

© 2021 г. В.В. АВETИСЯН, д-р физ.-мат. наук (vavetisyan@ysu.am)  
(Ереванский государственный университет)

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ СХВАТА ДВУЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА С УЧЕТОМ ТИПА КОНЕЧНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Рассматривается задача оптимального по быстродействию управления перемещением точечного схвата плоского двузвенного манипулятора с прямолинейными звеньями равной длины и со вторым статически уравновешенным звеном. На плоскости обобщенных координат манипулятора построены области достижимых конфигураций, позволяющие из двух конечных конфигураций, соответствующих заданному терминальному положению схвата, определить ту конфигурацию и тот способ управления манипулятором, при которых обеспечивается перемещение схвата из начального положения покоя в заданное конечное положение покоя за минимальное время. Численными расчетами установлено, что оптимальный выбор типа конечной конфигурации может приводить к значительному увеличению быстродействия.

*Ключевые слова:* двузвенный манипулятор, оптимальное по быстродействию управление, конечный тип конфигурации.

DOI: 10.31857/S000523102102001X

### 1. Введение

В различных отраслях современного производства широко применяются двузвенные роботы-манипуляторы. Используются они как самостоятельно, так и в составе конструкций многозвенных манипуляционных роботов таких, для которых именно эти два звена выполняют основной объем движений робота при выполнении им различных технологических операций. Поэтому разработка эффективных режимов управления двузвенным роботом-манипулятором по сей день представляет собой актуальную задачу. Одним из возможных подходов к рациональному расчету режимов управления является их оптимизация по отношению к некоторому критерию качества функционирования манипулятора (время транспортных операций, энергозатраты и т.д.). Существенной составляющей при формировании оптимальных алгоритмов управления движением двузвенника является учет его конструктивных и геометрических особенностей. Для плоского двузвенного манипулятора каждому положению схвата отвечают две возможные конфигурации, отличающиеся знаком угла между звеньями. Следовательно, качество перемещения схвата в терминальное положение зависит как от типа конечной конфигурации, так и от способа управления, приводящего манипулятор в

эту конфигурацию. В [1, 2] для двузвенного манипулятора с безынерционными звеньями построены оптимальные и субоптимальные законы управления в двухточечной задаче перемещения схвата с грузом. Выявлена существенная зависимость времени приведения схвата в терминальное состояние от типа конфигурации манипулятора и решена задача выбора оптимального типа конфигурации. В [3] разработан графоаналитический подход к построению субоптимальных по быстродействию программных управлений, приводящих двузвенный манипулятор с произвольными геометрическими и инерционными характеристиками из начальной конфигурации покоя в произвольную конечную конфигурацию покоя. Методам оптимизации для решения задачи управления роботами, в том числе двузвенными манипуляторами, и расчета их конструктивных параметров посвящены публикации [4–8]. В [9–11, 12] рассмотрены модели механического и электромеханического плоского двузвенного манипулятора со вторым статически уравновешенным звеном и с произвольными инерционными характеристиками. В предположении, что конструкция манипулятора допускает полный поворот звеньев в направлениях по часовой и против часовой стрелки, установлено, что в одну и ту же конечную конфигурацию манипулятор можно привести при различных сочетаниях поворотов звеньев. Для каждого из двух типов конечных конфигураций графоаналитической процедурой решена задача выбора направлений поворотов звеньев манипулятора и определения способа управления, при которых заданный критерий качества (быстродействие [9, 10], энергозатраты [12] и комбинированный от них функционал [11]) достигает минимального значения. Прямым вычислением найден оптимальный тип конечной конфигурации. В [13] методом параметрической оптимизации построено субоптимальное по квадратичному функционалу управление движением плоского двузвенника с учетом возможных конфигураций манипулятора, соответствующих заданным положениям схвата в начале и в конце движения.

В настоящей статье рассматривается механическая модель двузвенного манипулятора [3], конструкция которого в отличие от [3, 9–12] допускает лишь пол-оборота вращений звеньев в положительном и отрицательном направлениях. На плоскости обобщенных координат манипулятора построены области, позволяющие по заданным координатам терминального положения схвата манипулятора определить тип конечной конфигурации и способ управления, при которых обеспечивается перемещение схвата из начального положения покоя в заданное конечное положение покоя за минимальное время.

## 2. Расчетная модель манипулятора

Рассмотрим механическую двузвенную систему, состоящую из двух абсолютно жестких звеньев  $G_1$ ,  $G_2$  равной длины, соединенных шарниром  $O_2$ . Звено  $G_1$  при помощи шарнира  $O_1$  связано с неподвижным основанием. Шарниры являются идеальными, цилиндрическими, а их оси параллельны друг другу. На конце второго звена в точке  $O_3$  укреплен схват. Будем предполагать, что линейные размеры схвата много меньше длин звеньев и при исследовании транспортных движений считать схват материальной точкой. Управление манипулятором осуществляется с помощью двух независимых приводов

$D_1, D_2$ . Привод  $D_1$  осуществляет взаимодействие первого звена с основанием, а  $D_2$  – взаимодействие между звеньями  $G_1, G_2$  манипулятора. Управляющими функциями в исследуемой модели манипулятора являются величины  $M_1, M_2$  – вращающие моменты относительно осей  $O_1, O_2$ , развиваемые приводами  $D_1, D_2$  соответственно. Описанная система совершает плоскопараллельное движение в горизонтальной плоскости, перпендикулярной осям шарниров  $O_1, O_2$ .

Уравнения Лагранжа, описывающие движение рассматриваемой системы, имеют вид [3]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} (I_1 + m_2 L^2) \ddot{\varphi}_1 + m_2 L l f_1(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_2) &= M_1 - M_2, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 L l f_2(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1) &= M_2, \\ f_1(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_2) &= \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \\ f_2(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1) &= \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\varphi_1$  – угол между осью  $O_1x$  и прямой  $O_1O_2$ ;  $\varphi_2$  – угол между осью  $O_1x$  и прямой  $O_2C$ , проходящей через центр масс  $C$  звена  $G_2$ ;  $L = |O_1O_2| = |O_2O_3|$  – длина первого и второго звеньев;  $l = |O_2C|$  – расстояние от оси  $O_2$  до центра масс звена  $G_2$ ;  $I_1, I_2$  – моменты инерции звеньев  $G_1, G_2$  относительно осей шарниров  $O_1, O_2$  соответственно;  $m$  – масса звена  $G_2$ . Примем, что положительное направление отсчета углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  ведется против часовой стрелки от прямой  $O_1x$ .

В данной статье будем рассматривать частный случай манипулятора (2.1), когда второе звено манипулятора статически уравновешено, т.е. в (2.1)  $l = 0$ :

$$(2.2) \quad (I_1 + m_2 L^2) \ddot{\varphi}_1 = M_1 - M_2, \quad I_2 \ddot{\varphi}_2 = M_2.$$

На управляющие моменты  $M_1, M_2$  имеются ограничения

$$(2.3) \quad |M_1| \leq M_1^0, \quad |M_2| \leq M_2^0,$$

где  $M_1^0, M_2^0$  – заданные постоянные.

### 3. Постановка задачи

Цель управления манипулятором состоит в приведении схвата в заданное пространственное положение в предположении, что конструкция манипулятора допускает лишь пол-оборота вращений звеньев в положительном и отрицательном направлениях. Из геометрии двузвенника следует, что при плоскопараллельном движении положение схвата полностью определяется, например, декартовыми координатами проекции точки  $O_3$  на горизонтальную плоскость. Задание обобщенных координат  $\varphi_1, \varphi_2$  однозначно определяет положение точечного схвата, поскольку между декартовыми координатами проекции точки  $O_3$  и обобщенными координатами  $\varphi_1, \varphi_2$  существует однозначная связь

$$(3.1) \quad x = L(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2), \quad y = L(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2).$$

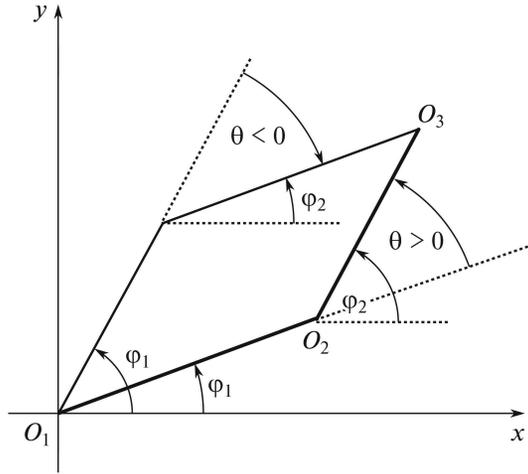


Рис. 1. Положению схвата  $O_3$  соответствуют две конфигурации двузвенника, отличающиеся знаком угла между звеньями  $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$ .

Однако углы  $\varphi_1, \varphi_2$  определяются по декартовым координатам  $x, y$  неоднозначно. С учетом конструктивных ограничений двузвенника разрешим систему уравнений (3.1) относительно  $\varphi_1, \varphi_2$  и выберем из них те решения, которые по модулю не больше  $\pi$ :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} |\varphi_1| &= \left| \arctg \frac{y}{x} - \frac{1}{2}K\delta + \pi\alpha(x)\text{sign}y \right| \leq \pi, \\ |\varphi_2| &= \left| \arctg \frac{y}{x} + \frac{1}{2}K\delta + \pi\alpha(x)\text{sign}y \right| \leq \pi, \end{aligned}$$

$$K = \pm 1, \quad \delta = \arccos \left( \frac{x^2 + y^2 - 2L^2}{2L^2} \right), \quad \alpha(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0. \end{cases}$$

Из (3.2) вытекает, что каждому положению схвата  $(x, y)$  внутри рабочей зоны манипулятора  $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4L^2\}$  соответствуют две конфигурации двузвенника, отличающиеся знаком угла между звеньями  $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$  (рис. 1). Величина  $\delta$  в (3.2) – угол при вершинах  $O_1$  и  $O_3$  треугольника  $O_1O_2O_3$ . Как следует из (3.2), значениям  $K = 1$  и  $K = -1$  отвечают конфигурации, для которых соответственно  $\theta > 0$  и  $\theta < 0$ , т.е.  $K = \text{sign}\theta$ . Конфигурация, отвечающая значению  $K = 1, 0 < \theta < \pi$ , показана на рис. 1 жирной сплошной линией, а конфигурация  $K = -1, -\pi < \theta < 0$  – тонкой сплошной линией. Если обозначить их через  $\{\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)\}_K, K = \pm 1$ , то согласно (3.2) между углами  $\varphi_1, \varphi_2$ , отвечающими различным значениям  $K$ , имеется следующая связь:

$$(3.3) \quad \varphi_1(x, y)|_{K=-1} = \varphi_2(x, y)|_{K=+1}, \quad \varphi_2(x, y)|_{K=-1} = \varphi_1(x, y)|_{K=+1}$$

(в дальнейшем аргументы  $(x, y)$  функций  $\varphi_i(x, y)$  будут опускаться).

Таким образом, на плоскости обобщенных координат манипулятора

$$(3.4) \quad \Phi = \{\varphi_1, \varphi_2 : -\pi \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq \pi\}$$

точки  $(\varphi_1, \varphi_2)$ ,  $(\varphi_2, \varphi_1)$ , отвечающие конфигурациям  $\{\varphi_1, \varphi_2\}_{K=1}$ ,  $\{\varphi_2, \varphi_1\}_{K=-1}$  соответственно, симметричны относительно биссектрисы I и III квадрантов и при этом

$$(3.5) \quad \begin{aligned} (\varphi_1, \varphi_2) \in \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_2 \geq \varphi_1\} &= \Phi(+1), \\ (\varphi_2, \varphi_1) \in \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_2 \leq \varphi_1\} &= \Phi(-1). \end{aligned}$$

Систему (2.2) будем рассматривать при начальных условиях

$$(3.6) \quad \varphi_i(0) = \varphi_i^0, \quad \dot{\varphi}_i(0) = 0, \quad i = 1, 2,$$

которым согласно (3.1) соответствует начальное положение покоя схвата

$$(3.7) \quad \begin{aligned} x(0) &= L(\cos \varphi_1^0 + \cos \varphi_2^0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = 0, \\ y(0) &= L(\sin \varphi_1^0 + \sin \varphi_2^0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = 0. \end{aligned}$$

Пусть заданы несовпадающие начальное  $(x^0, y^0)$  (3.7) и конечное  $(x^T, y^T)$  положения схвата в рабочей зоне манипулятора  $R$ . Так как положению  $(x^T, y^T)$  отвечают две конфигурации  $\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}_K$ ,  $K = \pm 1$ , то в качестве конечных условий для системы (2.2) рассмотрим условия

$$(3.8) \quad \varphi_i|_K(T) = \varphi_i^T|_K, \quad \dot{\varphi}_i|_K(T) = 0, \quad i = 1, 2; \quad K = \pm 1,$$

которым однозначно соответствует одно и то же положение покоя схвата

$$(3.9) \quad \begin{aligned} x(T) &= L(\cos \varphi_1^T|_K + \cos \varphi_2^T|_K) = x^T, \quad \dot{x}(T) = 0, \\ y(T) &= L(\sin \varphi_1^T|_K + \sin \varphi_2^T|_K) = y^T, \quad \dot{y}(T) = 0, \end{aligned} \quad K = \pm 1.$$

Система (2.2), (2.3) полностью управляема в классе кусочно-непрерывных функций  $M_1(t)$ ,  $M_2(t)$  [14], поэтому при заданных краевых состояниях схвата (3.7), (3.9) каждой совокупности условий (3.8) ( $K = \pm 1$ ) и каждому допустимому управлению  $M = (M_1(t), M_2(t))$  соответствует некоторое время перемещения

$$(3.10) \quad T = T\left[\left\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\right\}|_K, M\right].$$

Рассмотрим следующую задачу оптимального по быстродействию управления перемещением схвата манипулятора с учетом конечного типа конфигурации.

*Задача.* Определить тип  $K = \pm 1$  конечной конфигурации (3.8) и закон изменения ограниченного управления  $M = (M_1(t), M_2(t))$  (2.3), доставляющие минимум

$$(3.11) \quad T^* = \min_K \min_M T\left[\left\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\right\}|_K, M\right]$$

при приведении схвата манипулятора из начального состояния покоя (3.7) в заданное состояние покоя (3.9).

#### 4. Построение оптимального по быстродействию управления

Внутренний минимум в (3.11) является задачей построения оптимального по быстродействию управления  $M = (M_1, M_2)$  системой (2.2), (2.3), (3.6), (3.8) для фиксированного значения  $K$ . При решении этой задачи в краевых условиях (3.8) параметр  $K$  будем опускать, подразумевая тем самым, что конечная конфигурация  $\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}$  отвечает одному из значений  $K = +1$  или  $K = -1$ .

В (2.2), (2.3), (3.1), (3.6)–(3.9) перейдем к безразмерным переменным

$$(4.1) \quad \begin{aligned} t' &= (M_2^0 / (m_2 L^2))^{1/2} t, & I'_i &= I_i / (m_2 L^2), & M'_i &= M_i / M_2^0, \\ x' &= x / L, & y' &= y / L, & \varphi'_i &= \varphi_i - \varphi_i^0, & \varphi_i'^{0,T} &= \varphi_i^{0,T} - \varphi_i^0, & i &= 1, 2. \end{aligned}$$

Если теперь опустить штрихи, то соотношения (2.2), (2.3), (3.1), (3.2), (3.6)–(3.9) упростятся: в них получим  $\varphi_{1,2}^0 = 0$ ,  $L = 1$ ,  $M_2^0 = 1$ , а система (2.2), ограничения (2.3) и краевые условия (3.6), (3.8) примут вид:

$$(4.2) \quad (I_1 + 1)\ddot{\varphi}_1 = M_1 - M_2, \quad I_2\ddot{\varphi}_2 = M_2,$$

$$(4.3) \quad |M_1| \leq M_1^0, \quad |M_2| \leq 1,$$

$$(4.4) \quad \varphi_i(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_i(0) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$(4.5) \quad \varphi_i(T) = \varphi_i^T, \quad \dot{\varphi}_i(T) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Заменой переменных

$$(4.6) \quad q_1 = (I_1 + 1)\varphi_1 + I_2\varphi_2, \quad q_2 = I_2\varphi_2$$

система (4.2) приводится к простейшей форме, отвечающей разделению движений по координатам  $q_1, q_2$ :

$$(4.7) \quad \ddot{q}_1 = M_1, \quad \ddot{q}_2 = M_2.$$

Начальные и конечные условия для системы (4.7) согласно (4.4)–(4.6), имеют вид:

$$(4.8) \quad q_1(0) = q_1^0 = 0, \quad q_2(0) = q_2^0 = 0, \quad \dot{q}_{1,2}(0) = 0,$$

$$(4.9) \quad q_1(T) = q_1^T = (I_1 + 1)\varphi_1^T + I_2\varphi_2^T, \quad q_2(T) = q_2^T = I_2\varphi_2^T, \quad \dot{q}_{1,2}(T) = 0.$$

Решение задачи об оптимальном по быстродействию управлении для системы, описываемой отдельно каждым из уравнений (4.7), известно (см. [15]) и имеет вид:

$$(4.10) \quad M_i^* = \begin{cases} M_i^0 \text{sign}(q_i^T), & t \in [0, \tau_i), \\ -M_i^0 \text{sign}(q_i^T), & t \in [\tau_i, T_i], \end{cases}$$

$$T_i = 2\tau_i = 2(|q_i^T| / M_i^0)^{1/2}, \quad i = 1, 2; \quad M_2^0 = 1.$$

Управление  $M_i^*(t)$  переводит систему, описываемую уравнением  $\ddot{q}_i = M_i$  с ограничением  $|M_i| \leq M_i^0$ , за минимально время  $T_i$  из состояния  $q_i(0) = 0$ ,  $\dot{q}_i(0) = 0$  в состояние  $q_i(T_i) = q_i^T$ ,  $\dot{q}_i(T_i) = 0$ .

Заметим, что минимальное значение времени перехода системы (4.7) из состояния (4.8) в состояние (4.9) не может быть меньше наибольшего из двух минимальных значений времени перехода, соответствующих рассмотренным независимым подсистемам (4.7) при соответствующих граничных условиях. Таким образом, искомое время быстрогодействия равно

$$(4.11) \quad T = \max(T_1, T_2).$$

Возможны следующие случаи.

A1. Если  $T_1 > T_2$ , то  $M_1(t) = M_1^*$ , а  $M_2(t)$  является любым допустимым управлением, осуществляющим требуемый переход за время  $T_1$ . При этом на плоскости  $(q_1, q_2)$  неравенству  $T_1 > T_2$  в силу (4.10) отвечает область, определяемая неравенством

$$(4.12) \quad |q_1^T|/M_1^0 > |q_2^T|.$$

A2. Если  $T_2 > T_1$ , которому на плоскости  $(q_1, q_2)$  отвечает область, определяемая неравенством

$$(4.13) \quad |q_2^T| > |q_1^T|/M_1^0,$$

то, наоборот,  $M_2(t) = M_2^*$ , а  $M_1(t)$  является любым допустимым управлением, осуществляющим требуемый переход за время  $T_2$ .

A3. Если  $T_1 = T_2 = T$ , то  $M_1(t) = M_1^*$ ,  $M_2(t) = M_2^*$  только для тех точек на плоскости  $(q_1, q_2)$ , для которых

$$(4.14) \quad |q_1^T|/M_1^0 = |q_2^T|.$$

В случаях A1 и A2 будем задавать управления  $M_2(t)$  и  $M_1(t)$  в следующих формах соответственно:

$$(4.15) \quad M_2(t) = \begin{cases} \text{sign}q_2^T, & t \in [0, \tau_2^{(1)}), \\ 0, & t \in [\tau_2^{(1)}, \tau_2^{(2)}), \\ -\text{sign}q_2^T, & t \in [\tau_2^{(2)}, T_1], \end{cases}$$

$$M_1(t) = \begin{cases} M_1^0 \text{sign}q_1^T, & t \in [0, \tau_1^{(1)}), \\ 0, & t \in [\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}), \\ -M_1^0 \text{sign}q_1^T, & t \in [\tau_1^{(2)}, T_2], \end{cases}$$

имеющих по две точки переключения и принимающих по модулю значения, не превосходящие максимальных.

Интегрируем уравнения (4.7) с краевыми условиями (4.8), (4.9) при управлениях (4.15) на интервалах времени  $[0, T_2]$  и  $[0, T_1]$ :

$$(4.16) \quad \begin{aligned} q_2(T) &= \tau_2^{(1)} \tau_2^{(2)} \text{sign}(q_2^T) = q_2^T, \\ \dot{q}_2(T) &= \text{sign}(q_2^T)(\tau_2^{(1)} + \tau_2^{(2)} - T_1) = 0, \end{aligned}$$

$$(4.17) \quad \begin{aligned} q_1(T) &= \tau_1^{(1)} \tau_1^{(2)} M_1^0 \text{sign}(q_1^T) = q_1^T, \\ \dot{q}_1(T) &= M_1^0 \text{sign}(q_1^T)(\tau_1^{(1)} + \tau_1^{(2)} - T_2) = 0. \end{aligned}$$

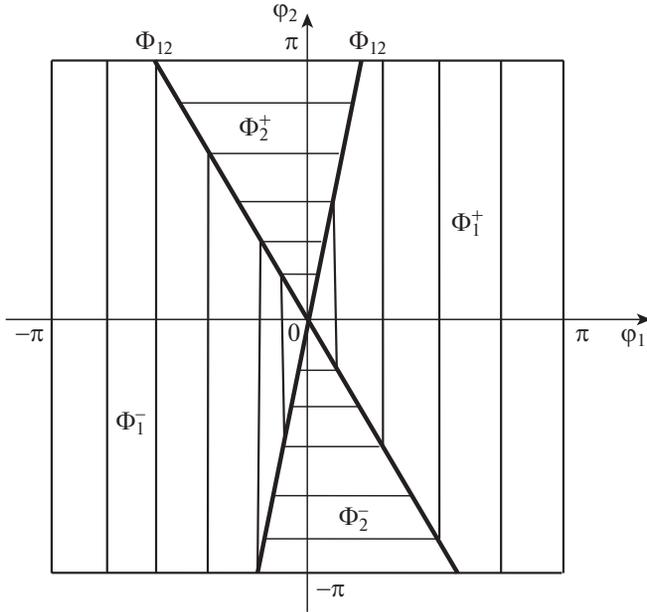


Рис. 2. В областях  $(\Phi_1^+ \cup \Phi_1^-)$  и  $(\Phi_2^+ \cup \Phi_2^-)$  реализуются случаи А1 ( $T_1 > T_2$ ) и А2 ( $T_2 > T_1$ ) соответственно, а в областях  $\Phi_{12}$  и  $\Phi_{21}$  – случай А3 ( $T_1 = T_2$ ).

Решение системы (4.16) и (4.17) относительно параметров  $\tau_2^{(1)}, \tau_2^{(2)}$  и  $\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}$  соответственно не является единственным. Единственность гарантируется условиями  $\tau_i^{(1)} \leq \tau_i^{(2)}$ ,  $i = 1, 2$ , в соответствии с (4.15). Разрешив систему (4.16), (4.17) с учетом этих замечаний и переходя к исходным переменным по формулам (4.6), получим, что в случаях А1, А2 моменты переключения управлений  $M_2(t)$ ,  $M_1(t)$  (4.15) определяются по следующим формулам соответственно:

$$(4.18) \quad \begin{aligned} & \tau_2^{(1)} = T_1/2 - (T_1^2/4 - |I_2\varphi_2^T|)^{1/2}, \\ & (A1, M_2) : \tau_2^{(2)} = T_1/2 + (T_1^2/4 - |I_2\varphi_2^T|)^{1/2}, \\ & T_1 = 2 (|(I_1 + 1)\varphi_1^T + I_2\varphi_2^T|/M_1^0)^{1/2}, \end{aligned}$$

$$(4.19) \quad \begin{aligned} & \tau_1^{(1)} = T_2/2 - (T_2^2/4 - |(I_1 + 1)\varphi_1^T + I_2\varphi_2^T|/M_1^0)^{1/2}, \\ & (A2, M_1) : \tau_1^{(2)} = T_2/2 + (T_2^2/4 - |(I_1 + 1)\varphi_1^T + I_2\varphi_2^T|/M_1^0)^{1/2}, \\ & T_2 = 2 (|I_2\varphi_2^T|)^{1/2}. \end{aligned}$$

Неравенствам (4.12) и (4.13) в исходных переменных (4.6) на плоскости  $(\varphi_1, \varphi_2)$  отвечают области  $(\Phi_1^+ \cup \Phi_1^-)$  и  $(\Phi_2^+ \cup \Phi_2^-)$ , в которых реализуются случаи А1 ( $T_1 > T_2$ ) и А2 ( $T_2 > T_1$ ) соответственно. На рис. 2 области  $\Phi_1^+, \Phi_1^-$  заштрихованы вертикальными, а области  $\Phi_2^+, \Phi_2^-$  – горизонтальными линиями. В обозначениях этих областей нижний индекс определяет номер управляющего момента, имеющего одно переключение, а верхний – знак этого

управления на первом интервале. В соответствии со случаем АЗ ( $T_1 = T_2$ ), на границах  $\Phi_{12}$  (изображены жирными линиями) между областями  $\Phi_i^+$ ,  $\Phi_i^-$  реализуются режимы управления с одним переключением. Аналитические выражения областей  $\Phi_i^+(\varphi_1, \varphi_2)$ ,  $\Phi_i^-(\varphi_1, \varphi_2)$ , выводимые из (4.12)–(4.14), имеют вид:

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \Phi_1^+ &= \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : -A\varphi_1 < \varphi_2 < B\varphi_1, \varphi_1 > 0\}, \\ \Phi_1^- &= \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : B\varphi_1 < \varphi_2 < -A\varphi_1, \varphi_1 < 0\}, \end{aligned}$$

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \Phi_2^+ &= \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : B\varphi_1 < \varphi_2, \varphi_1 > 0 \text{ и } -A\varphi_1 < \varphi_2, \varphi_1 < 0\}, \\ \Phi_2^- &= \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_2 < -A\varphi_1, \varphi_1 > 0 \text{ и } \varphi_2 < B\varphi_1, \varphi_1 < 0\}, \end{aligned}$$

$$(4.22) \quad \Phi_{12} = \Phi_{1,2}^{+,+} \cup \Phi_{1,2}^{+,-} \cup \Phi_{1,2}^{-,+} \cup \Phi_{1,2}^{-,-},$$

$$\Phi_{1,2}^{+,+} = \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_2 = B\varphi_1, \varphi_1 > 0\},$$

$$\Phi_{1,2}^{-,+} = \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_2 = -A\varphi_1, \varphi_1 < 0\},$$

$$\Phi_{1,2}^{+,-} = \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_2 = -A\varphi_1, \varphi_1 > 0\},$$

$$\Phi_{1,2}^{-,-} = \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_2 = B\varphi_1, \varphi_1 < 0\},$$

$$(4.23) \quad A = (I_1 + 1)(M_1^0 + 1)^{-1}I_2^{-1}, \quad B = (I_1 + 1)(M_1^0 - 1)^{-1}I_2^{-1}.$$

В обозначениях областей (4.22) нижние индексы указывают номера управлений с одним переключением, а верхние – знаки этих управлений на первом интервале.

*Замечание.* При построении диаграммы (рис. 2) было принято, что манипулятор характеризуется размерными параметрами, фигурирующими в (2.2), (2.3),

$$(4.24) \quad \begin{aligned} L &= 1 \text{ м}, \quad m_2 = 10 \text{ кг}, \quad I_1 = I_2 = (10/3) \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ M_1^0 &= 2 \text{ н} \cdot \text{м}, \quad M_2^0 = 1 \text{ н} \cdot \text{м}, \end{aligned}$$

которые отвечают манипулятору, звенья которого – одинаковые однородные стержни.

После перехода к безразмерным параметрам согласно (4.1) получим из (4.24), что

$$(4.25) \quad L = 1, \quad m_2 = 1, \quad I_1 = I_2 = 1/3, \quad M_1^0 = 2, \quad M_2^0 = 1.$$

Отметим, что суть методики решения поставленной задачи не меняется при других геометрических и физических параметрах манипулятора.

Подытожив полученные результаты, оптимальный режим управления системой (4.2)–(4.5) можно представить в виде

$$(4.26) \quad M^* = \begin{cases} (M_1^*, M_2), & (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1^+ \cup \Phi_1^-, \\ (M_1, M_2^*), & (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2^+ \cup \Phi_2^-, \\ (M_1^*, M_2^*), & (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_{12}, \end{cases}$$

где управления  $M_i^*$ ,  $M_i$ ,  $i = 1, 2$  определяются формулами (4.10), (4.15), (4.18), (4.19), а  $\Phi_i^+$ ,  $\Phi_i^-$ ,  $i = 1, 2$ , и  $\Phi_{12}$  – формулами (4.20)–(4.22).

Таким образом, построенная диаграмма позволяет по заданным значениям  $\varphi_1^T$ ,  $\varphi_2^T$  находить тип режима управления, моменты переключения и время процесса. Тип управления определяется в зависимости от того, какой области достижимых конечных конфигураций принадлежат данные терминальные значения  $\varphi_1^T$ ,  $\varphi_2^T$ .

## 5. Определение оптимального типа конечной конфигурации манипулятора

Перейдем к определению внешнего минимума в (3.11). Пусть конечное положение схвата  $(x^T, y^T) \in R$  зафиксировано. Тогда из формулы (3.2) найдем две конечные точки  $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi(+1)$ ,  $(\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in \Phi(-1)$  (3.4), которые согласно (3.3) отвечают конфигурациям манипулятора  $\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}_{K=+1}$  и  $\{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}_{K=-1}$  соответственно.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad G_1(1) &= \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq B\varphi_1, \varphi_1 > 0\} \subset \Phi_1^+ \subset \Phi(1), \\
 G_2(1) &= \Phi_2^+(\varphi_1, \varphi_2) \subset \Phi(1), \\
 G_3(1) &= \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : -\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq -A\varphi_1, \varphi_1 < 0\} \subset \Phi_1^- \subset \Phi(1), \\
 G_4(1) &= \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : -A^{-1}\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq -\varphi_1, \varphi_1 < 0\} \subset \Phi_1^- \subset \Phi(1), \\
 G_5(1) &= \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : B^{-1}\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq -A^{-1}\varphi_1, \varphi_1 < 0\} \subset \Phi_1^- \subset \Phi(1), \\
 G_6(1) &= \{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi : \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq B^{-1}\varphi_1, \varphi_1 < 0\} \subset \Phi_1^- \subset \Phi(1).
 \end{aligned}$$

Поскольку области  $\Phi(1)$ ,  $\Phi(-1)$  взаимно симметричны относительно прямой  $\varphi_2 = \varphi_1$ , то при замене  $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ ,  $\varphi_2 \rightarrow \varphi_1$  области  $G_i(1) \subset \Phi(1)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , перейдут на симметричные относительно прямой  $\varphi_2 = \varphi_1$  области  $G_i(-1) \subset \Phi(-1)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , соответственно (см. рис. 3).

Области  $G_i(1)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , находятся над прямой  $\varphi_2 = \varphi_1$ , изображенной на рис. 3 штриховой линией, а области  $G_i(-1)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , – под прямой  $\varphi_2 = \varphi_1$ . Таким образом, если  $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in G_i(1)$ , то  $(\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in G_i(-1)$ . Каждой из этих точек, в зависимости от их принадлежности областям  $G_i(1)$ ,  $G_i(-1)$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , отвечает оптимальное время перемещения схвата в эту конфигурацию при соответствующем оптимальном режиме управления (4.26):

$$\begin{aligned}
 (5.2) \quad T &= T_1(\varphi_1^T, \varphi_2^T) = 2 \left( |(I_1 + 1)\varphi_1^T + I_2\varphi_2^T| / M_1^0 \right)^{1/2}, \\
 &\quad \text{если } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in G_{1,3,4,5,6}(1), \\
 T &= T_2(\varphi_1^T, \varphi_2^T) = 2 \left( |I_2\varphi_2^T| \right)^{1/2}, \quad \text{если } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in G_2(1), \\
 T &= T_1(\varphi_2^T, \varphi_1^T) = 2 \left( |(I_1 + 1)\varphi_2^T + I_2\varphi_1^T| / M_1^0 \right)^{1/2}, \\
 &\quad \text{если } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in G_{1,2,3,4,6}(-1), \\
 T &= T_2(\varphi_2^T, \varphi_1^T) = 2 \left( |I_2\varphi_1^T| \right)^{1/2} \quad \text{если } (\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in G_5(-1).
 \end{aligned}$$

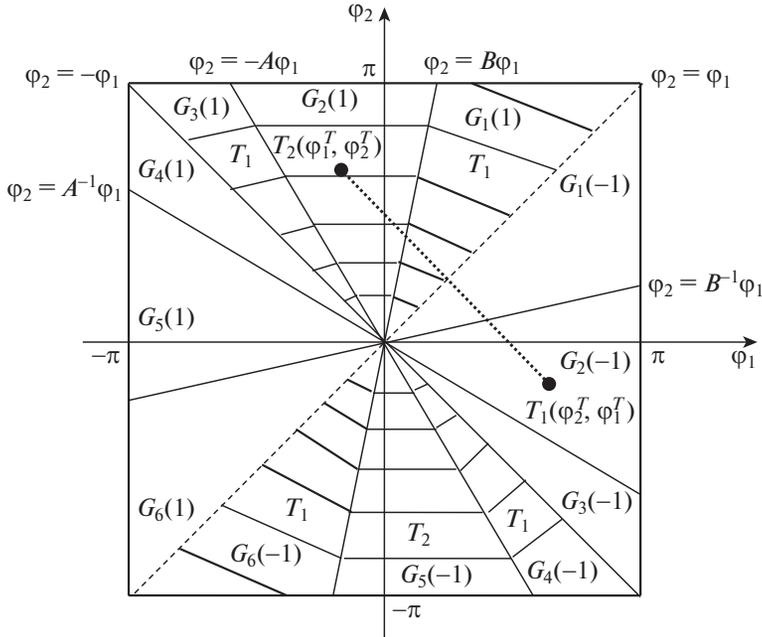


Рис. 3. Диаграмма для определения оптимального типа конечной конфигурации и оптимального типа режима управления.

Учитывая (5.2), вычисление внешнего минимума в (3.11) сводится к выбору оптимальной из двух конечных конфигураций в задаче

$$(5.3) \quad T^* = \min \left[ T(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \Big|_{(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in G_i(1)}, T(\varphi_2^T, \varphi_1^T) \Big|_{(\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in G_i(-1)} \right], \\ 1 \leq i \leq 6.$$

Произведя вычисления минимума в (5.3) при числовых значениях (4.25), в итоге получаем

$$(5.4) \quad T^* = \begin{cases} T_1(\varphi_1^T, \varphi_2^T), & \text{если } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in G_1(1) \cup G_3(1), \\ T_2(\varphi_1^T, \varphi_2^T), & \text{если } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in G_2(1), \\ T_2(\varphi_2^T, \varphi_1^T), & \text{если } (\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in G_5(-1), \\ T_2(\varphi_2^T, \varphi_1^T), & \text{если } (\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in G_4(-1) \cup G_6(-1). \end{cases}$$

Расчетные результаты в соответствии с (5.4) представлены на диаграмме рис. 3, которая позволяет определить оптимальный тип конечной конфигурации и соответствующий оптимальный тип режима управления (4.15), при помощи которых можно перевести схват манипулятора в заданное конечное состояние, а также параметры для этого режима из (4.18), (4.19). Тип конечной конфигурации и режим управления устанавливается в зависимости от областей, в которых лежат точки  $(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$  и  $(\varphi_2^T, \varphi_1^T)$ . На рис. 3 области  $G_{1,2,3}(1)$  и  $G_{4,5,6}(-1)$  заштрихованы.

Приведем числовой пример. Для манипулятора с безразмерными параметрами (4.25) начальные и конечные координаты схвата возьмем в виде

$$(5.5) \quad x^0 = 2, \quad y^0 = 0, \quad x^T = 1, \quad y^T = 0,5.$$

Значениям координат начального и терминального положений схвата (5.5) соответствуют начальная конфигурация  $\varphi_1^0 = \varphi_2^0 = 0$  и две конечные конфигурации (3.3), которым отвечают две симметричные относительно прямой  $\varphi_2 = -\varphi_1$  точки на плоскости углов манипулятора (углы даны в радианной и градусной мерах):

$$(5.6) \quad \{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}_{K=1} : (\varphi_1^T, \varphi_2^T) = (-0,514 \text{ рад}, 1,441 \text{ рад}) = (-29^\circ 45', 82^\circ 56'),$$

$$(5.7) \quad \{\varphi_1^T, \varphi_2^T\}_{K=-1} : (\varphi_2^T, \varphi_1^T) = (1,441 \text{ рад}, -0,514 \text{ рад}) = (82^\circ 56', -29^\circ 45').$$

Из диаграммы рис. 3 находим, что в рассматриваемом случае  $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in G_2(1)$ , а  $(\varphi_2^T, \varphi_1^T) \in G_2(-1)$ . Следовательно, согласно формуле (5.4) минимальное время перемещения схвата достигается в точке (5.6), которой соответствует конечная конфигурация, отвечающая значению  $K = 1$ . При этом следует использовать режим управления  $M^* = (M_1, M_2^*)$  (4.26), где  $M_1$  – управление с двумя переключениями в моменты  $\tau_1^{(1)} = 0,0784$  (0,1754 с),  $\tau_1^{(2)} = 1,3078$  (2,9257 с),  $M_2^*$  – с одним переключением в момент  $\tau_2 = 0,6931$  (1,5505 с), а оптимальное время перемещения –  $T^* = T_2 = 1,3862$  (3,1011 с). В скобках даны размерные значения времен с использованием формул перехода (4.1). Для сравнения отметим, что если выбрать конечную конфигурацию (5.7), то время перемещения схвата оказывается намного хуже:  $T^* = T_1 = 1,8708$  (4,1853А).

## 6. Заключение

На конфигурационной плоскости двузвенного манипулятора со вторым статически уравновешенным звеном построены области, позволяющие по заданным координатам терминального положения схвата манипулятора определить тип конечной конфигурации и структуру оптимального управления, приводящего манипулятор в эту конфигурацию, при которых достигается минимальное значение времени перемещения схвата из начального положения покоя в произвольное положение покоя рабочей зоны манипулятора. Численными расчетами установлено, что оптимальный выбор типа конечной конфигурации может приводить к значительному увеличению быстродействия.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотник Н.Н., Каплунов А.А. Оптимальные прямолинейные перемещения груза при помощи двузвенного манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1982. № 1. С. 68–74.
2. Болотник Н.Н., Каплунов А.А. Оптимизация управления и конфигураций двузвенного манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1983. № 4. С. 123–131.

3. *Avetisyan V.V., Bolotnik N.N., Chernousko F.L.* Optimal Programmed Motions of a Two-Link Manipulator // Soviet J. Comput. Syst. Sci. 1985. V. 23. No. 5. P. 65–73.
4. *Akulenko L.D., Bolotnik N.N., Chernousko F.L., Kaplunov A.A.* Optimal Control of Manipulation Robots // IFAC Proc. 1985. V. 17. Iss. 2. P. 311–315.
5. *Chernousko F.L., Akulenko L.D., Bolotnik N.N.* Time-Optimal Control for Robotic Manipulators // Optimal Control Applications and Methods. 1989. V. 10. Iss. 4. P. 293–311.
6. *Болотник Н.Н., Черноусько Ф.Л.* Оптимизация управления манипуляционными роботами // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1990. № 1. С. 189–238.
7. *Meier E.B., Bryson A.E.* Efficient Algorithm for Time-Optimal Control of a Two-Link Manipulator // J. Guidance, Control and Dynamics. 1990. V. 13. Iss. 5. P. 859–866.
8. *Chernousko F.L.* Optimization in Control of Robots / Computational Optimal Control. Basel: Birkhauser, 1994. P. 19–28.
9. *Аветисян В.В., Овакимян Н.В.* Оптимальные плоскопараллельные движения двузвенного манипулятора // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 3. С. 161–168.
10. *Avetisyan V.V., Novakimyan N.V.* Constructing the Regions of Admissible States of Positioning for a Two-Link Manipulator with Account of Speed Constraints // J. Comput. Syst. Sci. Int. 1997. V. 36. Iss. 4. P. 638–646.
11. *Аветисян В.В.* Оптимизация конфигурации и направлений поворотов звеньев двузвенного манипулятора по комбинированным критериям качества // Изв. НАН РА. Механика. 1998. Т. 51. № 4. С. 65–71.
12. *Avetisyan V.V.* Movements of an Electromechanical Manipulator Robot Optimal with Respect to Energy Rxpnditure // J. Comput. Syst. Sci. Int. 1996. V. 35. Iss. 4. P. 679–685.
13. *Детудук М.В., Носховс'ка Н.* Parametric Optimization of the Transport Operations of a Two-Link manipulator // J. Math. Sci. 2019. V. 238. No. 2. P. 174–188.
14. *Овсеевич А.И.* О полной управляемости линейных динамических систем // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 845–848.
15. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.*

Поступила в редакцию 21.05.2020

После доработки 01.08.2020

Принята к публикации 10.09.2020