

© 2021 г. К.Р. АЙДА-ЗАДЕ, д-р физ.-мат. наук, член-корр. НАН Азербайджана  
(kamil\_aydazade@rambler.ru)  
(Институт систем управления НАН Азербайджана;  
Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку),  
В.М. АБДУЛЛАЕВ, д-р физ.-мат. наук (vaqif\_ab@rambler.ru)  
(Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности;  
Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку)

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Исследуется задача оптимального управления, описываемая системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с краевыми условиями, содержащими точечные и интегральные значения фазовой переменной. В задаче определяются управления, участвующие в дифференциальных уравнениях, и значения правых частей нелокальных краевых условий. Исследованы необходимые условия существования и единственности решения краевой задачи, выпуклости целевого функционала, необходимые условия оптимальности оптимизируемых параметров в задаче управления. Полученные формулы для градиента целевого функционала задачи использованы для численного решения иллюстративной задачи. Приведены результаты численных экспериментов.

*Ключевые слова:* градиент функционала, выпуклость функционала, нелокальные условия, условия оптимальности, многоточечные условия.

DOI: 10.31857/S0005231021030016

### 1. Введение

Статья посвящена исследованию задачи оптимального управления системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с нелокальными условиями, содержащими слагаемые с точечными и интегральными значениями фазовой функции.

Изучение нелокальных краевых задач было начато еще в [1–3] и продолжено в публикациях многих других исследователей [4–14]. Практическая важность и необходимость изучения нелокальных краевых задач и соответствующих задач управления объясняется тем, что полученная измерениями информация о состоянии объекта в какой-либо точке объекта или в какой-либо момент времени может охватывать состояние нескольких точек или целой окрестности точки или момента времени замера.

Отметим, что различные постановки задач оптимального управления системами с многоточечными и промежуточными условиями рассмотрены во

многих публикациях [15–18]. Для этих задач были получены условия оптимальности в различных формах [19–21] и предложены численные схемы решения включая случаи нелокальности самых дифференциальных (интегродифференциальных, нагруженных) уравнений [12, 22].

Данная статья отличается от ранее проведенных исследований в основном тем, что здесь оптимизируемыми являются сами значения правых частей нелокальных краевых условий. На практике такая задача возникает, например, при управлении динамическим объектом, в граничных точках которого имеют место нелокальные краевые условия, обусловленные какими-либо физическими законами, и дополнительно воздействуют источники с оптимизируемыми значениями параметров. В частности, можно привести пример оптимизации напряженного состояния одномерной механической конструкции, находящейся под оптимизируемой распределенной нагрузкой по всей длине конструкции и под оптимизируемыми внешними воздействиями на ее концы.

В статье получены условия существования и единственности решения нелокальной краевой задачи, выпуклости целевого функционала задачи, необходимые условия оптимальности для рассматриваемой задачи оптимального управления и оптимизации. Для получения формул для компонент градиента функционала предложено использовать две техники в зависимости от ранга матрицы коэффициентов при точечных значениях фазовой вектор-функции в нелокальных условиях. Одна техника использует идею метода условного градиента [23, 24], другая — метод Лагранжа [24]. Применение метода Лагранжа приводит к увеличению как числа условий, так и размерности вектора параметров, требующего определения. Поэтому авторы предпочитают, в зависимости от ранга матрицы условий, первый подход.

Результаты данной статьи могут быть использованы в задачах оптимального управления, описываемых нелокальными функциональными уравнениями, при применении к ним каких-либо методов аппроксимации (в частности, методов прямых) по пространственным или временной переменным.

В статье приведены результаты численных экспериментов на примере одной иллюстративной задачи. Для ее численного решения с применением методов оптимизации первого порядка использованы полученные в статье формулы для компонент градиента функционала.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается задача управления объектом, динамика которого описывается линейной системой дифференциальных уравнений:

$$(2.1) \quad \dot{x}(t) = A_1(t)x(t) + A_2(t)u(t), \quad t \in [t^1, t^f],$$

с нелокальными (с неразделенными многоточечными и интегральными) условиями и с оптимизируемыми значениями правых частей:

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i x(\tilde{t}^i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\tilde{t}^{2j-1}}^{\tilde{t}^{2j}} \beta_j(t)x(t)dt = \vartheta.$$

Здесь:  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — фазовая переменная;  $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r$  — управляющая вектор-функция из класса кусочно-непрерывных функций, допустимые значения которой принадлежат заданному выпуклому компактному множеству  $U$ ;  $\vartheta \in V \subset \mathbb{R}^n$  — вектор, значения которого определяются оптимизируемыми воздействиями внешних источников,  $V$  — заданные выпуклое и компактное множество. Заданными являются: кусочно-непрерывные размерности  $n \times n$   $A_1(t)$ , размерности  $n \times r$   $A_2(t)$  и интегрируемые  $\beta_j(t)$  размерности  $n \times n$  матричные функции; постоянные матрицы  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l_1$ , размерности  $n \times n$ ; упорядоченные моменты времени  $\tilde{t}^i, \hat{t}^j \in [t^1, t^f]$ , причем  $\tilde{t}^i \notin [\hat{t}^{2j-1}, \hat{t}^{2j}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, l_1, j = 1, 2, \dots, l_2$ , при этом  $t^1 = \tilde{t}^1, \tilde{t}^{l_1} = t^f$ ;  $l_1, l_2$  — целые числа.

Целевым функционалом для нахождения оптимальных управления  $u(t)$  и вектора параметров  $\vartheta$  является

$$(2.3) \quad J(u, \vartheta) = \int_{t^1}^{t^f} f^0(x(t), u(t), \vartheta, t) dt + \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta) \rightarrow \min_{u(t) \in U, \vartheta \in V}.$$

Здесь  $f^0(x, u, \vartheta, t)$ ,  $\Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)$  — заданные непрерывно дифференцируемые по  $x, \tilde{x}, \hat{x}, u, \vartheta$  функции и использованы обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= (\tilde{t}^1, \tilde{t}^2, \dots, \tilde{t}^{l_1}), \quad \hat{t} = (\hat{t}^1, \hat{t}^2, \dots, \hat{t}^{2l_2}), \\ \tilde{x} &= (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^{l_1})^T = (x(\tilde{t}^1), x(\tilde{t}^2), \dots, x(\tilde{t}^{l_1}))^T \in \mathbb{R}^{l_1 n}, \\ \hat{x} &= (\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{2l_2})^T = (x(\hat{t}^1), x(\hat{t}^2), \dots, x(\hat{t}^{2l_2}))^T \in \mathbb{R}^{2l_2 n}, \end{aligned}$$

“Т” — знак транспонирования.

Будем предполагать, что в (2.2) имеются  $n$  линейно независимых условий. В случае меньшего числа линейно независимых условий или, вообще, меньшего числа условий, например  $n_1$ ,  $n_1 < n$ , тогда соответственно  $\vartheta \in \mathbb{R}^{n_1}$ . Это значит, что в задаче имеются  $n - n_1$  свободных (незакрепленных) начальных условий. Тогда в условия (2.2) можно добавить еще оптимизируемые значения начальных условий для каких-либо  $n - n_1$  компонент фазового вектора  $x(t)$ , расширив тем самым вектор  $\vartheta \in \mathbb{R}^{n_1}$  до  $\vartheta \in \mathbb{R}^n$ .

### 3. Получение условий оптимальности

Далее будем предполагать, что для всех допустимых управлений  $u(t)$  и параметров  $\vartheta$  задача (2.1), (2.2) имеет решение, причем единственное. Для этого должно выполняться условие, приведенное в следующей теореме 1. В теореме 1 матрица  $F(t, \tau)$  является фундаментальной матрицей решений системы (2.1), т.е. является решением матричной задачи Коши:

$$\dot{F}(t, \tau) = A_1(t)F(t, \tau), \quad t, \tau \in [t^1, t^f], \quad F(t^1, t^1) = E,$$

где  $E$  —  $n$ -мерная единичная матрица.

*Теорема 1. Задача (2.1), (2.2) для произвольных кусочно-непрерывных вектор функций  $u(t)$  и вектора параметров  $\vartheta$  имеет решение, причем единственное, если функции  $A_1(t)$ ,  $A_2(t)$  — кусочно-непрерывны,  $\beta_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, l_2$ , — интегрируемы и*

$$(3.1) \quad \text{rank} \left[ \sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i F(\tilde{t}^i, t^1) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\tilde{t}^{2j-1}}^{\tilde{t}^{2j}} \beta_j(t) F(t, t^1) dt \right] = n.$$

Доказательства теорем 1, 2, 3 и 4 приведены в Приложении.

Имеет место следующая теорема 2.

*Теорема 2. Пусть допустимые множества  $U$ ,  $V$  и функции  $f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)$  и  $\Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)$  по  $x, \tilde{x}, \hat{x}, u, \vartheta$  выпуклы. Тогда функционал  $J(u, \vartheta)$  является выпуклым. В случае если дополнительно одна из функций  $f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)$  и  $\Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)$  сильно выпукла, то функционал задачи также является сильно выпуклым.*

Исследуем дифференцируемость функционала (2.3) и получим формулы для компонент его градиента по оптимизируемым параметрам  $u(t) \in \mathbb{R}^r$ ,  $\vartheta \in \mathbb{R}^n$ .

Производные  $\partial f^0 / \partial x$ ,  $\partial f^0 / \partial u$ ,  $\partial f^0 / \partial \vartheta$ ,  $\partial \Phi / \partial \tilde{x}^i$ ,  $\partial \Phi / \partial \hat{x}^j$  будем понимать как строки соответствующих размерностей. Для произвольных функций  $f(t)$ , определенных на отрезке  $[t^1, t^f]$ , используем обозначения:

$$f(t_{\pm}) = f(t \pm 0) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ \varepsilon \geq 0}} f(t \pm \varepsilon), \quad \Delta f(t) = f(t_+) - f(t_-),$$

а для удобства записи далее некоторых формул будем считать, что

$$f(t_{\pm}^f) = f(t_{\pm}^1) = 0,$$

а  $\chi_{[\tilde{t}^{2j-1}, \tilde{t}^{2j}]}(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, l_2$ , — характеристическая функция:

$$\chi_{[\tilde{t}^{2j-1}, \tilde{t}^{2j}]}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [\tilde{t}^{2j-1}, \tilde{t}^{2j}], \\ 1, & t \in [\tilde{t}^{2j-1}, \tilde{t}^{2j}], \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, l_2.$$

Пусть ранг расширенной матрицы  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{l_1}]$  размерности  $n \times l_1 n$  равен  $\bar{n}$ . Ясно, что

$$(3.2) \quad \text{rank} \alpha = \bar{n} \leq n.$$

В случае  $\bar{n} < n$  условия (2.2) за счет их линейной комбинации можно привести к такому виду, что последние  $n - \bar{n}$  строк матрицы  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{l_1}]$  будут нулевыми. При этом линейной комбинации подвергнутся и интегральные слагаемые в условиях (2.2). Но важно, что эти преобразования не нарушат выполнения условия (3.1) для существования и единственности решения

краевой задачи (2.1), (2.2) для произвольных пар  $(u, \vartheta)$ . Чтобы не вводить новые обозначения, пусть матрицы  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l_1$ , имеют размерности  $\bar{n} \times n$ , а ранг их расширенной матрицы равен  $\bar{n}$ . Тогда ограничения (2.2) разобьем на две части: первые  $\bar{n}$  ограничений запишем в виде

$$(3.3) \quad \sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i x(\tilde{t}^i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\tilde{t}^{2j-1}}^{\tilde{t}^{2j}} \beta_j^1(t) x(t) dt = \vartheta^{(1)},$$

а в последних  $n - \bar{n}$  ограничениях будут отсутствовать точечные значения функции  $x(t)$ :

$$(3.4) \quad \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\tilde{t}^{2j-1}}^{\tilde{t}^{2j}} \beta_j^2(t) x(t) dt = \vartheta^{(2)}.$$

Здесь матрицы  $\alpha_i$ ,  $\beta_j^1(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, l_1$ ,  $j = 1, 2, \dots, l_2$ , имеют размерность  $\bar{n} \times n$ , а матрицы  $\beta_j^2(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, l_2$ , — размерность  $(n - \bar{n}) \times n$ , векторы  $\vartheta^{(1)} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ ,  $\vartheta^{(2)} \in \mathbb{R}^{n-\bar{n}}$ ,  $\vartheta = (\vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}) \in \mathbb{R}^n$ .

В силу изложенного из расширенной матрицы  $\alpha$  можно извлечь матрицу (минор)  $\hat{\alpha}$  ранга  $\bar{n}$ , образованную  $\bar{n}$  столбцами матрицы  $\alpha$ :

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}^{11} & \dots & \hat{\alpha}^{1i} & \dots & \hat{\alpha}^{1\bar{n}} \\ \hat{\alpha}^{21} & \dots & \hat{\alpha}^{2i} & \dots & \hat{\alpha}^{2\bar{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\alpha}^{\bar{n}1} & \dots & \hat{\alpha}^{\bar{n}i} & \dots & \hat{\alpha}^{\bar{n}\bar{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{s_1}^{1,k_1} & \dots & \hat{\alpha}_{s_i}^{1,k_i} & \dots & \hat{\alpha}_{s_{\bar{n}}}^{1,k_{\bar{n}}} \\ \hat{\alpha}_{s_1}^{2,k_1} & \dots & \hat{\alpha}_{s_i}^{2,k_i} & \dots & \hat{\alpha}_{s_{\bar{n}}}^{2,k_{\bar{n}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\alpha}_{s_1}^{\bar{n},k_1} & \dots & \hat{\alpha}_{s_i}^{\bar{n},k_i} & \dots & \hat{\alpha}_{s_{\bar{n}}}^{\bar{n},k_{\bar{n}}} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $k_i$  является номером столбца матрицы  $\alpha_{s_i}$ ,  $1 \leq s_i \leq l_1$ ,  $i = 1, 2, \dots, \bar{n}$ , включенного в качестве  $i$ -го столбца в матрицу  $\hat{\alpha}$ , т.е.  $i$ -й столбец матрицы  $\hat{\alpha}$  является  $k_i$ -м столбцом матрицы  $\alpha_{s_i}$ .

Пусть

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{\bar{n}})^T = \\ &= (x_{k_1}(\tilde{t}^{s_1}), x_{k_2}(\tilde{t}^{s_2}), \dots, x_{k_{\bar{n}}}(\tilde{t}^{s_{\bar{n}}}))^T = (\tilde{x}_{k_1}^{s_1}, \tilde{x}_{k_2}^{s_2}, \dots, \tilde{x}_{k_{\bar{n}}}^{s_{\bar{n}}})^T \end{aligned}$$

есть  $\bar{n}$ -мерный вектор, состоящий из компонент вектора  $x(\tilde{t})$  и образованный из соответствующих матрице  $\hat{\alpha}$  значений  $x_j$ -х координат  $n$ -мерного вектора  $x(t)$  в моменты времени  $\tilde{t}^{s_j}$ ,  $1 \leq s_j \leq l_1$ ,  $j = 1, 2, \dots, \bar{n}$ .

Пусть  $\check{\alpha}$  и  $\check{x}$  есть остаточные матрица размера  $(\bar{n} \times (l_1 n - \bar{n}))$  и  $(l_1 n - \bar{n})$ -мерный вектор, полученные удалением из матрицы  $\alpha$   $\bar{n}$  столбцов, а из вектора  $\hat{x}$   $\bar{n}$  компонент, включенных соответственно в матрицу  $\hat{\alpha}$  и вектор  $\hat{x}$ .

Пусть  $i$ -й столбец матрицы  $\check{\alpha}$  является  $g_i$ -м столбцом матрицы  $\alpha_{q_i}$ ,  $1 \leq g_i \leq n$ ,  $1 \leq q_i \leq l_1$ ,  $i = 1, 2, \dots, (l_1 n - \bar{n})$ :

$$\check{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{g_1}^{1,q_1} & \cdots & \alpha_{g_i}^{1,q_i} & \cdots & \alpha_{g_{(l_1 n - \bar{n})}}^{1,q_{(l_1 n - \bar{n})}} \\ \alpha_{g_1}^{2,q_1} & \cdots & \alpha_{g_i}^{2,q_i} & \cdots & \alpha_{g_{(l_1 n - \bar{n})}}^{2,q_{(l_1 n - \bar{n})}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{g_1}^{\bar{n},q_1} & \cdots & \alpha_{g_i}^{\bar{n},q_i} & \cdots & \alpha_{g_{(l_1 n - \bar{n})}}^{\bar{n},q_{(l_1 n - \bar{n})}} \end{pmatrix},$$

$$\check{x} = \left( x_{g_1}(\tilde{t}^{q_1}), x_{g_2}(\tilde{t}^{q_2}), \dots, x_{g_{(l_1 n - \bar{n})}}(\tilde{t}^{q_{(l_1 n - \bar{n})}}) \right)^T = \left( \tilde{x}_{g_1}^{q_1}, \tilde{x}_{g_2}^{q_2}, \dots, \tilde{x}_{g_{(l_1 n - \bar{n})}}^{q_{(l_1 n - \bar{n})}} \right)^T.$$

Ясно, что  $(g_i, q_i) \neq (s_j, k_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, \bar{n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, (l_1 n - \bar{n})$ .

Для простоты записи формул  $\bar{n}$ -мерную квадратную матрицу  $\hat{\alpha}^{-1}$  обозначим через  $C$  с элементами  $c_{ij}$ , а матрицу  $(-\hat{\alpha}^{-1}\check{\alpha})$  размера  $(\bar{n} \times (l_1 n - \bar{n}))$  — через  $B$  с элементами  $b_{ij}$ .

Далее отдельно рассмотрим случаи, когда  $\bar{n} = n$  и  $\bar{n} < n$ .

*Теорема 3.* Пусть выполнены условия: функции  $A_1(t)$ ,  $A_2(t)$  — кусочно-непрерывны;  $f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)$  и  $\Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)$  — непрерывно дифференцируемые по  $x, \tilde{x}, \hat{x}, u, \vartheta$ ; краевая задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение при произвольных функциях  $u(t) \in U$  и параметрах  $\vartheta \in V$ .

Тогда функционал (2.3) дифференцируем по управлению  $u(t)$  и параметрам  $\vartheta$  правых частей нелокальных краевых условий, а градиент функционала задачи при  $\text{rank} \alpha = \text{rank} \hat{\alpha} = n$  определяется формулами

$$(3.5) \quad \text{grad}_u J(u, \vartheta) = -A_2^T(t)\psi(t) + \left( \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial u} \right)^T,$$

$$(3.6) \quad \frac{\partial J(u, \vartheta)}{\partial \vartheta_k} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \Delta \psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i}) \right] c_{ik} + \\ + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta_k} + \int_{t^1}^{t^f} \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta_k} dt, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где вектор-функция  $\psi(t)$ , непрерывно-дифференцируемая почти всюду на отрезке  $[t^1, t^f]$  кроме точек  $\tilde{t}^i, \hat{t}^j$ ,  $i = 2, 3, \dots, l_1 - 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2l_2$ , является решением сопряженной задачи:

$$(3.7) \quad \dot{\psi}(t) = -A_1^T(t)\psi(t) + \left( \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial x} \right)^T + \\ + \sum_{j=1}^{l_2} \chi_{[\hat{t}^{2j-1}, \tilde{t}^{2j}]}(t) \beta_j^T(t) (\hat{\alpha}^{-1})^T \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \psi_{k_i}(\tilde{t}_-^{s_i}) - \psi_{k_i}(\tilde{t}_+^{s_i}) \right),$$

$$(3.8) \quad \psi_{g_\nu}(\tilde{t}_+^{q\nu}) = \psi_{g_\nu}(\tilde{t}_-^{q\nu}) + \sum_{i=1}^n b_{i\nu} \left( \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \psi_{k_i}(\tilde{t}_-^{s_i}) - \psi_{k_i}(\tilde{t}_+^{s_i}) \right) + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{g_\nu}^{q\nu}}, \quad \nu = 1, 2, \dots, l_1 n,$$

$$(3.9) \quad \psi_i(\hat{t}_+^j) = \psi_i(\hat{t}_-^j) + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \hat{x}_i^j}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, 2l_2.$$

Из теоремы 1 можно получить формулы для более простых частных случаев, когда ранги каких-либо из матриц  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l_1$ , равны  $n$  и они могут быть приняты в качестве матрицы  $\tilde{\alpha}$ .

*Следствие 1.* Если  $\text{rank} \alpha_1 = n$ , а следовательно, существует  $\alpha_1^{-1}$ , то для компонент градиента функционала по  $\vartheta$  можно получить формулу

$$(3.10) \quad \text{grad}_\vartheta J(u, \vartheta) = -(\alpha_1^{-1})^T \left[ \psi(t^1) - \frac{\partial \Phi^T(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^1} \right] + \frac{\partial \Phi^T(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta} + \int_{t^1}^{t^f} \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta} dt,$$

где сопряженная краевая задача имеет вид

$$(3.11) \quad \dot{\psi}(t) = -A_1^T(t)\psi(t) + \left( \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial x} \right)^T + \sum_{j=1}^{l_2} \chi_{[\hat{t}^{2j-1}, \hat{t}^{2j}]}(t) \beta_j^T(t) (\alpha_1^{-1})^T \left( \psi(t^1) - \frac{\partial \Phi^T(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^1} \right),$$

$$(3.12) \quad \alpha_{l_1}^T (\alpha_1^{-1})^T \psi(t^1) + \psi(t^f) = -\frac{\partial \Phi^T(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^{l_1}} + \alpha_{l_1}^T (\alpha_1^{-1})^T \frac{\partial \Phi^T(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^1},$$

$$(3.13) \quad \psi(\tilde{t}_+^i) = \psi(\tilde{t}_-^i) + \alpha_i^T (\alpha_1^{-1})^T \psi(t^1) + \frac{\partial \Phi^T(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^i} - \alpha_i^T (\alpha_1^{-1})^T \frac{\partial \Phi^T(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^1}, \quad i = 2, 3, \dots, l_1 - 1,$$

$$(3.14) \quad \psi(\hat{t}_+^j) = \psi(\hat{t}_-^j) + \frac{\partial \Phi^T(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \hat{x}^j}, \quad j = 1, 2, \dots, 2l_2.$$

*Следствие 2.* Если  $\text{rank} \alpha_{l_1} = n$ , то для компонент градиента функционала по  $\vartheta$  имеет место формула

$$(3.15) \quad \text{grad}_\vartheta J(u, \vartheta) = -(\alpha_{l_1}^{-1})^T \left[ \psi(t^f) - \frac{\partial \Phi^T(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^{l_1}} \right] + \frac{\partial \Phi^T(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta} + \int_{t^1}^{t^f} \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta} dt,$$

а сопряженная краевая задача имеет вид:

$$(3.16) \quad \dot{\psi}(t) = -A_1^\Gamma(t)\psi(t) + \left( \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial x} \right)^\Gamma + \\ + \sum_{j=1}^{l_2} \chi_{[\tilde{t}^{2j-1}, \tilde{t}^{2j}]}(t) \beta_j^\Gamma(t) (\alpha_{l_1}^{-1})^\Gamma \left( -\psi(t^f) - \frac{\partial \Phi^\Gamma(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{l_1}} \right),$$

$$(3.17) \quad \psi(t^1) + \alpha_1^\Gamma (\alpha_{l_1}^{-1})^\Gamma \psi(t^f) = \frac{\partial \Phi^\Gamma(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^1} - \alpha_1^\Gamma (\alpha_{l_1}^{-1})^\Gamma \frac{\partial \Phi^\Gamma(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^{l_1}},$$

$$(3.18) \quad \psi(\tilde{t}_+^i) = \psi(\tilde{t}_-^i) - \alpha_i^\Gamma (\alpha_{l_1}^{-1})^\Gamma \psi(t^f) + \\ + \frac{\partial \Phi^\Gamma(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^i} - \alpha_i^\Gamma (\alpha_{l_1}^{-1})^\Gamma \frac{\partial \Phi^\Gamma(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^{l_1}}, \quad i = 2, 3, \dots, l_1 - 1,$$

$$(3.19) \quad \psi(\tilde{t}_+^j) = \psi(\tilde{t}_-^j) + \frac{\partial \Phi^\Gamma(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^j}, \quad j = 1, 2, \dots, 2l_2.$$

Следствие 3. Если обратима одна из матриц  $\alpha_s, 2 \leq s \leq l_1 - 1$ , то

$$(3.20) \quad \text{grad}_{\vartheta} J(u, \vartheta) = -(\alpha_s^{-1})^\Gamma \left[ (\psi(\tilde{t}_-^s) - \psi(\tilde{t}_+^s)) - \frac{\partial \Phi^\Gamma(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^s} \right] + \\ + \frac{\partial \Phi^\Gamma(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta} + \int_{t^1}^{t^f} \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta} dt,$$

а сопряженная краевая задача имеет вид:

$$(3.21) \quad \dot{\psi}(t) = -A_1^\Gamma(t)\psi(t) + \left( \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial x} \right)^\Gamma + \\ + \sum_{j=1}^{l_2} \chi_{[\tilde{t}^{2j-1}, \tilde{t}^{2j}]}(t) \beta_j^\Gamma(t) (\alpha_s^{-1})^\Gamma \left( -(\psi(\tilde{t}_-^s) - \psi(\tilde{t}_+^s)) - \frac{\partial \Phi^\Gamma(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^s} \right),$$

$$(3.22) \quad \psi(t^1) = \alpha_1^\Gamma (\alpha_s^{-1})^\Gamma (\psi(\tilde{t}_-^s) - \psi(\tilde{t}_+^s)) + \\ + \frac{\partial \Phi^\Gamma(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^1} \alpha_1^\Gamma (\alpha_s^{-1})^\Gamma \frac{\partial \Phi^\Gamma(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^s},$$

$$(3.23) \quad \psi(t^f) = -\alpha_{l_1}^\Gamma (\alpha_s^{-1})^\Gamma (\psi(\tilde{t}_-^s) - \psi(\tilde{t}_+^s)) - \frac{\partial \Phi^\Gamma(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^{l_1}} + \\ + \alpha_{l_1}^\Gamma (\alpha_s^{-1})^\Gamma \frac{\partial \Phi^\Gamma(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^s},$$

$$(3.24) \quad \psi(\tilde{t}_+^i) = \psi(\tilde{t}_-^i) + \alpha_i^\Gamma (\alpha_s^{-1})^\Gamma (\psi(\tilde{t}_-^s) - \psi(\tilde{t}_+^s)) + \frac{\partial \Phi^\Gamma(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^i} - \\ - \alpha_i^\Gamma (\alpha_s^{-1})^\Gamma \frac{\partial \Phi^\Gamma(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^s}, \quad i = 2, 3, \dots, l_1 - 1, \quad i \neq s,$$

$$(3.25) \quad \psi(\hat{t}_+^j) = \psi(\hat{t}_-^j) + \frac{\partial \Phi^\Gamma(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \hat{x}^j}, \quad j = 1, 2, \dots, 2l_2.$$

Теперь рассмотрим случай, когда  $\text{rank} \alpha = \bar{n} < n$ .

*Теорема 4.* Пусть выполнены все условия, приведенные в теореме 3, и  $\text{rank} \alpha = \bar{n} < n$ .

Тогда функционал (2.3) дифференцируем по управлению  $u(t)$  и параметрам  $\vartheta$  правых частей нелокальных краевых условий, градиент функционала по управлению  $u(t)$  определяется формулой (3.5), а по параметрам  $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$  — следующими формулами:

$$(3.26) \quad \frac{\partial J(u, \vartheta)}{\partial \vartheta_k^{(1)}} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \left[ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \Delta \psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i}) \right] c_{ik} + \\ + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta_k^{(1)}} + \int_{t^1}^{t^f} \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta_k^{(1)}} dt, \quad k = 1, 2, \dots, \bar{n},$$

$$(3.27) \quad \frac{\partial J(u, \vartheta)}{\partial \vartheta_k^{(2)}} = -\lambda_k + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta_k^{(2)}} + \\ + \int_{t^1}^{t^f} \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta_k^{(2)}} dt, \quad k = 1, 2, \dots, (n - \bar{n}),$$

где  $\psi(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$  удовлетворяют условиям сопряженной задачи:

$$(3.28) \quad \dot{\psi}(t) = -A_1^\Gamma(t) \psi(t) + \left( \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial x} \right)^\Gamma - \\ - \sum_{j=1}^{l_2} \chi_{[\hat{t}^{2j-1}, \hat{t}^{2j}]}(t) (\beta_j^2(t))^\Gamma \lambda + \\ + \sum_{j=1}^{l_2} \chi_{[\hat{t}^{2j-1}, \hat{t}^{2j}]}(t) (\beta_j^1(t))^\Gamma (\bar{\alpha}^{-1})^\Gamma \times \\ \times \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \psi_{k_i}(\hat{t}_-^{s_i}) - \psi_{k_i}(\hat{t}_+^{s_i}) \right) \right),$$

$$(3.29) \quad \psi_{g_\nu}(\tilde{t}_+^{q\nu}) = \psi_{g_\nu}(\tilde{t}_-^{q\nu}) + \sum_{i=1}^{\bar{n}} b_{i\nu} \left( \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \psi_{k_i}(\tilde{t}_-^{s_i}) - \psi_{k_i}(\tilde{t}_+^{s_i}) \right) + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{g_\nu}^{q\nu}}, \quad \nu = 1, 2, \dots, (l_1 n - \bar{n}),$$

$$(3.30) \quad \psi_i(\tilde{t}_+^j) = \psi_i(\tilde{t}_-^j) + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \hat{x}_i^j}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, 2l_2.$$

Отметим частный случай, когда  $\bar{n} = 0$ . Получение формул для компонент градиента по  $\vartheta$  в этом случае упрощается, так как для всех условий (2.2) будет использован метод Лагранжа, что приведет, конечно, к увеличению размерности задачи за счет увеличения размера вектора  $\lambda$  до  $n$ , т.е.  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ . Компоненты градиента функционала, пользуясь выкладками, приведенными в доказательстве теоремы 4 по отношению условий (3.4), можно получить в виде

$$(3.31) \quad \text{grad}_{\vartheta} J(u, \vartheta) = \int_{t^1}^{t^f} \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta} dt + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta} - \lambda.$$

Формула для  $\text{grad}_u J(u, \vartheta)$  будет такой же, как в (3.5), а  $\psi(t)$  и  $\lambda$  являются решением сопряженной краевой задачи с  $2n$  условиями

$$(3.32) \quad \dot{\psi}(t) = -A_1^T(t)\psi(t) + \sum_{j=1}^{l_2} \chi_{[\hat{t}_{2j-1}, \hat{t}_{2j}]}(t)(\beta_j(t))^T \lambda + \left( \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial x} \right)^T,$$

$$(3.33) \quad \psi(t^1) = \frac{\partial \Phi^T(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^1} + \alpha_1^T \lambda,$$

$$(3.34) \quad \psi(t^f) = -\frac{\partial \Phi^T(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^{l_1}} - \alpha_{l_1}^T \lambda$$

и условиями скачка:

$$(3.35) \quad \psi(\tilde{t}_+^i) = \psi(\tilde{t}_-^i) + \frac{\partial \Phi^T(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^i} + \alpha_i^T \lambda, \quad i = 2, 3, \dots, l_1 - 1,$$

$$(3.36) \quad \psi(\hat{t}_+^j) = \psi(\hat{t}_-^j) + \frac{\partial \Phi^T(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \hat{x}^j}, \quad j = 1, 2, \dots, 2l_2.$$

Формулы (3.32)–(3.36) отличаются от формул, приведенных в теоремах 3 и 4, размерностью параметров и числом условий, участвующих в сопряженной задаче. В приведенных в теореме 3 формулах для случая  $\text{rank} \alpha = \bar{n} = n$

число краевых условий для сопряженной переменной было равно  $n$ , а неизвестных параметров не имелось. В случае  $\bar{n} < n$  в формулах (3.27), (3.28) и (3.31)–(3.34) участвует  $(n - \bar{n})$ -мерный вектор множителей Лагранжа  $\lambda$ , для определения которого имеются еще дополнительные  $n - \bar{n}$  краевых условий, общее число которых равно  $2n - \bar{n}$ .

*Замечание.* Во многих практических задачах в условии (2.2) оптимизируемыми являются не все компоненты вектора  $\vartheta \in \mathbb{R}^n$ , а некоторая его часть. В этом случае из приведенных формул градиента функционала необходимо использовать те, которые соответствуют оптимизируемым параметрам.

Теперь сформулируем необходимые условия оптимальности в задаче (2.1)–(2.3).

*Теорема 5.* Пусть функционал задачи (2.1)–(2.3) дифференцируем, допустимые множество  $U$  кусочно-непрерывных управлений  $u(t)$  и множество  $V$  параметров  $\vartheta$  правых частей краевых условий (2.2) – выпуклы. Тогда выполнение условий

$$(3.37) \quad \langle \text{grad}_u J(u^*, \vartheta^*), u(t) - u^*(t) \rangle \geq 0,$$

$$(3.38) \quad \langle \text{grad}_\vartheta J(u^*, \vartheta^*), \vartheta - \vartheta^* \rangle \geq 0,$$

почти для всех  $t \in [t^1, t^f]$  необходимо и достаточно для оптимальности тройки  $(u^*(t), \vartheta^*, x^*(t))$ , где  $\text{grad}_u J(u^*, \vartheta^*)$  определяется из формулы (3.5), а  $\text{grad}_\vartheta J(u^*, \vartheta^*)$  определяется в зависимости от ранга расширенной матрицы  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{l_1}]$  одной из формул (3.6), (3.10), (3.15), (3.20), (3.26), (3.27) или (3.31).

Используемое в формулах обозначение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  означает скалярное произведение в соответствующих пространствах [24].

Доказательство теоремы следует из выпуклости допустимой области  $V$  и выпуклости и дифференцируемости целевого функционала  $J(u, \vartheta)$  (см. [23, 24]).

#### **4. Схема численного решения задачи и результаты компьютерных экспериментов**

Пользуясь полученными формулами для компонент градиента целевого функционала, для численного решения задачи можно использовать известные итерационные методы оптимизации первого порядка. В случае если допустимые множества оптимизируемых управлений  $U$  и параметров  $V$  имеют простую структуру (параллелепипед, шар и т.п.), то эффективно использовать метод проекции градиента [23, 24]:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} (u(t))^{k+1} &= P_U \left[ (u(t))^k - \alpha \text{grad}_u J(u^k, \vartheta^k) \right], \\ \vartheta^{k+1} &= P_V \left[ \vartheta^k - \alpha \text{grad}_\vartheta J(u^k, \vartheta^k) \right], \\ \alpha_k &= \arg \min_{\alpha \geq 0} J(P_U (u^k - \alpha \text{grad}_u J(u^k, \vartheta^k)), \\ &P_V(\vartheta^k - \alpha \text{grad}_\vartheta J(u^k, \vartheta^k))), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Здесь  $P_U(u)$  и  $P_V(\vartheta)$  — операторы проектирования управления  $u(t)$  и параметра  $\vartheta$  на допустимые множества соответственно  $U$  и  $V$ ,  $\alpha_k \geq 0$  — шаг одномерной минимизации.

В случае если допустимое множество  $V$  задано в общем виде с помощью равенств и неравенств

$$V = \{\vartheta \in \mathbb{R}^n : g_i(\vartheta) \leq 0, h_j(\vartheta) = 0, i = 1, 2, \dots, m_1, j = 1, 2, \dots, m_2\},$$

то можно использовать, например, методы штрафных функций [23, 24]. При этом в приведенных выше формулах несущественно изменятся только выражения для компонент градиента функционала по  $\vartheta$  за счет добавления в функцию  $\Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)$  штрафного члена в качестве слагаемого.

В случае отсутствия ограничений на оптимизируемые параметры можно использовать какие-либо эффективные численные методы безусловной оптимизации, например методы сопряженных градиентов [23, 24].

Для численного решения систем дифференциальных уравнений с многоточечными условиями как для прямой задачи (2.1), (2.2), так и для сопряженной задачи при заданных управлении  $u(t)$  и векторе параметров  $\vartheta$  можно использовать метод сдвига условий, предложенный в публикациях авторов [8, 9, 14, 25]. Другой подход к численному решению задачи (2.1), (2.2) заключается в том, что сначала введением новых  $l_2 n$  фазовых переменных и добавлением к исходной системе (2.1)  $l_2 n$  дифференциальных уравнений в граничных условиях интегральные слагаемые заменяются точечными. Далее, полученная задача относительно системы дифференциальных уравнений  $(l_2 + 1)n$ -го порядка с  $(l_1 + 2l_2)$  промежуточными значениями фазовой переменной в краевых условиях, в соответствии с методом, предложенным в [26], за счет увеличения порядка системы дифференциальных уравнений в  $(l_1 + 2l_2)$  раз приводится к двухточечной задаче, для решения которой можно использовать методы прогонки [26, 27]. Размерность полученной задачи по сравнению с исходной в итоге увеличивается в  $(l_1 + 2l_2)(l_2 + 1)$  раз. При этом соответственно увеличатся порядки вспомогательных задач Коши, используемых в методах прогонки для решения нелокальных краевых задач. Применение такого подхода для решения задач оптимального управления, учитывая необходимость многократного решения прямой и сопряженной краевых задач, как было показано в [22], неэффективно.

Возможен частный, но важный случай, когда  $A_1(t) = \text{const}$ ,  $t \in [t^1, t^f]$ . Тогда и фундаментальная матрица  $\Phi(t, \tau) = \text{const}$ ,  $t \in [t^1, t^f]$ , и ее одноразовое вычисление не требует больших вычислительных затрат и она занимает малый объем памяти в отличие от хранения фундаментальной матрицы неавтономной системы. В этом случае использование формулы Коши для решения краевых задач (2.1), (2.2) при произвольно заданных допустимых управлениях  $u(t)$  и параметрах  $\vartheta$  приводит к одноразовому решению алгебраической системы порядка  $n$ , получаемой из краевых условий, и задачи Коши с использованием начального условия, полученного из алгебраической системы. Поэтому в случае автономных систем, т.е.  $A_1(t) = \text{const}$ , использование каких-либо схем метода прогонки при решении задач оптимального управления, требующих многократного решения краевых задач, неэффективно.

*Задача.* Приведем результаты численных экспериментов, полученные при решении задачи оптимального управления, описываемой системой дифференциальных уравнений

$$(4.2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + u - 6 \cos(8t) - 22 \sin(8t) - 4t^2 + 4t + 4, \\ \dot{x}_2(t) = tx_1(t) + x_2(t) - (24 - 2t) \cos(8t) - 3 \sin(8t) - 2t^3 + t^2 - 1, \end{cases} \quad t \in [0, 1],$$

с нелокальными условиями

$$(4.3) \quad \begin{cases} x_1(0) + x_1(0,5) + x_2(1) + \int_{0,6}^{0,8} (x_1(t) + 2x_2(t)) dt = \vartheta_1, \\ \int_{0,2}^{0,4} (x_1(t) - x_2(t)) dt = \vartheta_2. \end{cases}$$

Имеются ограничения на оптимизируемые параметры:

$$-3 \leq \vartheta_1 \leq 3, \quad -2 \leq \vartheta_2 \leq 2, \quad -5 \leq u(t) \leq 5.$$

Целевой функционал имеет вид

$$(4.4) \quad J(u, \vartheta) = \int_0^1 [x_1(t) + x_2(t) - u(t)]^2 dt + \delta \cdot [(\vartheta_1 + 0,24)^2 + (\vartheta_2 + 1,17)^2 + (x_2(0,5) + 1,52)^2 + (x_1(1) + 0,29)^2 + (x_2(1) - 2,97)^2] \rightarrow \min.$$

Здесь:  $l_1 = 3$ ,  $t^1 = \tilde{t}^1 = 0$ ,  $\tilde{t}^2 = 0,5$ ,  $t^f = \tilde{t}^3 = 1$ ,  $l_2 = 2$ ,  $\hat{t}^1 = 0,2$ ,  $\hat{t}^2 = 0,4$ ,  $\hat{t}^3 = 0,6$ ,  $\hat{t}^4 = 0,8$ ,  $\delta = 0,01$ .

Сопряженная задача (3.28) имеет вид

$$(4.5) \quad \begin{cases} \dot{\psi}_1(t) = -2\psi_1(t) - t\psi_2(t) + \\ \quad + \lambda \chi_{[0,2, 0,4]}(t) + \psi_1(0) \chi_{[0,6, 0,8]}(t) + 2(x_1(t) + x_2(t) - u(t)), \\ \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t) - \psi_2(t) - \\ \quad - \lambda \chi_{[0,2, 0,4]}(t) + 2\psi_1(0) \chi_{[0,6, 0,8]}(t) + 2(x_1(t) + x_2(t) - u(t)). \end{cases}$$

В условиях (4.3) каждая из матриц

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет ранг, равный 1. Расширенная матрица

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

тоже имеет ранг, равный 1. Это соответствует рассмотренному выше случаю в теореме 4. Матрицу  $\hat{\alpha}$  составим из первого столбца и первой строки матрицы  $\alpha_1$ :

$$\hat{\alpha} = (1), \quad \check{\alpha} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1).$$

Это значит, что в формулах (3.29), (3.30) индексы  $(k_i; s_i)$ ,  $i = 1$ , и  $(g_\nu; q_\nu)$ ,  $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$ , имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} (k_1; s_1) &= (1; 1), & (g_1; q_1) &= (2; 1), & (g_2; q_2) &= (1; 2), \\ (g_3; q_3) &= (2; 2), & (g_4; q_4) &= (1; 3), & (g_5; q_5) &= (2; 3). \end{aligned}$$

Тогда для матриц  $B$  и  $C$  имеем:

$$B = -\hat{\alpha}^{-1}\check{\alpha} = (0 \ -1 \ 0 \ 0 \ -1), \quad C = \hat{\alpha}^{-1} = (1).$$

Для элементов векторов  $\frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_1}^{s_1}} &= \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_1^1} = 0, \\ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{g_2}^{q_2}} &= \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_2^1} = 0, \\ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{g_2}^{q_2}} &= \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_1^2} = 0, \\ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{g_3}^{q_3}} &= \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_2^2} = 2(x_2(0,5) + 1,52), \\ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{g_4}^{q_4}} &= \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_1^3} = 2(x_1(1) + 0,29), \\ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{g_5}^{q_5}} &= \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_2^3} = 2(x_2(1) - 2,97), \\ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \hat{x}_i^j} &= 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Тогда условия (3.29) и (3.30)

$$\begin{aligned} \psi_{g_\nu}(\tilde{t}_+^{q_\nu}) &= \psi_{g_\nu}(\tilde{t}_-^{q_\nu}) + b_{1\nu} \left( \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_1}^{s_1}} + \psi_{k_1}(\tilde{t}_-^{s_1}) - \psi_{k_1}(\tilde{t}_+^{s_1}) \right) + \\ &+ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{g_\nu}^{q_\nu}}, \quad \nu = 1, 2, \dots, 5, \\ \psi_i(\hat{t}_+^j) &= \psi_i(\hat{t}_-^j) + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \hat{x}_i^j}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

примут вид:

$$(4.6) \quad \begin{cases} \psi_1(0) + \psi_2(1) = -2(x_2(1) - 2,97), \\ \psi_2(0) = 0, \\ \psi_1(1) = -2(x_1(1) + 0,29), \\ \psi_1(0,5^+) = \psi_1(0,5^-) + \psi_1(0), \\ \psi_2(0,5^+) = \psi_2(0,5^-) + 2(x_2(0,5) + 1,52), \\ \psi_i(\tilde{t}_+^j) = \psi_i(\tilde{t}_-^j), \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Компоненты градиента функционала по  $u(t)$  согласно формуле (3.5) определяются в виде

$$(4.7) \quad \text{grad}_u J(u, \vartheta) = -\psi_1(t) - 2(x_1(t) + x_2(t) - u(t)).$$

Компоненты градиента функционала по вектору  $\vartheta$  согласно формулам (3.26), (3.27)

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(u, \vartheta)}{\partial \vartheta_1^{(1)}} &= \left[ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_1}^{s_1}} + \Delta \psi_{k_1}(\tilde{t}^{s_1}) \right] c_{11} + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta_1^{(1)}} + \\ &+ \int_0^1 \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta_1^{(1)}} dt, \\ \frac{\partial J(u, \vartheta)}{\partial \vartheta_2^{(2)}} &= -\lambda + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta_2^{(2)}} + \int_0^1 \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta_2^{(2)}} dt, \end{aligned}$$

определяются так:

$$(4.8) \quad \frac{\partial J(u, \vartheta)}{\partial \vartheta_1} = -\psi_1(0) + 2(\vartheta_1 + 0,24), \quad \frac{\partial J(u, \vartheta)}{\partial \vartheta_2} = -\lambda + 2(\vartheta_2 + 1,17).$$

Итерационная процедура метода проекции градиента (4.1) проводилась с точностью по функционалу  $\varepsilon = 10^{-5}$  из разных начальных точек  $(u^{(0)}(t), \vartheta^{(0)})$ . Вспомогательные задачи Коши, используемые методом сдвига условий [8] как для решения прямой (4.2)–(4.3), так и сопряженной (4.5)–(4.6) задач, решались методом Рунге–Кутты четвертого порядка с различными шагами  $h = 0,01, 0,02, 0,05$ .

Проводилось сравнение значений компонент градиента по параметрам  $\vartheta$ , вычисленных при заданном управлении  $u = u(t)$  по формуле (4.8) и с использованием конечноразностной центральной схемы:

$$(4.9) \quad \frac{\partial J(u, \vartheta)}{\partial \vartheta_i} \approx \frac{J(u, \vartheta + \varepsilon e_i) - J(u, \vartheta - \varepsilon e_i)}{2\varepsilon}, \quad i = 1, 2,$$

где векторы  $e_1 = (1; 0)$ ,  $e_2 = (0; 1)$ .

**Таблица 1.** Значения функционала и нормированных градиентов функционала по параметру  $\vartheta$ , вычисленные в разных точках и шагах интегрирования

№	Значения параметров $\vartheta^{(0)}$	Шаг $h$	Значения нормированных градиентов		Значения функционала $J(u^{(0)}, \vartheta^{(0)})$
			$\text{grad}_{\vartheta, \text{norm.}}^{(\text{analyt.})} J(u^{(0)}, \vartheta^{(0)})$	$\text{grad}_{\vartheta, \text{norm.}}^{(\text{differ.})} J(u^{(0)}, \vartheta^{(0)})$	
1	(-0,125; 1,5)	0,05	(0,07271; 0,99735)	(0,05452; 0,99990)	390,43906819
		0,02	(0,07273; 0,99735)	(0,05992; 0,99892)	392,72670193
		0,01	(0,07273; 0,99735)	(0,06772; 0,99835)	397,30552111
2	(-1,5; 2,5)	0,05	(0,04705; 0,99889)	(0,03482; 0,99969)	669,16154749
		0,02	(0,04706; 0,99889)	(0,03899; 0,99971)	672,12173718
		0,01	(0,04707; 0,99889)	(0,04235; 0,99975)	678,04614524

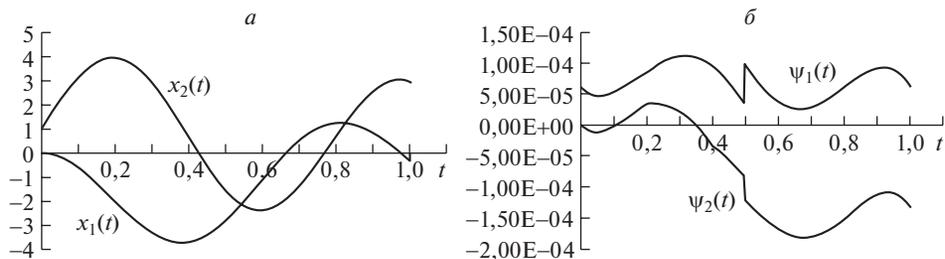
**Таблица 2.** Начальные значения управления, фазовых переменных, нормированных градиентов, вычисленных по предложенным формулам и по формуле (4.9)

$t$	$u^{(0)}(t)$	$x_1^{(0)}(t)$	$x_2^{(0)}(t)$	$\psi_1^{(0)}(t)$	$\psi_2^{(0)}(t)$	$\text{grad}_{u, \text{norm.}}^{(\text{analyt.})} J$	$\text{grad}_{u, \text{norm.}}^{(\text{differ.})} J$
0,00	2,0000	4,5015	-4,9825	-17,6713	0,0000	0,0328	0,0273
0,10	2,0100	4,2276	-3,4452	-14,7732	1,2205	0,0249	0,0193
0,20	2,0400	3,0911	-3,2437	-12,3997	2,0972	0,0243	0,0184
0,30	2,0900	2,1900	-4,8855	-32,9314	29,5948	0,0615	0,0626
0,40	2,1600	2,5457	-7,7654	-51,3018	59,2537	0,0956	0,1016
0,50	2,2500	4,4944	-10,5185	-63,5013	38,6945	0,1158	0,1024
0,60	2,3600	7,4976	-11,8338	-55,3290	39,1857	0,0994	0,0965
0,70	2,4900	10,4889	-11,2326	-50,5133	51,4172	0,0825	0,0817
0,80	2,6400	12,5467	-9,3378	-47,0810	62,2654	0,0665	0,0680
0,90	2,8100	13,4880	-7,4654	-42,9246	61,0030	0,0528	0,0557
1,00	3,0000	14,0259	-6,7815	-39,6537	59,8498	0,0451	0,0479

**Таблица 3.** Полученные на двадцатой итерации результаты решения задачи

$t$	Полученное решение				
	$u^{(20)}(t)$	$x_1^{(20)}(t)$	$x_2^{(20)}(t)$	$\psi_1^{(20)}(t)$	$\psi_2^{(20)}(t)$
0,00	1,00029	0,00007	0,99999	0,00006	0,00000
0,10	2,55535	-0,58653	3,14206	0,00005	-0,00000
0,20	1,98011	-1,97840	3,95871	0,00008	0,00003
0,30	-0,35852	-3,29485	2,93638	0,00011	0,00002
0,40	-3,01165	-3,67667	0,66486	0,00010	-0,00003
0,50	-4,32748	-2,80734	-1,52043	0,00010	-0,00012
0,60	-3,45330	-1,10499	-2,34852	0,00004	-0,00017
0,70	-0,85264	0,53120	-1,38383	0,00003	-0,00018
0,80	1,97589	1,26644	0,70963	0,00006	-0,00015
0,90	3,40763	0,83674	2,57099	0,00009	-0,00011
1,00	2,67746	-0,29100	2,96806	0,00006	-0,00013

В табл. 1 приведены значения функционала  $J(u, \vartheta)$  и нормированных компонент градиента для разных точек  $\vartheta$  и шагов интегрирования  $h$ , вычисленные по аналитической формуле (4.8) —  $\text{grad}_{\vartheta, \text{norm.}}^{(\text{analyt.})} J(u, \vartheta)$  и разностной схеме (4.9) —  $\text{grad}_{\vartheta, \text{norm.}}^{(\text{differ.})} J(u, \vartheta)$ , при  $u(t) = t^2 + 2$ .



Графики полученных решений прямой (а) и сопряженной (б) краевых задач.

В табл. 2 приведены величины эвклидовых норм градиента функционала  $\text{grad}_u J(u)$  в моменты времени  $t_i = 0,005i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 200$ , вычисленные на первой итерации по аналитической формуле (4.7) —  $\text{grad}_{u,norm.}^{(analyt.)} J = \text{grad}_{u,norm.}^{(analyt.)} J(u, \vartheta)$  и разностной схеме (4.9) —  $\text{grad}_{u,norm.}^{(differ.)} J = \text{grad}_{u,norm.}^{(differ.)} J(u, \vartheta)$ . В этой же таблице приведены результаты решения прямой и сопряженной краевых задач при начальном управлении  $u^0(t) = t^2 + 2$ .

В табл. 2 и 3 приведены результаты, полученные при решении задачи при числе разбиений временного интервала  $N = 200$ .

В табл. 3 приведены результаты, полученные на двадцатой итерации процедуры (4.1). При этом значение функционала в начальной точке  $\vartheta_1^{(0)} = -0,125$ ;  $\vartheta_2^{(0)} = 1,5$ ;  $u^0(t) = t^2 + 2$  было равно  $J(u^{(0)}, \vartheta^{(0)}) = 397,30552$ , а значение  $\lambda = -240,1465$ . На двадцатой итерации было получено значение функционала  $J(u^{(20)}, \vartheta^{(20)}) = 1,4 \cdot 10^{-8}$ , а значения параметров были следующими:  $\vartheta_1^{(20)} = -0,2403$ ,  $\vartheta_2^{(20)} = -1,1719$ ,  $\lambda^{(20)} = 0,0002$ .

На рисунке приведены графики полученных решений прямой (а) и сопряженной (б) краевых задач.

## 5. Заключение

В статье исследована линейная задача оптимального управления динамическим объектом, в которой оптимизируемыми кроме управляющих функций, участвующих в дифференциальных уравнениях, являются значения правых частей линейных нелокальных краевых условий. Краевые условия включают в себя в качестве слагаемых значения фазовой переменной в промежуточных точках и интегральные значения фазовой переменной на нескольких интервалах.

Исследованы условия существования и единственности решения краевой задачи с неразделенными краевыми условиями, выпуклость целевого функционала задачи. Применением техники методов Лагранжа и условного градиента сформулированы необходимые условия оптимальности.

Полученные результаты могут быть использованы в исследовании задач управления, описываемых нелинейными системами дифференциальных уравнений с линейными неразделенными краевыми условиями, включающими точечные и интегральные значения фазовых переменных и оптимизируемые правые части.

*Доказательство теоремы 1.* Доказательство теоремы проводится непосредственной подстановкой формулы Коши относительно системы (2.1)

$$(П.1) \quad x(t) = F(t, t^1)x^1 + \int_{t^1}^t F(t, \tau)A_2(\tau)u(\tau)d\tau$$

в условия (2.2). После несложных преобразований и группировки получим алгебраическую систему относительно  $x^1 = x(t^1)$ :

$$(П.2) \quad Lx^1 = D,$$

$$L = \sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i F(\tilde{t}^i, t^1) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j(t) F(t, t^1) dt,$$

$$D = \vartheta - \sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i \int_{t^1}^{\tilde{t}^i} F(\tilde{t}^i, \tau) A_2(\tau) u(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j(t) \int_{t^1}^t A_2(\tau) u(\tau) d\tau dt.$$

Известно, что система уравнений (П.2) имеет решение, причем единственное, если матрица  $L$  обратима, т.е. при выполнении условия (3.1). Ясно, что  $\text{rank} L$  не зависит от значений вектора  $D$ , а следовательно, не зависит от вектор-функции  $u(t)$  и вектора  $\vartheta$ . А из-за единственности представления (П.1) для решения задачи Коши относительно системы (2.1) и задача (2.1), (2.2) имеет решение, причем единственное, при выполнении условия (3.1). Теорема 1 доказана.

*Доказательство теоремы 2.* Пусть  $(u^1, \vartheta^1)$  и  $(u^2, \vartheta^2)$  — две пары произвольных допустимых управления и параметров, а  $x^1(t)$  и  $x^2(t)$  — соответствующие им решения краевой задачи (2.1), (2.2). Тогда

$$(П.3) \quad \dot{x}^1(t) = A_1(t)x^1(t) + A_2(t)u^1(t), \quad t \in [t^1, t^f],$$

$$(П.4) \quad \sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i x^1(\tilde{t}_i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j(t) x^1(t) dt = \vartheta^1,$$

$$(П.5) \quad \dot{x}^2(t) = A_1(t)x^2(t) + A_2(t)u^2(t), \quad t \in [t^1, t^f],$$

$$(П.6) \quad \sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i x^2(\tilde{t}_i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j(t) x^2(t) dt = \vartheta^2.$$

В силу выпуклости допустимых множеств  $U$  и  $V$  для произвольного  $\sigma \in [0; 1]$  имеет место:

$$(П.7) \quad u(t) = \sigma u^1(t) + (1 - \sigma)u^2(t) \in U, \quad \vartheta = \sigma \vartheta^1 + (1 - \sigma)\vartheta^2 \in V.$$

Обозначим  $x(t) = \sigma x^1(t) + (1 - \sigma)x^2(t)$ .

Умножим обе части (П.3) на  $\sigma$ , а (П.5) — на  $(1 - \sigma)$ , полученные равенства почленно сложим и сгруппируем:

$$\begin{aligned} & \sigma \dot{x}^1(t) + (1 - \sigma)\dot{x}^2(t) = \\ & = A_1(t) [\sigma x^1(t) + (1 - \sigma)x^2(t)] + A_2(t) [\sigma u^1(t) + (1 - \sigma)u^2(t)]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $x(t)$  удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (2.1).

Умножая обе части (П.4) на  $\sigma$ , а (П.6) — на  $(1 - \sigma)$ , складывая полученные равенства, после группировки получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i [\sigma x^1(\tilde{t}^i) + (1 - \sigma)x^2(\tilde{t}^i)] + \\ & + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j(t) [\sigma x^1(t) + (1 - \sigma)x^2(t)] dt = \sigma \vartheta^1 + (1 - \sigma)\vartheta^2. \end{aligned}$$

Учитывая обозначения (П.7), отсюда следует, что тройка  $(x(t), u(t), \vartheta)$  удовлетворяет условиям (2.2).

В силу выпуклости функций  $f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)$  и  $\Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)$  по аргументам  $x, \tilde{x}, \hat{x}, u, \vartheta$ , имеем:

$$\begin{aligned} \text{(П.8)} \quad J(u, \vartheta) &= J\left(\sigma u^1(t) + (1 - \sigma)u^2(t), \sigma \vartheta^1 + (1 - \sigma)\vartheta^2\right) = \\ &= \int_{t^1}^{t^f} f^0\left(\sigma x^1(t) + (1 - \sigma)x^2(t), \sigma u^1(t) + (1 - \sigma)u^2(t), \sigma \vartheta^1 + (1 - \sigma)\vartheta^2\right) dt + \\ &+ \Phi\left(\sigma \tilde{x}^1 + (1 - \lambda\sigma)\tilde{x}^2, \sigma \hat{x}^1 + (1 - \lambda\sigma)\hat{x}^2, \sigma \vartheta^1 + (1 - \sigma)\vartheta^2\right) \leq \\ &\leq \sigma \int_{t^1}^{t^f} f^0\left(x^1(t), u^1(t), \vartheta^1\right) dt + (1 - \sigma) \int_{t^1}^{t^f} f^0\left(x^2(t), u^2(t), \vartheta^2\right) dt + \\ &+ \sigma \Phi\left(\tilde{x}^1, \hat{x}^1, \vartheta^1\right) + (1 - \sigma)\Phi\left(\tilde{x}^2, \hat{x}^2, \vartheta^2\right) = \\ &= \sigma J\left(u^1, \vartheta^1\right) + (1 - \sigma)J\left(u^2, \vartheta^2\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует выпуклость функционала  $J(u, \vartheta)$ . Ясно, что если одна из функций  $\Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)$ ,  $f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)$  будет строго выпуклой, то знак неравенства в (П.8) будет строгим. Следовательно, и функционал задачи (2.1)–(2.3) будет строго выпуклым. Отсюда следует справедливость утверждения теоремы. Теорема 2 доказана.

*Доказательство теоремы 3.* Пусть  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  является решением краевой задачи (2.1), (2.2) при некоторых допустимых управлении  $u(t) \in U$ , векторе параметров  $\vartheta \in V$ , а  $x^1(t) = x(t) + \Delta x(t)$  — решение задачи (2.1), (2.2), соответствующее приращенным допустимым управлению  $u^1(t) = u(t) + \Delta u(t) \in U$  и вектору  $\vartheta^1 = \vartheta + \Delta \vartheta \in V$ :

$$(П.9) \quad \dot{x}^1(t) = A_1(t)x^1(t) + A_2(t)u^1(t), \quad t \in [t^1, t^f],$$

$$(П.10) \quad \sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i x^1(\tilde{t}^i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j(t) x^1(t) dt = \vartheta^1.$$

Из (2.1), (2.2) и (П.9), (П.10) следует, что имеет место:

$$(П.11) \quad \Delta \dot{x}(t) = A_1(t)\Delta x(t) + A_2(t)\Delta u(t), \quad t \in [t^1, t^f],$$

$$(П.12) \quad \sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i \Delta x(\tilde{t}^i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j(t) \Delta x(t) dt = \Delta \vartheta.$$

Тогда для приращения функционала (2.3) имеем

$$(П.13) \quad \begin{aligned} \Delta J(u, \vartheta) &= J(u^1, \vartheta^1) - J(u, \vartheta) = \\ &= \int_{t^1}^{t^f} \left[ f^0(x^1(t), u^1(t), \vartheta^1, t) - f^0(x(t), u(t), \vartheta, t) \right] dt + \Phi(\hat{x}^1, \hat{x}^1, \vartheta^1) - \Phi(\hat{x}, \hat{x}, \vartheta) = \\ &= \int_{t^1}^{t^f} \left[ \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial x} \Delta x(t) + \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial u} \Delta u(t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta} \Delta \vartheta \right] dt + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{l_1} \frac{\partial \Phi(\hat{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^i} \Delta x(\tilde{t}^i) + \sum_{j=1}^{2l_2} \frac{\partial \Phi(\hat{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \hat{x}^j} \Delta x(\hat{t}^j) + \frac{\partial \Phi(\hat{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta} \Delta \vartheta + R, \\ R &= o \left( \|\Delta x(t)\|_{C^{1,n}[t^1, t^f]}, \|\Delta u(t)\|_{L_2^m[t^1, t^f]}, \|\Delta \vartheta\|_{\mathbb{R}^n} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $R$  является остаточным членом. При принятых предположениях на данные задачи (2.1), (2.2), пользуясь известной техникой [24], можно получить оценку вида

$$\|\Delta x(t)\|_{C^{1,n}[t^1, t^f]} \leq c_1 \|\Delta u(t)\|_{L_2^m[t^1, t^f]} + c_2 \|\Delta \vartheta\|_{\mathbb{R}^n},$$

где положительные  $c_1, c_2$  не зависят от  $x(t)$ . Отсюда с учетом (П.13) следует дифференцируемость функционала  $J(u, \vartheta)$  как по  $u(t)$ , так и по  $\vartheta$ .

Объединим и упорядочим множества точек  $\tilde{t}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l_1$ , и  $\hat{t}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2l_2$ , обозначая полученный набор точек через  $\bar{t}_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, (l_1 + 2l_2)$ .

Перенесем правую часть (П.11) влево, умножим слева скалярно обе части полученного равенства на пока произвольную непрерывно дифференцируемую на интервалах  $(\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, (l_1 + 2l_2 - 1)$ ,  $n$ -мерную вектор-функцию  $\psi(t)$ . Интегрируя по частям полученное равенство и используя обозначения

$$\psi(t_+^i) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \psi(t_i + \varepsilon), \quad \psi(t_-^i) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \psi(t_i - \varepsilon),$$

получим:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t^1}^{t^f} \psi^T(t) [\Delta \dot{x}(t) - A_1(t) \Delta x(t) - A_2(t) \Delta u(t)] dt = \\ &= \sum_{i=1}^{(l_1+2l_2-1)} \int_{\bar{t}^i}^{\bar{t}^{i+1}} [\psi^T(t) \Delta \dot{x}(t) - \psi^T(t) A_1(t) \Delta x(t) - \psi^T(t) A_2(t) \Delta u(t)] dt = \\ &= \psi^T(t^f) \Delta x(t^f) - \psi^T(t^1) \Delta x(t^1) + \int_{t^1}^{t^f} [-\dot{\psi}^T(t) - \psi^T(t) A_1(t)] \Delta x(t) dt + \\ &\quad + \int_{t^1}^{t^f} [-\psi^T(t) A_2(t)] \Delta u(t) dt + \sum_{i=2}^{l_1-1} [\psi(\bar{t}_-^i) - \psi(\bar{t}_+^i)]^T \Delta x(\bar{t}^i) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{2l_2} [\psi(\hat{t}_-^j) - \psi(\hat{t}_+^j)]^T \Delta x(\hat{t}^j). \end{aligned}$$

Прибавив к (П.13) полученное выражение, равное нулю, после несложных преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned} \text{(П.14)} \quad \Delta J(u, \vartheta) &= \int_{t^1}^{t^f} \left[ -\dot{\psi}^T(t) - \psi^T(t) A_1(t) + \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial x} \right] \Delta x(t) dt + \\ &\quad + \int_{t^1}^{t^f} \left[ -\psi^T(t) A_2(t) + \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial u} \right] \Delta u(t) dt + \\ &\quad + \left[ \int_{t^1}^{t^f} \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta} dt + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right] \Delta \vartheta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \sum_{i=1}^{l_1} \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^i} \Delta x(\tilde{t}^i) + \sum_{j=1}^{2l_2} \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \hat{x}^j} \Delta x(\hat{t}^j) + \psi^T(t^f) \Delta x(t^f) - \right. \\
& \quad - \psi^T(t^1) \Delta x(t^1) + \sum_{i=2}^{l_1-1} [\psi(\tilde{t}_-^i) - \psi(\tilde{t}_+^i)]^T \Delta x(\tilde{t}^i) + \\
& \quad \left. + \sum_{j=1}^{2l_2} [\psi(\hat{t}_-^j) - \psi(\hat{t}_+^j)]^T \Delta x(\hat{t}^j) \right\} + R.
\end{aligned}$$

Займемся слагаемыми, находящимися внутри фигурной скобки.

В (П.14) используем условия (П.12) для получения зависимости каких-либо  $n$  компонент  $(nl_1)$ -мерного вектора

$$\Delta x(\tilde{t}) = \Delta \tilde{x} = \left( \Delta x_1(\tilde{t}^1), \Delta x_2(\tilde{t}^1), \dots, \Delta x_n(\tilde{t}^1), \dots, \Delta x_i(\tilde{t}^j), \dots, \Delta x_n(\tilde{t}^{l_1}) \right),$$

через остальные  $n(l_1 - 1)$  компонент.

Далее для простоты изложения технических деталей совместно с матричными операциями будем использовать покомпонентные записи формул.

Тогда соотношение (П.12) можно записать в виде:

$$\tilde{\alpha} \Delta \tilde{x} + \check{\alpha} \Delta \check{x} + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j(t) \Delta x(t) dt = \Delta \vartheta.$$

Отсюда, учитывая (3.2), имеем

$$(П.15) \quad \Delta \tilde{x} = \hat{\alpha}^{-1} \Delta \vartheta - \hat{\alpha}^{-1} \check{\alpha} \Delta \check{x} - \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \hat{\alpha}^{-1} \beta_j(t) \Delta x(t) dt.$$

Учитывая принятые обозначения:  $C = -\hat{\alpha}^{-1}$ ,  $B = -\hat{\alpha}^{-1} \check{\alpha}$ , (П.15) примет вид

$$(П.16) \quad \Delta \tilde{x} = C \Delta \vartheta + B \Delta \check{x} - \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \hat{\alpha}^{-1} \beta_j(t) \Delta x(t) dt$$

или в покомпонентной форме:

$$\begin{aligned}
(П.17) \quad \Delta \tilde{x}_i &= \Delta x_{k_i}(\tilde{t}^{s_i}) = \sum_{k=1}^n c_{ik} \Delta \vartheta_k + \sum_{\nu=1}^{l_1 n} b_{i\nu} \Delta x_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu}) - \\
& - \sum_{j=1}^{l_2} \sum_{k=1}^n \int_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \hat{\alpha}^{-1} \beta_{ik}^j(t) \Delta x_k(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad 1 \leq g_\nu \leq n.
\end{aligned}$$

Шестое и седьмое слагаемые в (П.14) запишем так:

$$\psi^T(t^f)\Delta x(t^f) = \sum_{j=1}^n \psi_j(t^f)\Delta x_j(t^f), \quad \psi^T(t^1)\Delta x(t^1) = \sum_{j=1}^n \psi_j(t^1)\Delta x_j(t^1).$$

Объединяя в (П.14) четвертое и восьмое слагаемые и учитывая (П.17), получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_i^j} + \Delta \psi_j(\tilde{t}^i) \right] \Delta x_j(\tilde{t}^i) = \\ & = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \Delta \psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i}) \right] \Delta x_{k_i}(\tilde{t}^{s_i}) + \\ & + \sum_{\nu=1}^{l_1 n} \left[ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{g_\nu}^{q_\nu}} + \Delta \psi_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu}) \right] \Delta x_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu}) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \Delta \psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i}) \right] \times \\ & \times \left[ \sum_{k=1}^n c_{ik} \Delta \vartheta_k + \sum_{\nu=1}^{l_1 n} b_{i\nu} \Delta x_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu}) - \sum_{j=1}^{l_2} \sum_{k=1}^n \int_{\tilde{t}^{2j-1}}^{\tilde{t}^{2j}} \bar{\alpha}^{-1} \beta_{ik}^j(t) \Delta x_k(t) dt \right] + \\ & + \sum_{\nu=1}^{l_1 n} \left[ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{g_\nu}^{q_\nu}} + \Delta \psi_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu}) \right] \Delta x_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu}). \end{aligned}$$

Из (П.14) с учетом полученного соотношения имеем:

$$\begin{aligned} \text{(П.18)} \quad \Delta J(u, \vartheta) &= \int_{t^1}^{t^f} \left[ -\dot{\psi}^T(t) - \psi^T(t) A_1(t) + \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial x} - \right. \\ & - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \Delta \psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i}) \right) \sum_{j=1}^{l_2} \chi_{[\tilde{t}^{2j-1}, \tilde{t}^{2j}]}(t) \bar{\alpha}^{-1} \beta_j(t) \left. \right] \Delta x(t) dt + \\ & + \int_{t^1}^{t^f} \left[ -\psi^T(t) A_2(t) + \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial u} \right] \Delta u(t) dt + \\ & + \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \Delta \psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i}) \right) c_{ik} + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta_k} + \right. \\ & \left. + \int_{t^1}^{t^f} \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta_k} dt \right\} \Delta \vartheta_k + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\nu=1}^{l_1 n} \left[ \sum_{i=1}^n b_{i\nu} \left( \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \Delta \psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i}) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{g_\nu}^{q_\nu}} + \Delta \psi_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu}) \right) \right] \Delta x_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu}) + \\
& \quad + \sum_{j=1}^{2l_2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \hat{x}_i^j} + \Delta \psi_i(\hat{t}^j) \right] \Delta x_i(\hat{t}^j) + R.
\end{aligned}$$

В силу произвольности вектор-функции  $\psi(t)$  потребуем, чтобы выражения в первой и в двух последних квадратных скобках (П.18) были равны нулю. Из первого требования получим сопряженную систему дифференциальных уравнений (3.7), а из других двух требований получим выражения:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n b_{i\nu} \left[ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \Delta \psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i}) \right] + \\
& + \left[ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{g_\nu}^{q_\nu}} + \Delta \psi_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu}) \right] = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, l_1 n, \\
& \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \hat{x}_i^j} + \Delta \psi_i(\hat{t}^j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, 2l_2.
\end{aligned}$$

Отсюда следуют условия (3.8), (3.9).

Тогда искомые компоненты градиента функционала по  $u(t)$  и  $\vartheta$  будут определяться из (П.18) как линейные части приращения функционала при  $\Delta u(t)$  и  $\Delta \vartheta$  формулами (3.5), (3.6).

Таким образом, теорема 3 доказана.

*Доказательство теоремы 4.* Займемся условиями оптимальности пары  $(u, \vartheta)$  при замененных условиях (2.2) на условия (3.3), (3.4). В отличие от приведенных выше выкладок для случая  $\bar{n} = n$ , далее для учета условий (3.4) будет использован метод Лагранжа и введен  $(n - \bar{n})$ -мерный дополнительный вектор параметров — множителей Лагранжа.

Снова, используя метод приращения оптимизируемых параметров  $(u, \vartheta)$ , для приращения функционала получим формулу (П.6). Условие (3.4) в приращениях примет вид

$$(П.19) \quad \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j^2(t) \Delta x(t) dt = \Delta \vartheta^{(2)}.$$

Перенесем все члены в (П.19) влево, умножим полученное выражение на пока произвольный вектор  $\lambda \in \mathbb{R}^{n-\bar{n}}$  и прибавим к (П.14). Для приращения

функционала получим:

$$\begin{aligned}
 (\text{П.20}) \quad \Delta J(u, \vartheta) = & \int_{t^1}^{t^f} \left[ -\dot{\psi}^T(t) - \psi^T(t)A_1(t) + \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial x} - \right. \\
 & \left. - \lambda^T \sum_{j=1}^{l_2} \chi_{[\hat{t}^{2j-1}, \hat{t}^{2j}]}(t) \beta_j^2(t) \right] \Delta x(t) dt + \\
 & + \int_{t^1}^{t^f} \left[ -\psi^T(t)A_2(t) + \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial u} \right] \Delta u(t) dt + \\
 & + \left[ \int_{t^1}^{t^f} \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta^{(1)}} dt + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta^{(1)}} \right] \Delta \vartheta^{(1)} + \\
 & + \left[ \int_{t^1}^{t^f} \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta^{(2)}} dt + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta^{(2)}} - \lambda^T \right] \Delta \vartheta^{(2)} + \\
 & + \left\{ \sum_{i=1}^{l_1} \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^i} \Delta x(\tilde{t}^i) + \sum_{j=1}^{2l_2} \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \hat{x}^j} \Delta x(\hat{t}^j) + \psi^T(t^f) \Delta x(t^f) - \right. \\
 & - \psi^T(t^1) \Delta x(t^1) + \sum_{i=2}^{l_1-1} [\psi(\tilde{t}_-^i) - \psi(\tilde{t}_+^i)]^T \Delta x(\tilde{t}^i) + \\
 & \left. + \sum_{j=1}^{2l_2} [\psi(\hat{t}_-^j) - \psi(\hat{t}_+^j)]^T \Delta x(\hat{t}^j) \right\} + R.
 \end{aligned}$$

Займемся слагаемыми, находящимися внутри фигурных скобок, учитывая, что ранг расширенной матрицы  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{l_1}]$  в условиях (3.3) равен  $\bar{n}$ . Из выражения в приращениях

$$\sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i \Delta x(\tilde{t}^i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j^1(t) \Delta x(t) dt = \Delta \vartheta^{(1)},$$

полученного из (3.3), выразим какие-либо  $\bar{n}$  компонент  $nl_1$ -мерного вектора  $\Delta \tilde{x}(\tilde{t})$  через остальные  $nl_1 - \bar{n}$  компонент. Как это было сделано выше, выделим из матрицы  $\alpha$  квадратную матрицу (минор)  $\hat{\alpha}$  размера  $\bar{n} \times \bar{n}$ . Пусть оставшиеся  $nl_1 - \bar{n}$  столбцов матрицы  $\alpha$  образуют матрицу  $\check{\alpha}$ . Соответствующие матрице  $\hat{\alpha}$  элементы вектора  $\Delta \tilde{x}(\tilde{t})$  обозначим через  $\Delta \hat{\tilde{x}}(\tilde{t})$ , оставшиеся

элементы образуют вектор  $\Delta\check{x}(\tilde{t})$ . Тогда имеем:

$$\Delta\hat{x}(\tilde{t}) = \hat{\alpha}^{-1}\Delta\vartheta^{(1)} - \hat{\alpha}^{-1}\check{\alpha}\Delta\check{x}(\tilde{t}) - \hat{\alpha}^{-1}\sum_{j=1}^{l_2}\int_{\hat{t}_{2j-1}}^{\hat{t}_{2j}}\beta_j^1(t)\Delta x(t)dt,$$

$$\Delta\hat{x} = C\Delta\vartheta + B\Delta\check{x} - \sum_{j=1}^{l_2}\int_{\hat{t}_{2j-1}}^{\hat{t}_{2j}}\hat{\alpha}^{-1}\beta_j^{(1)}(t)\Delta x(t)dt$$

или в покомпонентной форме:

$$(II.21) \quad \Delta\hat{x}_i = \Delta x_{k_i}(\tilde{t}^{s_i}) = \sum_{k=1}^n c_{ik}\Delta\vartheta_k + \sum_{\nu=1}^{l_1 n - \bar{n}} b_{i\nu}\Delta x_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu}) -$$

$$- \sum_{j=1}^{l_2}\sum_{k=1}^n \int_{\hat{t}_{2j-1}}^{\hat{t}_{2j}} \hat{\alpha}^{-1}\beta_{jik}^{(1)}(t)\Delta x_k(t)dt, \quad i = 1, 2, \dots, \bar{n}, \quad 1 \leq g_\nu \leq n.$$

Учитывая (II.21), в (II.20) получим:

$$(II.22) \quad \Delta J(u, \vartheta) = \int_{t^1}^{t^f} \left[ -\dot{\psi}^T(t) - \psi^T(t)A_1(t) + \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - \lambda^T \sum_{j=1}^{l_2} \chi_{[\hat{t}_{2j-1}, \hat{t}_{2j}]}(t)\beta_j^2(t) + \right.$$

$$\left. + \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + (\psi_{k_i}(\tilde{t}_-^{s_i}) - \psi_{k_i}(\tilde{t}_+^{s_i}))^T \right) \right) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{j=1}^{l_2} \chi_{[\hat{t}_{2j-1}, \hat{t}_{2j}]}(t)\hat{\alpha}^{-1}\beta_j^1(t) \right] \Delta x(t)dt +$$

$$+ \int_{t^1}^{t^f} \left[ -\psi^T(t)A_2(t) + \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial u} \right] \Delta u(t)dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\bar{n}} \left[ \sum_{i=1}^{\bar{n}} \left[ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \Delta\psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i}) \right] c_{ik} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta_k^{(1)}} + \int_{t^1}^{t^f} \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta_k^{(1)}} dt \right] \Delta \vartheta_k^{(1)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{n-\bar{n}} \left[ -\lambda_k + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta_k^{(2)}} + \int_{t^1}^{t^f} \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta_k^{(2)}} dt \right] \Delta \vartheta_k^{(2)} + \\
& + \sum_{\nu=1}^{l_1 n - \bar{n}} \left[ \sum_{i=1}^n b_{i\nu} \left( \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \Delta \psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i}) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{g_\nu}^{q_\nu}} + \Delta \psi_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu}) \right) \right] \Delta x_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu}) + \\
& + \sum_{j=1}^{2l_2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \hat{x}_i^j} + \Delta \psi_i(\hat{t}^j) \right] \Delta x_i(\hat{t}^j) + R.
\end{aligned}$$

В силу произвольности вектор-функции  $\psi(t)$  и вектора  $\lambda$  потребуем от них, чтобы выражение в первой квадратной скобке (П.22) было равно нулю, откуда получим сопряженное дифференциальное уравнение (3.28). А в силу произвольности компонент остаточного вектора  $\Delta x(\hat{t})$  и приращений  $\Delta x(\hat{t}^j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2l_2$ , потребуем, чтобы выражения в двух последних квадратных скобках (П.22) были равны нулю:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\bar{n}} b_{i\nu} \left[ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \Delta \psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i}) \right] + \left[ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{g_\nu}^{q_\nu}} + \Delta \psi_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu}) \right] &= 0, \\
\nu = 1, 2, \dots, (l_1 n - \bar{n}), \\
\frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \hat{x}_i^j} + \Delta \psi_i(\hat{t}^j) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, 2l_2.
\end{aligned}$$

Отсюда получим краевые условия (3.29)–(3.30) для сопряженного уравнения (3.28).

Из (П.22) ясно, что формула для градиента функционала по  $u(t)$  будет такой же, как в (3.5), а компоненты градиента по  $\vartheta$  определяются формулами (3.26), (3.27). Таким образом, теорема 4 доказана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nicoletti O. Sulle condizioni iniziali che determiniano gli integrali della differenziali ordinazie. Atti della R. Acc. Sc. Torino, 1897.
2. Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград, 1917.
3. De la Vallée-Poussin, Ch.J. Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une integrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'orde  $n$  // J. Math. Pures Appl. 1929. V. 8. No. 9.
4. Кизурадзе И.Т. Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Нов. достижения. 1987. Т. 30. С. 3–103.

5. *Нахушев А.М.* О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 21. № 1. С. 92–101.
6. *Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E.* The Correct Solvability of a Linear Multipoint Boundary Value Problem // Math. J. 2005. V. 5. No. 15. P. 30–38.
7. *Асанова А.Т., Иманчиев А.Е., Кадирбаева Ж.М.* О разрешимости нелокальной задачи для системы дифференциальных уравнений соболевского типа с многоточечным условием // Изв. вузов. Матем. 2019. № 12. С. 3–15.
8. *Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.* On the Solution of Boundary Value Problems with Nonseparated Multipoint and Integral Conditions // Diff. Equations. 2013. V. 49. No. 9. P. 1114–1125.
9. *Abdullaev V.M., Aida-zade K.R.* Numerical Method of Solution to Loaded Nonlocal Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations // Comput. Math. Math. Phys. 2014. V. 54. No. 7. P. 1096–1109.
10. *Assanova A.T.* Solvability of a Nonlocal Problem for a Hyperbolic Equation with Integral Conditions // Electr. J. Differ. Equat. 2017. V. 170. P. 1–12.
11. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Об одном подходе к синтезу управления процессами с распределенными параметрами // АИТ. 2012. Т. 73. № 9. С. 3–19.  
*Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.* On an Approach to Designing Control of the Distributed-Parameter Processes // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 9. P. 1443–1455.
12. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Оптимизация размещения точек контроля при синтезе управления процессом нагрева // АИТ. 2017. Т. 78. № 9. С. 49–66.  
*Aida-zade K.R., Abdullayev V.M.* Optimizing Placement of the Control Points at Synthesis of the Heating Process Control // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 9. P. 1585–1599.
13. *Айда-заде К.Р., Гашимов В.А.* Оптимизация размещения точек контроля в одной задаче синтеза граничного управления процессом нагрева стержня // АИТ. 2018. Т. 79. № 9. С. 122–142.  
*Aida-zade K.R., Hashimov V.A.* Optimization of Measurement Points Positioning in a Border Control Synthesis Problem for the Process of Heating a Rod // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. P. 1643–1660.
14. *Mardanov M.J., Sharifov Y.A., Zeynalli F.M.* Existence and Uniqueness of the Solutions to Impulsive Nonlinear Integro-Differential Equations with Nonlocal Boundary Conditions // Proc. Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan. 2019. V. 45. No. 2. P. 222–232.
15. *Sharifov Y.A., Mammadova N.B.* Optimal Control Problem Described by Impulsive Differential Equations with Nonlocal Boundary Conditions // Differ. Equations. 2014. V. 50. No. 3. P. 403–411.
16. *Devadze D., Beridze V.* Optimality Conditions and Solution Algorithms of Optimal Control Problems for Nonlocal Boundary-Value Problems // J. Math Sci. 2016. V. 218. P. 731–736.
17. *Зубова С.П., Раецкая Е.В.* Алгоритм решения линейных многоточечных задач управления методом каскадной декомпозиции // АИТ. 2017. Т. 78. № 7. С. 22–38.  
*Zubova S.P., Raetskaya E.V.* Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 7. P. 1189–1202.
18. *Дмитрук А.В., Каганович А.М.* Принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными ограничениями // В сб. “Нелинейная динамика и управление”. М: Физматлит, 2008. Вып. 6. С. 101–136.

19. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
20. *Ащепков Л.Т.* Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // Прикл. матем. механика. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 215–222.
21. *Васильева О.О., Мизуками К.* Динамические процессы, описываемые краевой задачей: необходимые условия оптимальности и методы решения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 1. С. 95–100.
22. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* Подход к численному решению задач оптимального управления нагруженными дифференциальными уравнениями с нелокальными условиями // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 5. С. 739–751.
23. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Ленанд, 2019.
24. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002. С. 824.
25. *Aida-zade K.R., Abdullayev V.M.* Solution to a Class of Inverse Problems for System of Loaded Ordinary Differential Equations with Integral Conditions // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2016. V. 24. No. 5. P. 543–558.
26. *Moszynski K.* A Method of Solving the Boundary Value Problem for a System of Linear Ordinary Differential Equation // Algorytmy. Varshava. 1964. V.11. № 3. P. 25–43.
27. *Абрамов А.А.* Вариант метода прогонки // Журн. вычисл. матем. и математ. физ. 1961. Т. 1. № 2. С. 349–352.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Хрустальевым.*

Поступила в редакцию 19.07.2020

После доработки 28.09.2020

Принята к публикации 28.10.2020