

© 2021 г. М.М. ХРУСТАЛЕВ, д-р физ.-мат. наук (mmkhrustalev@mail.ru),
К.А. ЦАРЬКОВ, канд. физ.-мат. наук (k6472@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ УЛУЧШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ¹

Исследуется задача оптимизации линейной по состоянию и нелинейной по управлению динамической стохастической системы, функционирующей на бесконечном интервале времени, относительно квадратичного функционала качества. Предлагается несколько алгоритмов последовательного улучшения заданного нестационарного программного управления. Они могут быть использованы, в частности, для построения качественных динамических регуляторов неполной обратной связи в детерминированных линейных стационарных системах. Для обоснования алгоритмов улучшения сформулирован и доказан ряд строгих утверждений относительно исходной оптимизационной проблемы.

Ключевые слова: динамическая обратная связь, бесконечный интервал времени, нелинейная стохастическая система, структурные ограничения.

DOI: 10.31857/S0005231021120059

1. Введение

Предположим, что исследуется задача управления линейной динамической системой

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

с заданными начальным условием $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ и матрицами системы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, в которой качество управления оценивается значением функционала

$$(2) \quad J(u) = \int_0^{+\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T E u(t)) dt$$

всюду, где он определен. Здесь $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $E \in \mathbb{R}^{m \times m}$ – положительно определенные матрицы.

Будем считать, что функцию управления $u(t)$ необходимо построить в виде линейного регулятора

$$u(t) = P(t)x(t),$$

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00400).

так что (1)–(2) преобразуются к виду

$$(3) \quad \dot{x}(t) = (A + BP(t))x(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$(4) \quad J(P) = \int_0^{+\infty} x(t)^T (Q + P(t)^T EP(t)) x(t) dt.$$

Пусть, для начала, на матричную функцию $P(t)$ не наложено никаких ограничений, кроме естественного требования сходимости несобственного интеграла в правой части (4). Множество всех таких функций $P(t)$ обозначим через $\mathcal{S}$. В этом случае задача $J(P) \rightarrow \min_{P \in \mathcal{S}}$ совпадает с классической линейно-квадратичной задачей оптимального регулирования на бесконечном временном интервале, ее решение хорошо известно из теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) и является постоянной во времени матричной функцией $P(t) \equiv P^*$, одной и той же для любого x_0 .

Предположим теперь, что дополнительно требуется удовлетворить некоторый набор структурных ограничений на функцию $P(t)$ (например, $P_{ij}(t) \equiv 0$ для каких-то i, j и т.п.). Оказывается, что в этом случае решение задачи $J(P) \rightarrow \min_{P \in \mathcal{S}}$ на соответствующем множестве $\mathcal{S}$ может не быть постоянной матрицей. Это обстоятельство несколько удивительно ввиду того, что все параметры A, B, Q и E в задаче остаются стационарными, но стационарный регулятор уже не является оптимальным среди всех возможных. Возникает естественная потребность в алгоритме построения оптимального нестационарного регулятора в подобной задаче (или, по крайней мере, в алгоритме улучшения имеющегося оптимального регулятора среди всех стационарных), чему и посвящена данная работа. Соответствующие результаты формулируются для существенно более общей стохастической задачи оптимального управления, а затем обсуждаются, в том числе и для указанной выше ситуации, на примерах.

В контексте изучаемой проблемы и предлагаемых ниже путей ее решения нелишним будет указать ссылку на монографию [1], где в числе прочего обсуждается вопрос минимизации функционала (4) с условием (3) на множестве постоянных стабилизирующих матриц $P(t) \equiv P^*$, удовлетворяющих заданным структурным ограничениям. В частности, для задачи линейного регулирования по выходу выписан градиент функционала J на указанном множестве [1, с. 253]. Там же отмечается, что использование затем градиентной процедуры минимизации не гарантирует отыскание решения (ввиду невыпуклости как самого функционала, так и его области определения) и потому такую задачу следует отнести к разряду нерешенных проблем. То же самое, безусловно, можно сказать и об изучаемой в настоящей работе более общей задаче, однако в качестве ее «решения» здесь тем не менее предлагается улучшающая процедура градиентного типа. Это связано с тем, что для задач нестационарного регулирования в условиях структурных ограничений глобальный минимум значений J может, вообще говоря, не достигаться (см. [2], где построен простой пример расходящейся минимизирующей последовательности в линейно-квадратичной задаче на конечном временном ин-

тервале). Последнее означает, что даже наличие каких бы то ни было необходимых и достаточных условий оптимальности данного нестационарного регулятора также не гарантирует окончательного решения задачи, в то время как градиентная процедура одинаково успешно (или неуспешно) может отыскивать и минимизирующую последовательность, и некоторое приближение к стационарной точке.

2. Формальная постановка задачи и предварительные результаты

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито [3]

$$(5) \quad dx(t) = A(u(t))x(t)dt + G(u(t))x(t)dw(t), \quad x(0) = x_0,$$

где x_0 — n -мерный случайный вектор с известной конечной матрицей вторых начальных моментов $\mathbb{E}[x_0 x_0^T] = N_0 \succ 0$, матричные функции $A, G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ непрерывно дифференцируемы на всей области определения. Для заданных отображений A и G определено открытое множество $\mathcal{S}$ (стабилизирующих) векторов $v \in \mathbb{R}^m$ таких, что вещественные части всех собственных значений матрицы $A(v) \oplus A(v) + G(v) \otimes G(v)$ строго меньше нуля (символы $\oplus$ и $\otimes$ означают сумму и произведение Кронекера). Последнее условие гарантирует асимптотическую устойчивость (стабилизируемость) динамической системы (5) при $u(t) \equiv v \in \mathbb{R}^m$ в среднем квадратичном (это вытекает из векторного представления матричного уравнения для второго начального момента случайного процесса $x(t)$ [4]). Если $G = 0$, то оно эквивалентно классическому условию гурвицевости матрицы $A(v)$.

Будем исследовать задачу на минимум

$$(6) \quad J(u) = \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} x(t)^T Q(u(t)) x(t) dt \right] \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}},$$

где для удобства записи опущена неявная зависимость в смысле уравнения (5) вектора состояния x от функции управления u , матричная функция $Q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ непрерывно дифференцируема, $Q(u) \succ 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathcal{U} = \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{U}_T,$$

а $\mathcal{U}_T$ — множество измеримых на $[0; +\infty)$ функций u таких, что выполнены условия:

1) $u|_{[0; T]} \in L_2^m([0; T])$, если $T > 0$;

2) $u(t) = u_T \in \mathcal{S}$ для всех $t \geq T$.

Ясно, что $\mathcal{U}_T$ можно рассматривать как открытое множество в $L_2^m([0; T]) \times \mathbb{R}^m$ при $T > 0$ и как открытое множество в $\mathbb{R}^m$ при $T = 0$. Предполагается, что функционал J на множестве $\mathcal{U}$ определен корректно, то

есть при любом $u \in \mathcal{U}$ существует единственное сильное решение [3] уравнения (5), а несобственный интеграл в правой части (6) сходится к случайной величине с конечным вторым моментом.

Отметим, что постановку задачи (5)–(6) и нижеследующие результаты можно элементарно обобщить на случай многомерного случайного возмущения, но здесь для удобства изложения ограничимся одномерным стандартным винеровским процессом $w(t)$. Если же положить $G(u) \equiv 0$, $A(u) = A^c + B^c P_u$, $Q(u) = Q^c + P_u^T E^c P_u$, $x_0 = \mathbb{E}[x_0]$, то получается детерминированная задача (3)–(4) оптимизации линейного регулятора со структурными ограничениями (здесь P_u – матрица регулятора, а вектор u составляется из максимального набора линейно независимых компонент матрицы P_u).

Рассмотрим также три вспомогательные задачи: при фиксированном значении $T > 0$

$$(7) \quad J_*(u) = \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} x(t)^T Q(u(t)) x(t) dt \right] \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}_T};$$

на конечном интервале времени

$$(8) \quad J_\alpha(u) = \mathbb{E} \left[\int_0^T x(t)^T Q(u(t)) x(t) dt + x(T)^T \alpha I x(T) \right] \rightarrow \inf_{u \in L_2^m([0; T])}, \quad T > 0,$$

где $\alpha \geq 0$ – скалярный коэффициент, а I – единичная матрица размеров $n \times n$; и на множестве допустимых управлений в виде постоянных векторов

$$(9) \quad J_c(u) = \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} x(t)^T Q(u) x(t) dt \right] \rightarrow \min_{u \in \mathcal{S}}.$$

Задачи (8) и (9) ранее исследовались в [5, 6]. Воспользуемся некоторыми результатами из этих работ для построения различных алгоритмов улучшения в задаче (6). Начнем с формулировки необходимых утверждений касательно задач (7)–(9). Здесь и далее под градиентом $\nabla F(v_0)$ функционала $F : L_2^m([0; T]) \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $v_0 \in L_2^m([0; T])$ понимается, как обычно, элемент f пространства $L_2^m([0; T])$ такой, что $\langle f, v \rangle = F'(v_0)v \quad \forall v \in L_2^m([0; T])$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в $L_2^m([0; T])$, а $F'(v_0) : L_2^m([0; T]) \rightarrow \mathbb{R}$ – линейный функционал производной Фреше отображения F в точке v_0 . Кратко будем писать $\nabla F(v_0) = t \rightarrow f(t)$.

Утверждение 1. Компоненты градиента функционала J_α в произвольной точке $u \in L_2^m([0; T])$ имеют вид

$$\frac{\partial J_\alpha(u)}{\partial u_j(\cdot)} = t \rightarrow \text{tr} \left[\left(\frac{\partial Q(u(t))}{\partial u_j} - 2M(t) \frac{\partial A(u(t))}{\partial u_j} - 2G(u(t))^T M(t) \frac{\partial G(u(t))}{\partial u_j} \right) N(t) \right],$$

$j = \overline{1, m}$, где матричная функция $N : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ является единственным решением задачи Коши

$$\dot{N}(t) = A(u(t))N(t) + N(t)A(u(t))^T + G(u(t))N(t)G(u(t))^T, \quad N(0) = N_0,$$

а матричная функция $M : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ — единственным решением задачи Коши

$$\begin{aligned}\dot{M}(t) &= -M(t)A(u(t)) - A(u(t))^T M(t) - G(u(t))^T M(t)G(u(t)) + Q(u(t)), \\ M(T) &= -\alpha I,\end{aligned}$$

причем

$$J_\alpha(u) = -\text{tr} [M(0)N_0].$$

Утверждение 2. Компоненты градиента функционала J_c в произвольной точке $u \in \mathcal{S}$ имеют вид

$$\frac{\partial J_c(u)}{\partial u_j} = \text{tr} \left[\left(\frac{\partial Q(u)}{\partial u_j} - 2M_T \frac{\partial A(u)}{\partial u_j} - 2G(u)^T M_T \frac{\partial G(u)}{\partial u_j} \right) N_T \right], \quad j = \overline{1, m},$$

где матрица $N_T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ является единственным решением уравнения

$$A(u)N_T + N_TA(u)^T + G(u)N_TG(u)^T + N_0 = 0,$$

а матрица $M_T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единственным решением уравнения

$$Q(u) - M_TA(u) - A(u)^T M_T - G(u)^T M_T G(u) = 0,$$

причем

$$J_c(u) = -\text{tr} [M_T N_0].$$

Утверждение 3. Градиент функционала J_* в произвольной точке $u \in \mathcal{U}_T$ имеет вид

$$\nabla_u J_*(u) = \left(\frac{\partial J_*(u)}{\partial u(\cdot)}, \frac{\partial J_*(u)}{\partial u_T} \right) \in L_2^m([0; T]) \times \mathbb{R}^m,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_*(u)}{\partial u_j(\cdot)} &= t \rightarrow \text{tr} \left[\left(\frac{\partial Q(u(t))}{\partial u_j} - 2M(t) \frac{\partial A(u(t))}{\partial u_j} - 2G(u(t))^T M(t) \frac{\partial G(u(t))}{\partial u_j} \right) N(t) \right], \\ \frac{\partial J_*(u)}{\partial u_{Tj}} &= \text{tr} \left[\left(\frac{\partial Q(u_T)}{\partial u_j} - 2M_T \frac{\partial A(u_T)}{\partial u_j} - 2G(u_T)^T M_T \frac{\partial G(u_T)}{\partial u_j} \right) N_T \right], \quad j = \overline{1, m},\end{aligned}$$

где матричная функция $N : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ и матрица $N_T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ являются единственным решением системы уравнений

$$\begin{aligned}\dot{N}(t) &= A(u(t))N(t) + N(t)A(u(t))^T + G(u(t))N(t)G(u(t))^T, \quad N(0) = N_0, \\ A(u_T)N_T + N_TA(u_T)^T + G(u_T)N_TG(u_T)^T + N(T) &= 0,\end{aligned}$$

а матричная функция $M : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ и матрица $M_T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – единственным решением системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= -M(t)A(u(t)) - A(u(t))^T M(t) - G(u(t))^T M(t)G(u(t)) + Q(u(t)), \\ M(T) &= M_T, \end{aligned}$$

$$Q(u_T) - M_T A(u_T) - A(u_T)^T M_T - G(u_T)^T M_T G(u_T) = 0,$$

причем

$$J_*(u) = -\text{tr} [M(0)N_0].$$

Утверждение 1 для задачи (8) было впервые сформулировано и доказано в [5], а утверждение 2 для задачи (9) – в [6]. Утверждение 3 для задачи (7) формулируется впервые и комбинацией утверждений 1–2 не выводится. В целях sobлюдения целостности текста статьи, а также подчеркнуть единый подход к задачам, полное доказательство всех этих утверждений приведено в Приложении. Альтернативные формулы для вычисления значений функционалов в каждом из сформулированных утверждений могут быть эффективно использованы для контроля значений этих функционалов в процессе применения улучшающих процедур. Это подразумевается в дальнейшем при формулировке алгоритмов. Важно отметить, что значение функционала J_α в отличие от значений J_c и J_* никак в общем случае не соотносится со значением исходного функционала J , так как речь идет о модифицированном функционале (8).

3. Алгоритмы улучшения нестационарных регуляторов

В [7] был предложен достаточно простой алгоритм улучшения имеющегося оптимального стационарного регулятора в задаче (9) за счет построения кусочно-постоянного управления, где при переходе к новому интервалу постоянства фиксируется текущее начальное условие и строится оптимальный для него стационарный регулятор на бесконечном времени. Уже такой подход в ряде случаев позволяет серьезно повысить качество управления. Проблема развития идей улучшения на «полностью нестационарный» случай состоит в том, что для нестационарного регулятора в подавляющем большинстве ситуаций невозможно аналитически определить оптимальное решение, а удастся лишь построить улучшающую последовательность, быть может являющуюся (а быть может, и нет [2]) некоторым приближением к одной из множества стационарных точек. Исследование примеров также позволяет установить существенную неединственность таких улучшающих последовательностей, поэтому получение конкретного результата сильно зависит как от выбора начального приближения, так и от изменения величины шага улучшающей процедуры. Наконец, в изучаемой здесь оптимизационной проблеме (6) речь уже идет о совокупности задач, каждая из которых обладает указанными особенностями. Как итог, предлагаемые ниже алгоритмы улучшения не могут гарантировать отыскание близкого к оптимальному нестационарного регулятора и потому являются скорее полезным инструментом исследования

проблемы, нежели сколь-нибудь полного ее решения. Тем не менее они могут быть эффективно применены в конкретных прикладных задачах, где порядок улучшения значительно важнее близости к неизвестному оптимальному решению.

Итак, пусть имеется какой-либо регулятор $u \in \mathcal{U}_T$ при некотором $T \geq 0$. В частности, при $T = 0$ имеется стационарный регулятор. Будем считать его начальным приближением и рассмотрим возможные варианты его улучшения в смысле функционала качества (6).

Алгоритм 1. А) Случай $T > 0$. Построить улучшающую последовательность в задаче (7), не изменяя T . Для этого осуществить градиентный спуск исходя из формулы для $\nabla_u J_*(u)$ в утверждении 3. На каждом шаге при этом необходимо проверять принадлежность нового приближения множеству $\mathcal{U}_T$, в частности, должно быть выполнено включение $u_T \in \mathcal{S}$ (проверяется по определению). Завершить расчеты при выполнении условия достаточной малости совокупного градиента $\nabla_u J_*(u)$ по какой-либо норме.

Б) Случай $T = 0$. Построить улучшающую последовательность в задаче (9). Для этого осуществить градиентный спуск исходя из формулы для $\nabla_u J_c(u)$ в утверждении 2. На каждом шаге проверять принадлежность нового приближения множеству $\mathcal{S}$. Завершить расчеты при выполнении условия достаточной малости градиента $\nabla_u J_c(u)$ по какой-либо норме.

Особенность алгоритма 1 состоит в том, что улучшающая последовательность относительно проблемы (6) будет построена только в заданном классе управлений $\mathcal{U}_T$. Если задан стационарный регулятор, то он останется стационарным.

Алгоритм 2. Построить улучшающие последовательности в задаче (7) с увеличением значения T относительно данного вплоть до некоторого $T_{\max}$. Для этого осуществлять градиентный спуск исходя из формулы для $\nabla_u J_*(u)$ в утверждении 3. На каждом шаге проверять принадлежность нового приближения множеству $\mathcal{U}_T$. При каждом T завершать расчеты при выполнении условия достаточной малости совокупного градиента $\nabla_u J_*(u)$ по какой-либо норме. При достижении стационарности получающегося решения $u(t)$ на некотором интервале заданной длины $[T^* - \varepsilon; T^*]$ проверить условие $u(T^*) \in \mathcal{S}$ и в случае его выполнения закончить расчеты в целом, положив $u(t) = u(T^*)$, $t > T^*$; иначе произвольно выбрать $u^* \in \mathcal{S}$ и положить $u(t) = u^*$, $t > T^*$.

Алгоритм 2 предполагает многократный градиентный спуск на растущем конечном интервале времени и все так же требует проверки условий $u_T \in \mathcal{S}$ и нахождения стабилизирующего регулятора при $T = T^*$. Вместе с тем поиск осуществляется в том числе и за пределами заданного исходного множества $\mathcal{U}_T$, однако и здесь могут быть потеряны некоторые потенциально качественные в смысле функционала (6) решения. Оказывается, существует способ существенно уменьшить вычислительную сложность алгоритма 2 и одновременно несколько изменить область поиска решений задачи (6) путем перехода к исследованию задачи (8).

Алгоритм 3. Задать некоторым образом весовой коэффициент $\alpha \geq 0$ и построить улучшающие последовательности в задаче (8), варьируя значения T в некотором диапазоне $(0; T_{\max}]$. Для этого осуществлять градиентный спуск исходя из формулы для компонент градиента в утверждении 1. В качестве начального приближения брать $u|_{[0; T]}$. При каждом T завершать расчеты при выполнении условия достаточной малости градиента $\nabla_u J_\alpha(u)$ по какой-либо норме. При достижении стационарности получающегося решения $u(t)$ на некотором интервале заданной длины $[T^* - \varepsilon; T^*]$ проверить условие $u(T^*) \in \mathcal{S}$ и в случае его выполнения закончить расчеты в целом, положив $u(t) = u(T^*)$, $t > T^*$; иначе произвольно выбрать $u^* \in \mathcal{S}$ и положить $u(t) = u^*$, $t > T^*$. В случае отсутствия стационарности использовать значение $T^* = T_{\max}$. Проверить улучшение начального приближения в смысле функционала качества J_* и в случае отсутствия улучшений считать применение алгоритма безуспешным.

За счет задания достаточно большого значения α можно добиться отыскания алгоритмом 3 таких решений, которые соответствуют «быстрому обнулению» ковариационной матрицы случайного процесса $x(t)$, после чего любой стабилизирующий регулятор достаточно быстро «гасит» оставшийся «хвост». Более того, подходящий регулятор может быть найден автоматически. Естественно ожидать от таких решений высокого качества в смысле (6). Однако особенности рассматриваемой задачи не предполагают, что такое решение будет найдено именно в момент остановки алгоритма 3. Последний, учитывая это обстоятельство алгоритм имеет следующий вид.

Алгоритм 4. Задать некоторым образом весовой коэффициент $\alpha \geq 0$ и построить улучшающие последовательности в задаче (8), варьируя значения T в некотором диапазоне $(0; T_{\max}]$. Для этого осуществлять градиентный спуск исходя из формулы для компонент градиента в утверждении 1. В качестве начального приближения также брать $u|_{[0; T]}$. При каждом T завершать расчеты при выполнении условия достаточной малости градиента $\nabla_u J_\alpha(u)$, по какой-либо норме. При достижении стационарности получающегося решения $u(t)$ на некотором интервале заданной длины $[T^* - \varepsilon; T^*]$ (или при $T^* = T_{\max}$) сравнить между собой все найденные до этого решения и выбрать наилучшее из них (в смысле используемого здесь функционала J_α), соответствующее какому-то $\tilde{T}$. Проверить условие $u(\tilde{T}) \in \mathcal{S}$ и в случае его выполнения закончить расчеты в целом, положив $u(t) = u(\tilde{T})$, $t > \tilde{T}$; иначе произвольно выбрать $u^* \in \mathcal{S}$ и положить $u(t) = u^*$, $t > \tilde{T}$. Проверить улучшение начального приближения в смысле функционала J_* и в случае отсутствия улучшений считать применение алгоритма безуспешным.

Финальное условие остановки в алгоритмах 2–4 и произвольный выбор $u^* \in \mathcal{S}$ обусловлены тем, что для любого стабилизирующего (тем более оптимального) вектора выполнено $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 0$, из чего следует, что при достаточно большом T^* выбранное произвольно $u^* \in \mathcal{S}$, для которого было бы положено $u(t) = u^*$, $t > T^*$, отличается достаточно мало по значению J_* от любого другого $\tilde{u} \in \mathcal{S}$. Это, в свою очередь, означает малость компонент градиента J_* по u_T относительно задачи (7). Отметим также, что формально все

алгоритмы являются только неухудшающими в том смысле, что не улучшают стационарные точки соответствующих функционалов. Более того, структура алгоритмов 3 и 4 до последнего шага даже не может гарантировать, что значение функционала качества J не ухудшится, и потому эти алгоритмы содержат дополнительную проверку найденного приближения по критерию J_* .

4. Примеры

Для начала рассмотрим детерминированный вариант модельного примера из [4]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_2(t), & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - u(t)x_2(t), & x_2(0) = 1, \end{cases}$$

$$J = \int_0^{+\infty} ((u(t)^2 + 1) x_1(t)^2 + x_2(t)^2) dt \rightarrow \min.$$

Воспользуемся утверждением 2, чтобы найти аналитическое решение задачи в классе $\mathcal{S}$ стабилизирующих постоянных значений $u \in \mathbb{R}$. Сперва определим множество $\mathcal{S}$. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -u \end{pmatrix},$$

откуда получаем собственные значения матрицы A

$$\lambda_{1,2} = \frac{-u \pm \sqrt{u^2 - 8}}{2},$$

так что $\mathcal{S} = (0; +\infty)$. Из утверждения 2 получаем следующие соотношения:

$$\frac{\partial J_c(u)}{\partial u} = 2un_{11} + 2m_{12}n_{12} + 2m_{22}n_{22},$$

$$\begin{cases} 4n_{12} + 1 = 0, \\ 2n_{22} - n_{11} - un_{12} + 1 = 0, \\ -2n_{12} - 2un_{22} + 1 = 0, \\ u^2 + 1 + 2m_{12} = 0, \\ m_{22} - 2m_{11} + um_{12} = 0, \\ 1 - 4m_{12} + 2um_{22} = 0. \end{cases}$$

Последовательно находим (с учетом $0 \notin \mathcal{S}$)

$$n_{12} = -\frac{1}{4}, \quad n_{22} = \frac{3}{4u}, \quad n_{11} = \frac{3}{2u} + \frac{u}{4} + 1,$$

$$m_{12} = -\frac{u^2 + 1}{2}, \quad m_{22} = -u - \frac{3}{2u}, \quad m_{11} = -\frac{3}{4u} - \frac{u^3 + 3u}{4},$$

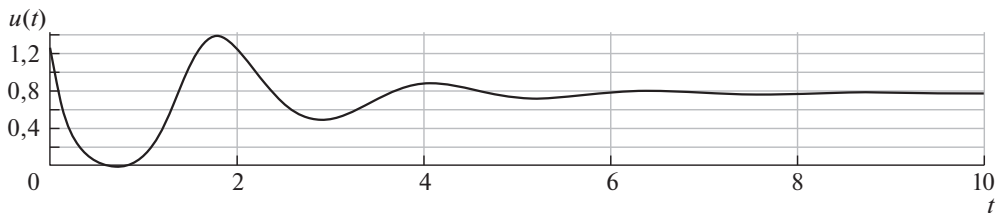


Рис. 1. Нестационарный регулятор $\tilde{u}$ (алгоритм 2).

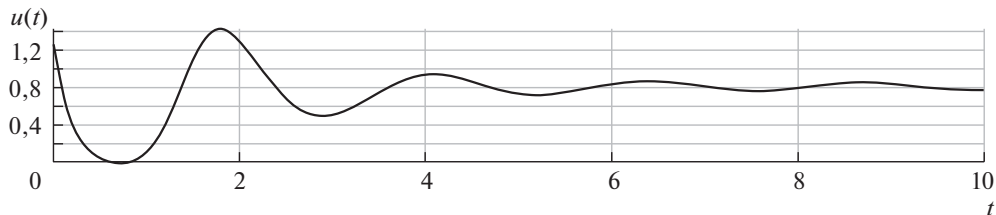


Рис. 2. Нестационарный регулятор $\hat{u}$ (алгоритм 3).

откуда

$$\frac{\partial J_c(u)}{\partial u} = \frac{3u^4 + 8u^3 + 7u^2 - 9}{4u^2}.$$

В области $\mathcal{S}$ имеется единственное решение уравнения $\partial J_c(u)/\partial u = 0$, а именно, $u^* \approx 0,775$.

Итак, решение задачи в классе стабилизирующих постоянных управлений существует и определяется аналитически как единственный положительный действительный корень уравнения $3u^4 + 8u^3 + 7u^2 - 9 = 0$. При помощи альтернативной формулы для $J_c(u)$ из утверждения 2 также можно заключить, что значение функционала качества на этом решении равно

$$J_c(u^*) = -m_{11}^* - 2m_{12}^* - m_{22}^* = \frac{9}{4u^*} + \frac{(u^*)^3 + 7u^*}{4} + (u^*)^2 + 1 \approx 5,976.$$

Теперь интересен следующий вопрос: «Возможно ли улучшить качество найденного оптимального стационарного управления при помощи алгоритмов 1–4, и если да, то насколько сильно?»

Ясно, что алгоритм 1 не может улучшить найденное u^* , но с его помощью можно приблизиться к u^* сколь угодно точно, стартуя из произвольного стабилизирующего значения.

Реализуем численно алгоритм 2 (технические подробности относительно используемой в работе реализации алгоритмов 1–4 приведены в следующем разделе), взяв в качестве начального приближения $u(t) \equiv u^*$. В результате окажется найдено приближение $\tilde{u}$, представленное на рис. 1. Значение функционала качества также вычисляется численно по альтернативной формуле из утверждения 1:

$$J(\tilde{u}) = J_*(\tilde{u}) \approx 4,385.$$

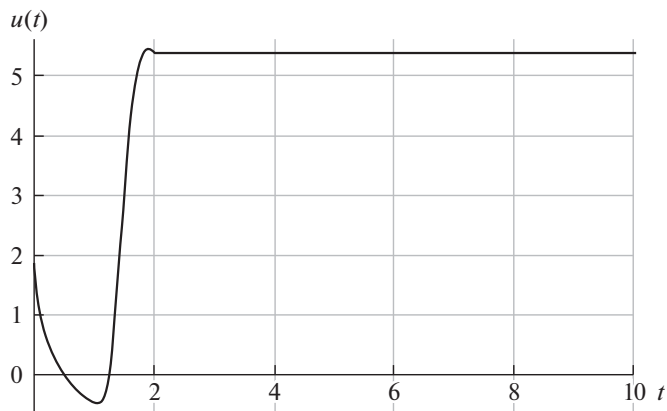


Рис. 3. Нестационарный регулятор $\bar{u}$ (алгоритм 4).

Используя то же начальное приближение $u(t) \equiv u^*$, применим алгоритм 3. В результате окажется найдено $\hat{u}$, отличающееся (хоть и незначительно) от $\tilde{u}$. Приближение $\hat{u}$ представлено на рис. 2. Значение функционала качества на нем

$$J(\hat{u}) = J_*(\hat{u}) \approx 4,332.$$

Наконец, алгоритм 4 позволяет получить из начального приближения $u(t) \equiv u^*$ совершенно другое $\bar{u}$ (см. рис. 3). При этом значение функционала качества

$$J(\bar{u}) = J_*(\bar{u}) \approx 3,572.$$

Как итог, получена возможность построить нестационарный регулятор, почти вдвое превышающий по качеству оптимальное стационарное решение. Ясно, что варьирование начального приближения и параметров алгоритмов может привести к дальнейшему улучшению.

Этот результат можно интерпретировать следующим образом. В стационарной линейно-квадратичной задаче оптимального управления

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = (1, 1)^T, \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ J(u) &= \int_0^{+\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t) E u(t)) dt \rightarrow \min, \\ Q &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = 1 \end{aligned}$$

наилучший стационарный линейный регулятор вида

$$u(t) = u^* x_2(t)$$

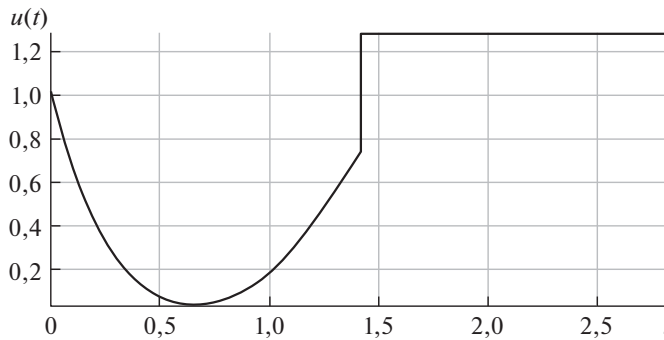


Рис. 4. Нестационарный регулятор $\hat{u}$ (алгоритм 1; стохастический случай).

не является оптимальным среди всех регуляторов, линейных по второй координате вектора состояния; в частности, регуляторы

$$u(t) = \tilde{u}(t)x_2(t), \quad u(t) = \hat{u}(t)x_2(t), \quad u(t) = \bar{u}(t)x_2(t)$$

обеспечивают лучшее качество управления в смысле заданного функционала J .

Сопоставим теперь результаты настоящей работы с исследованиями статьи [4]. В [4] обсуждается стохастический вариант предыдущего примера, а именно

$$\begin{cases} dx_1(t) = 2x_2(t)dt + \frac{1}{2}u(t)x_1(t)dw(t), & x_1(0) = 1, \\ dx_2(t) = -(x_1(t) + u(t)x_2(t))dt, & x_2(0) = 1, \end{cases}$$

$$J = \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} ((u(t)^2 + 1)x_1(t)^2 + x_2(t)^2) dt \right] \rightarrow \min.$$

Там же найдено оптимальное решение в классе стабилизирующих постоянных управлений. Аналогично предыдущему можно показать, что это решение является единственным в области устойчивости $\mathcal{S}$ действительным корнем u^* уравнения 6-й степени $\partial J_c(u)/\partial u = 0$ и $u^* \approx 0,678$, $J_c(u^*) \approx 6,777$. В [4] также предлагается улучшающий алгоритм построения кусочно-постоянного управления, с помощью которого найдено новое приближение

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0,678, & 0 \leq t < 1,42, \\ 1,239, & 1,42 \leq t < +\infty, \end{cases} \quad J(\tilde{u}) \approx 6,185.$$

Ясно, что $\tilde{u} \in \mathcal{U}_T$ при $T = 1,42$, поэтому можно использовать для его улучшения алгоритм 1. Результат $\hat{u}$ представлен на рис. 4,

$$J(\hat{u}) = J_*(\hat{u}) \approx 5,165.$$

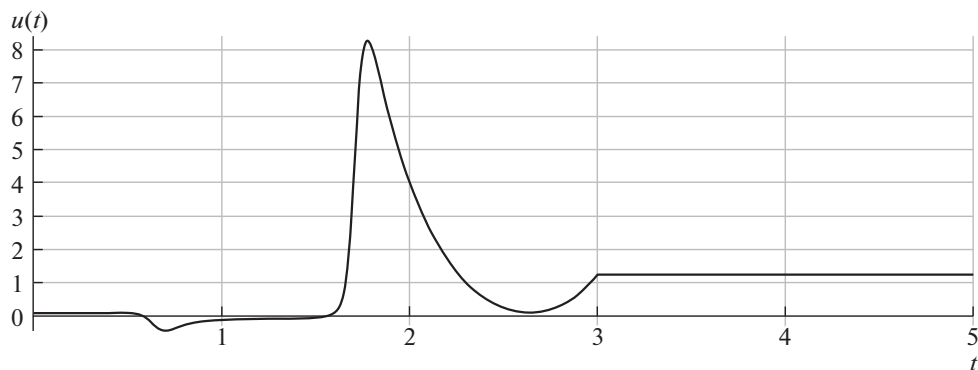


Рис. 5. Нестационарный регулятор (алгоритм 4; стохастический случай).

Алгоритмы 2–4 позволяют в дальнейшем улучшить качество управления до значений функционала

$$J_2 \approx 4,734, \quad J_3 \approx 4,639, \quad J_4 \approx 3,562.$$

Приближения, построенные по алгоритмам 2 и 3, практически не отличаются от представленных на рис. 1 и 2. Приближение по алгоритму 4 приведено на рис. 5.

5. Комментарии по реализации алгоритмов улучшения

Все алгоритмы реализованы в СКМ Maple в виде двух блоков программ (блок 1 – алгоритмы 1 и 2; блок 2 – алгоритмы 3 и 4). Численное решение задач Коши для линейных матричных дифференциальных уравнений в утверждениях 1 и 3 реализовано простейшим методом Эйлера с шагом $h = 0,001$, численное решение алгебраических уравнений в утверждениях 2 и 3 – встроенным решателем solve. При реализации градиентного спуска использованы динамически изменяющиеся величины шагов раздельно для «функциональной» и «хвостовой» части градиента. Значения параметров выбраны равными $T_{\max} = 10$, $\alpha = 100$. Изменение параметра T в алгоритмах 3 и 4 осуществляется на множестве $\{0, 1, \dots, T_{\max}\}$. В соответствии с шагом численного интегрирования функциональная составляющая градиента считается принадлежащей пространству $\mathbb{R}^N$, $N = T/h$, а норма совокупного градиента вычисляется по формуле $\|x\|_{\infty} = \max_{0 \leq i \leq N+1} |x_i|$. Условие остановки градиентного спуска: норма совокупного градиента не превышает значение $\varepsilon = 1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Справедливость всех сформулированных в работе утверждений непосредственно вытекает из следующего общего результата.

Лемма 1. Пусть заданы банахово пространство X , открытое множество $\mathcal{O}$ в гильбертовом пространстве U , непрерывное отображение

$F: \mathcal{O} \rightarrow X$ и произвольная функция $J: X \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$. Если существуют множество Λ , отображение $F^*: \mathcal{O} \rightarrow \Lambda$ и функции $L: X \times \mathcal{O} \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, $J^*: \mathcal{O} \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$1) L(F(u), u, \lambda) = J(F(u), u) \quad \forall (u, \lambda) \in \mathcal{O} \times \Lambda;$$

$$2) L(x, u, F^*(u)) = J^*(u, F^*(u)) \quad \forall (x, u) \in X \times \mathcal{O};$$

3) $\forall (u, \lambda) \in \mathcal{O} \times \Lambda$ существует непрерывное отображение $x \rightarrow L_u(x, u, \lambda): X \rightarrow U$,

то в любой точке $u \in \mathcal{O}$ функция $u \rightarrow J(F(u), u)$ дифференцируема и выполнены соотношения

$$J(F(u), u) = J^*(u, F^*(u)), \quad \nabla_u J(F(u), u) = L_u(F(u), u, F^*(u)).$$

Доказательство леммы 1. Первое соотношение очевидно следует из условий 1) и 2). Кроме этого, с учетом 3) для любых $u \in \mathcal{O}$ и $\tilde{u}$ из окрестности u внутри $\mathcal{O}$ справедливо

$$\begin{aligned} J(F(\tilde{u}), \tilde{u}) - J(F(u), u) &= L(F(\tilde{u}), \tilde{u}, F^*(\tilde{u})) - L(F(u), u, F^*(u)) = \\ &= L(F(\tilde{u}), \tilde{u}, F^*(u)) - L(F(\tilde{u}), u, F^*(u)) = \\ &= \langle L_u(F(\tilde{u}), u, F^*(u)), \tilde{u} - u \rangle + o(\|\tilde{u} - u\|). \end{aligned}$$

Отсюда ввиду непрерывности F и $x \rightarrow L_u(x, u, F^*(u))$

$$\lim_{\tilde{u} \rightarrow u} \frac{J(F(\tilde{u}), \tilde{u}) - J(F(u), u)}{\|\tilde{u} - u\|} = \langle L_u(F(u), u, F^*(u)), e \rangle, \quad e \in S_U,$$

где $S_U := \{e \in U : \|e\| = 1\}$, что завершает доказательство дифференцируемости и второго соотношения.

В дальнейшем будет удобно использовать следующее вспомогательное утверждение ($\mathcal{AC}^{n \times n}([0; T])$ – пространство абсолютно непрерывных на отрезке $[0; T]$ матричных функций размеров $n \times n$).

Лемма 2. Для любого допустимого управления u на множестве $\mathcal{AC}^{n \times n}([0; T]) \times \mathbb{R}^{n \times n}$ существует единственное непрерывно зависящее от изменений $u \in \mathcal{U}$ решение (N, N_T) уравнений

$$(П.1) \quad \dot{N}(t) = A(u(t))N(t) + N(t)A(u(t))^T + G(u(t))N(t)G(u(t))^T, \quad N(0) = N_0,$$

$$(П.2) \quad A(u_T)N_T + N_TA(u_T)^T + G(u_T)N_TG(u_T)^T + N(T) = 0,$$

причем значение функционала (6) удовлетворяет равенству

$$J(u) = \int_0^T \text{tr} [Q(u(t))N(t)] dt + \text{tr} [Q(u_T)N_T].$$

Доказательство леммы 2. Уравнения (П.1) и (П.2) представляют собой линейную матричную задачу Коши и линейное матричное алгебраическое уравнение (обобщенное уравнение Ляпунова), разрешимые раздельно.

Существование и единственность решения в условиях задачи (5)–(6), а также его непрерывная зависимость от параметров хорошо известны [8, 9]. Используя формулу Ито [3], нетрудно проверить следующие равенства:

$$N(t) = \mathbb{E}[x(t)x(t)^T], \quad N_T = \mathbb{E} \left[\int_T^{+\infty} x(t)x(t)^T dt \right],$$

где $x(t)$ – сильное решение уравнения (5). Остается записать исходя из (6), что

$$J(u) = \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} x(t)^T Q(u(t)) x(t) dt \right] = \int_0^T \text{tr} [Q(u(t)) N(t)] dt + \text{tr} [Q(u_T) N_T].$$

Доказательство утверждения 1. Дано число $T > 0$. Положим в условиях леммы 1 $X = \mathcal{AC}^{n \times n}([0; T])$, $\mathcal{O} = U = L_2^m([0; T])$, отображение F определим как решение уравнения (П.1), функцию J будем считать заданной на $X \times \mathcal{O}$ формулой (8). Далее, определим $\Lambda = X$, отображение F^* – как единственное решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= -M(t)A(u(t)) - A(u(t))^T M(t) - G(u(t))^T M(t)G(u(t)) + Q(u(t)), \\ M(T) &= -\alpha I, \end{aligned}$$

а функции L и J^* – формулами

$$\begin{aligned} L(N, u, M) &= J_\alpha(u) + \text{tr} [M(T)N(T)] - \text{tr} [M(0)N(0)] - \\ &- \int_0^T \text{tr} \left[\dot{M}(t)N(t) + \right. \\ &\left. + M(t) (A(u(t))N(t) + N(t)A(u(t))^T + G(u(t))N(t)G(u(t))^T) \right] dt, \\ J^*(u, M) &= -\text{tr} [M(0)N_0]. \end{aligned}$$

Справедливость условий 1)–2) леммы 1 очевидна (в самом деле, условие 1) следует из (П.1) и конструкции L , а отображение F^* построено непосредственно исходя из 2)), условие 3) следует из исходных требований на отображения A , G , Q . Применяя лемму 1, а затем лемму 2, завершаем доказательство.

Доказательство утверждения 2. Положим в условиях леммы 1 $X = \mathbb{R}^{n \times n}$, $U = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{O} = \mathcal{S}$, отображение F определим как решение уравнения (П.2) при $N(T) = N_0$, функцию J будем считать заданной на $X \times \mathcal{O}$ формулой (9). Далее, определим $\Lambda = X$, отображение F^* – как единственное решение обобщенного уравнения Ляпунова

$$Q(u_T) - M_T A(u_T) - A(u_T)^T M_T - G(u_T)^T M_T G(u_T) = 0,$$

а функции L и J^* – формулами

$$\begin{aligned} L(N_T, u, M_T) &= \\ &= J_c(u) - \text{tr} [M_T (A(u_T)N_T + N_TA(u_T)^T + G(u_T)N_TG(u_T)^T + N_0)] , \\ J^*(u, M_T) &= -\text{tr} [M_T N_0] . \end{aligned}$$

Справедливость условий 1)–3) леммы 1 вновь очевидна. Остается применить ее, а затем лемму 2.

Доказательство утверждения 3. Дано число $T > 0$. Положим в условиях леммы 1 $X = \mathcal{A}^{n \times n}([0; T]) \times \mathbb{R}^{n \times n}$, $U = L_2^m([0; T]) \times \mathbb{R}^m$, $\mathcal{O} = \mathcal{U}_T$, отображение F определим как решение уравнений (П.1), (П.2), функцию J будем считать заданной на $X \times \mathcal{O}$ формулой (7). Далее, определим $\Lambda = X$, отображение F^* – как единственное решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= -M(t)A(u(t)) - A(u(t))^T M(t) - G(u(t))^T M(t)G(u(t)) + Q(u(t)), \\ M(T) &= M_T, \end{aligned}$$

$$Q(u_T) - M_TA(u_T) - A(u_T)^T M_T - G(u_T)^T M_T G(u_T) = 0,$$

а функции L и J^* – формулами

$$\begin{aligned} L(N, N_T, u, M, M_T) &= J_*(u) + \text{tr} [M(T)N(T)] - \text{tr} [M(0)N(0)] - \\ &- \int_0^T \text{tr} \left[\dot{M}(t)N(t) + \right. \\ &\quad \left. + M(t) (A(u(t))N(t) + N(t)A(u(t))^T + G(u(t))N(t)G(u(t))^T) \right] dt - \\ &- \text{tr} [M_T (A(u_T)N_T + N_TA(u_T)^T + G(u_T)N_TG(u_T)^T + N(T))] , \\ J^*(u, M, M_T) &= -\text{tr} [M(0)N_0] . \end{aligned}$$

Для завершения доказательства вновь последовательно применяем леммы 1 и 2.

В заключение отметим, что утверждения 1–3 вовсе не обязательно доказывать, опираясь на весьма общую лемму 1. В частности, в [5, 6] утверждения 1 и 2 были доказаны непосредственным анализом приведенных выше конструкций L с использованием аналогов леммы 2. Лемма 1, в свою очередь, выделяет и обобщает до абстрактного уровня ключевую концепцию, присущую каждому из трех доказанных утверждений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Шербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
2. Rumyantsev D., Tsarkov K. On Certainty Equivalence Property in Deterministic LQ-problems with Random Initial Data and Information Constraints // Proceedings of the 15th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (STAB-2020, Moscow). М.: IEEE, 2020.

3. *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.
4. *Онегин Е.Е.* Оптимальная стабилизация квазилинейной стохастической системы с управляемыми параметрами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20. № 10. С. 589–599.
5. *Хрусталеv М.М., Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Оптимизация квазилинейных стохастических систем диффузионного типа, нелинейных по управлению // АиТ. 2017. № 6. С. 84–105.
Khrustalev M.M., Rumyantsev D.S., Tsarkov K.A. Optimization of Quasilinear Stochastic Control-nonlinear Diffusion Systems // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 6. P. 1028–1045.
6. *Onegin E., Khrustalev M.* Optimal Stabilisation of a Quasilinear Stochastic System with Controllable Parameters // Proceedings of the 14th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (STAB-2018, Moscow). М.: IEEE, 2018.
7. *Онегин Е.Е., Хрусталеv М.М.* Субоптимальная стабилизирующая стратегия управления линейной стохастической системой с управляемыми параметрами // Труды 13-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XIII, Москва, 2019). М.: ИПУ РАН, 2019. С. 870–874.
8. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations. John Wiley & Sons, 1964.
9. *Damm T.* Rational Matrix Equations in Stochastic Control. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Маликовым.

Поступила в редакцию 07.03.2021

После доработки 27.04.2021

Принята к публикации 30.06.2021