЩЕНИЯ ПОЛЮСОВ В ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается задача синтеза регулятора для линейного стационарного объекта управления. Находится линейный регулятор, минимизирующий некоторый критерий качества системы, например соотношение выхода объекта и внешнего возмущения как H_∞ норму соответствующей функции, при условии соблюдения требований к качеству системы: радиус запасов устойчивости, соотношение сигнала управления и помехи измерения выхода объекта, коэффициент демпфирования, быстродействие. Рассмотрены известные методы синтеза регулятора из пакета MATLAB Robust Control Toolbox для решения такой задачи. Предложен метод синтеза регулятора, использующий корни характеристического полинома замкнутой системы в качестве варьируемых переменных стандартной процедуры оптимизации и стандартную процедуру размещения полюсов для получения значений коэффициентов регулятора.

Ключевые слова: линейная система управления, робастная система, синтез регулятора, радиус запасов устойчивости, размещение полюсов, H_∞ оптимизация, глобальная оптимизация.

DOI: 10.31857/S0005231021060040

1. Введение

Существует много методов синтеза регулятора для линейного стационарного объекта управления [1–4]. Методы, разработанные для многомерных систем, применимы и для рассматриваемых объектов с одним управляющим входом и одним управляемым выходом. Одним из универсальных подходов к синтезу регулятора с учетом нескольких целей и ограничений стал метод H_∞ оптимизации [5, 6]. Так, например, классическое требование к запасам устойчивости в этом методе выражается как ограничение или минимизация H_∞ нормы функции чувствительности. Важно, что метод позволяет оптимизировать систему одновременно еще по нескольким H_∞ нормам функций: чувствительности к помехе измерений, передаточной функции замкнутой системы относительно возмущения и другим [3, 5], а также учитывать допустимую область полюсов замкнутой системы [6]. При этом регулятор, получаемый стандартным методом H_∞ оптимизации, который базируется на решении системы линейных матричных неравенств, сформированных из обобщенной

оптимизируемой системы, имеет порядок больший или равный порядку модели объекта управления. Развитием метода H_∞ оптимизации, направленным на простоту практического использования, стал подход к синтезу регулятора с заданной структурой [7–9], где коэффициенты регулятора находятся как решение задачи негладкой оптимизации. При этом можно находить регулятор заданного низкого порядка. Следует учитывать, что результат минимизации целевой функции при выборе структуры регулятора низкого порядка будет заведомо не лучше, чем при поиске регулятора стандартным методом H_∞ оптимизации без ограничений структуры. И, кроме того, для некоторых объектов может не существовать регулятора с порядком меньше порядка объекта более чем на единицу, обеспечивающего хотя бы устойчивость системы.

Практическая задача поиска регулятора с заданной структурой делает актуальным развитие и других подходов, таких как метод D-разбиения [10]. В публикации [11] решается задача построения регулятора методом D-разбиения с учетом ряда инженерных требований.

Необходимо заметить, что в большинстве методов используются некоторые весовые матрицы, весовые передаточные функции или другие параметры, характеризующие качество системы, выбор которых обычно не формализован и дает свободу проектировщику системы. Но если процедура синтеза регулятора работает в системе самонастройки, когда модель объекта получена в результате процедуры идентификации, и участие проектировщика не предусмотрено, то важно формулировать критерии синтеза так, чтобы они позволяли получить практически работоспособную систему, удовлетворяющую реальным требованиям к качеству. Так, в [12–15] решается задача синтеза регулятора по инженерным критериям качества с использованием метода H_∞ оптимизации. В [16, 17] для решения задачи синтеза регулятора, удовлетворяющего требованиям к точности, быстродействию и радиусу запасов устойчивости, применяется метод размещения полюсов и предложен способ формирования желаемого характеристического полинома замкнутой системы в соответствии с этими требованиями.

В настоящей статье рассматривается задача подавления внешних возмущений, т.е. минимизации H_∞ нормы функции чувствительности системы к возмущению, при соблюдении ряда ограничений, обуславливающих робастность системы и качество переходных процессов. Предлагается новый подход к решению этой задачи методом размещения полюсов, где желаемый характеристический полином ищется с помощью процедуры глобальной оптимизации. При этом корни характеристического полинома замкнутой системы, а не коэффициенты регулятора, являются варьируемыми переменными. Метод размещения полюсов позволяет найти регулятор, порядок которого на единицу меньше порядка модели объекта. Возможно построение регулятора более высокого порядка, но найти регулятор низкого порядка по сравнению с порядком модели объекта этот метод не позволяет. В случае заданной структуры регулятора можно редуцировать модель объекта до соответствующего порядка.

Кроме того, для сравнения рассматриваются реализации решения поставленной задачи с использованием стандартных процедур синтеза регулято-

ра методами H_∞ оптимизации из пакета MATLAB Robust Control Toolbox: `hinfsyn`, `h2hinfsyn` и `systune`.

2. Постановка задачи

Рассмотрим управляемый объект со скалярными входами и выходом, описываемый линейным дифференциальным уравнением

$$(1) \quad \begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = \\ = b_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u + g_{n-1}f^{(n-1)} + \dots + g_1\dot{f} + g_0f, \end{aligned}$$

где правый верхний индекс обозначает порядок производной по непрерывному времени t , $y(t) \in \mathbb{R}$ — управляемый и измеряемый выход объекта, $u(t) \in \mathbb{R}$ — вход управления, $f(t) \in \mathbb{R}$ — неизмеряемое неизвестное возмущение, ограниченное по модулю, $n \in \mathbb{N}$ — известный порядок объекта, a_i, b_i, g_i ($i = 0, \dots, n-1$) — известные вещественные коэффициенты. Предполагается, что все функции удовлетворяют условиям применения преобразования Лапласа и начальные условия равны нулю. Тогда вместо уравнения (1) будем использовать передаточные функции относительно управления и возмущения соответственно

$$(2) \quad P(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0},$$

$$(3) \quad P_f(s) = \frac{g(s)}{a(s)} = \frac{g_{n-1}s^{n-1} + \dots + g_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0},$$

где s — переменная преобразования Лапласа. Принимая $s = j\omega$, где частота $\omega \in [0, \infty)$, будем использовать частотные передаточные функции.

Некоторые коэффициенты a_i, b_i, g_i ($i = 0, \dots, n-1$) могут быть равны нулю, поэтому степени полиномов $b(s)$ и $g(s)$ могут быть меньше $n-1$. Возможен случай, когда считается, что возмущение приложено вместе с управлением, и тогда $g(s) = b(s)$.

Рассмотрим систему, где объект управления (1) замкнут линейным регулятором с передаточной функцией

$$(4) \quad C(s) = \frac{d(s)}{c(s)} = \frac{d_ms^m + d_{m-1}s^{m-1} + \dots + d_0}{c_ms^m + c_{m-1}s^{m-1} + \dots + c_0},$$

где m — порядок регулятора, d_i, c_i ($i = 0, \dots, m$) — вещественные коэффициенты регулятора. Известно, что для любого управляемого объекта (1) существует стабилизирующий регулятор степени $m = n-1$, в то время как для $m < n-1$ такого регулятора может не существовать. Поэтому будем принимать $m \geq n-1$ в зависимости от метода синтеза регулятора. Задача нахождения регулятора порядка $m < n-1$ в этой статье не рассматривается.

Структура системы управления представлена на рис. 1. Задача слежения в этой статье не рассматривается, поэтому задающее воздействие r , присутствующее на рис. 1, будем считать равным нулю. Кроме того, в структуру

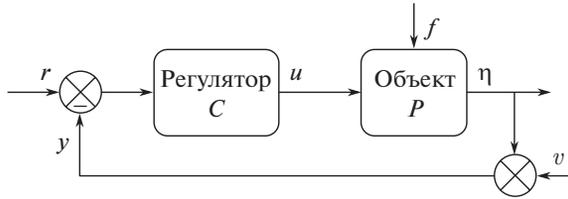


Рис. 1. Структура системы управления.

добавлена помеха измерения ν , свойства которой не оговариваются, так как действие помехи измерения в статье не рассматривается, но передаточная функция относительно этого входа будет использоваться. При этом измеряемый выход объекта y принимается равным сумме значений реального выхода объекта η и помехи измерения ν .

Задача состоит в том, чтобы найти регулятор (4), обеспечивающий устойчивость и некоторое желаемое качество системы (2), (3), (4). Известно, что система устойчива тогда и только тогда, когда отрицательны вещественные части всех корней характеристического полинома замкнутой системы:

$$(5) \quad a(s)c(s) + b(s)d(s).$$

Необходимо заметить, что уравнение (1) обычно является не абсолютно точной моделью реального объекта управления, а упрощенной линеаризованной моделью, причем коэффициенты определены неточно или могут меняться со временем, т.е. реальная динамика объекта может быть нелинейная и нестационарная. Поэтому при использовании модели (1) для синтеза регулятора требование устойчивости системы необходимо сопровождать требованием робастности системы, т.е. сохранения устойчивости при отличии реальной динамики объекта от исходной линейной модели. Один из критериев робастности — это запасы устойчивости. Широко используемые запасы по фазе и по амплитуде служат индикаторами удаленности амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ) разомкнутой системы $P(j\omega)C(j\omega)$ от критической точки $(-1, j0)$ в соответствии с критерием устойчивости Найквиста. Но так как эти запасы учитывают значения АФЧХ только на двух частотах, то вместо них все чаще используется значение радиуса запасов устойчивости [2, 18, 19], который равен минимальному расстоянию АФЧХ разомкнутой системы от точки $(-1, j0)$ для всех частот, т.е. минимальному значению модуля функции возвратной разности:

$$(6) \quad R = \inf_{\omega} |1 + P(j\omega)C(j\omega)|$$

или обратному значению H_{∞} нормы функции чувствительности $S(j\omega)$ [2, 19]:

$$(7) \quad S(j\omega) = \frac{1}{1 + P(j\omega)C(j\omega)},$$

$$R = \frac{1}{\|S(j\omega)\|_{\infty}}.$$

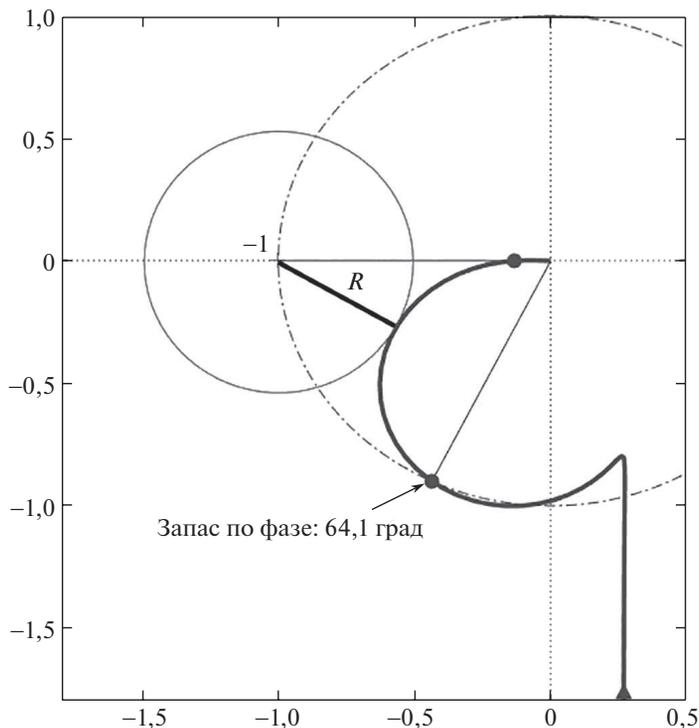


Рис. 2. Годограф Найквиста разомкнутой системы и радиус запасов устойчивости.

Известно, что радиус запасов устойчивости не является достаточным критерием робастности системы [19, 20]. В [2] отмечено, что для модели объекта, представляющей сумму $P(s) + \Delta(s)$ исходной и неизвестной дополнительной динамики, и для регулятора, обеспечивающего устойчивость исходной системы, система с дополнительной динамикой будет устойчива, если соблюдается ограничение

$$(8) \quad |\Delta(j\omega)| < \left| \frac{1 + P(j\omega)C(j\omega)}{C(j\omega)} \right|.$$

В правой части неравенства (8) записан модуль функции, обратной к функции чувствительности к помехе, связывающей помеху измерения, добавленную к выходу объекта, и сигнал управления

$$(9) \quad C(j\omega)S(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{1 + P(j\omega)C(j\omega)},$$

т.е. значение $\|C(j\omega)S(j\omega)\|_\infty = \sup_\omega |C(j\omega)S(j\omega)|$ также является критерием робастности системы, и чем оно меньше, тем большее значение $|\Delta(j\omega)|$ не нарушит устойчивость системы. Кроме того, ограничение значения сигнала управления, возникающего при наличии помехи измерения и описываемого функцией чувствительности к помехе (9), необходимо для практической реализации системы, чтобы помехи не приводили к скачкам управления до предельных значений.

Таким образом, максимально допустимые значения $\|S(j\omega)\|_\infty$ и $\|C(j\omega)S(j\omega)\|_\infty$ должны задаваться при синтезе регулятора как строгие ограничения, которые не должны превышать. Значение радиуса запасов устойчивости находится в диапазоне $0 < R \leq 1$, и требуемое значение R^* обычно выбирается от 0,5 до 0,7, что соответствует максимальному значению H_∞ нормы функции чувствительности в диапазоне $1,43 \leq \|S(j\omega)\|_\infty \leq 2$. Необходимо учитывать, что, например, для неминимально-фазовых объектов может существовать максимально возможное значение радиуса запасов устойчивости меньше единицы, и тогда требуемое значение R^* должно выбираться в пределах достижимого. Выбор требуемого значения $N^* H_\infty$ нормы функции чувствительности к помехе $\|C(j\omega)S(j\omega)\|_\infty$ сложнее, так как зависит от соотношения масштабов измеряемого выхода и сигнала управления, а также их предельных значений и уровня помех.

Еще одно практическое ограничение — коэффициент демпфирования, который определяется соотношением вещественной и мнимой частей корней характеристического полинома замкнутой системы. Его значение может быть $0 < \zeta \leq 1$. Малая величина коэффициента демпфирования приводит к колебательному характеру переходных процессов. Поэтому стандартное требование при синтезе регулятора — это обеспечение коэффициента демпфирования в пределах $0,7 \leq \zeta \leq 1$. Кроме того, желательно ограничивать и близость к нулю вещественных частей корней характеристического полинома, так как их слишком малое по модулю значение может приводить к недопустимо большому времени переходных процессов.

В рамках этих, а возможно, и других ограничений можно оптимизировать остальные показатели качества. Одним из наиболее важных показателей качества системы управления является подавление внешних возмущений [21]. Передаточная функция замкнутой системы (2), (3), (4) относительно возмущения имеет вид

$$(10) \quad G_{yf}(s) = \frac{g(s)c(s)}{a(s)c(s) + b(s)d(s)},$$

и минимизация H_∞ нормы этой функции

$$\|G_{yf}(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega} |G_{yf}(j\omega)|$$

часто используется как цель оптимизации системы при синтезе регулятора. Заметим, что если возмущение приложено вместе с управлением, т.е. $g(s) = b(s)$, то

$$(11) \quad G_{yf}(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{1 + P(j\omega)C(j\omega)} = P(j\omega)S(j\omega),$$

что представляет собой функцию чувствительности к возмущению [2].

Итак, задачу синтеза регулятора можно сформулировать так.

Задача. Найти стабилизирующий регулятор (4) такой, что в системе (2), (3), (4):

- 1) радиус запасов устойчивости (6) не меньше требуемого значения R^* ;
- 2) H_∞ норма функции чувствительности к помехе (9) не больше требуемого значения N^* ;
- 3) коэффициент демпфирования не меньше требуемого значения $\zeta_{\min} > 0$;
- 4) вещественные части корней характеристического полинома не превышают требуемого значения $(-\beta^*) < 0$;
- 5) H_∞ норма функции чувствительности к возмущению (10) будет минимальна при соблюдении перечисленных выше условий.

Следует внимательно подходить к выбору значений ограничений, так как может не существовать удовлетворяющего им решения. В этом случае ограничения должны быть пересмотрены.

3. Стандартные методы синтеза робастных регуляторов

3.1. H_∞ оптимальный регулятор

Стандартная процедура синтеза H_∞ оптимального регулятора (функция `hinfsyn` из пакета MATLAB Robust Control Toolbox) не решает поставленную в настоящей статье задачу полностью, так как в ней не предусмотрено введение ограничений на корни характеристического полинома. В процедурах, рассмотренных далее, такая возможность есть, но для сравнения рассмотрим и эту базовую процедуру, решая задачу без ограничений коэффициента демпфирования и близости к нулю вещественных частей корней характеристического полинома. Для процедуры синтеза регулятора нужно сформировать обобщенный объект управления [3]:

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t), \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t), \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t), \end{aligned}$$

где $x(t)$ — вектор состояния размерности n , $w(t)$ и $z(t)$ — векторы входов и выходов обобщенной системы, $y(t)$ и $u(t)$ — выход и вход объекта (1), A , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 , D_{11} , D_{12} , D_{21} , D_{22} — матрицы и векторы коэффициентов соответствующих размерностей. Векторы входов и выходов обобщенной системы выбираются так, чтобы минимизация H_∞ нормы передаточной матрицы замкнутой системы, связывающей эти входы и выходы, решала поставленную задачу. Кроме того, можно находить субоптимальное решение, когда ищется регулятор, обеспечивающий значение H_∞ нормы передаточной матрицы замкнутой системы меньше заданного значения γ . В опциях процедуры можно выбирать метод решения: 2-Риккати формула или метод линейных матричных неравенств.

В [2] предлагается принять векторы выходов и входов обобщенной системы как

$$(13) \quad z = \begin{bmatrix} y \\ -u \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} f \\ \nu \end{bmatrix}.$$

Тогда процедура будет минимизировать или ограничивать H_∞ норму системы

$$(14) \quad z = \begin{bmatrix} G_{yf} & S \\ CG_{yf} & CS \end{bmatrix} w.$$

При этом в поставленной задаче нет требований к $\|CG_{yf}\|_\infty$, которая появилась в этой матрице, поэтому нужно будет проверять, что этот элемент не повлиял на полученное решение. Вторая проблема состоит в том, что процедура H_∞ оптимизации находит решение, которое обеспечивает значение всех составляющих передаточной матрицы меньше заданного значения γ . Для учета разных требований к передаточным функциям, связывающим разные входы и выходы, можно использовать [2, 3] весовые передаточные функции. Для решения поставленной Задачи будем использовать просто весовые коэффициенты W_1 и W_2 , тогда формируя векторы выходов и входов обобщенной системы как

$$(15) \quad z = \begin{bmatrix} y \\ -W_2 u \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} f/W_1 \\ \nu \end{bmatrix},$$

получим

$$(16) \quad z = \begin{bmatrix} W_1 G_{yf} & S \\ W_1 W_2 C G_{yf} & W_2 C S \end{bmatrix} w.$$

Принимая

$$(17) \quad \gamma = \frac{1}{R^*}, \quad W_2 = \frac{\gamma}{N^*}$$

и находя максимальное значение W_1 , для которого существует решение процедуры синтеза H_∞ оптимального регулятора, можно найти регулятор, обеспечивающий минимальное значение $\|CG_{yf}\|_\infty$ для заданных ограничений $\|S\|_\infty$ и $\|CS\|_\infty$. Если в результате получится неприемлемое значение $\|G_{yf}\|_\infty$, то необходимо пересмотреть требуемые значения R^* и N^* , т.е. изменить целевое значение γ и весового коэффициента W_2 . Надо также учитывать, что если значения $\|S\|_\infty$, $\|W_1 G_{yf}\|_\infty$ и $\|W_2 C S\|_\infty$ получились заметно меньше γ , а $\|W_1 W_2 C G_{yf}\|_\infty$ близка к заданному γ , то можно повторить процедуру, задавая большее значение γ , так как значение $\|W_1 W_2 C G_{yf}\|_\infty$ в поставленной задаче не ограничено.

3.2. H_∞ оптимальный регулятор с ограничением области размещения полюсов

Функция `h2hinfosyn` из пакета MATLAB Robust Control Toolbox отличается от `hinfosyn`, во-первых, тем, что можно задавать допустимую область размещения полюсов передаточной функции замкнутой системы [6]. Второе отличие состоит в том, что можно определять два вектора выходов обобщенной системы z_∞ и z_2 . При этом формируются разные передаточные матрицы

замкнутой системы, для одной из которых минимизируется или ограничивается H_∞ норма, а для другой — H_2 норма, что повышает гибкость формирования целей и ограничений синтеза регулятора. Решение основано на методе линейных матричных неравенств. Так как задача сформулирована как требования к H_∞ нормам, то в этой статье не рассматривается возможность использования комбинированного H_2/H_∞ подхода и формирование обобщенной системы может быть таким же, как описано в подразделе 3.1.

Возможность задавать область допустимого размещения полюсов позволяет решать задачу со всеми ограничениями. Ограничения на область размещения полюсов формируются как линейное матричное неравенство вида $L + zQ + \bar{z}Q^T < 0$, где матрицы L и Q можно определить с помощью функции `lmireg`, которая позволяет задавать полуплоскость, круг, сектор, эллипс, параболу, полосу и их пересечения. Для поставленной задачи нужно вместо значения коэффициента демпфирования задавать внутренний угол θ^* сектора. Значение $\theta^* = \pi/2$ соответствует значению $\zeta_{\min} = 0,707$. Задавая значение $(-\beta^*)$ как границу левой полуплоскости и формируя пересечение этой полуплоскости и сектора с углом θ^* , получим область размещения полюсов, соответствующую поставленной задаче.

Таким образом, функция `h2hinfosyn` предназначена для решения поставленной и аналогичных задач. Следует помнить, что так же, как и в случае применения функции `hinfosyn`, рассмотренной выше, значение γ нужно подбирать с учетом возможного влияния на полученный результат значения $\|W_1 W_2 C G_{yf}\|_\infty$. Кроме того, нужно учитывать, что ищется регулятор с порядком, равным порядку объекта. Полученный регулятор в пространстве состояний можно преобразовать к виду (4) с $m = n$. На примере в разделе 5 будет показано, что поиск регулятора с $m = n$ может не приводить к оптимальному решению, хотя, возможно, это проблемы конкретной программной реализации алгоритма.

3.3. Синтез регулятора с фиксированной структурой

При задании структуры регулятора как передаточной функции вида (4) с заданным порядком m или как, например, ПИД регулятора уже невозможно свести задачу к решению системы линейных матричных неравенств, поэтому в [7] предлагается искать коэффициенты регулятора заданной структуры как решение задачи негладкой оптимизации. На основе этого подхода построены процедуры `hinfstruct`, `looptune` [8] и `systune` [9] из пакета MATLAB Robust Control Toolbox.

Рассмотрим функцию `systune` как наиболее универсальную. Для ее использования не нужно формировать обобщенную матрицу передаточных функций, норма которой должна минимизироваться, а критерии оптимизации можно формировать независимо друг от друга из широкого списка целей (`TuningGoal`). Важно, что эти критерии можно разделить на две группы: минимизируемые цели оптимизации (`Soft goals`) и требуемые ограничения (`Hard goals`). Для решения задачи можно использовать `TuningGoal.Gain`, где вычисляется H_∞ норма передаточной функции от указанного входа к указанному выходу, чтобы сформировать $\|G_{yf}\|_\infty$, $\|S\|_\infty$ и $\|CS\|_\infty$, определив

H_∞ норму функции чувствительности к возмущению $\|G_{yf}\|_\infty$ как минимизируемую цель, а H_∞ нормы функций чувствительности $\|S\|_\infty$ и чувствительности к помехе $\|CS\|_\infty$ — как ограничения, а также добавить ограничения на корни характеристического полинома замкнутой системы, используя `TuningGoal.Poles`.

Кроме того, в `systune` реализованы в качестве целей оптимизации ограничения во временной области. Так, в `TuningGoal.StepRejection` можно задавать требуемое время переходного процесса и использовать этот критерий как цель оптимизации вместо $\|G_{yf}\|_\infty$ или добавить его к требуемым ограничениям.

Следует отметить, что в методах, описанных в подразделах 3.1 и 3.2, порядок регулятора m не задается и обычно находится регулятор с $m = n$, причем если используются весовые передаточные функции, то порядок регулятора увеличивается в соответствии с их порядком. В функции `systune` структура регулятора должна быть задана, и если ищется регулятор вида (4), то для задания его структуры можно использовать команду `tunableTF('Controller', m, m)`, выбирая $m = n - 1$. В `systune` можно устанавливать и $m < n - 1$, но тогда нужно помнить, что стабилизирующего регулятора может не существовать, а если существует, то он оптимален только в классе регуляторов выбранной структуры. Необходимо помнить, что процедура основана на локальной оптимизации. Поэтому для получения лучшего решения, особенно в случае, когда не найдено решение, удовлетворяющее заданным ограничениям, нужно при помощи команды `systuneOptions` установить значение параметра `RandomStart` больше единицы. Тогда процедура оптимизации выполнится указанное число раз для различных случайных наборов начальных значений варьируемых коэффициентов регулятора.

Таким образом, возможности функции синтеза регулятора с фиксированной структурой `systune` полностью соответствуют поставленной задаче и позволяют формулировать и решать широкий круг аналогичных задач, выбирая различные ограничения и цели оптимизации в соответствии с требованиями конкретной системы управления.

4. Оптимизация размещения полюсов замкнутой системы

Здесь предлагается новый подход к решению поставленной задачи, основанный на поиске при помощи процедуры оптимизации желаемых значений полюсов замкнутой системы, обеспечивающих выполнение целей и ограничений оптимизации, а не непосредственно коэффициентов регулятора, как в подразделе 3.3.

Процедура размещения полюсов [22–24] основана на том, что для любого заданного полинома $\delta(s)$ и известных полиномов $a(s)$ и $b(s)$ существует единственное решение $c(s)$ и $d(s)$ уравнения

$$(18) \quad a(s)c(s) + b(s)d(s) = \delta(s)$$

при условии $\deg(d(s)) < \deg(a(s))$ или $\deg(c(s)) < \deg(b(s))$. Кроме того, решение будет удовлетворять условию причинности управления [22], т.е.

$\deg(d(s)) \leq \deg(c(s))$ будет выполняться, если $\deg(\delta(s)) \geq 2\deg(a(s)) - 1$. Таким образом, регулятор вида (4), принимая $m = n - 1$, можно получить как решение уравнения (18), задавая желаемый характеристический полином замкнутой системы $\delta(s)$ степени $2n - 1$. При таких условиях можно, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях s левой и правой частей уравнения (18), получить систему $2n$ линейных алгебраических уравнений с $2n$ неизвестными и найти значения коэффициентов регулятора как ее решение:

$$(19) \quad \begin{bmatrix} c_{n-1} \\ \dots \\ c_0 \\ d_{n-1} \\ \dots \\ d_0 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} \delta_{2n-1} \\ \dots \\ \delta_0 \end{bmatrix},$$

где квадратная матрица M размера $2n$ сформирована из левой части уравнения (18), используя известные значения коэффициентов $a_i, b_i (i = 0, \dots, n - 1)$.

Таким образом, задавая полином $\delta(s)$ такой, что вещественные части всех его корней отрицательны, получим стабилизирующий регулятор. При этом остается проблема сформировать желаемый полином $\delta(s)$ так, чтобы решить поставленную задачу. В [16, 17] решается похожая задача, но не рассматривается функция чувствительности к помехе и не утверждается оптимальность подавления возмущения при заданном ограничении минимального радиуса запасов устойчивости. В [25] для дискретной системы получены формулы для выбора корней желаемого характеристического полинома, обеспечивающие заданный радиус запасов устойчивости и заданный уровень подавления возмущения, но результаты получены только для объектов с вещественными полюсами и носят достаточный характер.

В настоящей статье предлагается решать поставленную задачу, используя процедуру оптимизации, в которой вектором переменных будут корни характеристического полинома замкнутой системы. Задавая допустимый диапазон значений корней, можно ограничивать коэффициент демпфирования системы и длительность переходных процессов. Таким образом, в процедуре оптимизации не проверяются условия устойчивости системы и ограничения на область расположения полюсов, так как вектор переменных варьируется только в пределах допустимой области.

В соответствии с постановкой задачи H_∞ норма функции чувствительности к возмущению (10) — это цель оптимизации, а минимальное значение R^* радиуса запасов устойчивости (6) и максимальное значение N^* H_∞ нормы функции чувствительности к помехе (9) — это ограничения. Главное отличие предлагаемого подхода от процедуры синтеза оптимального регулятора для заданных целей и ограничений, описанной в подразделе 3.3, состоит в том, что вектор переменных оптимизации — это корни характеристического полинома замкнутой системы, а не коэффициенты регулятора. Хотя формально — это небольшое отличие, так как корни характеристического полинома однозначно определяют коэффициенты регулятора из уравнения (18), но факти-

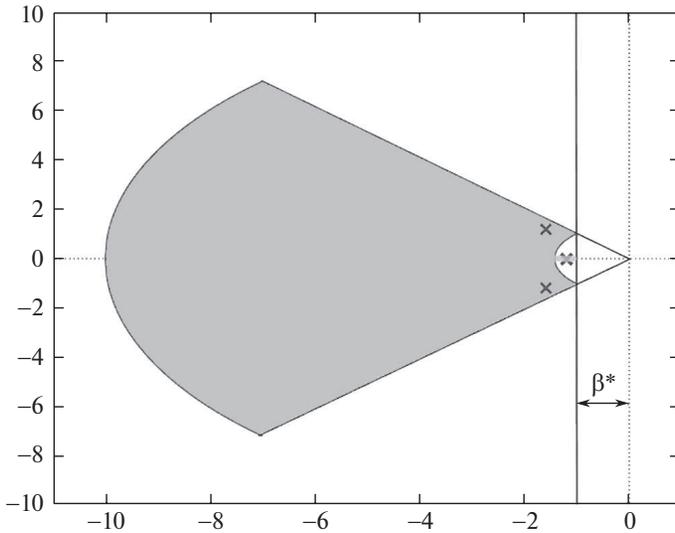


Рис. 3. Область допустимого расположения корней характеристического полинома.

чески оптимизация производится на другом множестве, что может приводить к другому результату.

Для реализации предлагаемого подхода может быть использована стандартная процедура глобальной оптимизации из пакета MATLAB Global Optimization Toolbox [26]. В этой процедуре вектор переменных — это вещественные числа. Поэтому зададим число $0 \leq n_2 < n$ комплексно-сопряженных пар корней полинома $\delta(s)$ и представим его в виде

$$(20) \quad \delta(s) = \prod_{i=1}^{2n-1-2n_2} (s + \lambda_i) \cdot \prod_{i=1}^{n_2} (s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2),$$

тогда вектор переменных будет $[\lambda_1, \dots, \lambda_{2n-1-2n_2}, \zeta_1, \dots, \zeta_{n_2}, \omega_1, \dots, \omega_{n_2}]$. Задавая границы $\zeta_{\min} \leq \zeta_i \leq 1$, получим ограничение колебаний, а границы $\lambda_i \leq -\beta^*$ и $\omega_i \geq \beta^*/\zeta_{\min}$ будут определять длительность переходных процессов. Необходимо отметить, что для процедуры глобальной оптимизации граничные значения переменных должны быть заданы в любом случае, даже если такие требования не сформулированы, т.е. $\zeta_{\min} \leq \zeta_i \leq 1$, $\lambda_{\min} \leq \lambda_i \leq -\beta^*$, $\beta^*/\zeta_{\min} \leq \omega_i \leq \omega_{\max}$, где можно принять $\omega_{\max} = -\lambda_{\min}$. Задаваемые интервалы должны быть замкнутыми, поэтому, например, вместо условия “больше нуля” нужно использовать условие “больше или равно некоторому минимальному приемлемому значению”. Вид области расположения корней характеристического полинома при таких ограничениях приведен на рис. 3.

Далее для процедуры глобальной оптимизации нужно сформировать две функции, одна из которых — функция цели — вычисляет вещественное значение, которое должно минимизироваться, а вторая — функция ограничений — вычисляет вектор значений, которые должны быть меньше заданных. В соответствии с поставленной задачей функция цели на каждом шаге процедуры

оптимизации для выбранного из допустимой области варианта вектора переменных $[\lambda_1, \dots, \lambda_{2n-1-2n_2}, \zeta_1, \dots, \zeta_{n_2}, \omega_1, \dots, \omega_{n_2}]$ выполняет следующие операции:

- 1) формирует желаемый характеристический полином (20);
- 2) решая систему (19), находит коэффициенты регулятора;
- 3) вычисляет значение $\|G_{yf}(j\omega)\|_\infty$.

Далее функция ограничений вычисляет значения $\|S(j\omega)\|_\infty$ и $\|C(j\omega)S(j\omega)\|_\infty$ и сравнивает их с заданными значениями $1/R^*$ и N^* .

Таким образом, такой подход решает поставленную задачу. Напомним, что при заданных ограничениях решения может не существовать или результат может оказаться неприемлемым, тогда нужно пересматривать ограничения. Предлагается следовать следующим рекомендациям по выбору ограничений. Минимальный радиус запасов устойчивости рекомендуется выбирать в диапазоне $0,5 \leq R^* \leq 0,7$, учитывая, что для систем, где такие значения недостижимы, нужно предварительно определить максимально возможное значение R , например, используя описанную процедуру оптимизации, где значение $\|S(j\omega)\|_\infty$ выбрано в качестве минимизируемой цели, и тогда можно принять $R^* = 0,8R_{\max}$. Значение β^* нужно согласовывать со значениями нулей объекта, так как при наличии устойчивых нулей они могут сокращаться в замкнутой системе и быстродействие получится высоким, несмотря на наличие медленных полюсов замкнутой системы. С другой стороны, как показано в [20], большое значение β^* может приводить к отсутствию решения для заданного R^* , поэтому значение β^* нужно согласовывать и со значениями полюсов объекта. Радиус запасов устойчивости должен иметь более высокий приоритет, поэтому значение β^* лучше выбирать не желаемым, а минимально допустимым, например равным минимальной собственной частоте объекта. Таким образом, выбор некоторых ограничений легко формализовать, исходя из свойств объекта, определяемых его известной передаточной функцией. А неформализованным остается только компромисс между желаемыми значениями H_∞ нормы функции чувствительности к помехе N^* и целевой функции. Можно рекомендовать увеличивать значение N^* , если решение задачи не существует при рекомендованных значениях остальных ограничений или полученное значение $\|G_{yf}(j\omega)\|_\infty$ слишком большое. А если, наоборот, получено решение с достаточно малыми значениями $\|G_{yf}(j\omega)\|_\infty$ и $\|C(j\omega)S(j\omega)\|_\infty$, то можно повторить процедуру, увеличивая значение β^* , если нужно повысить быстродействие системы.

Следует отметить, что предлагаемый подход позволяет формулировать и решать задачи с критериями, отличными от H_∞ норм. Например, если требуется минимизировать или ограничить время переходного процесса, то в качестве цели или ограничения оптимизации можно использовать результат функции MATLAB

```
data = stepinfo(Gyf, 'SettlingTimeThreshold', 0.05);
Objective_Value = data.SettlingTime;
```

которая находит время установления моделированием реакции на ступенчатый вход замкнутой системы G_{yf} .

5. Пример

В качестве примера будем синтезировать регулятор для двухмассовой системы [1, 27], представляющей собой две тележки массами m_1 и m_2 , соединенные пружиной с коэффициентом упругости k (рис. 4), трение не учитывается, управление приложено к левой тележке, положение правой тележки является измеряемым управляемым выходом, возмущение прикладывается к правой тележке.

Модель такого объекта имеет вид

$$(21) \quad \left(\frac{m_2}{k} s^4 + \frac{m_2 + m_1}{m_1} s^2 + \left(\frac{k}{m_1} - \frac{k}{m_2} \right) \right) y = \frac{1}{m_1} u + \left(\frac{1}{k} s^2 + \frac{1}{m_1} \right) f.$$

Номинальные значения параметров предполагаются $m_1 = m_2 = k = 1$. Тогда передаточные функции объекта будут

$$(22) \quad P(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 2)},$$

$$(23) \quad P_f(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2(s^2 + 2)}.$$

Ставится задача синтеза регулятора, обеспечивающего длительность переходного процесса на импульсное возмущение не более 15 с и устойчивость системы при отклонении значения k от номинального в диапазоне $0,5 \leq k \leq 2,0$ [27]. Используя рассмотренные методы, будем искать регулятор для объекта (21) с номинальными значениями параметров и проверять устойчивость системы с полученным регулятором для значений $k = 0,5$ и $k = 2,0$. Если массы тележек не равны (например, $m_2 = 2,0$), то меняется структура передаточной функции объекта

$$(24) \quad P_m(s) = \frac{1}{2s^4 + 3s^2 + 0,5},$$

поэтому проверим также устойчивость системы с таким объектом.

В качестве импульса будем использовать сигнал единичной амплитуды и длительностью одна секунда. Зададим значения ограничений $R^* = 0,6$ и $N^* = 100$ для всех рассматриваемых методов.

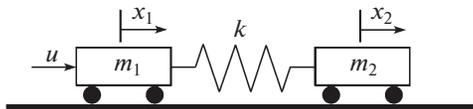


Рис. 4. Пример объекта управления.

5.1. Синтез регулятора методом H_∞ оптимизации

Для объекта (21) принимаем обобщенные входы и выходы вида (15). Тогда получим обобщенную систему:

$$(25) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ W_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \nu \\ u \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -W_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \nu \\ u \end{bmatrix}.$$

Для значений γ и W_2 , полученных по формулам (17), при $W_1 = 0,5$ функция `hinfsyn` с опцией LMI находит регулятор:

$$(26) \quad C_1(s) = \frac{2170s^3 + 354,3s^2 + 3506s + 1055}{s^4 + 53,04s^3 + 362,2s^2 + 1356s + 3032}.$$

Переходный процесс системы с этим регулятором при воздействии возмущения f в виде импульса единичной амплитуды и длительностью одна секунда показан на рис. 5. Этот регулятор обеспечивает значения $R = 0,6577$ и $\|CS\|_\infty = 47,27$, что лучше требуемых значений. При этом $\|G_{yf}\|_\infty = 2,87$. Тем не менее систему нельзя признать хорошей, так как переходный процесс колебательный и не сходится за 15 с. Это обусловлено тем, что характеристический полином замкнутой системы содержит корни $(-0,117 \pm j1,4)$ с коэффициентом демпфирования $\zeta = 0,083$ (полюса замкнутой системы показаны на рис. 6).

Кроме того, при значении коэффициента упругости $k < 0,8$, а также для объекта (24) при $m_2 = 2,0$, $k = 1,0$ система становится неустойчивой. На этом

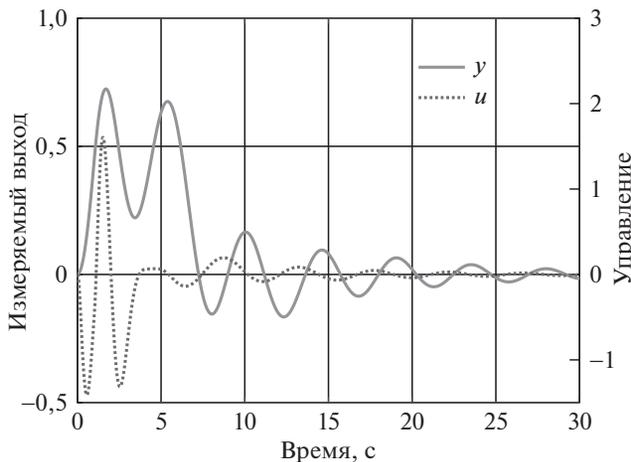


Рис. 5. Импульсное возмущение с регулятором (26).

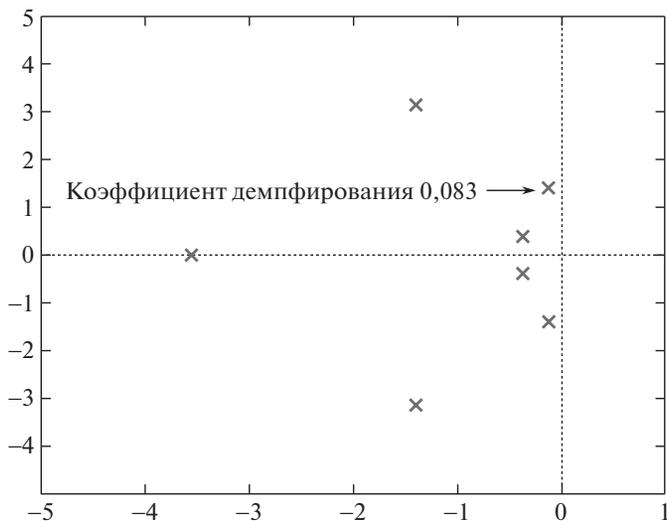


Рис. 6. Полюса замкнутой системы с регулятором (26).

примере видно, что значение коэффициента демпфирования замкнутой системы также должно быть критерием робастности, так как хотя радиус запасов устойчивости достаточно большой, система становится неустойчивой даже при не очень большом изменении параметров объекта.

5.2. Синтез H_∞ оптимального регулятора с ограничением области размещения полюсов

Попробуем получить регулятор для объекта (21) при тех же параметрах и ограничениях, используя функцию `h2hinfsv`. К обобщенной системе (25) добавим ограничение области размещения полюсов замкнутой системы: $\theta^* = \pi/2$ (что соответствует значению $\zeta = 0,707$) и $\beta^* = 0,1$. Функция не находит решения при таких условиях и заданном значении $\gamma = 1/R^*$. Поэтому проводим поиск оптимального регулятора, не задавая значения γ . Тогда получаем регулятор

$$(27) \quad C_2(s) = \frac{94,89s^4 + 9,545 \cdot 10^6 s^3 - 4,591 \cdot 10^6 s^2 + 4,907 \cdot 10^6 s + 7,221 \cdot 10^5}{s^4 + 3,414 \cdot 10^4 s^3 + 5,376 \cdot 10^5 s^2 + 3,23 \cdot 10^6 s + 8,946 \cdot 10^6},$$

который обеспечивает значения $R = 0,523$ и $\|CS\|_\infty = 279$, что существенно хуже требуемых, при этом значение $\|G_{yf}\|_\infty = 12,38$ тоже хуже, чем в системе с регулятором (26). Уменьшение значения весового коэффициента W_1 не приводит к получению регулятора, обеспечивающего заданное значение $R^* = 0,6$, поэтому проверяем работу регулятора (27). В переходном процессе на рис. 7 уже нет колебаний на выходе, но амплитуды сигналов увеличились.

Кроме того, если посмотреть нули и полюса регулятора (27)

$$C_2(s) = \frac{94,885(s + 1,006 \cdot 10^5)(s + 0,1278)(s^2 - 0,6088s + 0,5919)}{(s + 3,413 \cdot 10^4)(s + 8,027)(s^2 + 7,722s + 32,65)},$$

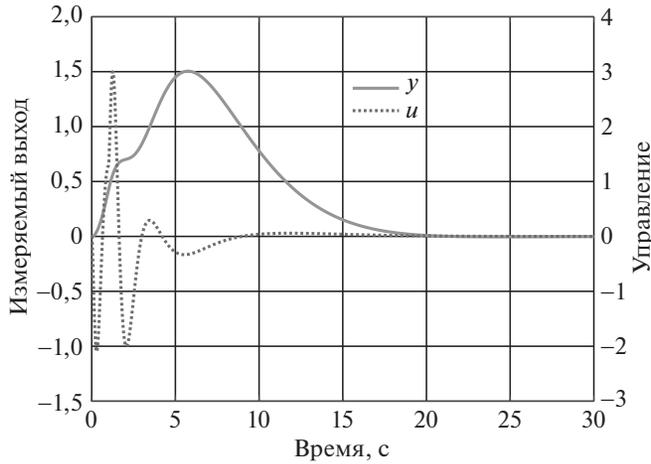


Рис. 7. Импульсное возмущение с регулятором (27).

то видно, что в регуляторе есть большие значения нуля и полюса, и скорее всего регулятор 3-го порядка был бы лучше, чем получившийся регулятор 4-го порядка, в чем убедимся далее. Тем не менее длительность переходного процесса получается около требуемых 15 с, и система с регулятором (27) остается устойчивой при значениях коэффициента упругости $k = 0,5$ и $k = 2,0$. Для объекта (24) при $m_2 = 2,0$, $k = 1,0$ устойчивость системы сохраняется, но процесс становится колебательным.

5.3. Синтез оптимального регулятора с фиксированной структурой

Для использования функции `systune` не нужно формировать обобщенную систему, а нужно

- 1) объявить регулятор как некоторую структуру с настраиваемыми параметрами, например при помощи команды

```
Controller3 = tunableTF('Controller', 3, 3),
```

которая задает структуру регулятора в виде (4) с $m = 3$;

- 2) сформировать командой `feedback` замкнутую систему с объектом, заданным передаточной функцией (22), и регулятором `Controller3`;
- 3) сформировать цель оптимизации, например как `TuningGoal.Gain` для H_∞ нормы функции чувствительности к возмущению $\|G_{yf}(j\omega)\|_\infty$ с ограничивающим профилем вида $W_2 = 1/(s^2 + 1)$, который учитывает, что возмущение приложено не там, где управление;
- 4) установить ограничения в соответствии с задачей как:
 - `TuningGoal.Sensitivity` для H_∞ нормы функции чувствительности $\|S(j\omega)\|_\infty$ с максимальным значением $1/R^*$;
 - `TuningGoal.Gain` для H_∞ нормы функции чувствительности к помехе $\|C(j\omega)S(j\omega)\|_\infty$ с максимальным значением N^* ;
 - `TuningGoal.Poles` для задания β^* , минимального коэффициента демпфирования ζ_{\min} и максимальной собственной частоты ω_{\max} .

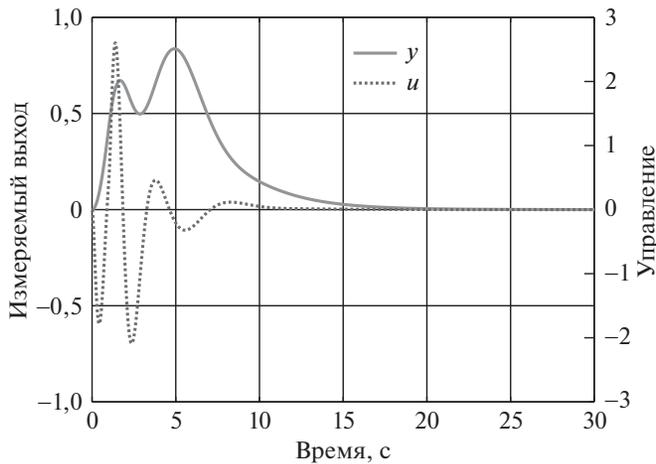


Рис. 8. Импульсное возмущение с регулятором (28).

Для значений $R^* = 0,6$, $N^* = 100$, $\beta^* = 0,1$, $\zeta_{\min} = 0,7$, $\omega_{\max} = 100$ получен регулятор

$$(28) \quad C_3(s) = \frac{99,99s^3 - 15,87s^2 + 96,81s + 18,28}{s^3 + 9,429s^2 + 42,74s + 96,99},$$

который обеспечивает все заданные ограничения и $\|G_{yf}\|_{\infty} = 5,3$. Переходный процесс системы с этим регулятором показан на рис. 8 и длится менее 15 с. Система с регулятором (28) остается устойчивой при значениях коэффициента упругости $k = 0,55$ и $k = 2,0$. При $k < 0,55$ устойчивость теряется. Для объекта (24) при $m_2 = 2,0$, $k = 1,0$ устойчивость системы сохраняется. Если, например, найти регулятор для других ограничений: $R^* = 0,606$ и $N^* = 70$, то система будет устойчивой и при $k = 0,5$, но при номинальных значениях длительность переходного процесса будет немного больше 15 с.

5.4. Синтез регулятора методом оптимизации размещения полюсов

В предлагаемом методе порядок регулятора (4) принимается $m = n - 1 = 3$. Желаемый характеристический полином замкнутой системы (20) порядка $2n - 1 = 7$ может содержать до трех пар комплексно-сопряженных корней. Для $n_2 = 3$ вектор переменных будет иметь вид $[\lambda_1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3]$. Для применения процедуры глобальной оптимизации к решению поставленной задачи нужно определить:

- границы для каждого элемента вектора переменных, для чего будем использовать область размещения полюсов замкнутой системы такой же, как в подразделе 5.3: $\beta^* = 0,1$, $\zeta_{\min} = 0,7$, $\omega_{\max} = 100$, $\lambda_{\min} = -100$;
- функцию цели оптимизации, которая для текущего вектора переменных, определяющего коэффициенты желаемого характеристического полинома (20), и соответственно коэффициенты регулятора как решение системы (19), вычисляет значение $\|G_{yf}(j\omega)\|_{\infty}$;

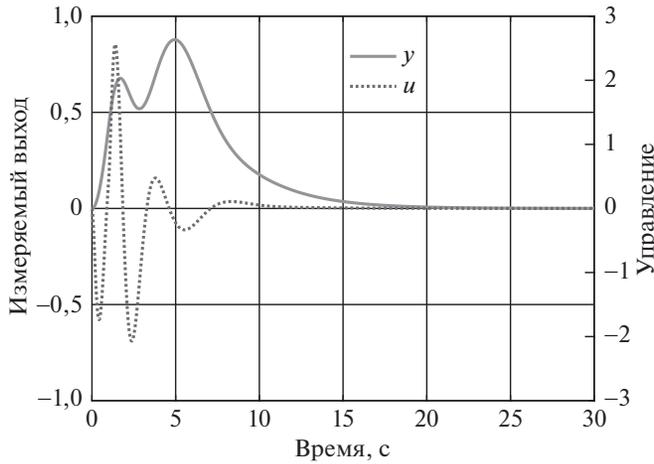


Рис. 9. Импульсное возмущение с регулятором (29).

- функцию ограничений, которая вычисляет значения $\|S(j\omega)\|_\infty$ и $\|C(j\omega)S(j\omega)\|_\infty$ и сравнивает их с заданными значениями $1/R^*$ и N^* .

Для значений $R^* = 0,6$, $N^* = 100$ процедура глобальной оптимизации находит регулятор

$$(29) \quad C_4(s) = \frac{98,38s^3 - 22,35s^2 + 86,06s + 14,8}{s^3 + 10,15s^2 + 43,96s + 98,33},$$

который обеспечивает все заданные ограничения и $\|G_{yf}\|_\infty = 6,64$. Видно, что полученный регулятор (29) практически совпадает с регулятором (28), полученным при помощи функции `sysune`. Переходный процесс системы с регулятором (29) показан на рис. 9, длится менее 15 с и также практически не отличается от процесса на рис. 8.

Система с регулятором (29) остается устойчивой при значениях коэффициента упругости $k = 0,5$ и $k = 2,0$, а также для объекта (24) при $m_2 = 2,0$, $k = 1,0$, т.е. регулятор (29) обеспечивает устойчивость в заданных границах изменения параметров объекта в отличие от регулятора (28), найденного функцией `sysune`, который не обеспечивал устойчивость при $k < 0,55$. Напомним, что регулятор (26), найденный с помощью функции `hinfyn`, не обеспечивал устойчивость системы уже при $k < 0,8$, а при помощи функции `h2hinfyn` не удалось найти регулятор, обеспечивающий заданные требования к радиусу запасов устойчивости и к H_∞ норме функции чувствительности к помехе.

6. Заключение

Классический метод H_∞ оптимизации, и особенно в версии с ограничением области размещения полюсов, казалось бы, дает все возможности для поиска оптимального регулятора, задавая необходимые для практической реализации ограничения. Но пример показывает, что не всегда полученные решения

будут действительно лучшими, в частности при прямом использовании реализации метода в пакете MATLAB Robust Control Toolbox. Следует учитывать, что специалисты, имеющие опыт использования этого метода, могут предложить дополнительные модификации подхода, существенно улучшающие результат. Тем не менее функция `sysstune`, основанная на процедуре оптимизации системы с регулятором фиксированной структуры, оказывается более гибкой при формировании целей и ограничений оптимизации, и в рассмотренном примере нашла решение, удовлетворяющее условиям поставленной задачи. При этом нужно учитывать, что решается невыпуклая задача оптимизации и не гарантируется оптимальность найденного решения. Поэтому наличие альтернативных подходов может оказаться полезным.

Предложенный в разделе 4 метод оптимизации размещения полюсов может предоставлять практически те же возможности и в рассмотренном примере дает примерно такой же результат, как и метод синтеза регулятора с фиксированной структурой, рассмотренный в подразделе 3.3. Так, регуляторы (29) и (28), построенные при помощи этих методов, очень близки. Отличие предлагаемого подхода в том, что варьируемые переменные процедуры оптимизации — это корни характеристического полинома замкнутой системы, а не коэффициенты регулятора. В каких-то случаях это может давать лучший результат, так как оптимизация производится на другом множестве варьируемых переменных. Используемая для реализации предлагаемого подхода стандартная процедура глобальной оптимизации не совсем подходит для решения задачи оптимизации размещения полюсов, так как, во-первых, варьируемые переменные должны быть вещественными, а корни характеристического полинома могут быть как вещественными, так и комплексно-сопряженными (хотя эта проблема решена заменой пары комплексно-сопряженных корней на пару вещественных коэффициентов соответствующего полинома второго порядка) и, во-вторых, процедура не учитывает, что последовательность корней в векторе не имеет значения. Тем не менее эта процедура может применяться для тестовых примеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНЛАНД, 2019.
2. Åström K.J., Murray R.M. Feedback Systems: an Introduction for Scientists and Engineers. New Jersey: Princeton University Press, 2008.
3. Skogestad S., Postlethwaite I. Multivariable Feedback Control. Analysis and Design. N.Y.: John Wiley and Sons, 2006.
4. Александров А.Г. Методы построения систем автоматического регулирования. М.: Физматлит, 2008.
5. Gahinet P., Apkarian P. A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control // Int. J. Robust Nonlinear Contr. 1994. V. 4. P. 421–448.
6. Chilali M., Gahinet P. H_∞ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach // IEEE Trans. Autom. Control. 1996. V. 41. No. 3. P. 358–367.
7. Apkarian P., Noll D. Nonsmooth H_∞ Synthesis // IEEE Trans. Autom. Control. 2006. V. 51. No. 1. P. 71–86.

8. *Gahinet P., Apkarian P.* Decentralized and Fixed-Structure H_∞ Control in MATLAB // Proc. IEEE Conf. on Decision and Control. 2011. P. 8205–8210.
9. *Apkarian P., Gahinet P., Buhr C.* Multi-Model, Multi-Objective Tuning of Fixed-Structure Controllers // Proc. Eur. Control Conf. 2014. P. 856–861.
10. *Грязина Е.Н., Поляк В.Т., Тремба А.А.* Современное состояние метода D-разбиения // АиТ. 2008. № 12. С. 3–40.
Gryazina E.N., Polyak V.T., Tremba, A.A. D-decomposition Technique State-of-the-art // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 12. P. 1991–2026.
11. *Щербakov П.С.* Построение регуляторов заданной структуры при соблюдении инженерных требований // Проблемы управления. 2009. № 5. С. 9–17.
Shcherbakov P.S. Fixed Order Controller Design Subject to Engineering Specifications // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 6. P. 1217–1229.
12. *Александров А.Г., Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности. II. Применение процедур H_∞ -оптимизации // АиТ. 1998. № 8. С. 124–138.
Alexandrov A.G., Chestnov V.N. Synthesis of Multivariable Systems of Prescribed Accuracy. II. Use of Procedures of H-Infinity-Optimization // Autom. Remote Control. 1998. V. 59. No. 8. P. 1153–1164.
13. *Агафонов П.А., Честнов В.Н.* Синтез регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости с учетом внешних возмущений на основе H_∞ -подхода // АиТ. 2004. № 10. С. 101–108.
Agafonov P.A., Chestnov V.N. Controllers of a Given Radius of Stability Margin: Their Design by the H_∞ -Approach with Regard for External Disturbances // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 10. P. 1611–1617.
14. *Честнов В.Н.* Синтез робастных H_∞ -регуляторов многомерных систем по заданной степени устойчивости // АиТ. 2007. № 3. С. 199–205.
Chestnov V.N. Design of Robust H_∞ -Controllers of Multivariable Systems Based on the Given Stability Degree // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 3. P. 557–563.
15. *Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем по инженерным критериям качества на основе H_∞ -оптимизации // АиТ. 2019. № 10. С. 132–152.
Chestnov V.N. Synthesis of Multivariable Systems According to Engineering Quality Criteria Based on H_∞ -Optimization // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 10. P. 1861–1877.
16. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. I. Минимально-фазовые одномерные объекты // АиТ. 2015. № 5. С. 27–42.
Aleksandrov A.G. Controller Design in Precision and Speed. I. Minimal Phase One-Dimensional Plants // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 5. P. 749–761.
17. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. II. Неминимально-фазовые объекты // АиТ. 2017. № 6. С. 3–17.
Aleksandrov A.G. Design of Controllers by Indices of Precision and Speed. II. Nonminimal-Phase Plants // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 6. P. 961–973.
18. *Александров А.Г.* Критерии грубости нестационарных систем автоматического регулирования // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. научн. сб. Саратов: Саратов. политехн. ин-т, 1980. С. 3–14.
19. *Честнов В.Н.* Синтез регуляторов многомерных систем по заданному радиусу запасов устойчивости на базе процедуры оптимизации // АиТ. 1999. № 7. С. 100–109.
Chestnov V.N. Synthesis of Controllers for Multivariate Systems with a Given Radius of Stability Margin by the H-Infinity-Optimization Method // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 7. P. 986–993.

20. *Alexandrov V.A., Chestnov V.N., Shatov D.V.* Stability Margins for Minimum-Phase SISO Plants: A Case Study // Proc. Eur. Control Conf. 2020. P. 2068–2073.
21. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
22. *Острем К., Виттенмарк Б.* Системы управления с ЭВМ. М.: Мир, 1987.
23. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2012.
24. *Ким Д.П.* Алгебраические методы синтеза систем автоматического управления. М.: Физматлит, 2014.
25. *Честнов В.Н., Александров В.А., Резков И.Г.* Синтез одномерных дискретных регуляторов по инженерным критериям качества на основе модального управления // Проблемы управления. 2019. № 6. С. 11–21.
Chestnov V.N., Alexandrov V.A., Rezkov I.G. Synthesis of Discrete Modal SISO Controllers by Engineering Performance Indices // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 6. P. 1107–1124.
26. *Ugray Z., Lasdon L., Plummer J., Glover F., Kelly J., Martí R.* Scatter Search and Local NLP Solvers: A Multistart Framework for Global Optimization // INFORMS J. Computing. 2007. V. 19. No. 3. P. 328–340.
27. *Wie B., Bernstein D.S.* A Benchmark Problem for Robust Control Design // Proc. Amer. Control Conf. San Diego, CA, USA. 1990. P. 961–962.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 30.04.2020

После доработки 24.12.2020

Принята к публикации 15.01.2021