

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2021 г. А.Л. ШЕСТАКОВ, д-р техн. наук (a.l.shestakov@susu.ru),
А.А. ЗАМЫШЛЯЕВА, д-р физ.-мат. наук (zamyshliaeva@ssu.ru),
Н.А. МАНАКОВА, д-р физ.-мат. наук (manakovana@susu.ru),
Г.А. СВИРИДЮК, д-р физ.-мат. наук (sviridyuk@susu.ru)
(Южно-Уральский государственный университет, Челябинск),
А.В. КЕЛЛЕР, д-р физ.-мат. наук (alevtinak@inbox.ru)
(Воронежский государственный технический университет)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИ ИСКАЖЕННОГО СИГНАЛА НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ¹

Представлен новый алгоритм обработки результатов динамических измерений, при которых по известному выходному или наблюдаемому сигналу и известной передаточной функции измерительного устройства необходимо найти входной сигнал. Ранее авторами была построена теория оптимальных динамических измерений, в рамках которой для восстановления динамически искаженных сигналов успешно использовались методы теории оптимальных управлений. Первые численные алгоритмы теории оптимальных динамических измерений на модельных примерах показали эффективность результата по достигаемой погрешности при значительном времени счета. Предлагаемый численный алгоритм решения исследуемой задачи позволяет снизить время счета более чем в 5 раз. Приводятся необходимые теоретические сведения, общая схема алгоритма, данные эксперимента, результаты обработки экспериментальных данных по предлагаемому алгоритму.

Ключевые слова: динамические измерения, обработка результатов эксперимента, численные методы, оптимальные динамические измерения, датчики давления, статистические методы.

DOI: 10.31857/S0005231021120084

1. Введение

В теории динамических измерений задачу восстановления входящего сигнала по известным характеристикам измерительного устройства (ИУ) и выходного сигнала принято считать одной из сложных [1]. Ранее для ее решения принято было использовать в качестве основных математических методов теорию обратных задач [2].

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание FENU-2020-0022).

На современном этапе развития теории динамических измерений активно ведутся исследования в двух направлениях. Первое связано с оцениванием неопределенности в динамических измерениях [3, 4], второе развивает методологию применения теории автоматического управления для решения задач динамических измерений [5]. В рамках развития второго направления разрабатывались не только различные технические решения, но и развивались математические методы решения задач динамических измерений. Так, для решения задачи по восстановлению динамически искаженного сигнала А.Л. Шестаковым и Г.А. Свиридиюком была сформулирована задача оптимальных динамических измерений, в которой восстанавливаемый входной сигнал определялся как решение задачи оптимального управления [6–8] для системы леонтьевского типа. Отметим, что использование начального условия Коши вызывает значительные трудности и накладывает ограничения при численном решении задач оптимального динамического измерения. В связи с этим было предложено использовать условие Шоултера–Сидорова, которое не требует согласования начальных данных при численном исследовании прикладных задач [9]. Подчеркнем, что математическая модель сложной измерительной системы, например, состоящей из нескольких измерительных устройств, строится как система леонтьевского типа [10], которая, с одной стороны, является частным случаем дескрипторной системы [11], с другой – конечномерным случаем уравнения соболевского типа. Именно поэтому все математические результаты стали возможны благодаря развивающейся Г.А. Свиридиюком и его учениками теории оптимального управления решениями уравнений соболевского и леонтьевского типов (см. обзор результатов в [12]).

Формирование теории оптимальных динамических измерений включало в себя построение математических моделей и разработку численных методов. Первый алгоритм численного решения задачи оптимального динамического измерения был предложен А.В. Келлер и Е.И. Назаровой, при этом предполагалось, что динамическое искажение являлось следствием только инерционности ИУ [13]. В следующем алгоритме, разработанном Ю.В. Худяковым, численное решение задачи восстановления динамически искаженного сигнала проводилось с учетом инерционности ИУ и наличия резонансов [14]. Важным в развитии численных методов решения задач теории оптимальных динамических измерений стал алгоритм с использованием сплайнов, предложенный А.В. Келлер [15].

Необходимо отметить, что все обсуждаемые алгоритмы были апробированы на модельных примерах, в рамках которых рассматривались сигналы простой формы, например $u = a \sin \omega t$. Когда измеряемые сигналы имеют более сложную форму, разработанные ранее алгоритмы требовали либо значительного объема машинного времени, либо большей мощности персональных компьютеров, что в конечном итоге привело к пониманию необходимости разработки нового численного метода для решения задачи восстановления динамически искаженного сигнала.

В данной статье представлен новый численный метод, базирующийся на идеях теории оптимальных динамических измерений, позволяющий более эффективно обрабатывать эмпирические данные и восстанавливать динамически искаженный сигнал по результатам натурного вычислительного эксперимента.

2. Основные понятия и методы теории оптимальных динамических измерений

В теории оптимальных динамических измерений важной математической моделью является модель ИУ. Динамические свойства ИУ определяются системой леонтьевского типа

$$(2.1) \quad \begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu + G\zeta, \\ y = Cx + D\eta, \end{cases}$$

а его состояние в начале работы – начальным условием Шоултера–Сидорова

$$(2.2) \quad \left[(\alpha L - A)^{-1} L \right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0$$

при некоторых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(A)$. Здесь $\rho^L(A) = \{\alpha \in \mathbb{C} : \det(\alpha L - A) \neq 0\}$ [13]. Математическая модель ИУ (2.1), (2.2) связывает $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния ИУ соответственно; $y(t)$ – вектор-функция наблюдений (или выходного сигнала); A и L – квадратные матрицы состояний и взаимовлияния скоростей состояния ИУ соответственно; C и D – матрицы, характеризующие связи между состоянием ИУ и наблюдением; $u(t)$ – вектор-функция измерения (или входного сигнала); $\eta(t)$ и $\zeta(t)$ – вектор-функции помех на выходе и в цепях ИУ соответственно.

Отметим, что при моделировании может быть получен случай, когда $\det L = 0$ [10]. Кроме того, при решении задачи (2.1) и (2.2) важным условием является (L, p) -регулярность матрицы A .

В [3, 5] для решения задачи восстановления входного сигнала $u = u(t)$ по наблюдаемому выходному сигналу $y = y_0(t)$ конструируется модель ИУ, при этом качество модели оценивается величиной расхождений значений выходных сигналов ИУ и его модели при соответствующих t . Если различия незначительны, то значения выходных сигналов ИУ и его модели будут также незначимо различаться. Это положение легло в основу математической модели оптимальных динамических измерений как задачи оптимального динамического измерения: необходимым условием для построения функционала штрафа является отражение в нем разности между выходными сигналами реального ИУ и его математической моделью, а минимизация функционала обеспечивает нахождение такого входного сигнала, который является математической моделью искомого измерения (рис. 1).

Для построения математической модели оптимальных динамических измерений будем использовать пространство состояний

$$\chi = \left\{ x \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n) \right\},$$

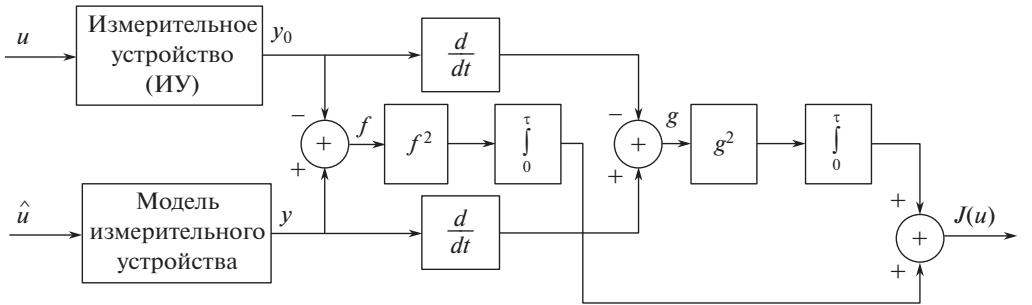


Рис. 1. Структурная схема математической модели динамических измерений.

пространство измерений

$$\mathfrak{U} = \left\{ u \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n) \right\}$$

и пространство наблюдений $\mathfrak{Y} = C[\chi]$, причем \mathfrak{Y} изоморфно некоторому подпространству в χ , хотя не всегда $\mathfrak{Y} = \chi$.

Функционал штрафа имеет вид

$$(2.3) \quad J(u) = \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \left\| y^{(q)}(u, t) - y_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt,$$

где $y_0(t)$ – выходной сигнал, получаемый в ходе натурного эксперимента, $y(t)$ – моделируемый выходной сигнал (получаемый при работе с математической моделью восстановления динамически искаженного сигнала), $\|\cdot\|$ – евклидова норма в \mathbb{R}^n . Заметим, что вид функционала штрафа обусловлен также и постановкой задачи, например при наличии резонансов в цепях ИУ функционал имеет другой вид [14].

Будем искать решение задачи на множестве допустимых моделируемых измерений \mathfrak{U}_∂ . В качестве \mathfrak{U}_∂ возьмем компактное выпуклое подмножество \mathfrak{U} :

$$(2.4) \quad \mathfrak{U}_\partial = \left\{ u \in \mathfrak{U} : \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \|u^{(q)}(t)\|^2 dt \leq d \right\},$$

где $d = \text{const}$.

Таким образом, задача оптимального динамического измерения заключается в нахождении такой вектор-функции моделируемого измерения $v \in \mathfrak{U}_\partial$, при которой функционал штрафа (2.3) достигает минимального значения, т.е.

$$(2.5) \quad J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u),$$

при этом $x(v) \in \chi$ удовлетворяет системе (2.1) почти всюду на $(0, \tau)$ и при некоторых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(A)$ – условию Шоултера–Сидорова (2.2).

Вектор-функцию $v \in \mathcal{U}_\partial$, начиная с первых работ по теории оптимальных динамических измерений, называют оптимальным динамическим измерением [6]. Подчеркнем, что требование близости не только значений наблюдаемого сигнала и моделируемого наблюдения, но и скоростей их изменения, обосновано результатами качественных исследований и присутствует во всех математических моделях оптимальных динамических измерений [6, 8, 14, 15].

3. Алгоритм восстановления динамически искаженного сигнала

В качестве исходной информации известны элементы матриц системы (2.1), начальные условия (2.2) и функционал качества (2.3), множество допустимых измерений (2.4), массив значений Y_{0i} наблюдаемого сигнала в моменты времени t_i с интервалом δ , $i = 1, 2, \dots, N$.

1. Из множества значений Y_{0i} формируется подмножество, элементы которого выбираются через равный интервал, который назовем интервалом дискретизации алгоритма Δ по времени. Отметим, что тогда $\Delta = K \cdot \delta$, $K \in \mathbf{Z}$. Выбор интервала дискретизации является важной самостоятельной задачей, поэтому ей будет посвящен раздел 5 статьи. Выбор Δ при известном δ определяет значение K , которое в свою очередь задает количество основных циклов алгоритма. Обозначим порядковый номер цикла буквой ℓ , таким образом, $\ell = 1, 2, \dots, K$.

2. Выполняются базовые расчеты для каждого из основных циклов нахождения приближенного динамического измерения входного сигнала $v^\ell(t)$, $\ell = 1, 2, \dots, K$:

2.1. Определяются начальные точка расчета t_0^ℓ и состояние системы x_0^ℓ :

$$t_0^\ell : t_0^1 = 0, \quad t_0^\ell = t_0^1 + (\ell - 1)\delta, \quad \ell = 2, \dots, K,$$

$$x_0^\ell : x_0^1 = 0, \quad x_0^\ell = C^{-1}Y(t_0^1 + (\ell - 1)\delta), \quad \ell = 2, \dots, K;$$

2.2. Выбираются точки для базового расчета $T_k^\ell = t_0^\ell + (k - 1)\Delta$, $k = 1, 2, \dots, R$, где $R = \lceil \frac{N}{K} \rceil$. Эти точки группируются по четыре ($T_1^\ell, T_2^\ell, T_3^\ell, T_4^\ell$), ($T_4^\ell, T_5^\ell, T_6^\ell, T_7^\ell$) и т.д. Эти группы будем называть “наборами по T ”. На рис. 2, а точки первого основного цикла T_k^1 обведены черными кругами, “наборы по T ” показаны дугами;

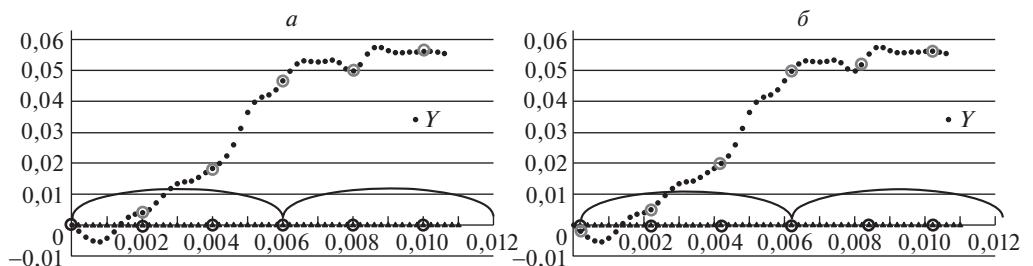


Рис. 2. а – Точки для базового расчета в первом основном цикле $\ell = 1$; б – точки для базового расчета во втором основном цикле $\ell = 2$.

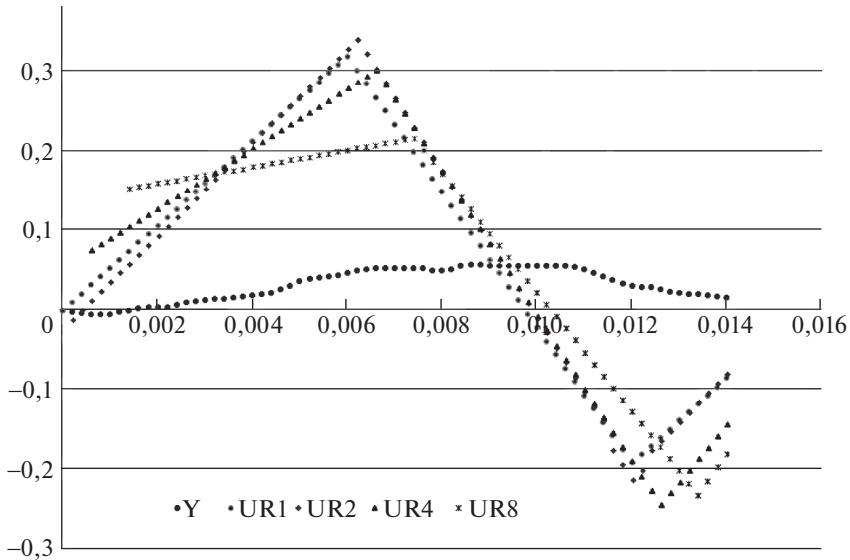


Рис. 3. Значения $v_i^\ell = v_j^\ell(t_i)$ (этап 2.5).

2.3. По каждому “набору по T ” формируем “наборы по Y ”: $(Y_1^\ell, Y_2^\ell, Y_3^\ell, Y_4^\ell, Y_4^\ell, Y_5^\ell, Y_6^\ell, Y_7^\ell)$ и т.д. На рис. 2,*a* для первого основного цикла точки $Y_1^1, Y_2^1, Y_3^1, Y_4^1, Y_1^1, Y_5^1, Y_6^1$ обведены серыми кругами. На рис. 2,*б* показаны точки для базового расчета во втором основном цикле T_k^2 и Y_k^2 , “наборы по T ”;

2.4. Для каждого j -го набора ℓ -го основного цикла на временнóм промежутке $[T_{3j+1}^\ell, T_{3j+4}^\ell]$, $j = 0, \dots, [(R-1)/3]$: 1) по Y_k^ℓ интерполяцией определяется функция наблюдения $y_j^\ell(t)$; 2) по построенной функции наблюдения решается задача оптимального динамического измерения.

Приближенное измерение ищется на основе метода Ритца в виде тригонометрического полинома или многочлена заданной степени. Так как в алгоритме применяется сплайн метод, то решено использовать представление приближенного измерения в виде многочлена. Его степень, как правило, не превосходит степени интерполяционного многочлена $y_j^\ell(t)$ (в данном алгоритме равной трем) и выбирается с учетом вычислительной мощности и заданного шага дискретизации. Основная процедура сводится к поиску такого массива коэффициентов искомого многочлена, при котором достигается минимум функционала. В алгоритме для этого реализуется многошаговый итеративный метод, предложенный в [16]. В нем использованы идеи покоординатного многошагового спуска с памятью, при подборе шага используются результаты предшествующей итерации с выполнением проверки условий ограничений на принадлежность множеству допустимых измерений. Завершается процедура нахождения минимума функционала штрафа по достижению абсолютной величины разности значений функционала последней и предпоследней итерации цикла меньшего значения, чем заданная погрешность. Основные этапы алгоритма решения задачи оптимального динамического измерения изложены в [15]. Особенностью предлагаемого здесь алго-

ритма является условие равенства значений $u_j^\ell(t)$ в граничных точках наборов $[u_j^\ell(T_{3j+4}) = u_{j+1}^\ell(T_{3(j+1)+1})]$, $j = 0, \dots, [(R-1)/3]$. В результате получим приближенное оптимальное динамическое измерение $v_j^\ell(t)$ для каждого j -го набора ℓ -го основного цикла на временном промежутке $[T_{3j+1}^\ell, T_{3j+4}^\ell]$, $j = 0, \dots, [(R-1)/3]$;

2.5. Вычисляются значения $v_i^\ell = v_j^\ell(t_i)$, $\ell = 1, 2, \dots, K$, $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, \dots, [(R-1)/3]$ (см. рис. 3).

3. Используя полученные K значений v_i^ℓ , $\ell = 1, \dots, K$, в каждой точке t_i , вычисляются средние значения \bar{v}_i в каждой точке t_i .

4. Моделируемое оптимальное динамическое измерение $v(t)$ получается интерполяцией средних значений \bar{v}_i .

4. Описание эксперимента

Экспериментальные данные были получены на стенде, схема которого представлена на рис. 4. Основными параметрами стенда являются:

- минимальное входное давление – 800 кПа;
 - форма пульсации давления на выходе – синус, меандр, произвольная;
 - частота пульсации – от 0 до 100 Гц;
 - максимальное давление на выходе – 600–800 кПа;
 - амплитуда пульсации – от 0 до 100%;
 - погрешность формирования формы пульсации – не более 10%.

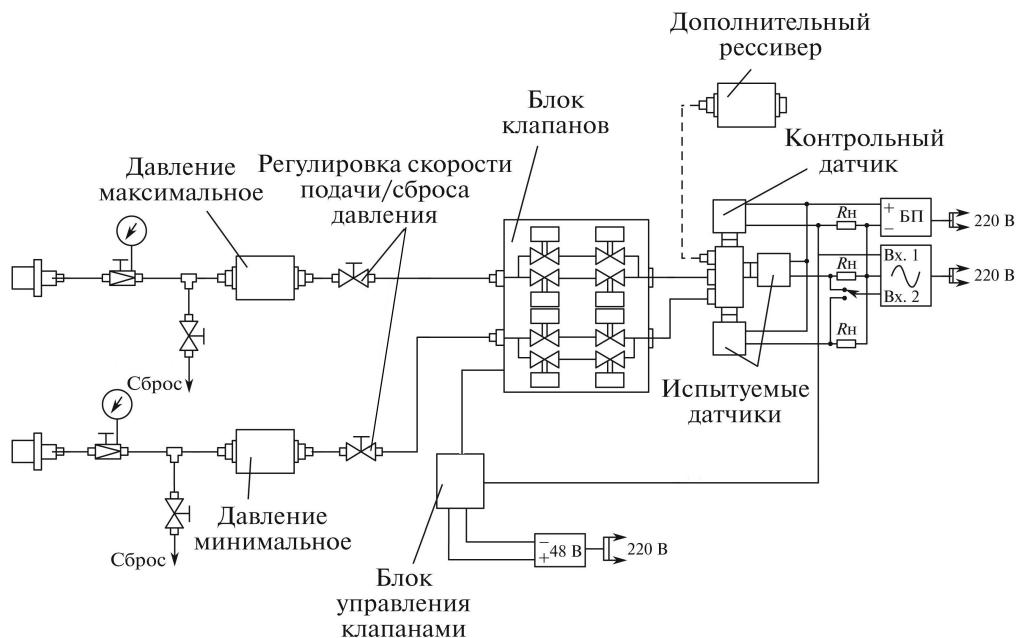


Рис. 4. Схема стенда

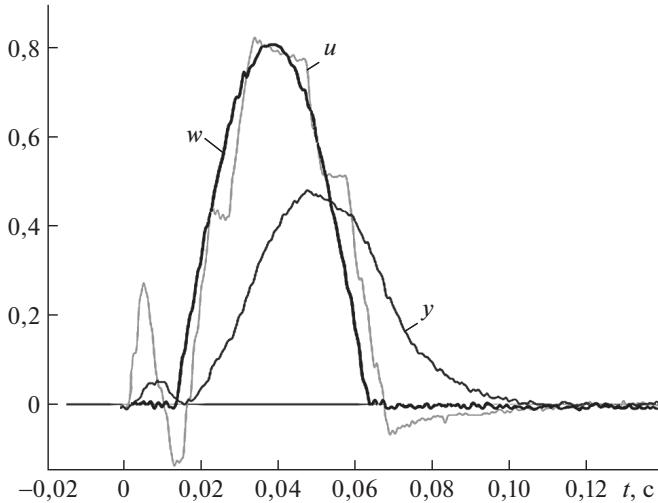


Рис. 5. Результаты испытания датчика.

На стенде испытывается датчик давления Метран-43 с аналоговым электронным преобразователем. Передаточная функция датчика имеет вид

$$(4.1) \quad W(p) = \frac{0,72}{0,0119p + 1}.$$

Преобразуя ее к виду дескрипторной системы, получим

$$(4.2) \quad \begin{cases} \dot{x} = -84x + u, \\ y = 60,5x. \end{cases}$$

Зададим начальное состояние системы

$$(4.3) \quad x(0) = 0.$$

На рис. 5 представлены результаты испытания датчика на стенде. Чёрным цветом обозначен задающий сигнал $w(t)$, подаваемый на блок управления клапанами. Светло-серым цветом обозначен входящий сигнал $u(t)$ испытуемого датчика, фиксируемый контрольным датчиком. Характеристики контрольного датчика на порядок превышают такие характеристики испытуемого датчика, как точность и быстродействие, что позволяет считать этот сигнал истинным. Тёмно-серым цветом обозначен наблюдаемый (или выходящий) сигнал $y(t)$ испытуемого датчика.

Заметим, что ступенчатый вид истинного сигнала обусловлен особенностями системы управления стенда, связанной с работой по открытию и закрытию клапанов. Проверка математической модели датчика (4.2), (4.3) показала соответствие полученного наблюдаемого сигнала входящему.

Получив экспериментальные данные наблюдаемого сигнала и математическую модель датчика, ставится вторая обратная задача динамических измерений – восстановить методами теории оптимальных динамических измерений входящий сигнал, а затем сравнить его с истинным сигналом.

5. Шаг дискретизации и его определение в алгоритме

Определение интервала дискретизации на первом шаге предлагаемого алгоритма является основополагающим для адекватного решения задачи оптимального динамического измерения. При проведении вычислительных экспериментов было рассмотрено несколько случаев с различным интервалом дискретизации. Качественное сравнение результатов стало возможно в связи с известным истинным сигналом, фиксируемым контрольным датчиком испытательного стенда.

На рис. 6, а представлены результаты реализации алгоритма при интервале дискретизации $\Delta_i = 0,002$, при котором подмножество множества значений Y_{0i} для базового расчета содержит 70 точек. Этот интервал дискретизации позволил провести реализацию алгоритма нахождения приближенного оптимального динамического измерения в виде полинома первой степени. Отметим, что ограничения прежде всего связаны с реализацией большого числа вычислений для малых величин как независимых, так и зависимых при необходимости приемлемых временных затрат на вычисления. На рис. 6, а показан результат расчета по одному циклу: серым цветом отображен график моделируемого оптимального динамического измерения, черным цветом — отражено истинное измерение.

На рис. 6, б представлены результаты реализации алгоритма при интервале дискретизации $\Delta_i = 0,001$, при котором подмножество множества значений Y_{0i} для базового расчета содержит 140 точек. Этот интервал дискретизации позволил провести реализацию алгоритма нахождения приближенного оптимального динамического измерения в виде полинома первой степени. На рис. 6, б показан результат расчета по одному циклу: серым цветом отображен график моделируемого оптимального динамического измерения, черным цветом — отражено истинное измерение.

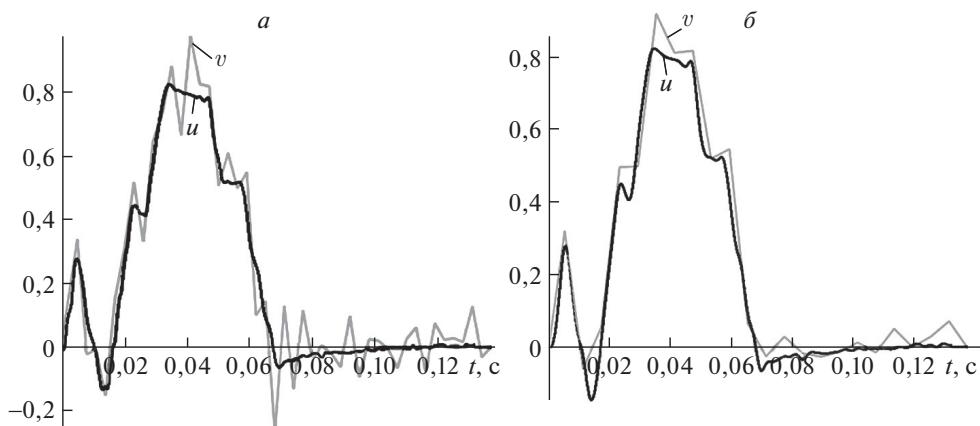


Рис. 6. а – Интервал дискретизации $\Delta_i = 0,002$, полином первой степени; б – интервал дискретизации $\Delta_i = 0,001$, полином первой степени.

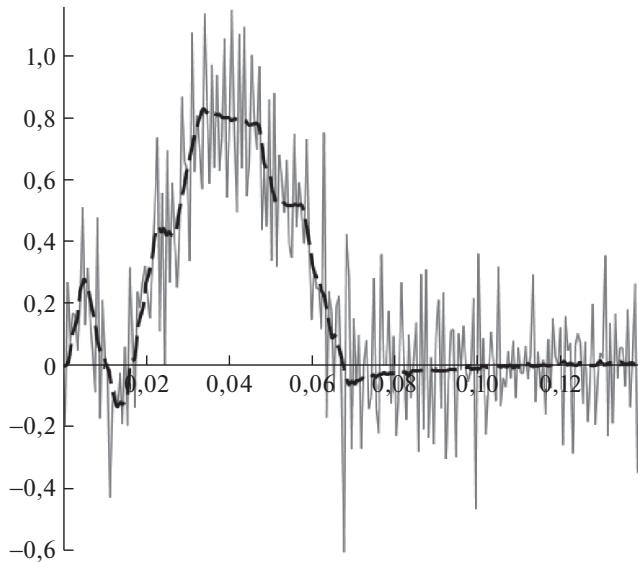


Рис. 7. Интервал дискретизации $\Delta_i = 0,0002$, полином первой степени.

На рис. 7 представлены результаты реализации алгоритма при интервале дискретизации $\Delta_i = 0,0002$, при котором подмножество множества значений Y_{0i} для базового расчета содержит 700 точек. Этот интервал дискретизации позволил провести реализацию алгоритма нахождения приближенно оптимального динамического измерения в виде полинома первой степени. На рис. 7 показан результат расчета по одному циклу: серым цветом отображен график моделируемого оптимального динамического измерения, черным цветом отражено истинное измерение.

В таблице приведены результаты сравнения погрешностей при нахождении приближенного оптимального динамического измерения v в зависимости от выбора шага дискретизации Δ на первом основном цикле. Полученные значения свидетельствуют о том, что погрешность с увеличением шага дискретизации сначала уменьшается, а затем снова увеличивается.

Сравнение результатов при различных интервалах дискретизации позволяет сделать вывод об их согласовании с известной в области цифровой обработки сигналов теоремой Котельникова [17], из которой следует, что любой аналоговый сигнал может быть восстановлен с задаваемой точностью по своим дискретным отсчетам, частота которых $f \geq 2f_c$, где f_c – максимальная частота, которой ограничен спектр реального сигнала.

Таблица. Значения погрешности и времени счета при различных интервалах дискретизации

Интервал дискретизации Δ , с	0,0002	0,001	0,002	0,004	0,008
Погрешность $\delta = \ u - v\ ^2$	101,5218	0,1684	0,0204	0,0236	0,03012
Время счета, с	2760,32	36,62	27,21	20,07	17,69

Таким образом, в представляемом алгоритме выбор интервала дискретизации становится, по сути, выбором фильтра на основании

$$(5.1) \quad 0 < \Delta \leq \frac{1}{2f_c}.$$

Получаем, что при $\Delta_1 = 0,004$, $f_c = 120$ Гц, при $\Delta_2 = 0,002$, $f_c = 250$ Гц, при $\Delta_3 = 0,001$, $f_c = 500$ Гц, $\Delta_4 = 0,0002$, $f_c = 2500$ Гц. В заключение отметим, что использование выборок для восстановления сигналов на основе теоремы отсчетов Котельникова является стандартным приемом [18].

6. Обработка результатов эксперимента

Проведем реализацию описанного алгоритма на примере данных, полученных в результате стендовых испытаний (см. рис. 2,а). Множество Y_{0i} содержит 700 точек. На основании сведений о достаточности $f_c = 250$ Гц выбираем шаг дискретизации $\Delta_2 = 0,002$ на основании (5.1). Таким образом, подмножество множества значений Y_{0i} для базового расчета содержит 70 точек. Количество основных циклов равно 10. Приведем результаты реализации алгоритма для одного из основных циклов.

На рис. 8,а для примера представлены результаты базовых расчетов на четвертом основном цикле. Серым цветом представлено моделируемое оптимальное динамическое измерение v_i^4 .

О средив результаты, полученные на десяти основных циклах, получим \bar{v}_i в каждой точке t_i , а затем интерполированием – моделируемое оптимальное динамическое измерение $v(t)$. На рис. 8,б представлены графики $v(t)$ (серый цвет) и истинного измерения (черный цвет).

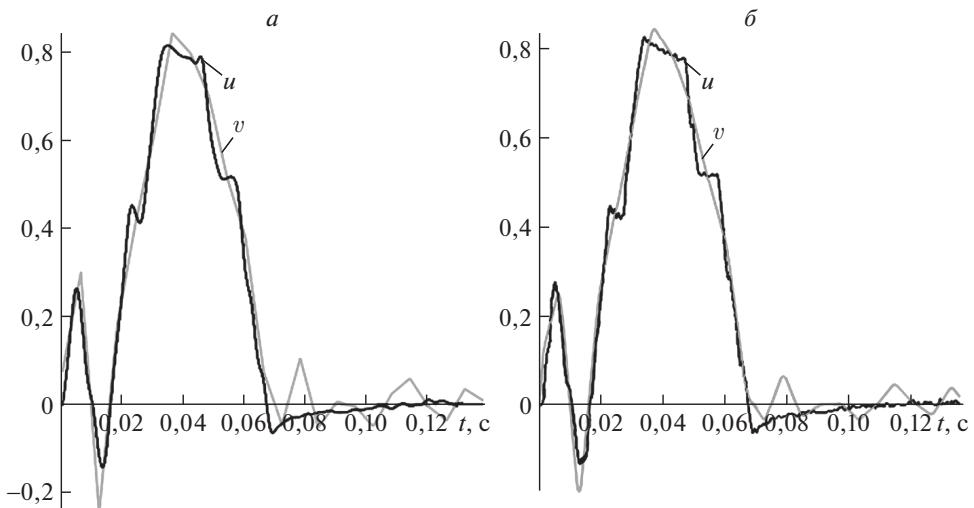


Рис. 8. а – Истинное измерение и моделируемое на четвертом основном цикле алгоритма оптимальное динамическое измерение; б – моделируемое оптимальное динамическое измерение $v(t)$ и истинное измерение.

Значительные отклонения моделируемого от истинного измерения наблюдаются именно “на ступенях” истинного сигнала (см. п. 4), на остальных частях графика отклонения незначительны. Отметим, что погрешность найденного приближенного оптимального динамического измерения v

$$\delta = \|u - v\|^2 = 0,000197.$$

При этом время счета составило 109,71 с.

7. Заключение

В статье представлен новый алгоритм восстановления динамически искаженного сигнала. Алгоритм построен на методах теории оптимальных динамических измерений, численных методах интерполяции и нахождения средних.

Результаты вычислительного эксперимента сопоставлены с результатами натурного эксперимента, найденные значения погрешности свидетельствуют об эффективности предлагаемого метода. Приведенные результаты вычислительной точности при различных шагах дискретизации согласуются с шагом дискретизации, выбранным согласно теореме Котельникова. Предложенный метод позволил сократить время счета более чем в 5 раз при меньшей мощности персонального компьютера с приемлемой точностью нахождения оптимального динамического измерения. Кроме того, имеется возможность распараллеливания процессов, что позволит дальнейшее сокращение времени счета.

Отметим, что данный численный метод позволит продолжить исследования в рамках теории оптимальных динамических измерений по следующим направлениям: моделирование оптимальных динамических измерений со случайными помехами с построением новых цифровых фильтров; моделирование нестационарных моделей оптимальных динамических измерений; применение в алгоритмах решения других обратных задач динамических измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грановский В.А. Динамические измерения: теория и метрологическое обеспечение вчера и сегодня // Датчики и системы. 2016. № 3 (201). С. 57–72.
2. Ruhm K.H. Measurement Plus Observation — a Modern Structure of Metrology // 21st IMEKO World Congr. on Measurement in Research and Industry. Prague, 2015. Article ID 116100.
3. Elster C., Eichstädt S., Link A. Uncertainty Evaluation of Dynamic Measurements in Line with the GUM // 19th IMEKO World Congr. 2009. V. 1. P. 98–101.
4. Sommer K.-D., Hqnebeck U.D., Krystek M., et al. Modelling of Dynamic Measurements for Uncertainty Analysis by Means of Discxretized State-Space Forms // 19th IMEKO World Congr. 2009. V. 1. P. 290–294.
5. Шестаков А.Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях. Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2013.

6. *Shestakov A.L., Keller A.V., Zamyslyayeva A.A., Manakova N.A., Zagrebina S.A., Sviriduk G.A.* The Optimal Measurements Theory as a New Paradigm in the Metrology // J. Comp. Eng. Math. 2020. V. 7. No. 1. P. 3–23.
7. *Sagadeeva M.A., Bychkov E.V., Tsyplenkova O.N.* The Pyt'ev-Chulichkov Method for Constructing a Measurement in the Shestakov-Sviriduk Model // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2020 V. 13. No. 4. P. 68–82.
8. Шестаков А.Л., Загребина С.А., Манакова Н.А., Сагадеева М.А., Свиридюк Г.А. Алгоритм численного нахождения оптимального измерения, искаженного инерционностью, резонансами и деградацией измерительного устройства // АиТ. 2021. № 1. С. 55–67.
- Shestakov A.L., Zagrebina S.A., Manakova N.A., Sagadeeva M.A., Sviriduk G.A.* Numerical Optimal Measurement Algorithm under Distortions Caused by Inertia, Resonances, and Sensor Degradation // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 1. P. 41–50.
9. Загребина С.А. О задаче Шоуолтера–Сидорова // Изв. высш. уч. заведений. Математика. 2007. № 3. С. 22–28.
10. *Khudyakov Yu.V.* On Mathematical Modeling of the Measurement Transducers // J. Comp. Eng. Math. 2016. V. 3. No. 3. P. 68–73.
11. Белов А.А., Курдюков А.П. Дескрипторные системы и задачи управления. М.: Физматлит, 2015.
12. *Zamyslyayeva A.A., Manakova N.A., Tsyplenkova O.N.* Optimal Control in Linear Sobolev Type Mathematical Models // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2020. V. 13. No. 1. P. 5–27.
13. Шестаков А.Л., Келлер А.В., Назарова Е.И. Численое решение задачи оптимального измерения // АиТ. 2012. № 1. С. 107–115.
- Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I.* Numerical Solution of the Optimal Measurement Problem // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 1. P. 97–104.
14. Худяков Ю.В. Алгоритм численного исследования модели Шестакова–Свиридюка измерительного устройства с инерционностью и резонансами // Математические заметки СВФУ. 2013. Т. 20. № 2. С. 211–221.
15. *Keller A.V., Ebel A.A.* Parallelization of Numerical Algorithm for Optimum Dynamic Measurement Problem Solution // Proc. – 2017 2nd Int. Ural Conf. on Measurements. 2017. V. 2017. P. 372–377.
16. Келлер А.В. Об алгоритме решения задач оптимального и жесткого управления // Программные продукты и системы. 2011. № 3. С. 42.
17. Котельников В.А. О пропускной способности “эфира” и проволоки в электросвязи // Успехи физических наук. 2006. № 7. С. 762–770.
18. Заатдинов С.И. Восстановление сигналов по его выборкам на основе теоремы отсчетов Котельникова // Изв. высш. уч. заведений. Приборостроение. 2010. Т. 53. № 5. С. 44–47.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кубзуном.

Поступила в редакцию 18.04.2021

После доработки 09.06.2021

Принята к публикации 30.06.2021