

© 2021 г. Ю.Е. ОБЖЕРИН, д-р техн. наук (objsev@mail.ru),  
С.М. СИДОРОВ (xaevec@mail.ru),  
М.М. НИКИТИН (m.nikitin.1979@gmail.com)  
(Севастопольский государственный университет),  
С.Г. ГЛЕЧ, канд. техн. наук (sergeyglech@gmail.com)  
(Севастопольский экономико-гуманитарный институт (филиал)  
Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского)

## СКРЫТАЯ МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ НА ОСНОВЕ СУПЕРПОЗИЦИИ ДВУХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ<sup>1</sup>

В процессе функционирования системы, для которой построена полумарковская модель, не всегда возможно при изменении ее состояний получить всю информацию, содержащуюся в кодах состояний, а есть возможность получить некоторый сигнал (информацию), связанный с состояниями полумарковской модели. В этом случае состояния полумарковской модели можно считать скрытыми (ненаблюдаемыми). В данной статье на примере суперпозиции двух независимых процессов восстановления рассматриваются подход к построению скрытой марковской модели на основе полумарковского процесса с фазовым пространством состояний общего вида и использование такой модели для анализа функционирования моделируемой системы на основе полученного вектора сигналов.

*Ключевые слова:* полумарковский процесс, полумарковская модель, скрытая марковская модель, суперпозиция процессов восстановления, вектор сигналов, оценка характеристик, прогнозирование состояний.

DOI: 10.31857/S0005231021060039

### 1. Введение

Полумарковские процессы широко используются для моделирования систем различного назначения: технических [1–3], информационных [4–6], энергетических [2, 7, 8], систем массового обслуживания [9–10], анализа финансовых рисков [5, 11] и других.

В процессе функционирования системы, для которой построена полумарковская модель, необходимо оценить, насколько построенная модель согласуется с полученными в процессе функционирования системы данными, уточнить ее, провести анализ функционирования системы и спрогнозировать ее состояния на основе полученного вектора сигналов. Решить эти задачи позволяют скрытые марковские модели [5, 12–15] и скрытые полумарковские модели [16–19].

При построении полумарковской модели необходимо ввести фазовое пространство состояний системы. В ряде случаев достаточно использовать ко-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 18-01-00392а.

нечное или счетное множества состояний, которые отражают физические состояния системы [2, 20]. Часто при построении полумарковской модели системы в фазовые состояния системы приходится вводить дополнительные непрерывные компоненты, которые необходимы для корректного построения модели [21–26]. Этими компонентами могут быть: время, прошедшее с начала работы элемента системы; время, оставшееся до окончания восстановления элемента системы; время, оставшееся до проведения контроля системы; величина оставшегося резерва времени и т.д. Отметим, что эти дополнительные непрерывные компоненты содержат важную информацию о функционировании системы. В этом случае приходится использовать дискретно-непрерывное фазовое пространство состояний, а для построения полумарковской модели и анализа функционирования системы необходимо использовать теорию полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний [21–25].

Важной составной частью полумарковского процесса является вложенная цепь Маркова (ВЦМ), которая отвечает за переходы между состояниями системы. Фазовое пространство состояний ВЦМ совпадает с фазовым пространством состояний полумарковского процесса. Второй важной составляющей полумарковского процесса являются времена пребывания в состояниях на переходах. При построении полумарковских моделей ряда систем переходные вероятности ВЦМ и функции распределения времен пребывания на переходах определяются общими параметрами. Так, для полумарковских моделей надежности систем они определяются распределениями времен безотказной работы и восстановления элементов системы.

При функционировании системы, для которой построена полумарковская модель, не всегда удастся при изменениях ее состояний полностью получить информацию, содержащуюся в кодировке состояний, а есть возможность получить некоторый сигнал (информацию), связанный с состояниями ВЦМ (полумарковского процесса). Например, в фазовом состоянии полумарковского процесса для каждого элемента системы указано, находится он в рабочем состоянии или на восстановлении, а при использовании системы можно получить сигнал только о числе работоспособных элементов. Для систем массового обслуживания, например, могут быть получены данные только о числе свободных приборов, а не о состоянии каждого прибора, содержащиеся в фазовых состояниях. При функционировании системы бывает сложно или невозможно получить значения дополнительных непрерывных компонент, которые, как было отмечено, несут важную информацию о функционировании системы. В этих случаях состояния ВЦМ и полумарковской модели можно считать скрытыми (ненаблюдаемыми). Поэтому возникает задача нахождения оценок характеристик и прогнозирования состояний ВЦМ и полумарковской модели на основе полученного вектора сигналов. Как отмечено выше, это можно сделать, используя аппарат теории скрытых марковских моделей.

В данной статье на примере суперпозиции двух независимых процессов восстановления [21–23] рассматривается подход к построению скрытой марковской модели на основе полумарковского процесса с фазовым пространством состояний общего вида, используя наличие у полумарковского процесса ВЦМ. Результаты, содержащиеся в [12, 13], обобщаются на случай ненаблюдаемой цепи Маркова с общим фазовым пространством состояний.

Скрытая марковская модель, построенная на основе суперпозиции двух независимых процессов восстановления, используется для нахождения оценок характеристик ВЦМ суперпозиции и сигналов на основе полученного вектора сигналов.

Для ВЦМ находятся условные вероятности состояний на  $2 \leq k \leq n$ ,  $(n + 1)$ -м и шагах при полученном векторе сигналов размера  $n$ . Для вектора сигналов получены условные вероятности значений вектора сигналов на  $(n + 1)$ -м шаге, безусловные вероятности вектора сигналов и финальные вероятности для значений вектора сигналов.

Для полноты изложения описана суперпозиция двух независимых процессов восстановления, построенная в публикациях [21–23].

При реализации рассматриваемого подхода можно применять математические пакеты, допускающие аналитические преобразования, используя при этом рекуррентные формулы.

Эффективным методом решения проблемы размерности моделей является алгоритм стационарного фазового укрупнения полумарковских систем [21–23], разработанный В.С. Королюком и А.Ф. Турбиным. Используя этот алгоритм, можно перейти к укрупненной полумарковской модели, вплоть до полумарковской модели с конечным множеством состояний, а затем использовать рассматриваемый подход к построению скрытой марковской модели [15].

## 2. Построение скрытой марковской модели

Построим скрытую марковскую модель на основе суперпозиции двух независимых процессов восстановления.

Дадим, обобщая результаты, содержащееся в [12, 13] определение скрытой марковской модели, когда ненаблюдаемая цепь Маркова имеет фазовое пространство состояний общего вида.

Пусть  $\{X_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$  – однородная цепь Маркова, определенная в измеримом пространстве  $(E, \mathfrak{F})$ , с переходными вероятностями

$$P(\mathbf{x}, B) = P(X_{n+1} \in B | X_n = \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E, \quad B \in \mathfrak{F},$$

и начальным распределением вероятностей

$$\pi(B) = P(X_1 \in B), \quad B \in \mathfrak{F}.$$

Жирными буквами  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  обозначаются элементы фазового пространства состояний  $E$ .

Предположим, что множество сигналов  $J$  конечно:

$$J = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}.$$

Далее предположим, что когда цепь Маркова попадает в состояние  $\mathbf{x} \in E$ , то независимо от предыдущих состояний цепи Маркова и сигналов излучается сигнал  $s \in J$  с вероятностью

$$(1) \quad R(s | \mathbf{x}) = P(S_n = s | X_n = \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E, \quad s \in J, \quad \sum_{s \in J} R(s | \mathbf{x}) = 1.$$

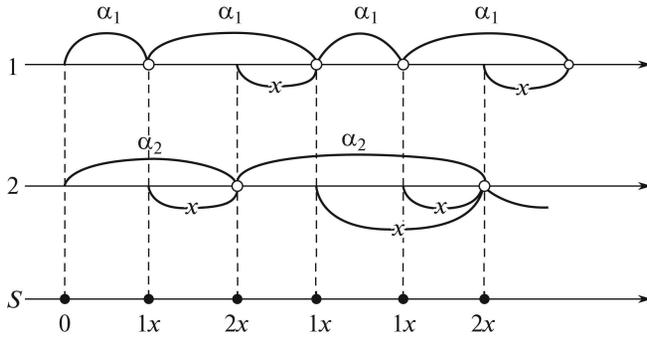


Рис. 1. Временная диаграмма функционирования системы.

Таким образом, если  $S_n$  представляет собой  $n$ -й сигнал, то

$$P(S_1 = s | X_1 = \mathbf{x}),$$

$$P(S_n = s | X_1, S_1, \dots, X_{n-1}, S_{n-1}, X_n = \mathbf{x}) = R(s | \mathbf{x}).$$

Модель такого типа, в которой последовательность сигналов  $S_1, S_2, \dots, \dots, S_n, \dots$  является наблюдаемой, в то время как цепь Маркова  $X_1, X_2, \dots, \dots, X_n, \dots$  является ненаблюдаемой, называется скрытой марковской моделью [5, 12, 13].

Опишем, следуя [21–23], суперпозицию двух независимых процессов восстановления, на основе которой строится скрытая марковская модель.

Рассмотрим систему  $S$ , состоящую из двух элементов, где функционирование каждого элемента описывается процессом восстановления [21–23] с временами восстановления  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , имеющими функции распределения  $G_1(x) = P(\alpha_1 \leq x)$ ,  $G_2(x) = P(\alpha_2 \leq x)$  и плотности распределения  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ . Случайные величины  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  предполагаются независимыми, имеющими конечные математические ожидания.

Для описания функционирования системы  $S$  используется полумарковский процесс  $\xi(t)$  со следующим дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний:

$$E = \{0, 1x, 2x; x > 0\}.$$

Кодировка состояний следующая:

- 0 – оба элемента восстановлены, начальное состояние;
- 1x – восстановился первый элемент; время, оставшееся до восстановления второго элемента, осталось равно  $x > 0$ ;
- 2x – восстановился второй элемент; время, оставшееся до восстановления первого элемента, осталось равно  $x > 0$ .

Временная диаграмма функционирования системы  $S$  представлена на рис. 1.

Плотности вероятностей переходов ВЦМ имеют вид [21–23]:

$$p_0^{1x} = \int_0^{\infty} g_2(x+t)g_1(t)dt, \quad x > 0, \quad p_0^{2x} = \int_0^{\infty} g_1(x+t)g_2(t)dt, \quad x > 0;$$

$$p_{1x}^{1y} = g_1(x-y), \quad 0 < y < x, \quad p_{1x}^{2y} = g_1(x+y), \quad y > 0;$$

$$p_{2x}^{1y} = g_2(x+y), \quad y > 0, \quad p_{2x}^{2y} = g_2(x-y), \quad 0 < y < x.$$

Времена пребывания системы S в состояниях определяются следующим образом:

$$\theta_0 = \alpha_1 \wedge \alpha_2, \quad \theta_{1x} = \alpha_1 \wedge x, \quad \theta_{2x} = \alpha_2 \wedge x, \quad \wedge - \text{знак минимума.}$$

В [21] показано, что ВЦМ имеет стационарное распределение, плотности которого определяются формулами:

$$(2) \quad \rho(1x) = \rho_0 \bar{G}_2(x), \quad \rho(2x) = \rho_0 \bar{G}_1(x),$$

где  $\bar{G}_i(x) = 1 - G_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\rho_0 = \frac{1}{M\alpha_1 + M\alpha_2}$ ,  $M\alpha_i$  – математическое ожидание случайной величины  $\alpha_i$ .

Перейдем к построению скрытой марковской модели, определенной на основе суперпозиции двух независимых процессов восстановления. Предположим, что при использовании системы S состояния ВЦМ  $1x$ ,  $2x$  не наблюдаются (скрытые состояния), а наблюдается только номер элемента, который восстановился на следующем переходе.

Следовательно, множество сигналов имеет вид

$$J = \{1, 2\}.$$

Рассмотрим связь между состояниями ВЦМ и сигналами, т.е. определим функцию  $\bar{R}(s|\mathbf{x})$ .

1. Состояние 0:

$$P(S_n = 1 | X_n = 0) = P(\alpha_1 < \alpha_2) = \int_0^{\infty} \bar{G}_2(t)g_1(t)dt,$$

$$P(S_n = 2 | X_n = 0) = P(\alpha_2 < \alpha_1) = \int_0^{\infty} \bar{G}_1(t)g_2(t)dt.$$

2. Состояния  $1x$ :

$$P(S_n = 1 | X_n = 1x) = P(\alpha_1 < x) = G_1(x),$$

$$P(S_n = 2 | X_n = 1x) = P(\alpha_1 > x) = \bar{G}_1(x).$$

3. Состояния  $2x$ :

$$P(S_n = 1 | X_n = 2x) = P(\alpha_2 > x) = \bar{G}_2(x),$$

$$P(S_n = 2 | X_n = 2x) = P(\alpha_2 < x) = G_2(x).$$

**Таблица 1.** Функция  $R(s | \mathbf{x})$  связи состояний ВЦМ с сигналами

Сигнал, $s$ Состояние, $\mathbf{x}$	$s = 1$	$s = 2$
0	$p_1 = \int_0^\infty \bar{G}_2(t)g_1(t)dt$	$p_2 = \int_0^\infty \bar{G}_1(t)g_2(t)dt$
$1x$	$G_1(x)$	$\bar{G}_1(x)$
$2x$	$\bar{G}_2(x)$	$G_2(x)$

Функция  $R(s | \mathbf{x})$  связи состояний ВЦМ с сигналами представлена в табл. 1.

### 3. Оценка характеристик на основе полученного вектора сигналов

Пусть  $\bar{S}^n = (S_1, S_2, \dots, S_n)$  – случайный вектор первых  $n$  сигналов. Для фиксированной последовательности сигналов  $\bar{s}_n = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  пусть  $\bar{s}_k = (s_1, s_2, \dots, s_k)$ ,  $k \leq n$ . Требуется оценить характеристики ВЦМ и вектора сигналов на основе полученного вектора сигналов  $\bar{s}_n$ .

I. Вначале определим условную вероятность ВЦМ в момент  $n$  при условии, что  $\bar{S}^n = \bar{s}_n$ , т.е. найдем условную вероятность

$$(3) \quad P(X_n \in B | \bar{S}^n = \bar{s}_n), \quad B \in \mathfrak{F}.$$

Для нахождения этой вероятности, следуя [12, 13], введем функции (прямые переменные), которые играют важную роль в дальнейшем:

$$F_n(B) = P(\bar{S}^n = \bar{s}_n, X_n \in B), \quad B \in \mathfrak{F},$$

или в дифференциальной форме

$$F_n(d\mathbf{x}) = P(\bar{S}^n = \bar{s}_n, X_n \in d\mathbf{x}).$$

Имеем, что

$$\begin{aligned} F_n(d\mathbf{x}) &= P(\bar{S}^{n-1} = \bar{s}_{n-1}, S_n = s_n, X_n \in d\mathbf{x}) = \\ &= \int_E P(\bar{S}^{n-1} = \bar{s}_{n-1}, X_{n-1} \in de, X_n \in d\mathbf{x}, S_n = s_n) = \\ &= \int_E F_{n-1}(de)P(X_n \in d\mathbf{x}, S_n = s_n | \bar{S}^{n-1} = \bar{s}_{n-1}, X_{n-1} = e) = \\ &= \int_E F_{n-1}(de)P(X_n \in d\mathbf{x}, S_n = s_n | X_{n-1} = e) = \\ &= \int_E F_{n-1}(de)P(e, d\mathbf{x})R(s_n | \mathbf{x}), \end{aligned}$$

где использовалось, что

$$\begin{aligned} & P(X_n \in d\mathbf{x}, S_n = s_n | X_{n-1} = \mathbf{e}) = \\ & = P(X_n \in d\mathbf{x} | X_{n-1} = \mathbf{e})P(S_n = s_n | X_n = \mathbf{x}, X_{n-1} = \mathbf{e}) = \\ & = P(X_n \in d\mathbf{x} | X_{n-1} = \mathbf{e}) P(S_n = s_n | X_n = \mathbf{x}) = P(\mathbf{e}, d\mathbf{x})R(s_n | \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Следовательно, для плотности  $f_n(\mathbf{x})$  функции  $F_n(\mathbf{B})$  справедлива рекуррентная формула

$$(4) \quad f_n(\mathbf{x}) = R(s_n | \mathbf{x}) \int_E f_{n-1}(\mathbf{e})p(\mathbf{e}, \mathbf{x})d\mathbf{e},$$

где  $p(\mathbf{e}, \mathbf{x})$  – плотность вероятности переходов  $P(\mathbf{e}, \mathbf{B})$  ненаблюдаемой цепи Маркова.

Найдем функции  $f_1(\mathbf{x})$ ,  $f_2(\mathbf{x})$ ,  $f_3(\mathbf{x})$ ,  $f_4(\mathbf{x})$ .

1.  $F_1(d\mathbf{x}) = P(X_1 \in d\mathbf{x}, S_1 = s_1) = P(X_1 \in d\mathbf{x})P(S_1 = s_1 | X_1 = \mathbf{x}) = \pi(d\mathbf{x})R(s_1 | \mathbf{x})$ , следовательно

$$(5) \quad f_1(\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{x})R(s_1 | \mathbf{x}).$$

2. Применяя рекуррентную формулу (4), последовательно получаем:

$$(6) \quad f_2(\mathbf{x}) = R(s_2 | \mathbf{x}) \int_E R(s_1 | \mathbf{e})p(\mathbf{e}, \mathbf{x})\pi(\mathbf{e})d\mathbf{e},$$

$$(7) \quad f_3(\mathbf{x}) = R(s_3 | \mathbf{x}) \int_E R(s_2 | \mathbf{e})p(\mathbf{e}, \mathbf{x})d\mathbf{e} \int_E R(s_1 | \mathbf{y})p(\mathbf{y}, \mathbf{e})\pi(\mathbf{y})d\mathbf{y},$$

$$\begin{aligned} f_4(\mathbf{x}) &= R(s_4 | \mathbf{x}) \int_E R(s_3 | \mathbf{e})p(\mathbf{e}, \mathbf{x})d\mathbf{e} \int_E R(s_2 | \mathbf{z})p(\mathbf{z}, \mathbf{e})d\mathbf{z} \times \\ &\quad \times \int_E R(s_1 | \mathbf{y})p(\mathbf{y}, \mathbf{z})\pi(\mathbf{y})d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

где  $\pi(\mathbf{x})$  – плотность начального распределения  $\pi(\mathbf{B})$ .

Найдем функции  $F_1(\mathbf{B})$ ,  $f_2(\mathbf{x})$ ,  $f_3(\mathbf{x})$  для построенной скрытой марковской модели в случае вектора сигналов  $\bar{s}_3 = (s_1, s_2, s_3)$ .

Используя формулы (5)–(7), получаем

$$(8) \quad F_1(\mathbf{B}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} = 0 \notin \mathbf{B}, \\ R(s_1 | 0), & \mathbf{x} = 0 \in \mathbf{B}, \end{cases}$$

$$(9) \quad f_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} R(s_1 | 0)R(s_2 | 1E)\varphi_1(x), & \mathbf{x} = 1x, \\ R(s_1 | 0)R(s_2 | 2E)\varphi_2(x), & \mathbf{x} = 2x, \end{cases}$$

где

$$\varphi_1(x) = \int_0^{\infty} g_2(x+t)g_1(t)dt, \quad \varphi_2(x) = \int_0^{\infty} g_1(x+t)g_2(t)dt,$$

$$(10) \quad f_3(\mathbf{x}) = \begin{cases} R(s_1|0)R(s_3|1E) \left[ \int_0^{\infty} R(s_2|2y)g_2(y+x)\varphi_2(y)dy + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} R(s_2|1y)g_1(y-x)\varphi_1(y)dy \right], & \mathbf{x} = 1x, \\ R(s_1|0)R(s_3|2E) \left[ \int_0^{\infty} R(s_2|1y)g_1(y+x)\varphi_1(y)dy + \right. \\ \left. + \int_x^{\infty} R(s_2|2y)g_2(y-x)\varphi_2(y)dy \right], & \mathbf{x} = 2x, \end{cases}$$

значения  $R(s|\mathbf{x})$  находятся из табл. 1.

Пусть полученный вектор сигналов  $\bar{s} = (s_1, s_2, s_3)$  имеет вид:  $\bar{s}_3 = (1, 2, 1)$ ,  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 2$ ,  $s_3 = 1$ . В этом случае, используя формулы (8)–(10) и табл. 1, получаем, что функции  $F_1(\mathbf{B})$ ,  $f_2(\mathbf{x})$ ,  $f_3(\mathbf{x})$  имеют вид:

$$(11) \quad F_1(\mathbf{B}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} = 0 \notin \mathbf{B}, \\ p_1, & \mathbf{x} = 0 \in \mathbf{B}, \end{cases}$$

$$(12) \quad f_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} p_1\bar{F}_1(x)\varphi_1(x), & \mathbf{x} = 1x, \\ p_1F_2(x)\varphi_2(x), & \mathbf{x} = 2x, \end{cases}$$

$$(13) \quad f_3(\mathbf{x}) = \begin{cases} p_1G_1(x) \left[ \int_0^{\infty} G_2(y)g_2(y+x)\varphi_2(y)dy + \right. \\ \left. + \int_x^{\infty} \bar{G}_1(y)g_1(y-x)\varphi_1(y)dy \right], & \mathbf{x} = 1x, \\ p_1\bar{G}_2(x) \left[ \int_0^{\infty} \bar{G}_1(y)g_1(y+x)\varphi_1(y)dy + \right. \\ \left. + \int_x^{\infty} \bar{G}_1(y)g_2(y-x)\varphi_2(y)dy \right], & \mathbf{x} = 2x. \end{cases}$$

Аналогично можно найти вид функций  $F_1(\mathbf{B})$ ,  $f_2(\mathbf{x})$ ,  $f_3(\mathbf{x})$  и для других векторов  $\bar{s}_3$  сигналов.

В качестве конкретного примера рассмотрим случай, когда случайные величины  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  имеют экспоненциальное распределение:

$$G_1(x) = 1 - e^{-\lambda_1 x}, \quad g_1(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, \quad G_2(x) = 1 - e^{-\lambda_2 x}, \quad g_2(x) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}.$$

Тогда

$$\varphi_1(x) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_2 x}, \quad \varphi_2(x) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 x}, \quad p_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad p_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Используя формулы (11)–(13), найдем выражения функций  $F_1(\mathbf{B})$ ,  $f_2(\mathbf{x})$ ,  $f_3(\mathbf{x})$  для векторов сигналов  $\bar{s}_3 = (1, 1, 1)$ ,  $\bar{s}_3 = (1, 2, 1)$ ,  $\bar{s}_3 = (1, 1, 2)$ ,  $\bar{s}_3 = (1, 2, 2)$ .

1. Для вектора  $\bar{s}_3 = (1, 1, 1)$ :

$$F_1(\mathbf{B}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} = 0 \notin \mathbf{B}, \\ p_1, & \mathbf{x} = 0 \in \mathbf{B}, \end{cases}$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lambda_2 p_1^2 (1 - e^{-\lambda_1 x}) e^{-\lambda_2 x}, & \mathbf{x} = 1x, \\ \lambda_2 p_1^2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}, & \mathbf{x} = 2x, \end{cases}$$

$$f_3(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lambda_2 p_1^2 (1 - e^{-\lambda_1 x}) e^{-\lambda_2 x} \left[ p_1 - \frac{\lambda_1}{2\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 x} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + 2\lambda_2} \right], & \mathbf{x} = 1x, \\ \lambda_2 p_1^2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} \left[ p_1 - \frac{\lambda_1}{2\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 x} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + 2\lambda_2} e^{-\lambda_2 x} \right], & \mathbf{x} = 2x. \end{cases}$$

2. В случае вектора  $\bar{s}_3 = (1, 2, 1)$ :

$$F_1(\mathbf{B}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} = 0 \notin \mathbf{B}, \\ p_1, & \mathbf{x} = 0 \in \mathbf{B}, \end{cases}$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lambda_2 p_1^2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}, & \mathbf{x} = 1x, \\ \lambda_2 p_1^2 (1 - e^{-\lambda_2 x}) e^{-\lambda_1 x}, & \mathbf{x} = 2x, \end{cases}$$

$$f_3(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lambda_2 p_1^2 (1 - e^{-\lambda_1 x}) e^{-\lambda_2 x} \left[ p_2 + \frac{\lambda_1}{2\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + 2\lambda_2} \right], & \mathbf{x} = 1x, \\ \lambda_2 p_1^2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} \left[ p_2 + \frac{\lambda_1}{2\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + 2\lambda_2} e^{-\lambda_2 x} \right], & \mathbf{x} = 2x. \end{cases}$$

3. Если  $\bar{s}_3 = (1, 1, 2)$ , то

$$F_1(\mathbf{B}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} = 0 \notin \mathbf{B}, \\ p_1, & \mathbf{x} = 0 \in \mathbf{B}, \end{cases}$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lambda_2 p_1^2 (1 - e^{-\lambda_1 x}) e^{-\lambda_2 x}, & \mathbf{x} = 1x, \\ \lambda_2 p_1^2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}, & \mathbf{x} = 2x, \end{cases}$$

$$f_3(\mathbf{x}) = \begin{cases} p_1^2 \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} \left( p_1 - \frac{\lambda_1}{2\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 x} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + 2\lambda_2} \right), & \mathbf{x} = 1x, \\ p_1^2 \lambda_2 (1 - e^{-\lambda_2 x}) e^{-\lambda_1 x} \left( p_1 - \frac{\lambda_1}{2\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + 2\lambda_2} e^{-\lambda_2 x} \right), & \mathbf{x} = 2x. \end{cases}$$

4. Для вектора  $\bar{s}_3 = (1, 2, 2)$ :

$$F_1(B) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} = 0 \notin B, \\ p_1, & \mathbf{x} = 0 \in B, \end{cases}$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lambda_2 p_1^2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}, & \mathbf{x} = 1x, \\ \lambda_2 p_1^2 (1 - e^{-\lambda_2 x}) e^{-\lambda_1 x}, & \mathbf{x} = 2x, \end{cases}$$

$$(14) \quad f_3(\mathbf{x}) = \begin{cases} p_1^2 \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} \left( p_2 + \frac{\lambda_1}{2\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + 2\lambda_2} \right), & \mathbf{x} = 1x, \\ p_1^2 \lambda_2 (1 - e^{-\lambda_2 x}) e^{-\lambda_1 x} \left( p_2 + \frac{\lambda_1}{2\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + 2\lambda_2} e^{-\lambda_2 x} \right), & \mathbf{x} = 2x. \end{cases}$$

Для остальных векторов сигналов  $\bar{s}_3 = (2, 2, 2)$ ,  $\bar{s}_3 = (2, 1, 2)$ ,  $\bar{s}_3 = (2, 2, 1)$ ,  $\bar{s}_3 = (2, 1, 1)$  функции  $F_1(B)$ ,  $f_2(\mathbf{x})$ ,  $f_3(\mathbf{x})$  могут быть определены с использованием функций, найденных для ранее рассмотренных векторов сигналов. Так, эти функции для вектора  $\bar{s}_3 = (2, 1, 2)$  могут быть получены из функций для вектора  $\bar{s}_3 = (1, 2, 1)$  заменой  $\lambda_1$  на  $\lambda_2$ ,  $p_1$  на  $p_2$ , состояний  $1x$  и  $2x$  на  $2x$  и  $1x$  соответственно.

Используя функции  $F_n(B)$ ,  $f_n(\mathbf{x})$ , перейдем к нахождению вероятности (3):

$$(15) \quad P(\bar{S}^n = \bar{s}_n) = \int_E P(\bar{S}^n = \bar{s}_n, X_n \in d\mathbf{x}) = \int_E F_n(d\mathbf{x}) = \int_E f_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Введем функцию

$$H_n(B) = P(X_n \in B | \bar{S}^n = \bar{s}_n), \quad B \in \mathfrak{F},$$

или в дифференциальной форме

$$H_n(d\mathbf{x}) = P(X_n \in d\mathbf{x} | \bar{S}^n = \bar{s}_n).$$

Имеем, что

$$\begin{aligned} H_n(d\mathbf{x}) &= P(X_n \in d\mathbf{x} | \bar{S}^n = \bar{s}_n) = \frac{P(X_n \in d\mathbf{x}, \bar{S}^n = \bar{s}_n)}{P(\bar{S}^n = \bar{s}_n)} = \\ &= \frac{F_n(d\mathbf{x})}{F_n(E)} = \frac{F_n(d\mathbf{x})}{\int_E F_n(d\mathbf{e})}. \end{aligned}$$

Следовательно, плотность  $h_n(\mathbf{x})$  функции  $H_n(B)$  определяется формулой:

$$(16) \quad h_n(\mathbf{x}) = c_n \cdot f_n(\mathbf{x}), \quad c_n = \frac{1}{F_n(E)} = \frac{1}{\int_E f_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}.$$

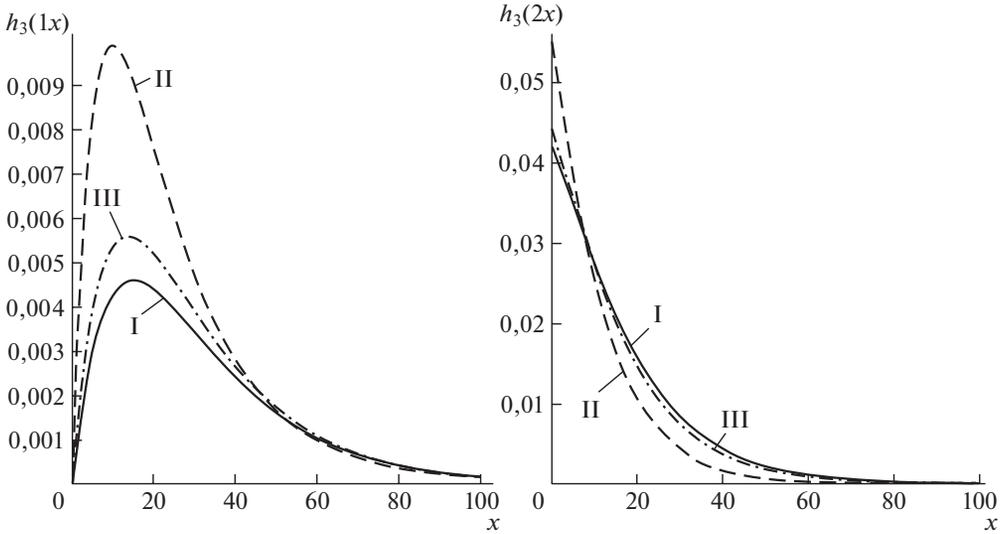


Рис. 2. Графики функций  $h_3(1x)$ ,  $h_3(2x)$ .

В качестве примера, найдем  $P(\bar{S}^3 = \bar{s}_3)$  и функцию  $h_3(\mathbf{x})$  для вектора сигналов  $\bar{s}_3 = (1, 2, 1)$ . Используя формулы (14)–(16), получаем

$$\begin{aligned}
 (17) \quad \frac{1}{c_3} &= P(\bar{S}^3 = \bar{s}_3) = \int_{E_1} f_3(1x) dx + \int_{E_2} f_3(2x) dx = \\
 &= \lambda_2 p_1^2 \left[ \frac{\lambda_1 p_1}{(2\lambda_1 + \lambda_2)^2} + \frac{p_1 p_2}{\lambda_1 + 2\lambda_2} + \frac{p_1 p_2 + 1}{2\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{\lambda_2}{(\lambda_1 + 2\lambda_2)^2} \right], \\
 h_3(\mathbf{x}) &= \begin{cases} c_3 \cdot \lambda_2 p_1^2 (1 - e^{-\lambda_1 x}) e^{-\lambda_2 x} \left[ p_2 + \frac{\lambda_1}{2\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + 2\lambda_2} \right], & \mathbf{x} = 1x, \\ c_3 \cdot \lambda_2 p_1^2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} \left[ p_2 + \frac{\lambda_1}{2\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + 2\lambda_2} e^{-\lambda_2 x} \right], & \mathbf{x} = 2x. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие наборы значений параметров  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ :

- I. ( $\lambda_1 = 0,025$ ,  $\lambda_2 = 0,05$ ),
- II. ( $\lambda_1 = 0,05$ ,  $\lambda_2 = 0,05$ ),
- III. ( $\lambda_1 = 0,025$ ,  $\lambda_2 = 0,0125$ ).

Графики функций  $h_3(1x)$ ,  $h_3(2x)$  при значениях параметров I, II, III представлены на рис. 2.

Введем следующие подмножества пространства состояний  $E$ :

$$E_1 = \{1x, x > 0\}, \quad E_2 = \{2x, x > 0\}.$$

В табл. 2 приведены вероятности  $P(\bar{S}_3 = \bar{s}_3)$ ,  $P(X_3 \in E_1 | \bar{s}_3)$  и  $P(X_3 \in E_2 | \bar{s}_3)$  при значениях параметров I, II, III для различных вариантов вектора сигнала

**Таблица 2.** Значения вероятностей  $P(\bar{S}_3 = \bar{s}_3)$ ,  $P(X_3 \in E_1 | \bar{s}_3)$  и  $P(X_3 \in E_2 | \bar{s}_3)$

$\lambda_1, \lambda_2 \backslash \bar{s}_s$	$\bar{s}_3 = (1, 1, 1)$	$\bar{s}_3 = (1, 2, 1)$	$\bar{s}_3 = (2, 1, 1)$	$\bar{s}_3 = (1, 1, 2)$
$\lambda_1 = 0,025$ $\lambda_2 = 0,05$	0,04648 0,48473 0,51527	0,06463 0,22445 0,77555	0,09296 0,48473 0,51527	0,06463 0,62559 0,37441
$\lambda_1 = 0,05$ $\lambda_2 = 0,05$	0,13889 0,65000 0,35000	0,11111 0,31250 0,68750	0,13889 0,65000 0,35000	0,11111 0,68750 0,31250
$\lambda_1 = 0,025$ $\lambda_2 = 0,0125$	0,31519 0,88125 0,11875	0,12926 0,39557 0,60443	0,15759 0,88125 0,11875	0,12926 0,86052 0,13948
$\lambda_1, \lambda_2 \backslash \bar{s}_s$	$\bar{s}_3 = (2, 2, 1)$	$\bar{s}_3 = (1, 2, 2)$	$\bar{s}_3 = (2, 1, 2)$	$\bar{s}_3 = (2, 2, 2)$
$\lambda_1 = 0,025$ $\lambda_2 = 0,05$	0,12926 0,22445 0,77555	0,15759 0,21347 0,78653	0,12926 0,62559 0,37441	0,31519 0,21347 0,78653
$\lambda_1 = 0,05$ $\lambda_2 = 0,05$	0,11111 0,31250 0,68750	0,13889 0,35000 0,65000	0,11111 0,68750 0,31250	0,13889 0,35000 0,65000
$\lambda_1 = 0,025$ $\lambda_2 = 0,0125$	0,06463 0,39557 0,60443	0,09296 0,67761 0,32239	0,06463 0,86052 0,13948	0,04648 0,67761 0,32239

лов  $\bar{s}_3 = (s_1, s_2, s_3)$ . В ячейках табл. 2 эти вероятности расположены в том же порядке сверху вниз.

**II.** Перейдем к нахождению условных вероятностей  $P(X_4 \in B | \bar{s}_3)$ ,  $P(S_4 = s | \bar{s}_3)$ .

Имеем, что

$$\begin{aligned}
 P(X_4 \in d\mathbf{x} | \bar{s}_3) &= \int_E P(X_4 \in d\mathbf{x}, X_3 \in d\mathbf{y} | \bar{s}_3) = \\
 &= \int_E P(X_3 \in d\mathbf{y} | \bar{s}_3) P(X_4 \in d\mathbf{x} | X_3 = \mathbf{y}, \bar{s}_3) = \\
 &= \int_E P(X_3 \in d\mathbf{y} | \bar{s}_3) P(X_4 \in d\mathbf{x} | X_3 = \mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 P(X_4 \in d\mathbf{x} | \bar{s}_3) &= \int_E P(X_3 \in d\mathbf{y} | \bar{s}_3) P(X_4 \in d\mathbf{x} | X_3 = \mathbf{y}) = \\
 (18) \quad &= \int_E P(X_4 \in d\mathbf{x} | X_3 = \mathbf{y}) H_3(d\mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

**Таблица 3.** Значения условных вероятностей  $P(X_4 \in E_1 | \bar{s}_3)$ ,  $P(X_4 \in E_2 | \bar{s}_3)$

$\lambda_1, \lambda_2 \backslash P$	$P(X_4 \in E_1   \bar{s}_3)$	$P(X_4 \in E_2   \bar{s}_3)$
$\lambda_1 = 0,025$ $\lambda_2 = 0,05$	0,53895	0,46105
$\lambda_1 = 0,05$ $\lambda_2 = 0,05$	0,62500	0,37500
$\lambda_1 = 0,025$ $\lambda_2 = 0,0125$	0,78677	0,21323

Выражение для плотности  $p(X_4 = \mathbf{x} | \bar{s}_3)$  имеет вид:

$$(19) \quad \begin{aligned} p(X_4 = \mathbf{x} | \bar{s}_3) &= \int_E p(X_3 = \mathbf{y} | \bar{s}_3) p(X_4 = \mathbf{x} | X_3 = \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \\ &= \int_E p(X_4 = \mathbf{x} | X_3 = \mathbf{y}) h_3(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

В качестве примера, найдем выражение для  $p(X_4 = \mathbf{x} | \bar{s}_3)$  в случае  $\bar{s}_3 = (1, 2, 1)$ :

$$\begin{aligned} p(X_4 = \mathbf{x} | \bar{s}_3) &= \\ &= \begin{cases} c_3 \lambda_2 p_1 e^{-\lambda_2 x} \left[ \lambda_1 \left( \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}}{2\lambda_1 + \lambda_2} \left( \frac{1}{2\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{e^{-\lambda_1 x}}{3\lambda_1 + \lambda_2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\lambda_2 p_2}{\lambda_1 + 2\lambda_2} \left( \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{e^{-\lambda_1 x}}{2\lambda_1 + \lambda_2} \right) \right) + \right. \\ \left. + \lambda_2 \left( \left( \frac{\lambda_1}{2\lambda_1 + \lambda_2} + p_2 \right) \frac{1}{\lambda_1 + 2\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{(\lambda_1 + 2\lambda_2)(\lambda_1 + 3\lambda_2)} \right) \right], & \mathbf{x} = 1x, \\ c_3 \lambda_2 p_1 e^{-\lambda_1 x} \left[ \lambda_1 \left( \frac{\lambda_1^2}{(2\lambda_1 + \lambda_2)^2 (3\lambda_1 + \lambda_2)} + \frac{\lambda_2 p_1 p_2}{(\lambda_1 + 2\lambda_2)(2\lambda_1 + \lambda_2)} \right) + \right. \\ \left. + \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \left( \left( \frac{\lambda_1}{2\lambda_1 + \lambda_2} + p_2 \right) \frac{1}{\lambda_1 + 2\lambda_2} - \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}}{(\lambda_1 + 2\lambda_2)(\lambda_1 + 3\lambda_2)} \right) \right], & \mathbf{x} = 2x. \end{cases} \end{aligned}$$

Значения условных вероятностей  $P(X_4 \in E_1 | \bar{s}_3)$ ,  $P(X_4 \in E_2 | \bar{s}_3)$  для вектора сигналов  $\bar{s}_3 = (1, 2, 1)$  при значениях параметров I, II, III приведены в табл. 3.

**Таблица 4.** Значения условных вероятностей  $P(S_4 = s | \bar{s}_3)$

$\lambda_1, \lambda_2 \backslash P$	$P(S_4 = 1   \bar{s}_3)$	$P(S_4 = 2   \bar{s}_3)$
$\lambda_1 = 0,025$ $\lambda_2 = 0,05$	0,42159	0,57841
$\lambda_1 = 0,05$ $\lambda_2 = 0,05$	0,54167	0,45833
$\lambda_1 = 0,025$ $\lambda_2 = 0,0125$	0,76997	0,23003

Далее,

$$\begin{aligned}
 P(S_4 = s | \bar{s}_3) &= \int_E P(S_4 = s, X_4 \in d\mathbf{x} | \bar{s}_3) = \\
 &= \int_E P(S_4 = s | X_4 = \mathbf{x}, \bar{s}_3) P(X_4 \in d\mathbf{x} | \bar{s}_3) = \\
 &= \int_E P(S_4 = s | X_4 = \mathbf{x}) P(X_4 \in d\mathbf{x} | \bar{s}_3) = \int_E R(s_4 | \mathbf{x}) P(X_4 \in d\mathbf{x} | \bar{s}_3).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(20) \quad P(S_4 = s | \bar{s}_3) = \int_E p(X_4 \mathbf{x} | \bar{s}_3) P(S_4 = s | X_4 = \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Условные вероятности  $P(S_4 = s | \bar{s}_3)$  для вектора  $\bar{s}_3 = (1, 2, 1)$  при значениях параметров I, II, III приведены в табл. 4.

**III.** Рассмотрим способы нахождения вероятности  $P(\bar{S}^n = \bar{s}_n)$ .

Вычисление вероятности  $P(\bar{S}^n = \bar{s}_n)$  по формуле (15), основанное на использовании функций  $F_n(\mathbf{B})(f_n(\mathbf{x}))$ , называется прямым подходом [12, 13].

Существует также обратный подход [12, 13] к вычислению вероятности  $P(\bar{S}^n = \bar{s}_n)$ , основанный на использовании функций (обратные переменные)  $B_k(\mathbf{x})$  [12, 13]:

$$(21) \quad B_k(\mathbf{x}) = P(S_{k+1} = s_{k+1}, S_n = s_n | X_k = \mathbf{x}), \quad k = \overline{1, n-1}, \quad \mathbf{x} \in E.$$

Найдем рекуррентное соотношение для функций  $B_k(\mathbf{x})$ .

$$\begin{aligned}
 B_k(\mathbf{x}) &= \int_E P(S_{k+1} = s_{k+1}, \dots, S_n = s_n, X_{k+1} \in d\mathbf{y} | X_k = \mathbf{x}) = \\
 &= \int_E P(S_{k+1} = s_{k+1}, \dots, S_n = s_n | X_k = \mathbf{x}, X_{k+1} = \mathbf{y}) P(X_{k+1} \in d\mathbf{y} | X_k = \mathbf{x}) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_E P(S_{k+1} = s_{k+1}, \dots, S_n = s_n | X_{k+1} = \mathbf{y}) P(X_{k+1} \in d\mathbf{y} | X_k = \mathbf{x}) = \\
&= \int_E P(S_{k+1} = s_{k+1} | X_{k+1} = \mathbf{y}) P(S_{k+2} = s_{k+2}, \dots, S_n = s_n | S_{k+1} = \\
&\quad = s_{k+1}, X_{k+1} = \mathbf{y}) P(X_{k+1} \in d\mathbf{y} | X_k = \mathbf{x}) = \\
&= \int_E R(s_{k+1} | \mathbf{y}) P(S_{k+2} = s_{k+2}, \dots, S_n = s_n | X_{k+1} = \mathbf{y}) P(X_{k+1} \in d\mathbf{y} | X_k = \mathbf{x}) = \\
&\quad = \int_E R(s_{k+1} | \mathbf{y}) B_{k+1}(\mathbf{y}) P(X_{k+1} \in d\mathbf{y} | X_k = \mathbf{x}) = \\
&\quad = \int_E R(s_{k+1} | \mathbf{y}) B_{k+1}(\mathbf{y}) P(\mathbf{x}, d\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(22) \quad B_k(\mathbf{x}) = \int_E B_{k+1}(\mathbf{y}) R(s_{k+1} | \mathbf{y}) P(\mathbf{x}, d\mathbf{y}), \quad k = \overline{1, n-2}.$$

Имеем, что

$$\begin{aligned}
B_{n-1}(\mathbf{x}) &= P(S_n = s_n | X_{n-1} = \mathbf{x}) = \int_E P(S_n = s_n, X_n \in d\mathbf{y} | X_{n-1} = \mathbf{x}) = \\
&= \int_E P(X_n \in d\mathbf{y} | X_{n-1} = \mathbf{x}) P(S_n = s_n | X_{n-1} = \mathbf{x}, X_n = \mathbf{y}) = \\
&= \int_E P(S_n = s_n | X_n = \mathbf{y}) P(X_n \in d\mathbf{y} | X_{n-1} = \mathbf{x}) = \int_E R(s_n | \mathbf{y}) P(\mathbf{x}, d\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Зная  $B_{n-1}(\mathbf{x})$ , используя рекуррентное соотношение (22), можно последовательно найти  $B_{n-2}(\mathbf{x}), \dots, B_1(\mathbf{x})$ .

Выражения для функций  $B_2(\mathbf{x}), B_1(\mathbf{x})$  для вектора сигналов  $\bar{s}_3 = (1, 2, 1)$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
B_2(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_1 x} (p_2 + \lambda_1 x), & \mathbf{x} = 1x, \\ e^{-\lambda_2 x} (p_1 + \lambda_2 x), & \mathbf{x} = 2x, \end{cases} \\
B_1(\mathbf{x}) &= \begin{cases} \lambda_2 p_1 \left[ \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{p_2}{2\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{\lambda_1}{(2\lambda_1 + \lambda_2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{p_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} - \frac{p_1}{\lambda_1 + 2\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{(\lambda_1 + 2\lambda_2)^2} \right], & \mathbf{x} = 0, \\ 0, & \mathbf{x} = 1x, 2x. \end{cases}
\end{aligned}$$

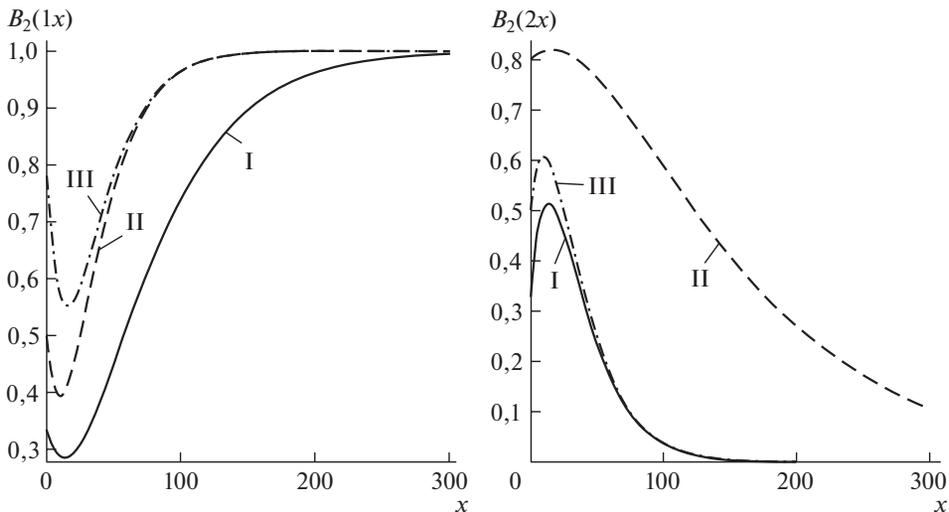


Рис. 3. Графики функций  $B_2(1x)$ ,  $B_2(2x)$ .

Графики функций  $B_2(1x)$ ,  $B_2(2x)$  при значениях параметров I, II, III в случае вектора сигналов  $\bar{s}_3 = (1, 2, 3)$  представлены на рис. 3.

Функция  $B_1(\mathbf{x})$  позволяет найти вероятность  $P(\bar{S}^n = \bar{s}_n)$ .

$$\begin{aligned}
 P(\bar{S}^n = \bar{s}_n) &= \int_E P(S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n, X_1 \in d\mathbf{x}) = \\
 &= \int_E P(X_1 \in d\mathbf{x}) P(S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n | X_1 = \mathbf{x}) = \\
 &= \int_E P(S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n | X_1 = \mathbf{x}) \pi(d\mathbf{x}) = \\
 &= \int_E P(S_1 = s_1 | X_1 = \mathbf{x}) P(S_2 = s_2, \dots, S_n = s_n | S_1 = s_1, X_1 = \mathbf{x}) \pi(d\mathbf{x}) = \\
 &= \int_E R(s_1 | \mathbf{x}) P(S_2 = s_2, \dots, S_n = s_n | X_1 = \mathbf{x}) \pi(d\mathbf{x}) = \\
 &= \int_E R(s_1 | \mathbf{x}) B_1(\mathbf{x}) \pi(d\mathbf{x}).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(23) \quad P(\bar{S}^n = \bar{s}_n) = \int_E R(s_1 | \mathbf{x}) B_1(\mathbf{x}) \pi(d\mathbf{x}).$$

Находя  $P(\bar{S}^n = \bar{s}_n)$  по формуле (23) для вектора сигналов  $\bar{s}_3 = (1, 2, 1)$ , получаем выражение, совпадающее с (17).

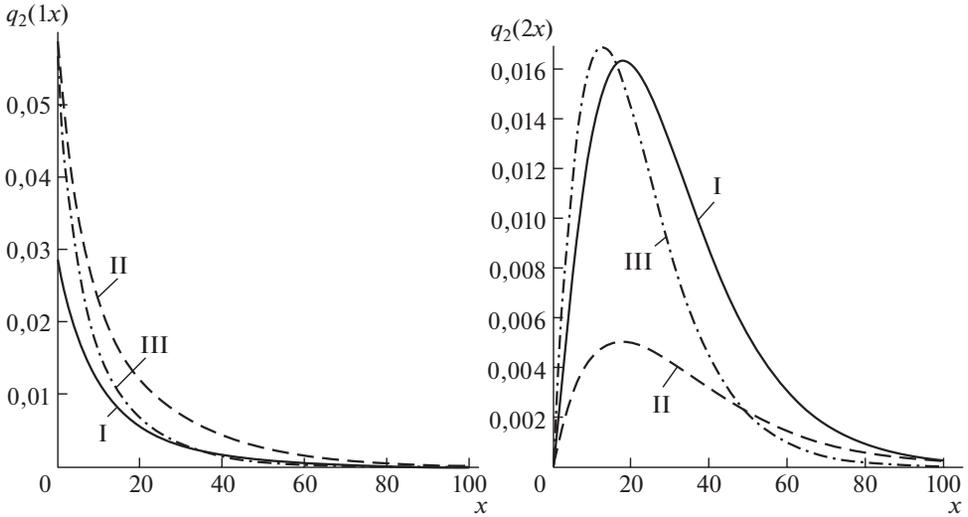


Рис. 4. Графики функций  $q_2(1x)$ ,  $q_2(2x)$ .

Еще один способ нахождения вероятности  $P(\bar{S}^n = \bar{s}_n)$  состоит в комбинировании прямого и обратного подходов [5, 12, 13]. Предположим, что для некоторого  $1 \leq k \leq n - 1$  можно найти обе функции  $F_k(B)(f_k(x))$  и  $B_k(x)$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 & P(\bar{S}^n = \bar{s}_n, X_k \in d\mathbf{x}) = \\
 & = P(\bar{S}^k = \bar{s}_k, X_k \in d\mathbf{x})P(S_{k+1} = s_{k+1}, \dots, S_n = s_n \mid \bar{S}^k = \bar{s}_k, X_k = \mathbf{x}) = \\
 & = P(\bar{S}^k = \bar{s}_k, X_k \in d\mathbf{x})P(S_{k+1} = s_{k+1}, \dots, S_n = s_n \mid X_k = \mathbf{x}) = F_k(d\mathbf{x})B_k(\mathbf{x}).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(24) \quad P(\bar{S}^n = \bar{s}_n) = \int_E B_k(\mathbf{x})f_k(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

**IV.** Использование скрытой марковской модели позволяет на основе полученного вектора сигналов  $\bar{s}_n$  прогнозировать состояния цепи Маркова, которые ненаблюдаемы [12, 13].

Предположим, что получен вектор  $\bar{s}_n = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  первых  $n$  сигналов и необходимо предсказать первые  $n$  состояний цепи Маркова, состояния которой ненаблюдаемы. Для этого, следуя [12, 13], при  $k \leq n$  введем функции

$$(25) \quad Q_k(B) = P(X_k \in B \mid \bar{S}^n = \bar{s}_n), \quad B \in \mathfrak{F},$$

или в дифференциальной форме

$$(26) \quad Q_k(d\mathbf{x}) = P(X_k \in d\mathbf{x} \mid \bar{S}^n = \bar{s}_n), \quad \mathbf{x} \in E.$$

**Таблица 5.** Значения вероятностей  $P(X_k = 0|\bar{s}_3)$ ,  $P(X_k \in E_1|\bar{s}_3)$ ,  $P(X_k \in E_2|\bar{s}_3)$

$\lambda_1, \lambda_2 \backslash k$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$\lambda_1 = 0,025$ $\lambda_2 = 0,05$	1 0 0	0 0,35817 0,64183	0 0,22445 0,77555
$\lambda_1 = 0,05$ $\lambda_2 = 0,05$	1 0 0	0 0,50000 0,50000	0 0,31250 0,68750
$\lambda_1 = 0,025$ $\lambda_2 = 0,0125$	1 0 0	0 0,64183 0,35817	0 0,39557 0,60443

Имеем, что

$$Q_k(d\mathbf{x}) = P(X_k \in d\mathbf{x} | \bar{S}^n = \bar{s}_n) = \frac{P(\bar{S}^n = \bar{s}_n, X_k \in d\mathbf{x})}{P(\bar{S}^n = \bar{s}_n)} = \frac{F_k(d\mathbf{x})B_k(\mathbf{x})}{\int_E B_k(\mathbf{x})f_k(\mathbf{x})d\mathbf{x}}.$$

Следовательно, плотность  $q_k(\mathbf{x})$  функции  $Q_k(B)$  определяется формулой:

$$(27) \quad q_k(\mathbf{x}) = \frac{f_k(\mathbf{x})B_k(\mathbf{x})}{P(\bar{S}^n = \bar{s}_n)} = \frac{f_k(\mathbf{x})B_k(\mathbf{x})}{\int_E B_k(\mathbf{x})f_k(\mathbf{x})d\mathbf{x}} = c_n f_k(\mathbf{x})B_k(\mathbf{x}).$$

Графики функций  $q_2(1x)$ ,  $q_2(2x)$  для вектора сигналов  $\bar{s}_3 = (1, 2, 1)$  при значениях параметров I, II, III представлены на рис. 4.

Знание функций  $q_k(1x)$ ,  $q_k(2x)$  позволяет найти прогноз состояний ненаблюдаемой цепи Маркова на  $k$ -м шаге, в том числе и значений непрерывных компонент, входящих в состав фазовых состояний системы.

В качестве примера, рассмотрим прогноз при  $k = 1, 2, 3$  состояний ВЦМ суперпозиции двух независимых процессов восстановления при значениях параметров I, II, III в случае вектора  $\bar{s}_3 = (1, 2, 1)$ . В табл. 5 при  $k = 1, 2, 3$  приведены вероятности  $P(X_k = 0|\bar{s}_3)$ ,  $P(X_k \in E_1|\bar{s}_3)$ ,  $P(X_k \in E_2|\bar{s}_3)$ , которые расположены в ячейках табл. 5 сверху вниз.

V. Следуя публикации [17], найдем  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = s | X_1 = \mathbf{x})$ .

Имеем, что

$$\begin{aligned} P(S_n = s | X_1 = \mathbf{x}) &= \int_E P(S_n = s, X_n \in d\mathbf{y} | X_1 = \mathbf{x}) = \\ &= \int_E P(X_n \in d\mathbf{y} | X_1 = \mathbf{x})P(S_n = s | X_n = \mathbf{y}, X_1 = \mathbf{x}) = \\ &= \int_E P(S_n = s | X_n = \mathbf{y})P(X_n \in d\mathbf{y} | X_1 = \mathbf{x}) = \int_E R(s | \mathbf{y})P^n(\mathbf{x}, d\mathbf{y}). \end{aligned}$$

**Таблица 6.** Предельные вероятности  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = 1 | X_1 = \mathbf{x})$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = 2 | X_1 = \mathbf{x})$

$\lambda_1, \lambda_2$	$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = 1   X_1 = \mathbf{x})$	$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = 2   X_1 = \mathbf{x})$
$\lambda_1 = 0,025$ $\lambda_2 = 0,05$	0,33333	0,66667
$\lambda_1 = 0,05$ $\lambda_2 = 0,05$	0,50000	0,50000
$\lambda_1 = 0,025$ $\lambda_2 = 0,0125$	0,66667	0,33333

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = s | X_1 = \mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E R(s | \mathbf{y}) P^n(\mathbf{x}, d\mathbf{y}) = \int_E R(s | \mathbf{y}) \rho(d\mathbf{y}),$$

где  $\rho(d\mathbf{y})$  – стационарное распределение ВЦМ  $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ .

Таким образом,

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = s | X_1 = \mathbf{x}) = \int_E R(s | \mathbf{y}) \rho(d\mathbf{y}), \quad \text{для любого } \mathbf{x} \in E.$$

Найдем эти предельные вероятности для ВЦМ суперпозиции двух процессов восстановления. Как отмечено выше, ВЦМ суперпозиции имеет стационарное распределение, определяемое формулой (2).

Применяя (2), (28) и табл. 1, получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = 1 | X_1 = \mathbf{x}) &= \int_{E_1} R(1 | 1y) \rho(1dy) + \int_{E_2} R(1 | 2y) \rho(2dy) = \\ &= \rho_0 \left( \int_0^\infty G_1(y) \bar{G}_2(y) dy + \int_0^\infty \bar{G}_1(y) G_2(y) dy \right) = \\ &= \rho_0 \int_0^\infty \bar{G}_2(y) dy = \rho_0 M\alpha_2 = \frac{M\alpha_2}{M\alpha_1 + M\alpha_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = 2 | X_1 = \mathbf{x}) &= \int_{E_1} R(2 | 1y) \rho(1dy) + \int_{E_2} R(2 | 2y) \rho(2dy) = \\ &= \rho_0 M\alpha_1 = \frac{M\alpha_1}{M\alpha_1 + M\alpha_2}, \end{aligned}$$

а в случае экспоненциального распределения случайных величин  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  с параметрами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = 1 | X_1 = \mathbf{x}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = 2 | X_1 = \mathbf{x}) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

В табл. 6 приведены предельные вероятности для значений параметров I, II, III.

Использование алгоритмов теории скрытых марковских моделей [5, 12, 13] позволяет находить оценки и других характеристик ненаблюдаемой модели и сигналов на основе полученного вектора сигналов.

#### 4. Заключение

Большое число систем различного назначения допускает построение полумарковской модели. При построении полумарковской модели приходится строить достаточно сложное фазовое пространство состояний, отражающих физические состояния системы и обеспечивающих корректность построения полумарковской модели. Важной составной частью полумарковской модели является вложенная цепь Маркова, отвечающая за переходы между состояниями системы. Фазовое пространство состояний полумарковской модели совпадает с фазовым пространством состояний вложенной цепи Маркова.

В процессе функционирования системы, для которой построена полумарковская модель, в ряде случаев при изменении состояний системы не удается получить всю информацию, содержащуюся в кодах фазовых состояний полумарковской модели, а удается получить только некоторую информацию (сигнал), связанную с фазовыми состояниями. В этом случае фазовые состояния вложенной цепи Маркова (полумарковской модели) можно считать скрытыми, поэтому возникает задача оценки характеристик вложенной цепи Маркова, полумарковской модели и сигналов на основе полученного вектора сигналов. Решить эту задачу позволяют скрытые марковские модели.

В данной статье на примере суперпозиции двух независимых процессов восстановления, построенной в работах В.С. Королюка и А.Ф. Турбина, рассматривается подход к построению скрытой марковской модели на основе полумарковского процесса с фазовым пространством состояний общего вида. Обобщая на случай скрытой цепи Маркова с общим фазовым пространством состояний результаты, известные для скрытых цепей Маркова с конечным множеством состояний, проводится оценка характеристик вложенной цепи Маркова суперпозиции и сигналов на основе полученного вектора сигналов. Для ВЦМ находятся условные вероятности состояний на  $2 \leq k \leq n$ ,  $(n + 1)$ -м шагах на основе полученного вектора сигналов размера  $n$ . Для вектора сигналов получены условные вероятности значений вектора сигналов на  $(n + 1)$ -м шаге, безусловные вероятности вектора сигналов и финальные вероятности для значений вектора сигналов.

Рассматриваемый подход может быть использован для анализа функционирования систем различного назначения, допускающих построение полумарковской модели, в том числе и в случае конечного фазового пространства состояний. При реализации рассматриваемого подхода можно применять математические пакеты, используя при этом рекуррентные формулы.

Эффективным методом решения проблемы размерности моделей является алгоритм стационарного фазового укрупнения полумарковских систем, разработанный В.С. Королюком и А.Ф. Турбиным, который можно использовать при построении скрытой марковской модели.

В дальнейшем предполагается использовать рассматриваемый подход для анализа функционирования систем массового обслуживания, контроля, обслуживания технических систем и анализа их надежности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Limnios N., Oprisan G.* Semi-Markov Processes and Reliability. N.Y.: Springer Science+Business Media, 2001. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0161-8>
2. *Grabski F.* Semi-Markov Processes: Applications in System Reliability and Maintenance. Elsevier Science, 2014.
3. *Obzherin Yu.E., Boyko E.G.* Semi-Markov Models: Control of Restorable Systems with Latent Failures. London: Elsevier Academic Press, 2015.
4. *Jansen J., Limnios N.* (Eds.) Semi-Markov Models and Applications. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1999. <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-3288-6>
5. *Kobayashi H., Mark B., Turin W.* Probability, Random Processes, and Statistical Analysis: Applications to Communications. Signal Processing, Queueing Theory and Mathematical Finance. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511977770>
6. *Obzherin Y.E., Sidorov S.M., Nikitin M.M.* Reliability of the information system with intermediate storage devices // CCIS. 2018. V. 919. P. 432–444. [http://doi-org-443.webvpn.fjmu.edu.cn/10.1007/978-3-319-99447-5\\_37](http://doi-org-443.webvpn.fjmu.edu.cn/10.1007/978-3-319-99447-5_37)
7. *Limnios N., Nikulin M.* Recent Advances in Reliability Theory: Methodology, Practice, and Inference, eds. N. Limnios, M. Nikulin. New York: Springer Science+Business Media, 2000.
8. *Руденко Ю.Н., Ушаков И.А.* Надежность систем энергетики, 2-е изд. Новосибирск: Наука, 1989.
9. *Обжерин Ю.Е., Песчанский А.И.* Об однолинейной системе обслуживания с потерями и абсолютным приоритетом // АиТ. 1990. № 10. С. 107–115.  
*Obzherin Yu.E., Peschanskii A.I.* On One-line Service System with Losses and Absolute Priority // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 10. P. 1393–1400.
10. *Песчанский А.И.* Стационарные характеристики ненадежной многоканальной системы обслуживания с потерями и временным резервом // АиТ. 2019. № 4. С. 70–92. <https://doi.org/10.1134/S0005231019040044>  
*Peschansky A.I.* Stationary Characteristics of an Unreliable Multi-Server Queueing System with Losses and Time Redundancy // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 4. P. 648–665. <https://doi.org/10.1134/S0005117919040040>
11. *Janssen J., Manca R.* Semi-Markov Risk Models for Finance, Insurance and Reliability. N.Y.: Springer Science & Business Media, 2007.
12. *Ross S.M.* Introduction to Probability Models, Ninth Edition. USA: Elsevier Academic Press, 2006.
13. *Rabiner L.R.* A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition // Proc. IEEE 77. 1989. V. 189. No. 2. P. 257–286. <https://doi.org/10.1109/5.18626>
14. *Cappe' O., Moulines E., Ryde'n T.* Inference in Hidden Markov Models. N.Y.: Springer Science+Business Media, 2005.
15. *Obzherin Y.E., Sidorov S.M., Nikitin M.M.* Hidden Markov Model of Information System with Component-Wise Storage Devices // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), LNCS, 2019. V. 11965. P. 354–364. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-36614-8\\_27](https://doi.org/10.1007/978-3-030-36614-8_27).

16. Yu S.-Z. Hidden Semi-Markov Models: Theory, Algorithms and Applications. Elsevier Science, 2015.
17. Barbu V.S., Limnios N. Semi-Markov Chains and Hidden Semi-Markov Models toward Applications: Their Use in Reliability and DNA Analysis. N.Y.: Springer, 2008.
18. Elliott R., Limnios N., Swishchuk A. Filtering hidden semi-Markov chains // Stat. Probab. Lett., 2013. V. 83. P. 2007–2014. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2013.05.007>
19. Van der Hoek J., Elliott R. Introduction to Hidden Semi-Markov Models. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.
20. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. Киев: Наук. думка, 1976.
21. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. Киев: Наук. думка, 1982.
22. Королюк В.С. Стохастические модели систем. Киев: Наук. думка, 1989.
23. Korolyuk V.S., Korolyuk V.V. Stochastic Models of Systems. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1999.
24. Korolyuk V.S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. World Scientific, Imperial Coledge Press, 2005.
25. Корлат А.Н., Кузнецов В.Н., Новиков М.М., Турбин А.Ф. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. Кишинев: Штица, 1991.
26. Obzherin Yu.E., Sidorov S.M. Semi-Markov Model and Phase-Merging Scheme of a Multi-Component System with the Group Instantly Replenished Time Reserve // Int. J. of Reliability, Quality and Safety Engineering, 2019. V. 26. No. 3. Art. No. 1950014. <https://doi.org/10.1142/S0218539319500141>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиньм.*

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 13.01.2021

Принята к публикации 15.01.2021