

© 2021 г. Л.Ю. ЖИЛЯКОВА, д-р физ.-мат. наук (zhilyakova.ludmila@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
Н.А. КУЗНЕЦОВ, академик РАН (kuznetsov@cplire.ru)
(Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва;
Московский физико-технический институт
(Национальный исследовательский университет))

ГРАФОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ НАЗНАЧЕНИИ ЛОКОМОТИВОВ НА ЛИНЕЙНОМ УЧАСТКЕ ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГИ — БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ И С ОГРАНИЧЕНИЯМИ¹

Предложена новая графовая модель перевозок на линейном участке железной дороги. На основе заданного графика перевозок грузовых составов строится ациклический граф, вершины которого обозначают перевозки, а дуги — возможность последовательного осуществления их некоторым локомотивом. Такая модель задачи позволяет применить для нахождения оптимального плана назначений локомотивов статические графовые алгоритмы. Поиск решения в задаче без временных ограничений на локомотивы сводится к поиску минимального покрытия ациклического графа путями. Каждый путь в покрытии соответствует последовательности перевозок, осуществляемых одним локомотивом. При наличии временных ограничений на локомотивы (их уход на техническое обслуживание) не все пути в найденном покрытии могут остаться допустимыми — для некоторых локомотивов ни одна из найденных последовательностей перевозок не может быть выполнена от начала до конца. В этом случае добавляется еще один этап решения, на котором найденное покрытие преобразуется таким образом, что все новые пути описывают последовательности перевозок, которые можно осуществить данным множеством локомотивов с заданными временными ограничениями.

Ключевые слова: графовые модели, минимальное покрытие графа путями, покрытие графа с ограничениями, задача об оптимальном назначении.

DOI: 10.31857/S0005231021050044

1. Введение

В настоящей работе задача об оптимальном назначении локомотивов для выполнения графика грузовых перевозок на линейном участке железной дороги решается с помощью статического графового алгоритма. Расписание грузовых перевозок представлено в виде ориентированного ациклического

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 17-20-01180 офи-м-РЖД, 20-07-00190 А).

графа. При выборе методов построения модели и способов нахождения оптимального назначения был исследован ряд алгоритмов, описанных в литературе [1–6]. Обзоры фундаментальных и прикладных теоретико-графовых и сетевых методов и алгоритмов, направленных на решение широкого класса задач, представлены в книгах [1–3]; в книге [4] приведены программные реализации большого количества из них. В графах, имеющих разного рода ограничения на достижимость вершин или проходимость дуг, вводится понятие нестандартной достижимости; исследуются графы с различными типами достижимости с помощью вспомогательных графов, названных развертками [5, 6]. Графы с дугами разной природы, принадлежащими нескольким классам, используются при моделировании железнодорожных перевозок и назначений локомотивов и бригад [7–9]. Модели и алгоритмы составления расписаний железнодорожных грузовых перевозок и назначения локомотивов описаны в [10–14]. В [12] предложен эвристический алгоритм оптимизации составления расписания движения грузовых поездов и назначения локомотивов с учетом их технических обслуживаний. В [13] решается задача назначения локомотивов без ограничений на их временные рамки. В [14] рассматривается задача о назначении локомотивов и локомотивных бригад на грузовые составы, расписание движения которых уже известно. Точное решение находится с использованием метода программирования в ограничениях. Задача, рассматриваемая в [15], состоит в поиске декомпозиции путей в графе на подпути таким образом, чтобы каждый подпуть целиком лежал в одном из заданных подграфов исходного графа, а объединение этих подпутей составляло данный путь. Построенный алгоритм предлагается использовать для снижения размерности задачи о назначениях локомотивов при организации железнодорожных перевозок. Оптимальный по использованию тяговых ресурсов план построен в [7, 8], где впервые предложена и реализована идея построения плана перевозок на основе ресурсного графа, вложенного в плоскость графика поездов. В них решена реальная задача назначения локомотивов грузовым поездам на Восточном полигоне РЖД. Однако применяемые в этих работах методы в некоторых случаях не позволяют построить полное решение в условиях ограниченного числа локомотивов, даже если оно существует. В [9] было описано решение локальной задачи: для заданных начальных состояний локомотивов и поездов и заданного целевого состояния определить, является ли осуществимым все множество перевозок. В процессе решения строится план перевозок. Алгоритм, описанный в этой работе, решает поставленную задачу в отсутствие ограничений по времени: все локомотивы должны быть доступны до достижения горизонта планирования. В настоящей работе предложен метод, исправляющий недостатки предыдущей статьи и, что наиболее важно, учитывающий дополнительные временные ограничения на локомотивы. В отличие от жадного алгоритма сдвига фронта, описанного в [9], предложен статический алгоритм, позволяющий искать глобально оптимальное решение на полностью известном графе. Для построения назначений используются методы решения проблемы покрытия ориентированного графа простыми путями, описанной в [16–19].

2. Постановка задачи о назначении локомотивов на линейном участке железной дороги и ее графовая модель

2.1. Основные определения и обозначения

Рассматриваются грузовые перевозки на линейном участке железной дороги с k станциями. Имеется множество составов, для которых задан план их отправления и прибытия, и множество локомотивов, с помощью которых должны быть осуществлены данные перевозки.

Множество станций $S = \{S_0, \dots, S_k\}$ линейно упорядочено естественным образом по их расположению.

В модели вводится непрерывное время t , разделенное на интервалы событиями.

Определение 1. Событиями будем называть точки t_i , соответствующие временам отправления и прибытия составов. Длины интервалов между событиями могут быть различными.

По определению внутри каждого интервала событий нет. Тогда в непрерывном времени t естественным образом выделяется дискретный набор точек, задающих границы интервалов: $\{0, 1, \dots, t_{fin}\}$, где t_{fin} – заданный горизонт планирования.

Определение 2. Графиковой плоскостью Ots будем называть координатную плоскость, ось абсцисс которой соответствует времени, а ось ординат задает линейный участок дороги с упорядоченными станциями.

На графиковой плоскости произвольному событию с абсциссой t_i всегда соответствует «целочисленная» ордината, совпадающая с одной из станций S_j (см. рис. 1, а, б).

Множество составов и их траекторий движения будем обозначать как $Tr = \{Tr_1, \dots, Tr_n\}$.

Определение 3. Отрезки на графиковой плоскости Tr_j , задающие траектории движения составов, будем называть локо-слотами, в соответ-

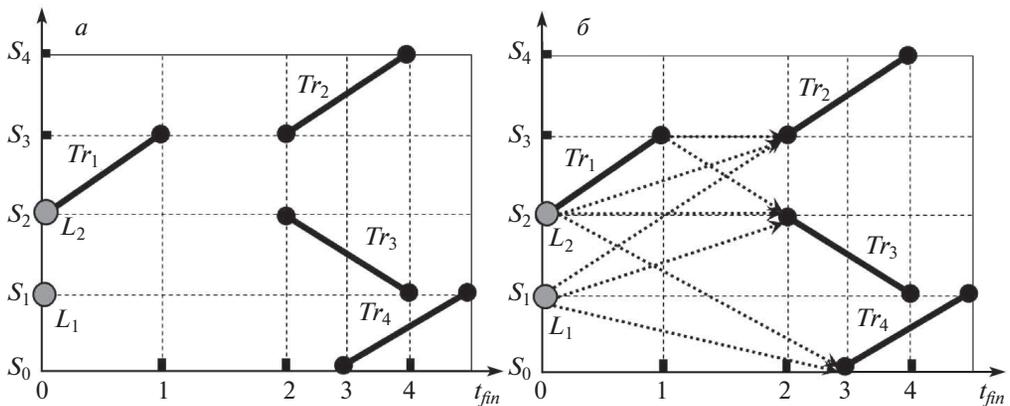


Рис. 1. а — Графиковая плоскость и график перевозок с четырьмя локо-слотами и двумя локомотивами; б — все возможные подцепки и перецепки локомотивов.

ствии с терминологией, введенной в [7, 8]. Концы каждого отрезка задаются отображениями (1)–(2).

$$(1) \quad f_{Tr_{start}} : Tr \rightarrow (t, s);$$

$$(2) \quad f_{Tr_{goal}} : Tr \rightarrow (t, s).$$

Множество локомотивов будем обозначать как $L = \{L_1, \dots, L_m\}$. Их положение задается отображением

$$(3) \quad f_{L_{start}} : L \rightarrow (t, s).$$

Будем считать, что скорости всех локомотивов одинаковы и равны v . С этой же скоростью движутся составы. Тангенсы углов наклона локо-слотов могут быть равны v и $-v$ в зависимости от направления движения состава.

План перевозок задается множеством локо-слотов и локомотивов на графической плоскости (рис. 1, а).

Определение 4. Прямоугольник на графической плоскости, ограниченный осями координат и прямыми $t = t_{fin}$ и $s = S_k$, содержащий отрезки, соответствующие локо-слотам, концы которых заданы отображениями (1)–(2), и точки, соответствующие локомотивам, заданные отображением (3), будем называть графиком перевозок.

Задача состоит в том, чтобы заданным множеством локомотивов (или его подмножеством) осуществить перевозки оптимальным образом. Локомотивы могут двигаться порожняком от станции прибытия предыдущего состава к станции отправления следующего. Под *оптимальностью* в настоящей модели будем понимать максимально возможное количество перевозок при как можно меньшем количестве локомотивов, участвующих в их реализации.

2.2. Конусы достижимости и их вложенность

График перевозок вместе с возможными подцепками и перецепками (рис. 1, б) можно рассматривать как евклидов граф. В нем имеются дуги двух типов: *дуги-перевозки* (локо-слоты) и *дуги-подцепки/перецепки*, обозначенные пунктирными линиями. Эти дуги соответствуют всем допустимым подцепкам локомотивов к составам и их перецепкам между составами. Углы наклона этих линий могут принимать значения из отрезка $[-v, v]$. Такой граф был назван *альтернативным* [8], поскольку на нем видны все возможные альтернативы для каждого локомотива в каждый момент времени, соответствующий его текущему положению на графике перевозок.

Определение 5. *Альтернативный граф* — это гетерогенный евклидов граф с дугами двух типов: *дуги-перевозки* (локо-слоты) и *дуги*, обозначающие все возможные подцепки и перецепки локомотивов.

В [9] на альтернативном графе был предложен динамический алгоритм, названный *алгоритмом сдвига фронта*, который находил локально-оптимальное решение в каждый момент t_i . Однако в условиях временных ограничений на работу локомотивов, когда некоторые локомотивы должны уйти на профилактику в моменты времени $t'_i < t_{fin}$, этот алгоритм оказался неприменим.

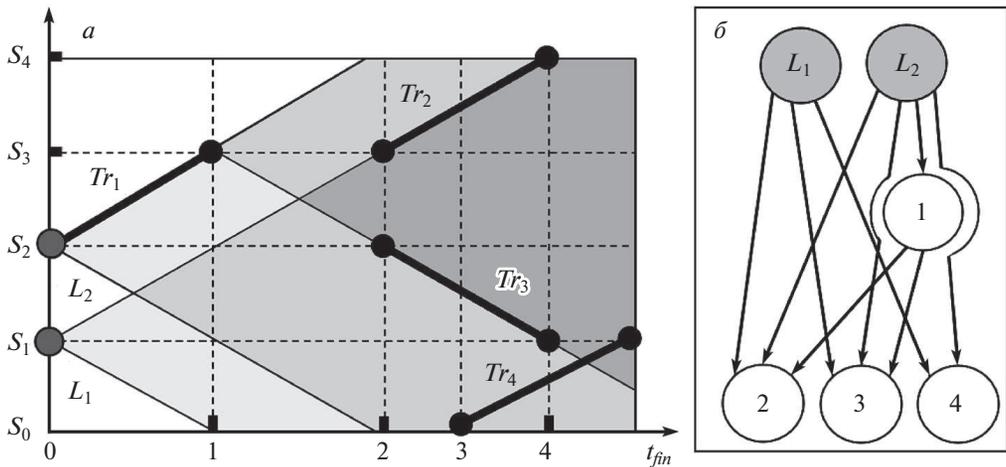


Рис. 2. *a* — Непустые конусы достижимости; *б* — граф вложенности конусов-вершины, соответствующие локо-слотам, представлены их номерами.

В настоящей работе введенный альтернативный граф модифицируется и преобразуется в обычный ориентированный граф с одним типом дуг. Для этого используется понятие конуса достижимости.

Определение 6. Конусом достижимости с вершиной в точке (t_i, S_j) для данного локомотива или локо-слота называется выпуклый многоугольник на графической плоскости, ограниченный двумя прямыми, проходящими через точку (t_i, S_j) , тангенсы углов наклона которых равны v и $-v$ соответственно, и прямыми, ограничивающими график перевозок: $t = t_{fin}$, $s = S_0$, $s = S_k$. Для локомотива L_p точка (t_i, S_j) задается его расположением S_j в указанный момент времени t_i , для локо-слота Tr_q она соответствует координате его правого конца: $(t_i, S_j) = f_{Tr_{goal}}(Tr_q)$. Внутренность конуса достижимости задается системой неравенств:

$$(4) \quad \begin{cases} s - S_j \leq v(t - t_i); \\ s - S_j \geq -v(t - t_i); \\ 0 \leq t \leq t_{fin}; \\ S_0 \leq s \leq S_k. \end{cases}$$

Таким образом, конус достижимости — это выпуклый многоугольник, имеющий от трех до пяти углов. Он образован пересечением неограниченного конуса, заданного двумя лучами скоростей перемещения локомотива, и ограниченного графика перевозок.

Внутри и на границах данного конуса достижимости лежат все локо-слоты, доступные для локомотива, находящегося в его вершине.

Построим конусы из окончаний всех локо-слотов и локомотивов. Получим набор конусов, вложенных друг в друга (рис. 2, *a*). На рисунке отсутствуют все пустые конусы (конусы, не содержащие ни одного локо-слота). Локо-слоты, имеющие пустые конусы, соответствуют конечным перевозкам.

Теперь можно построить *граф вложенности конусов* (рис. 2,б). Здесь вершинам соответствуют локомотивы и локо-слоты, а дуги указывают на вложенность их конусов. Нетрудно убедиться, что дуги графа вложенности соответствуют дугам, обозначенным пунктирными линиями на рис. 1,б. Этот граф, с некоторыми модификациями, описанными в разделе 4, будет основным предметом исследования.

Замечание 1. В графе вложенности теряется информация (имеющаяся на альтернативном графе) о том, какой длины путь должен пройти локомотив порожняком между двумя последовательными перевозками, и о времени простоя между ними. Для того чтобы две модели были полностью идентичны, дугам графа вложенности можно приписать веса, зависящие от длин соответствующих дуг альтернативного графа. Алгоритм построения плана перевозок будет представлен для графа без весов, затем опишем модификацию этого алгоритма для взвешенного графа.

Задача выполнения перевозок в терминах графа вложенности сводится к поиску его *минимального покрытия путями*. Формальные определения будут даны в следующем разделе.

Из рис. 2,б видно, что для данного графа покрытие будет содержать, как минимум, три пути — изолированная вершина также считается простым путем. Отсюда же сразу вытекает, что график, представленный на рис. 2,а, при наличии двух локомотивов невыполним полностью.

3. Задача о минимальном покрытии ациклического графа путями

Задача о нахождении минимального покрытия ациклического графа путями за полиномиальное время была решена около полувека назад. Одним из основных ее практических приложений стала оптимизация программного кода. Доказано, что в общем случае задача о нахождении оптимального покрытия ориентированного графа простыми путями, не пересекающимися по вершинам, является NP-сложной. Однако для ациклического графа было найдено изящное решение, сводящее эту задачу к задаче поиска максимального паросочетания в двудольном графе.

Дадим основные определения, следуя [16].

Пусть $D = (V, X)$ — ориентированный граф.

Определение 7. Множество $\{D_1, \dots, D_k\}$ подграфов D , где $D_i = (V_i, X_i)$, называется *покрытием D , не пересекающимся по вершинам*, если подмножества V_i являются разбиением множества вершин графа, т.е. $V_i \cap V_j = \emptyset$, если $i \neq j$ и $\bigcup_{i=1}^k V_i = V$. Множество дуг X_i подграфа D_i состоит из всех дуг $x_{kl} = (v_k, v_l)$, таких, что $v_k, v_l \in V_i$.

Определение 8. *Размером покрытия $\{D_1, \dots, D_k\}$ называется число подграфов k .*

Количество дуг в покрытии равно $\sum_{i=1}^k |X_i|$.

Определение 9. *Покрытие $\{D_1, \dots, D_k\}$ будем называть минимальным, если для любого покрытия $\{D_1, \dots, D_l\}$ выполняется неравенство $l \geq k$.*

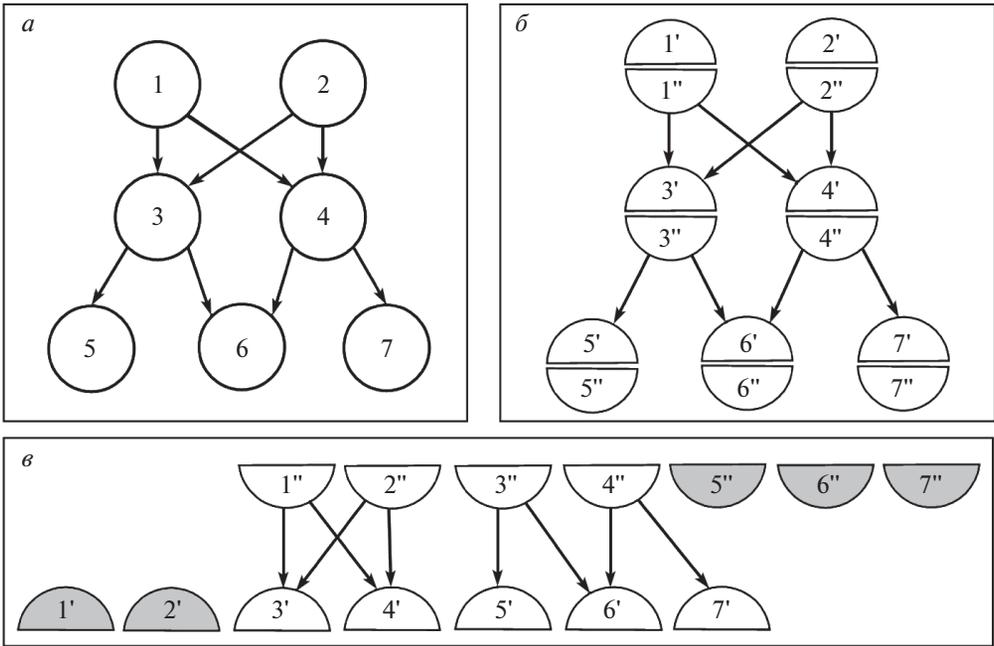


Рис. 3. Построение двудольного графа из произвольного ациклического графа: *a* — исходный граф; *б* — разделение вершин; *в* — соответствующий двудольный граф.

Определение 10. *Покрытие орграфа $\{D_1, \dots, D_k\}$ называется покрытием путями, если все подграфы D_i — пути, $i = 1, k$.*

Будем предполагать, что изолированные вершины являются путями нулевой длины. В этом случае покрытие ориентированного графа путями всегда существует.

Определение 11. *Числом покрытия орграфа $\zeta(D)$ называется размер его минимального покрытия путями.*

Доказано [16], что $\zeta(D)$ также является размером такого покрытия орграфа путями, которое содержит максимальное число дуг в сравнении со всеми остальными покрытиями.

Поскольку дуги в рассматриваемой модели соответствуют вложенности конусов, их можно считать дугами потенциально возможных перецепок. Тогда если свести задачу об оптимальном назначении локомотивов к поиску покрытия путями графа вложенности, то число покрытия $\zeta(D)$ будет соответствовать минимальному необходимому числу локомотивов, а максимальное число дуг будет означать их оптимальное использование, т.е. максимальное количество осуществленных перевозок.

Определение 12. *Паросочетание в двудольном графе называется максимальным, если не существует паросочетания, содержащего большее число дуг.*

Замечание 2. Иногда в литературе такое паросочетание называют *наибольшим*, однако здесь будем придерживаться терминологии [16]; такая же

терминология принята и в ряде современных источников (см., например, [20, с. 22; 21, с. 136]).

Опишем процесс сведения задачи поиска покрытия путями к поиску максимального паросочетания в двудольном графе. Каждую вершину исходного графа v_i разделим на две: v'_i и v''_i . В вершину v'_i входят все дуги, которые входили в v_i (и ничего не выходит), а из вершины v''_i выходят все дуги, которые выходили из v_i (и ничего не входит). Все вершины со штрихом попадут в одну долю двудольного графа, все вершины с двумя штрихами в другую.

Процесс построения двудольного графа показан на рис. 3.

Доказано, что задача нахождения минимального покрытия путями сводится к задаче поиска максимального паросочетания на полученном двудольном графе.

4. Метод построения оптимального плана перевозок в задаче без ограничений

Построенный граф вложенности конусов позволяет свести решение задачи об оптимальном плане перевозок к поиску минимального покрытия путями ациклического графа. Перечислим задачи, решаемые в данной работе, в порядке их усложнения.

1. Пусть есть только набор перевозок, представленных локо-слотами, которые необходимо осуществить в заданные моменты времени. Каково минимальное число локомотивов, способных осуществить весь план?

2. Пусть заданы план перевозок, множество локомотивов и их начальные положения. Возможно ли средствами данных локомотивов осуществить все перевозки? Если да, найти оптимальный план. Если нет, найти план, покрывающий наибольшее количество перевозок.

3. Пусть заданы план перевозок, множество локомотивов и их начальные положения. При этом некоторые локомотивы доступны не на всем интервале времени: они могут начать работу позже или завершить осуществление перевозок в момент времени, находящийся ранее горизонта планирования. Задача состоит в поиске назначений, позволяющих совершить максимальное количество перевозок в условиях заданных ограничений.

Формальное определение задачи с ограничениями будет дано в разделе 5. В настоящем разделе рассмотрим решения двух первых задач. Для этого структурируем и упростим граф вложенности.

4.1. Структурирование графа вложенности

В графе вложенности вместо вершин-локомотивов и вершин-локо-слотов будем рассматривать только вторые. Дадим формальное определение.

Определение 13. Граф вложенности $G = (N, E)$ — это ориентированный ациклический граф, в котором каждая вершина i соответствует локо-слоту Tr_i , а дуги соответствуют отношению вложенности конусов достижимости.

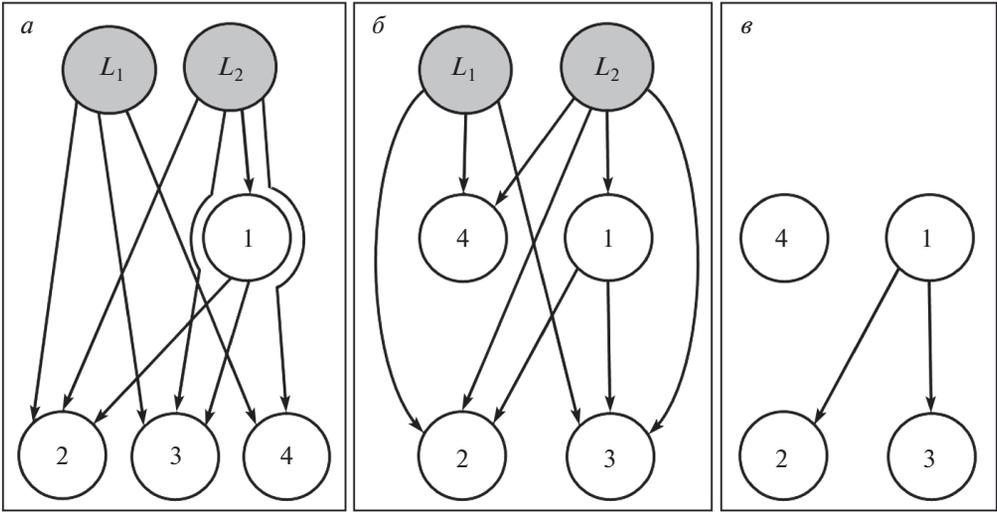


Рис. 4. Графы, соответствующие графику на рис. 2,а. Граф без слоев, совпадающий с рис. 2,б; б — тот же граф с послойной структурой; в — граф вложенности, соответствующий определению 13.

4.1.1. Послойная организация графа вложенности. Само построение графа G позволяет представить его в виде послойной структуры. Вершины, соответствующие локо-слотам, не вложенным ни в какие другие конусы, находятся в слое 1; вершины, вложенные в конусы локо-слотов слоя 1 (и не вложенные ни в какие иные конусы), находятся в слое 2 и т.д.

С этой точки зрения на графе вложенности, представленном на рис. 2,б, послойная структура нарушена. Несмотря на то что состав, соответствующий локо-слоту T_{T4} , по времени отправляется и прибывает последним, он находится в слое 1, поскольку не принадлежит ни одному конусу локо-слотов. Соответствующий послойный граф представлен на рис. 4,б,в.

Формальное определение слоя графа вложенности зададим рекурсивно.

Определение 14. Все вершины графа вложенности G , не имеющие входящих дуг, принадлежат слою T_1 . Слой T_k содержит все вершины i (и только их), имеющие путь длины 1 от слоя T_{k-1} .

Определение означает, что локо-слот, соответствующий вершине слоя T_k , вложен в $k - 1$ последовательно вложенных конусов.

4.1.2. Редукция транзитивного замыкания. В отсутствие временных ограничений на локомотивы графы вложенности представляют собой транзитивное замыкание всех путей. Если граф содержит много слоев, а каждый слой содержит много вершин, в нем хранится большое количество избыточной информации. Кроме того, дуги транзитивного замыкания обозначают ситуацию, в которой при построении покрытия некоторые локо-слоты могут оказаться пропущенными. На рис. 5,а, например, дуга $1 \rightarrow 5$ означает, что локо-слот 3 будет пропущен, и такой план заведомо неоптимален, поскольку цепочка $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ охватит оба локо-слота.

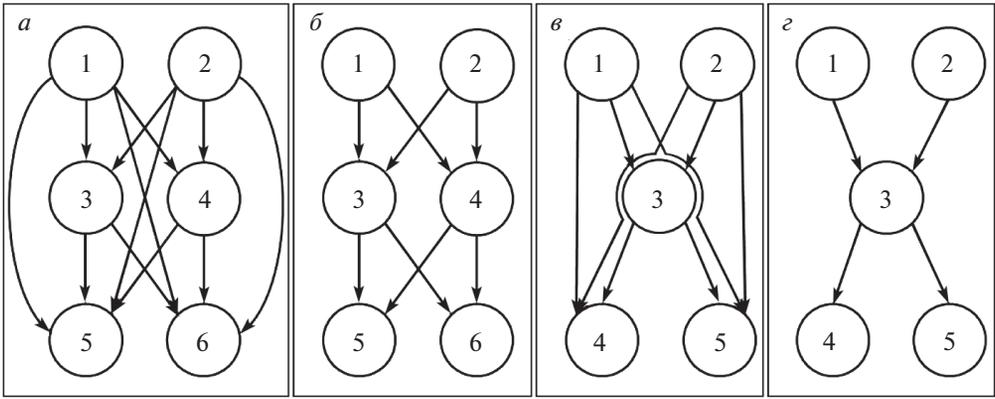


Рис. 5. *а, б* — эквивалентные относительно минимального покрытия графы: *а* — с дугами транзитивного замыкания; *б* — редуцированный граф. *в, г* — потеря решения при удалении дуг транзитивного замыкания: *в* — исходный граф; *г* — редуцированный граф.

В ряде случаев дуги транзитивного замыкания только усложняют поиск решения и их необходимо удалить. На рис. 5, *а, б* представлены графы с дугами транзитивного замыкания и без них. Очевидно, удаление этих дуг не повлияет на нахождение минимального покрытия, какой бы алгоритм его поиска ни был использован.

Однако в некоторых случаях удаление этих дуг влечет за собой потерю решения. Это хорошо видно на примере рис. 5, *в, г*. Если решать задачу составления расписания на графе из рис. 5, *г*, она не будет иметь решения. Притом что из рис. 5, *в* следует, что решение существует и оно не единственно.

Сформулируем ряд утверждений относительно возможности удаления транзитивного замыкания отношения вложенности без потери решений.

Определение 15. Графы, полученные из графа вложенности G удалением некоторых дуг транзитивного замыкания и имеющие то же множество минимальных покрытий путями, будем называть эквивалентными исходному графу.

Будем подразумевать, что каждой паре слоев (T_i, T_j) соответствует двудольный граф, содержащий все дуги с началом в слое T_i и концом в слое T_j .

Утверждение 1. Если в трех последовательных слоях T_{i-1}, T_i, T_{i+1} графа G количество вершин одинаково: $|T_{i-1}| = |T_i| = |T_{i+1}|$ и в каждом двудольном графе, образованном парой слоев (T_{i-1}, T_i) , (T_i, T_{i+1}) , существует совершенное паросочетание, то исходный и редуцированный графы эквивалентны.

Доказательство. Наличие совершенных паросочетаний в каждой паре слоев означает, что в трех слоях существует покрытие простыми путями длины 2. Оно будет являться минимальным покрытием по определению. Транзитивное замыкание в этом случае является избыточным.

Утверждение 2. Если в трех последовательных слоях T_{i-1}, T_i, T_{i+1} графа G количество вершин изменяется монотонно: $|T_{i-1}| \leq |T_i| \leq |T_{i+1}|$

или $|T_{i-1}| \geq |T_i| \geq |T_{i+1}|$ и для каждой пары слоев (T_{i-1}, T_i) , (T_i, T_{i+1}) при удалении любых вершин из слоя с большим их количеством в соответствующем двудольном графе будет существовать совершенное паросочетание, то исходный и редуцированный граф эквивалентны.

Доказательство. Условие утверждения означает, что в этих слоях существует такое покрытие простыми путями, что оно будет содержать столько путей длины 2, каково количество вершин в наименьшем слое. Вершины в среднем слое все войдут в пути длины 1. Полученное покрытие минимально для такого графа. Транзитивное замыкание в этом случае является избыточным.

Утверждение 3. Пусть в трех последовательных слоях T_{i-1}, T_i, T_{i+1} графа G количество вершин в среднем слое T_i больше, чем в верхнем и нижнем: $|T_i| > |T_{i-1}|$, $|T_i| > |T_{i+1}|$. Если для слоев T_{i-1}, T_{i+1} при удалении любых $|T_i| - |T_{i-1}|$ и $|T_i| - |T_{i+1}|$ вершин соответственно из слоя T_i в полученных двудольных графах, образованных этими слоями с редуцированным слоем T_i , будет существовать совершенное паросочетание, то исходный и редуцированный граф эквивалентны.

Доказательство. Доказательство этого утверждения аналогично предыдущему. В данных слоях будет существовать покрытие, содержащее количество путей длины 2, равное $\min(|T_{i-1}|, |T_{i+1}|)$. Количество путей длины 1 будет равно $\max(|T_{i-1}|, |T_{i+1}|) - \min(|T_{i-1}|, |T_{i+1}|)$. Незадействованные вершины в слое T_i будут путями длины 0. При данной топологии ни одна дуга из слоя T_{i-1} в слой T_{i+1} не будет востребована в минимальном покрытии.

Первые три утверждения локальны. Они позволяют удалять дуги, идущие через слой. Следующее утверждение касается графа в целом. Оно позволяет найти разбиение графа на независимые подграфы. Под таким «разбиением» будем понимать отсутствие дуг транзитивного замыкания между подграфами.

Утверждение 4. Пусть в графе G слой T_i , $1 < i < p$, где p — общее число слоев, имеет максимальное количество вершин и каждая пара слоев T_j, T_s , $j < i$, $s > i$ вместе со слоем T_i удовлетворяют условиям утверждения 3. Тогда граф, полученный удалением всех дуг транзитивного замыкания из слоев T_{i-k} в слой T_{i+l} , $0 < k < i$, $0 < l \leq p - i$, эквивалентен графу G . Если в графе G существует h слоев с максимальным количеством вершин (не считая первого и последнего слоя), то редуцированный граф, состоящий из $h + 1$ независимых подграфов, полученных удалением дуг транзитивного замыкания, соединяющих вершины, находящиеся по разные стороны от каждого из этих слоев, эквивалентен графу G .

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству утверждения 3. Любые два слоя, взятые выше и ниже T_i , будут соединяться только через вершины этого слоя. Транзитивное замыкание в данном случае избыточно.

Это утверждение, несмотря на громоздкость формулировки, достаточно наглядно. Оно говорит о том, что не может существовать путей максимальной длины из слоя выше T_i в слой ниже T_i , не содержащих вершин из T_i .

Редукция транзитивного замыкания позволяет существенно понизить размерность задачи. Двудольный граф, построенный из редуцированного графа G , распадется на $h + 1$ несвязных подграфов, в каждом из которых максимальное паросочетание будет находиться независимо от остальных компонент связности.

В частности, если граф состоит из p слоев одинакового размера, как на рис. 5, *а*, *б*, двудольный граф будет состоять из $p - 1$ компонент связности. Задача поиска покрытия графа путями сведется к поиску паросочетаний между каждыми двумя слоями в отдельности.

4.2. Построение оптимального плана перевозок в задаче без ограничений

Задача 1 состоит в определении числа локомотивов, необходимых для осуществления всех перевозок. Как следует из построения графа вложенности, первая задача из списка в начале раздела 4 решается автоматически. Минимальное покрытие графа путями определит наименьшее возможное количество локомотивов и оптимальный план перецепок (последовательность вершин внутри каждого пути из покрытия графа).

Замечание 3. Если дуги графа имеют веса, т.е. заданы штрафы локомотивов за простой и движение порожняком, как функции от длин дуг альтернативного графа (см. замечание 1 из раздела 2.2), решение будет состоять в поиске максимального паросочетания с минимальной суммой весов дуг во взвешенном двудольном графе, полученном из взвешенного графа вложенности. В таком виде задача сводится к классической линейной задаче о назначениях, для решения которой существует ряд полиномиальных алгоритмов.

Задача 2 заключается в том, чтобы при имеющемся множестве локомотивов и заданном их расположении приписать локомотивы максимальному количеству из полученных в задаче 1 путей графа.

Послойная структура графа удобна тем, что сразу дает ответ о минимальном количестве локомотивов, необходимых для осуществления всех перевозок.

Утверждение 5 (необходимое условие выполнения плана перевозок). *Для того чтобы все перевозки были осуществлены, необходимо, чтобы в каждом слое послойного графа было не более $|L|$ вершин, где $|L|$ – число локомотивов.*

Доказательство. Вершины, присутствующие в одном слое, недостижимы друг из друга. Поэтому никакую пару из перевозок, соответствующих этим вершинам, нельзя осуществить последовательно. Пусть в слое T_i содержится k вершин, $k > |L|$. Даже если в слоях выше и ниже T_i содержится число вершин меньше, чем $|L|$, это не может компенсировать избыток вершин в T_i . Таким образом, для осуществления всех перевозок в слое T_i и, соответственно, во всем графе необходимо, как минимум, k локомотивов.

Следствие 1. *Минимальное количество локомотивов, необходимое для осуществления заданного графика, находится как $\max_{i=1, \dots, p} |T_i|$, где p – количество слоев его графа вложенности.*

Решение задачи 2. Пусть минимальное покрытие графа вложенности путями построено. Построим двудольный граф, в одной доле которого будут вершины–локомотивы, а в другой – вершины, соответствующие найденным путям. Дуги в этом графе обозначают вложенность конуса первой вершины пути в конус соответствующего локомотива. Таким образом, задача свелась к еще одному шагу по определению максимального паросочетания.

При построении максимального паросочетания *локомотивы–пути* возможно несколько исходов:

- Если каждому пути будет приписан локомотив, задача имеет оптимальное решение и весь план перевозок выполним. Количество локомотивов будет минимальным по построению минимального покрытия.
- Если число локомотивов меньше числа путей в покрытии, но все локомотивы входят в максимальное паросочетание, план перевозок невыполним полностью. При этом среди допустимых частичных решений, если их больше одного, можно найти оптимальное. В построенном двудольном графе *локомотивы–пути* припишем дугам веса: чем длиннее путь в графе вложенности, тем больше вес ведущих к нему дуг. Таким образом, паросочетание с максимальным весом, в котором участвуют все вершины–локомотивы, будет соответствовать осуществлению максимально возможного числа перевозок. Если при этом граф вложенности был взвешенным (см. замечания 1, 3), решение нужно оптимизировать, используя максимальную стратегию: суммарный штраф каждой последовательности перевозок можно считать весом соответствующей вершины, тогда среди полученных паросочетаний, максимальных по сумме весов дуг (если их более одного), нужно найти минимальное по суммарному весу (штрафу) вершин, обозначающих пути.
- Если в полученном максимальном паросочетании остались пути без локомотивов и при этом остались свободные вершины–локомотивы, это означает, что при данном расположении локомотивов все перевозки не могут быть осуществлены. При этом существует возможность, что найденное решение будет неполным: может оказаться, что некоторая последовательность перевозок, оставшаяся вне паросочетания, может быть частично осуществлена некоторым свободным локомотивом — не с первой перевозки, а со второй, третьей и далее, т.е. данный локомотив не успеет прибыть в пункт отправления первой перевозки (или нескольких первых перевозок) в нужный момент времени. Если такая ситуация возникла, будем считать, что попали в рамки задачи с ограничениями на локомотивы, только вместо раннего завершения здесь имеет место «позднее начало». Этот случай, как и случай, когда локомотивы доступны на ограниченном отрезке времени, будет исследован в следующем разделе (п. 5.1.2).

5. Метод построения оптимального плана перевозок в задаче с ограничениями

Если некоторый локомотив доступен не на всем отрезке времени $[0, t_{fin}]$, это означает, что у него есть временное ограничение на осуществление перевозок. Пусть локомотив L_j доступен на отрезке $[t_0^j, t_{fin}^j] \subset [0, t_{fin}]$. Тогда он

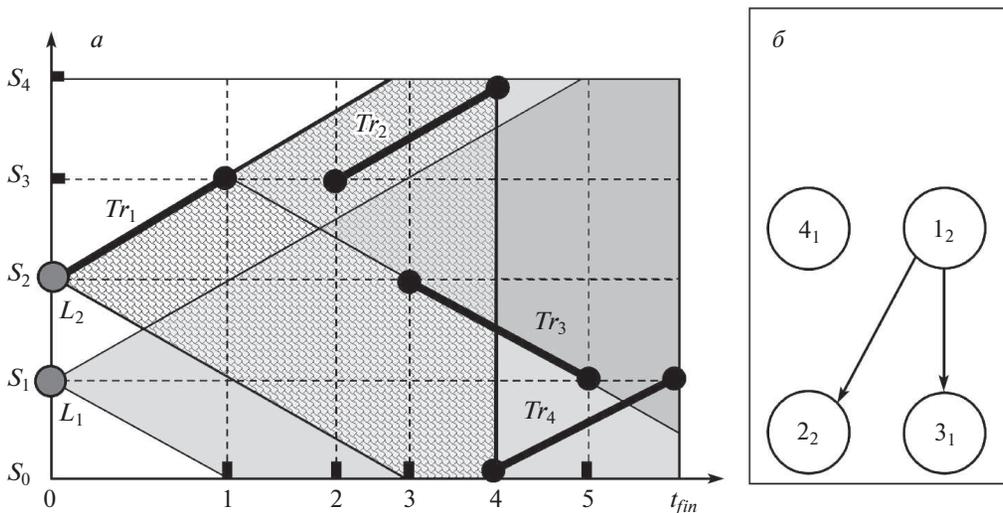


Рис. 6. График *a* и граф вложенности *b* в задаче с ограничениями. Временное ограничение наложено на локомотив L_2 .

не может осуществить перевозку, начинающуюся ранее t_0^j или заканчивающуюся позже t_{fin}^j . В этом случае третья строка в системе неравенств (4), описывающая конус достижимости локомотива L_j без ограничений, модифицируется следующим образом: $t_0^j \leq t \leq t_{fin}^j$.

Ситуация временного ограничения для локомотива L_2 изображена на рис. 6, *a*. Для этого локомотива имеет место: $t_0^2 = 0$, $t_{fin}^2 = 4 < t_{fin}$.

Временные ограничения, наложенные на локомотивы, делают не все пути в графе вложенности допустимыми для этих локомотивов — последовательность перевозок может быть не осуществима целиком. Это усложняет поиск оптимального решения, и даже ответ на вопрос о существовании решения для найденного покрытия становится нетривиальным.

5.1. Введение индексов локомотивов

Введем дополнительные характеристики вершин графа вложенности. Каждой вершине будем приписывать индексы, соответствующие номерам локомотивов, способных осуществить перевозку соответствующего локо-слота.

5.1.1. Ограничения «справа». Рассмотрим сначала временные ограничения «справа», т.е. завершение работы ранее горизонта планирования (рис. 6, *a*). Формально ограничение «справа» для локомотива L_j описывается неравенством $t_{fin}^j < t_{fin}$.

Утверждение 6. В задаче без ограничений «справа» множество индексов каждой вершины из промежуточного или конечного слоя содержит в себе объединение индексов ее родителей.

Утверждение справедливо, поскольку в отсутствие ограничений «справа» отношение вложенности транзитивно. Множество индексов вершины явля-

ется объединением индексов ее родителей и, возможно, содержит некоторые новые индексы, соответствующие локомотивам с «поздним началом».

Тогда в терминах графа вложенности можно дать следующее определение ограничению «справа».

Определение 16. Будем говорить, что локомотив L_j имеет ограничение «справа», если в графе вложенности существует хотя бы одна вершина начального или промежуточного слоя с индексом j такая, что j не является индексом хотя бы одного из ее потомков.

Таким образом, если нет ограничений «справа», начальной вершине каждого пути достаточно поставить в соответствие локомотив, и этот локомотив гарантированно осуществит все последующие перевозки по цепочке вложенности.

Если некоторые локомотивы заканчивают работу раньше наступления горизонта планирования, такой алгоритм перестает работать. Из рис. 6,б видно, что путь $1 \rightarrow 3$ неосуществим ни первым, ни вторым локомотивом, хотя на рис. 4,б в таком же графе без меток последовательность перевозок $1 \rightarrow 3$ является допустимой.

При решении задачи с ограничениями первый этап остается неизменным: строится минимальное покрытие графа вложенности путями. Однако теперь недостаточно найти паросочетания между началами всех путей из найденного покрытия и локомотивами. Не каждая последовательность перевозок, составляющая путь, может быть осуществлена целиком некоторым локомотивом с ограничениями. Для того чтобы стало возможным корректное приписывание локомотива некоторому пути, необходимо и достаточно, чтобы индекс локомотива «протекал» из начальной вершины в конечную. На рис. 6,б видно, что в пути $1 \rightarrow 3$ индекс локомотива 2 не протек вниз.

Соответственно, не каждое решение задачи без ограничений будет таким для задачи с ограничениями «справа». Необходимо осуществить проверку найденного решения на допустимость. Если оно допустимо, оптимальный план перевозок построен. В случае если найденные пути не удовлетворяют задаче с ограничениями, нужно осуществить модификацию решения. Методы модификации описаны в разделе 5.2.

5.1.2. Ограничения «слева». Ограничение «слева» в отличие от предыдущего нельзя задать сходным неравенством $t_0^j > 0$, потому что возможны ситуации, когда все локомотивы доступны с нулевого момента времени, но имеют *пространственные ограничения*, т.е. могут не успеть доехать ни до одного состава, соответствующего вершинам первого слоя.

Определение 17. Будем говорить, что локомотив L_j имеет ограничение «слева», если в графе вложенности существует хотя бы одна вершина промежуточного или конечного слоя с индексом j такая, что j не принадлежит объединению индексов ее родителей.

Это определение сочетает в себе как временные, так и пространственные ограничения.

При ограничении «слева» проблема поиска решения состоит в том, что паросочетание, в котором участвуют все пути, без дополнительных преобра-

зований построить невозможно: при построении паросочетания локомотивов и путей нельзя сопоставить пару *локомотив–путь*, если путь доступен для локомотива не с первой вершины.

Отличие ограничений «слева» и «справа» состоит в том, что при ограничениях «справа» может существовать паросочетание локомотивы–пути, содержащее все пути, которое из-за ограничений не является полностью допустимым (существуют перевозки, находящиеся ближе к горизонту планирования, для которых локомотивы окажутся неподходящими). Такое решение можно попытаться исправить, перераспределив пути между локомотивами или совершив обмен участками между двумя и более путями. В некоторых случаях при ограничениях «справа» можно добиться того, чтобы все перевозки были выполнены.

При существовании ограничений «слева» для полученного минимального покрытия может не существовать паросочетания локомотивы–пути, содержащего в себе все пути и все локомотивы.

Казалось бы, если при построении максимального паросочетания локомотивы–пути некоторые пути и некоторые локомотивы остались без пары, то даже при исправлении решения оно все равно не может быть полным — если первой перевозке (или нескольким первым) нельзя назначить локомотив, то полного покрытия не существует. Однако, как будет показано в следующем разделе, это не всегда так.

5.2. Дублирование вершин

Произведем еще одну модификацию графа вложенности, без которой существующее решение задачи назначения локомотивов с учетом ограничений не всегда может быть найдено. С ее помощью задачи ограничений «слева» и «справа», несмотря на их значительные отличия, становятся симметричными и решаются одинаково.

Введем операцию *дублирования вершин*. Прежде чем давать формальное определение, рассмотрим ее на примере. Граф вложенности на рис. 7,а содержит вершины с индексами локомотивов. В нем представлены сразу оба типа ограничений: метка локомотива 3 появляется лишь на втором слое в вершине 3 (ограничение «слева»). Метка локомотива 2 заканчивается на этом же слое в вершине 4 (ограничение «справа»). При построении минимального покрытия этого графа какие бы дуги ни были выбраны, получатся два пути — из первого слоя в третий. При этом никакое решение не будет допустимым в рамках ограничений. Конечная вершина пути, начавшегося в вершине 2, не будет иметь с ней общих индексов, будь то вершина 5 или 6. При этом локомотив 3 не имеет возможности совершить ни одну перевозку.

Чтобы избежать такой ситуации, продублируем вершины из внутренних слоев, в которых проявляются ограничения, т.е. некоторый индекс встречается впервые или, наоборот, заканчивается, и вынесем дубли соответственно в первый и последний слой. Это является указанием на то, что они могут стать граничными — начальными или конечными — вершинами некоторого пути. На рис. 7,б дубль вершины 3 будет вынесен в верхний слой из-за

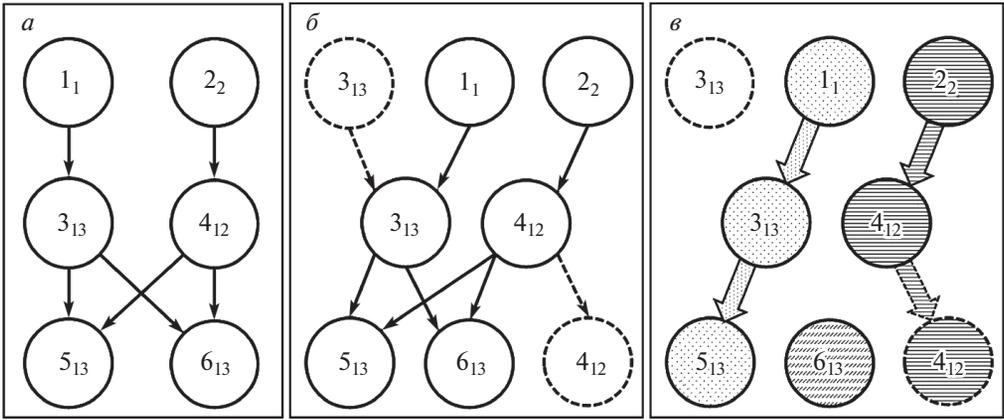


Рис. 7. Дублирование вершин во внешние слои: *a* — исходный граф, *б* — дубли двух вершин в верхний и нижний слои, *в* — минимальное покрытие с учетом ограничений: путь для локомотива $L_1 - 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$, путь для локомотива $L_2 - 2 \rightarrow 4$ (и вспомогательная вершина 4-дубль), путь, состоящий из одной вершины, для локомотива $L_3 - 6$; вершина-дубль 3 не вошла в полученное покрытие.

появившегося у нее индекса 3, дубль вершины 4 будет вынесен в нижний слой, поскольку метка 2 на ней прервалась.

Каждая вершина-дубль связана со своим «оригиналом» дугой. Других новых дуг при этой операции не появляется.

Часть вершин-дублей может оказаться избыточной. На рис. 7, *в*, например, избыточна вершина-дубль 3. Однако это действие позволит найти решение задачи с ограничениями, если оно существует.

Опишем формальную процедуру поиска вершин для дублирования и образования дублей.

Определение 18. Будем говорить, что задача о назначении локомотивов является задачей с ограничениями, если хотя бы один локомотив имеет ограничение «слева» или «справа».

При ограничении «слева» все вершины промежуточных (или конечного) слоев, в которых появляется индекс, не принадлежащий их родителям, будут потенциальными *точками входа* для соответствующего локомотива при решении задачи о назначениях. Для всех точек входа создаются дубли, которые выносятся на верхний слой. Из каждой вершины-дубля выходит единственная дуга, соединяющая ее с «оригиналом».

Ограничение локомотива L_j «справа» означает, что индекс j в некоторой вершине промежуточного слоя встречается в последний раз и дальше вниз «не протекает».

Все вершины промежуточных слоев, в которых индекс встречается в последний раз, являются потенциальными *точками выхода* для соответствующего локомотива. Для них также создаются дубли и выносятся в нижний слой. При этом добавляется дуга, соединяющая вершину-оригинал и ее дубль.

При поиске минимального покрытия графа путями вершины-дубли участвуют в формировании путей в последнюю очередь, если ни одной «оригинальной» вершины нельзя больше задействовать. Это свойство достигается взвешиванием дуг. Дугам, соединяющим вершины-дубли с обычными вершинами, назначаются заведомо большие штрафы. При поиске максимального паросочетания с минимальным весом такие дуги будут задействованы в последнюю очередь.

Теорема 1. Если решение задачи с ограничениями на локомотивы существует, оно представляет собой паросочетание между некоторым подмножеством локомотивов и всеми путями, составляющими минимальное покрытие графа вложенности с дублированными вершинами (за исключением, возможно, некоторых изолированных вершин-дублей).

Доказательство. Пример, представленный на рис. 7, показывает, что дублирование вершин для некоторых ограничений является необходимым условием нахождения решения. Докажем его достаточность для произвольного графа и произвольных ограничений.

По построению для каждого локомотива с любым ограничением («слева», «справа» или обоими сразу) в графе с дублированными вершинами будут присутствовать пути максимальной возможной длины, не являющиеся подпутями других путей, — при этом начала и/или концы таких путей будут вершинами-дублями. Другими словами, в графе с дублированными вершинами к каждому пути с ограничениями добавляется ответвление в первый или последний слой, соответствующее пути без ограничений. То есть в этом графе для любой начальной вершины с любым набором индексов существует такой путь, что хотя бы один индекс для него «протечет» с первого слоя в последний. Следовательно, для каждого пути в графе с дублированными вершинами существует, по крайней мере, один подходящий локомотив.

При этом пути, начинающиеся или заканчивающиеся вершинами-дублями, снимают ограничения с локомотивов, и задача сводится к задаче без ограничений.

Для задачи без ограничений существование решения равносильно существованию паросочетания между некоторым подмножеством локомотивов и всеми путями минимального покрытия за исключением путей, представляющих собой изолированные вершины-дубли.

Теорема 1 говорит о том, что построен граф, на котором решение задачи с ограничениями, если оно существует, может быть найдено. В следующем разделе опишем процесс поиска этого решения.

5.3. Поиск решения в задаче с ограничениями на локомотивы

5.3.1. Проверка найденного покрытия графа на допустимость. На первом шаге осуществим дублирование вершин.

Далее, найдем произвольное минимальное покрытие путями с помощью алгоритма, описанного в разделе 3.

После нахождения этого минимального покрытия графа вложенности нужно каждому пути назначить доступный локомотив. Дублирование вер-

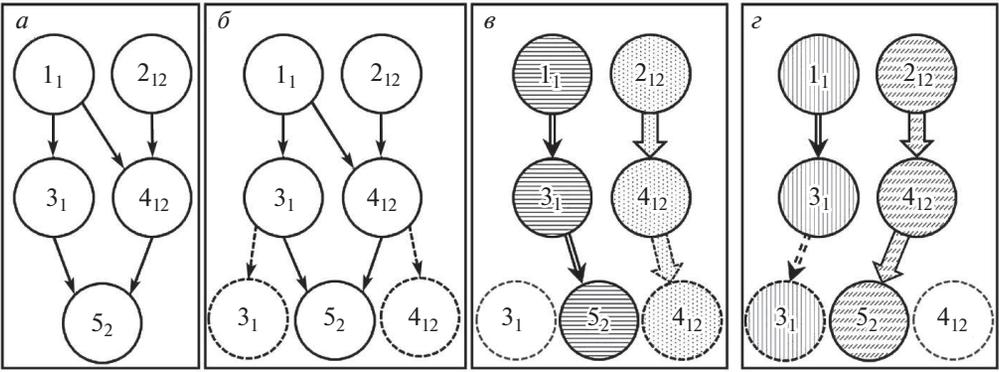


Рис. 8. Поиск минимальных покрытий: *a* — граф вложенности; *б* — граф с дублированными вершинами 3 и 4; *в* — недопустимое покрытие в задаче с ограничениями; *г* — допустимое покрытие.

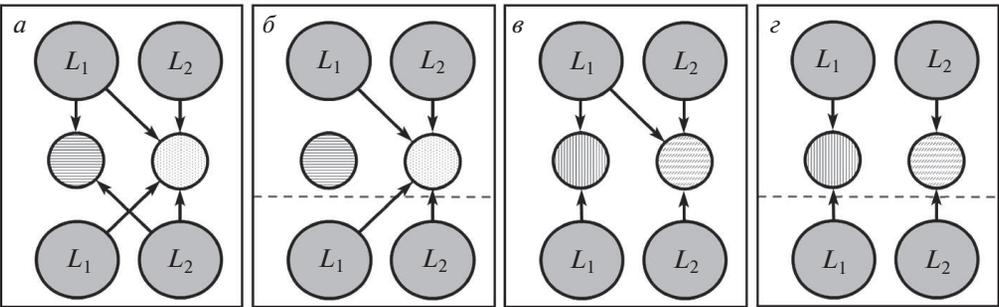


Рис. 9. Трехслойные графы, соответствующие двум минимальным покрытиям графа вложенности на рис. 8, *a*: *a*, *б* — графы, соответствующие покрытию на рис. 8, *в*; *в*, *г* — графы, соответствующие покрытию на рис. 8, *г*. На рис. *в* и *г* удалены дуги, несимметричные относительно среднего слоя.

шин в верхний слой автоматически снимает ограничения «слева», но ограничения «справа» нужно отслеживать отдельно. Каждый локомотив должен быть доступен на протяжении всего пути — не только в его начале, но и в конце. Поэтому нужно следить не только за стартовыми, но и за конечными вершинами путей.

На рис. 8 приведен пример двух найденных минимальных покрытий. Покрытие на рис. 8, *в* недопустимо при ограничении на первый локомотив, покрытие на рис. 8, *г* допустимо — оно описывает оптимальный план перевозок и при этом содержит дублированную вершину. В окончательном решении все дубли должны быть удалены.

Пусть в графе вложенности построено минимальное покрытие путями. Построим новый *трехслойный граф* следующим образом. В среднем слое расположим вершины, каждая из которых представляет собой путь в найденном покрытии. Верхний и нижний слои одинаковы. В них расположены вершины-локомотивы. Соединим эти слои следующим образом. Из верхне-

го слоя в средний ведут дуги, соединяющие локомотивы с теми путями, в *начальных* вершинах которых присутствуют соответствующие индексы. Из нижнего слоя в средний ведут дуги, соединяющие локомотивы с теми путями, в *конечных* вершинах которых присутствуют соответствующие индексы. На рис. 9,а и 9,б построены трехслойные графы, соответствующие найденным покрытиям на рис. 8,в и 8,г соответственно.

Допустимыми являются только те назначения, для которых в этом графе есть дуги от одноименных вершин сверху и снизу в средний слой. На рис. 9,б и 9,г оставлены только такие дуги. После того как непарные дуги удалены, получается граф, симметричный относительно среднего слоя. В силу симметричности нижний слой можно отсечь – это показано пунктирными линиями на рис. 9,б и 9,г. Тогда решение задачи с ограничениями сведется к поиску паросочетания в полученном двудольном графе, содержащего все вершины, соответствующие путям. Если число путей и локомотивов одинаково, паросочетание должно быть совершенным.

Если, как на рис. 9,б, совершенного паросочетания не существует, должен быть предложен алгоритм, позволяющий «исправить» все недопустимые пути в найденном минимальном покрытии и обладающий невысокой вычислительной сложностью.

Дадим следующее определение недопустимого пути.

Определение 19. Недопустимый путь — это путь в графе вложенности, в котором множества индексов начальной и конечной вершин имеют пустое пересечение.

5.3.2. Эвристический алгоритм перестроения недопустимых путей в минимальном покрытии. В ходе решения задачи был предложен ряд дальнейших преобразований графа, а также последовательность алгоритмов для нахождения решения во все более редких исключениях, обладающих значительной вычислительной сложностью. В настоящей работе приведем эвристический алгоритм, который способен найти допустимое решение в большинстве случаев (см. замечание 4 ниже).

Неформально его можно проиллюстрировать рис. 10, на котором представлен трехслойный граф из рис. 8,а и его последующее исправление.

Предложенный эвристический алгоритм ищет новое совершенное паросочетание по очереди в каждом независимом подграфе, т.е. таком подграфе, который соответствует изолированному двудольному графу (раздел 4.1.2).

Найдя недопустимый путь (обозначим его как $Path_i$), в каждом независимом подграфе по очереди нужно выполнить следующие действия.

1. Удалить дугу, принадлежащую $Path_i$. Построить новое совершенное паросочетание в соответствующем двудольном графе. Если оно существует и новый путь, соответствующий началу пути $Path_i$, стал допустимым, не испортив другие пути, то выход.

2. Если оно существует и новый путь недопустим, перейти к п. 1, оставаясь в этом же независимом подграфе.

3. Если в данном независимом подграфе нельзя найти дугу, приводящую к безопасному исправлению пути, не портящему другие пути (т.е. удалены все

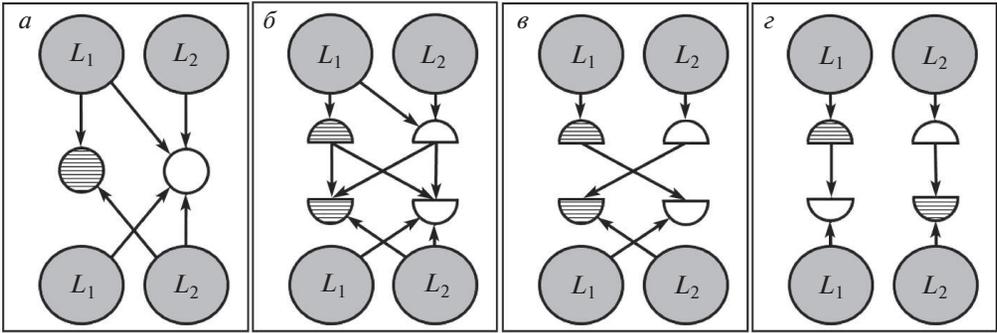


Рис. 10. Построение допустимого покрытия: *a* — трехслойный граф, для которого не существует допустимого покрытия; *б* — «раздвижение» путей; *в* — обмен двух путей участками; *г* — допустимое покрытие.

дуги, описанные в п. 1), вернуть все удаленные дуги и перейти в следующий подграф.

4. Если путь исправлен.

- Если покрытие стало допустимым, решение найдено; выход.
- Если существуют другие недопустимые пути, перейти к п. 1.

Замечание 4. Этот алгоритм сможет найти допустимое покрытие во всех случаях, когда исправления, приводящие к нему, таковы, что все они могут быть сделаны с помощью одного обмена участками двух путей, как показано на рис. 10. Если же нужно делать более одного обмена между путями — как последовательно в разных подграфах, так и параллельно в одном подграфе (например, циклическую перестановку окончаний нескольких путей), то этот алгоритм может не привести к решению. Однако такие случаи являются скорее исключениями. Для них разработаны точные методы решения, которые остались за рамками данной статьи.

6. Заключение

В работе предложена новая графовая модель перевозок на линейном участке железной дороги. Построен граф вложенности, который позволяет применить для решения задачи об оптимальных назначениях статические графовые алгоритмы.

Поиск решения для задачи без временных ограничений на локомотивы состоит из двух этапов. В этом случае задача сводится к поиску минимального покрытия ациклического графа путями. А эта задача, в свою очередь, сводится к задаче нахождения максимального паросочетания на двудольном графе и соответственно имеет полиномиальную сложность.

При наличии временных ограничений на локомотивы добавляется еще три этапа. Сначала преобразуется граф вложенности — вершинам добавляются индексы локомотивов и происходит дублирование выделенных вершин. Затем строится минимальное покрытие нового графа путями, это покрытие проверяется на допустимость. Если покрытие недопустимо, т.е. некоторые пути

соответствуют последовательностям перевозок, которые невозможно осуществить одним локомотивом, происходит преобразование покрытия. С его помощью строятся новые пути, описывающие допустимые последовательности перевозок, т.е. последовательности, которые можно осуществить некоторым локомотивом от начала и до конца.

Предложен эвристический алгоритм, превращающий недопустимое покрытие в допустимое. Он имеет невысокую сложность и хорошую эффективность.

Следует отметить что рассматриваемая графовая модель о назначениях во многом совпадает с моделью «умного» производства (см. [22]), а разработанные алгоритмы оптимального назначения могут быть применены для управления роботизированным производством.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B.* Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. Prentice Hall: United States, 1993.
2. *Ловас Л., Пламмер М.* Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии: Пер. с англ. М.: Мир, 1998.
3. *Адельсон-Вельский Г.М., Диниц Е.А., Карзанов А.В.* Поточковые алгоритмы. М.: Наука, 1975.
4. *Седжвик Р.* Фундаментальные алгоритмы на C++. Алгоритмы на графах. СПб.: ДиаСофтЮП, 2002.
5. *Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А., Кузьминова М.В., Петросян А.Г.* Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения. Ростов н/Д: Изд-во Южного федерального ун-та, 2009.
6. *Ерусалимский Я.М.* Потoki в сетях с нестандартной достижимостью // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2012. № 1. С. 5–7.
7. *Matyukhin V.G., Shabunin A.B., Kuznetsov N.A., Takmazian A.K.* Rail Transport Control by Combinatorial Optimization Approach // 11th IEEE International Conference on Application of Information and Communication Technologies. 2017. Conference Proceedings. V. 1. P. 419–422.
8. *Такмазьян А.К., Шабунин А.Б.* Приложение метода оптимального сетевого потока к задаче подбора локомотивов для грузовых поездов на Восточном полигоне // Вычислительные технологии. 2018. Т. 23. № 6. С. 94–106.
9. *Жулякова Л.Ю., Кузнецов Н.А., Матюхин В.Г., Шабунин А.Б., Такмазьян А.К.* Графовая модель распределения локомотивов для грузовых перевозок на линейном участке железной дороги. Задача о максимальном по включению покрытии графика // Проблемы управления. 2018. № 3. С. 65–75.
10. *Ahuja R.K., Liu J., Orlin J.B., Sharma D., Shughart L.A.* Solving Real-Life Locomotive Scheduling Problems // Transport. Sci. 2005. V. 39. No. 4. P. 503–517.
11. *Jaumard B., Tian H.* Multi-Column Generation Model for the Locomotive Assignment Problem // Proc. of 16th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modelling, Optimization, and Systems (ATMOS'16). 2016. P. 6:1–6:13.
12. *Азанов В.М., Буянов М.В., Иванов С.В., Кибзун А.И., Наумов А.В.* Оптимизация локомотивного парка, предназначенного для перевозки грузовых составов // Тр. 3-й научно-техн. конф. ИСУЖТ-2016. С. 94–96.

13. *Лазарев А.А., Мусатова Е.Г.* Целочисленные постановки задачи формирования железнодорожных составов и расписания их движения // Управление большими системами. 2012. Вып. 38. С. 161–169.
14. *Архипов Д.И., Лазарев А.А., Мусатова Е.Г.* Использование метода программирования в ограничениях для решения задачи о назначении локомотивов и локомотивных бригад на грузовые перевозки // Тр. 6-й Межд. научно-технич. конф. “Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте” (ИСУЖТ-2017, Москва). М.: ОАО НИИАС, 2017. С. 56–59.
15. *Гайманов Д.Н., Кибзун А.И., Рассказова В.А.* Задача о декомпозиции множества путей ориентированного графа и ее приложение // АиТ. 2018. № 12. С. 142–166.
Gainanov D.N., Kibzun A.I., Rasskazova V.A. The Decomposition Problem for the Set of Paths in a Directed Graph and Its Application // Autom Remote Control. 2018. V. 79. P. 2217–2236.
16. *Boesch F.T., Gimpel J.F.* Covering the Points of Digraph with Point-Disjoint Paths and Its Application to Code Optimization // J. Associat. Comput. Machin. 1977. V. 24. No. 2. P. 192–198.
17. *Noorvash Sh.* Covering the Vertices of a Graph by Vertex-Disjoint Paths // Pacific J. Math. 1975. V. 58. No. 1. P. 159–168.
18. *Jackson B., Ordaz O.* Chvátal–Erdős Conditions for Paths and Cycles in Graphs and digraphs. A survey // Discret. Math. 1990. V. 84. No. 3. P. 241–254.
19. *Chvátal V., Erdős P.* A note on Hamiltonian circuits // Discret. Math. 1972. No. 2. P. 111–113.
20. *Алескеров Ф., Хабина Э., Шварц Д.* Бинарные отношения, графы и коллективные решения. 2-е изд. перераб. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012.
21. *Рубчинский А.А.* Дискретные математические модели. Начальные понятия и стандартные задачи. М.: Директ-Медиа, 2014.
22. *Каляев И.А., Капустян С.Г.* Метод мультиагентного управления «умным» интернет-производством // Робототехника и техническая кибернетика, № 1 (18), Санкт-Петербург, ЦНИИ РТК, 2018, С. 34–48.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 31.10.2019

После доработки 14.10.2020

Принята к публикации 15.01.2021