

© 2021 г. О.В. ЧЕРНОЯРОВ, д-р физ.-мат. наук (o_v_ch@mail.ru)
(Национальный исследовательский университет “МЭИ”, Москва;
Национальный исследовательский Томский государственный университет;
Майкопский государственный технологический университет),
С. ДАШАН, д-р физ.-мат. наук (serguei.dachian@univ-lille.fr)
(Университет Лилля, Лилль, Франция;
Национальный исследовательский Томский государственный университет),
Ю.А. КУТОЯНЦ, д-р физ.-мат. наук (yury.kutoyants@univ-lemans.fr)
(Университет Ле Мана, Ле Ман, Франция;
Национальный исследовательский Томский государственный университет),
А.В. ЗЮЛЬКОВ, канд. физ.-мат. наук (avzz888@yandex.ru)
(Воронежский государственный университет)

ОБ ОШИБКАХ ОЦЕНИВАНИЯ В ОПТИЧЕСКОЙ СВЯЗИ И ЛОКАЦИИ¹

Рассматриваются несколько задач оценки параметров по наблюдениям неоднородных пуассоновских процессов, возникающих в различных практических приложениях оптической связи и локации. Функция интенсивности наблюдаемого процесса складывается из периодического сигнала, зависящего от неизвестного параметра и постоянной интенсивности шума. Описывается асимптотическое поведение оценок максимального правдоподобия и байесовских оценок в случаях фазовой и частотной модуляции сигналов. Особое внимание уделяется сигналам разной регулярности (гладкие, непрерывные, но не дифференцируемые и типа разладки). Численное моделирование иллюстрирует представленные результаты. Работа является обзором результатов по поведению оценок в случаях частотной и фазовой модуляций сигналов разной регулярности.

Ключевые слова: оценка параметров, неоднородные процессы Пуассона, фазовая и частотная модуляции, ОМП и байесовские оценки, асимптотические свойства.

DOI: 10.31857/S0005231021120035

1. Введение

Во многих практических задачах, связанных с управлением стохастическими системами, необходимо анализировать случайные потоки событий, воздействующие на систему или являющиеся результатом ее работы. Эти потоки присутствуют в информационно-вычислительных сетях, в радиотехнических системах и системах связи. Такие задачи, как правило, требуют контроля за

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 20-11-50024.

изменением свойств наблюдаемого потока. Причем при изучении подобных объектов естественные предположения об ординарности и отсутствии последующих действий во многих случаях приводят к наиболее распространенной модели потока — нестационарному пуассоновскому точечному потоку и к его простейшему варианту — периодически нестационарному пуассоновскому потоку. Подобные потоки (процессы) используются в различных стохастических системах и при реализации задач управления в качестве моделей:

- в теории телетрафика для описания нагрузки, обладающей естественной (например суточной) периодичностью;
- для описания входных потоков в цифровых сетях интегрального обслуживания (ISDN) — SPP и MMP-потоки [1, 2];
- для анализа характеристик распределенного мультиагентного управления в “сложных сетевых системах” [3];
- в задачах приема слабых оптических сигналов [4];
- потоков истинных и ложных целей в задачах управления радиолокационными наблюдениями (обзор пространства, формирование диаграмм направленности антенн и т.д.);
- при измерении Доплер эффекта в различных прикладных задачах, например в астрономии (красное смещение) [5], радарах [6], медицине [7], задачах локализации [8–10].

Выше использованы обозначения: ISDN (Integrated Services Digital Network) — цифровые сети интегрального обслуживания (ЦСИО); SPP (Switched Poisson Process) — поток, в котором интервалы поступления стационарного пуассоновского потока одной интенсивности альтернируют с интервалами поступления стационарного пуассоновского потока другой интенсивности; MMP (Markov modulated Poisson process) — MMP-поток (см. в [2]).

Причем во всех рассматриваемых задачах для адекватного описания нестационарностей необходимо использовать различные модели, а также в той или иной мере контролировать изменение свойств наблюдаемого потока.

Имеются две базовые модели случайных процессов с непрерывным временем, которые обычно используются в задачах передачи информации: одна — это модель наблюдений сигнала в белом гауссовском шуме

$$(1) \quad dX_t = S(\vartheta, t) dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $S(\vartheta, t)$ — передаваемый сигнал, несущий информацию ϑ , σ — уровень шума и W_t — винеровский процесс, производная которого и есть белый шум. Вторая модель — это неоднородный процесс Пуассона, функция интенсивности которого зависит от неизвестного параметра ϑ (информации). Первая модель хорошо изучена в статистической радиотехнике, а вторая модель изучена существенно меньше. В этой работе описываются ошибки оценивания при передаче информации в рамках второй модели.

Рассмотрим задачу передачи информации ϑ с помощью сигнала $S(\vartheta, t)$ через канал Пуассона с шумом интенсивности $\lambda_0 > 0$ (dark current, т.е.

темновой ток). Предположим, что оптический сигнал (неоднородный пуассоновский процесс) имеет функцию интенсивности $S(\vartheta, t)$, $0 \leq t \leq T$, где $S(\vartheta, t)$ — периодическая функция времени t . Следовательно, наблюдения $X^T = (X_t, 0 \leq t \leq T)$ являются пуассоновским (считающим) процессом с функцией интенсивности

$$(2) \quad \lambda(\vartheta, t) = S(\vartheta, t) + \lambda_0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Цель — оценить ϑ по наблюдениям X^T и описать свойства оценок в асимптотике больших выборок ($T \rightarrow \infty$). Это известная модель наблюдений в оптических системах связи (см., например, [4, 11–13] с соответствующими литературными ссылками). Будем рассматривать два типа модуляции (фазовую и частотную) и три типа регулярности сигналов: гладкий, непрерывный (но не дифференцируемый) и разрывный. Авторы интересуют предел распределения оценок во всех этих ситуациях. Особое внимание уделяется изучению среднеквадратических ошибок

$$(3) \quad \mathbf{E}_{\vartheta} |\bar{\vartheta}_T - \vartheta|^2 = \frac{\sigma^2}{T^m} (1 + o(1)), \quad T \rightarrow \infty,$$

где $\bar{\vartheta}_T$ — некоторая оценка параметра ϑ . Здесь $\sigma^2 > 0$ — предельная дисперсия этой оценки, а значение $m > 0$ (определяющее скорость сходимости) зависит от регулярности функции $S(\vartheta, t)$ относительно ϑ . Для простоты изложения предполагаем, что неизвестный параметр одномерный: $\vartheta \in \Theta = (\alpha, \beta)$, где α и β конечны.

В качестве оценок будем использовать оценку максимального правдоподобия (ОМП) и байесовские оценки (БО). Предполагаем, что $\lambda_0 > 0$ и семейство функций $S(\cdot, t) \geq 0$ равномерно ограничено по ϑ . Тогда меры, соответствующие разным значениям ϑ , эквивалентны, и функция отношения правдоподобия (ОП) (см. [14]) имеет вид

$$L(\vartheta, X^T) = \exp \left\{ \int_0^T \ln \left(1 + \frac{S(\vartheta, t)}{\lambda_0} \right) dX_t - \int_0^T S(\vartheta, t) dt \right\}, \quad \vartheta \in \Theta.$$

Оценки вводятся по обычным формулам. В частности, ОМП $\hat{\vartheta}_T$ является решением уравнения

$$(4) \quad L(\hat{\vartheta}_T, X^T) = \sup_{\vartheta \in \Theta} L(\vartheta, X^T),$$

а БО $\tilde{\vartheta}_T$ для квадратичной функции потерь и априорной плотности $p(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, записывается как отношение двух интегралов

$$(5) \quad \tilde{\vartheta}_T = \frac{\int_{\Theta} \vartheta p(\vartheta) L(\vartheta, X^T) d\vartheta}{\int_{\Theta} p(\vartheta) L(\vartheta, X^T) d\vartheta}.$$

В этой работе всегда предполагаем, что функция $p(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, положительна и непрерывна на Θ .

Функцию ОП и асимптотику $T \rightarrow \infty$ иногда удобно записать в немного другой форме. Предположим, что функция $S(\vartheta, t)$ периодическая с периодом $\tau > 0$. Если $T = n\tau$, где τ не зависит от ϑ и $n \rightarrow \infty$, тогда можно разрезать траекторию $X^{n\tau}$ на n периодов

$$X^{n\tau} = X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n), \quad X_j = (X_j(s), 0 \leq s \leq \tau),$$

где $X_j(s) = X_{s+(j-1)\tau} - X_{(j-1)\tau}$, $j = 1, \dots, n$, — независимые одинаково распределенные процессы Пуассона. Функцию ОП в этом случае можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} L(\vartheta, X^{(n)}) &= \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \int_0^\tau \ln \left(1 + \frac{S(\vartheta, s)}{\lambda_0} \right) dX_j(s) - n \int_0^\tau S(\vartheta, s) ds \right\} = \\ &= \exp \left\{ \int_0^\tau \ln \left(1 + \frac{S(\vartheta, t)}{\lambda_0} \right) dY_n(t) - n \int_0^\tau S(\vartheta, t) dt \right\} = \\ &= L(\vartheta, Y^n), \end{aligned}$$

где введен случайный процесс $Y^n = (Y_n(s), 0 \leq s \leq \tau)$, который определяется равенством

$$Y_n(s) = \sum_{j=1}^n X_j(s), \quad 0 \leq s \leq \tau.$$

Пуассоновский процесс $Y_n(\cdot)$ имеет функцию интенсивности

$$(6) \quad \lambda_n(\vartheta, t) = nS(\vartheta, t) + n\lambda_0, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

В данной работе рассматриваются два типа модуляции: фазовая и частотная. В случае фазовой модуляции $\vartheta \in (\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta < \tau$, функция интенсивности (2) неоднородного пуассоновского процесса X^T — это

$$\lambda(\vartheta, t) = S(t - \vartheta) + \lambda_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $S(t)$ — τ -периодическая функция. Здесь период τ не зависит от ϑ и сведение X^T к n независимым одинаково распределенным пуассоновским процессам: $X^T \mapsto X^{n\tau}$, а также к процессу Пуассона большой интенсивности (6): $X^T \mapsto Y^n$ является возможными. Это означает, что модели наблюдений X^T , $X^{n\tau}$ и Y^n эквивалентны.

В случае частотной модуляции функция интенсивности (2) наблюдения X^T — это

$$\lambda(\vartheta, t) = S(\vartheta t) + \lambda_0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Если функция $S(t)$ τ -периодическая, то период функции интенсивности $\lambda(\vartheta, t)$ равен $\frac{\tau}{\vartheta}$, т.е. зависит от ϑ , и сведения $X^T \mapsto X^{n\tau}$ и $X^T \mapsto Y^n$ невозможны, потому что значение ϑ неизвестно.

В данной работе описываются свойства ОМП и БО в случаях как фазовой ($S(t - \vartheta)$, $0 \leq t \leq T$), так и частотной ($S(\vartheta t)$, $0 \leq t \leq T$) модуляций в ситуациях различных типов регулярности функции $S(t)$.

Задача оценки частоты периодического сигнала занимает специальное место в статистической радиотехнике. Частотная модуляция имеет ряд преимуществ при передаче информации. Измерение частоты также важно при использовании эффекта Доплера в различных моделях наблюдений. Математически строгое описание свойств ОМП и БО впервые было дано в [15], где была рассмотрена модель (1) наблюдений “сигнал в белом гауссовском шуме”.

Здесь не рассматривается случай амплитудной модуляции, скажем,

$$\lambda(\vartheta, t) = \vartheta f(t) + \lambda_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $f(\cdot) \geq 0$ — τ -периодическая функция. Заметим, что ОМП $\hat{\vartheta}_T$ даже в этом случае не имеет явного выражения и является решением уравнения ОП

$$\int_0^T \frac{f(t)}{\vartheta f(t) + \lambda_0} dX_t - \int_0^T f(t) dt = 0, \quad \vartheta \in \Theta.$$

Скорость сходимости и предельное распределение ОМП хорошо известны (см., например, [16])

$$\sqrt{T}(\hat{\vartheta}_T - \vartheta) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \mathbf{I}(\vartheta)^{-1}), \quad \mathbf{I}(\vartheta) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{f(t)^2}{\vartheta f(t) + \lambda_0} dt.$$

Чтобы проиллюстрировать регулярность/сингулярность сигнала, введем функцию

$$(7) \quad S(t) = 2 \left| \frac{t}{\delta} \right|^\kappa \mathbf{1}_{\{0 \leq t \leq \delta\}} + 2\mathbf{1}_{\{\delta < t \leq \tau\}},$$

где $\delta > 0$ мало по отношению к τ . Регулярность статистического эксперимента полностью определяется значением параметра κ . Заметим, что все эти типы сингулярностей в случае независимых одинаково распределенных случайных величин описаны в [17].

Графики функции

$$\lambda(\vartheta, t) = S(t - \vartheta) + 1, \quad 0 \leq t \leq \tau$$

для различных значений κ показаны на рис. 1.

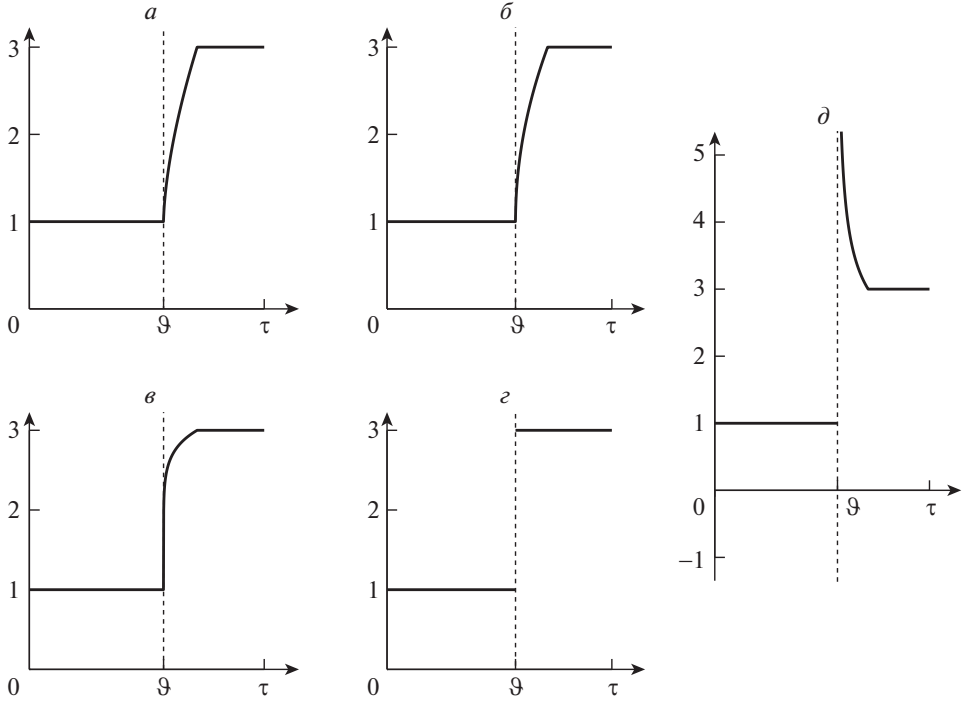


Рис. 1. Примеры сигналов с функциями интенсивности (7): а) $\kappa = \frac{5}{8}$, б) $\kappa = \frac{1}{2}$, в) $\kappa = \frac{1}{8}$, г) $\kappa = 0$, д) $\kappa = -\frac{3}{8}$.

Кратко опишем зависимость между κ и m в (3). Детали будут даны позже в этой работе. Если $\kappa > \frac{1}{2}$ (случай а), то имеем регулярную статистическую задачу оценивания с конечной информацией Фишера, и скоростям сходимости ОМП и БО в (3) соответствует $m = 1$. Если $\kappa = \frac{1}{2}$ (случай б), то снова имеем регулярный статистический эксперимент и

$$\mathbf{E}_{\vartheta} |\bar{\vartheta}_T - \vartheta|^2 = \frac{\sigma^2}{T \ln T} (1 + o(1)).$$

Если $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$ (случай в), то имеем особенность типа касп (cusp type singularity), и скорость сходимости этих оценок

$$\mathbf{E}_{\vartheta} |\bar{\vartheta}_T - \vartheta|^2 = \frac{\sigma^2}{T^{\frac{2}{2\kappa+1}}} (1 + o(1)), \quad 1 < \frac{2}{2\kappa+1} < 2.$$

Таким образом $m = 2/(2\kappa + 1)$. Заметим, что термин cusp используется в статистике для описания этого типа сингулярности после работы [18].

Ситуация когда сигнал разрывный (случай г) соответствует известной модели разладки (change-point). Здесь $\kappa = 0$ и функция интенсивности равна

$$\lambda(\vartheta, t) = 2\mathbb{1}_{\{t \geq \vartheta\}} + 1, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

а скорость сходимости

$$\mathbf{E}_{\vartheta} |\bar{\vartheta}_T - \vartheta|^2 = \frac{\sigma^2}{T^2} (1 + o(1)).$$

Наконец, ситуация когда $\kappa \in (-1, 0)$ (случай d) соответствует сингулярности типа взрыва (∞ -type singularity). Свойства БО для особенностей этого типа изучались в [19]. Заметим, что скорость сходимости в этом случае

$$\mathbf{E}_{\vartheta} \left| \tilde{\vartheta}_T - \vartheta \right|^2 = \frac{\sigma^2}{T^{\frac{2}{\kappa+1}}} (1 + o(1)).$$

Так как функция интенсивности не ограничена, то этот тип сингулярности не обсуждается в данной работе.

Представленное исследование охватывает в основном собственные результаты авторов, что позволяет ограничить объем рукописи.

Отметим, что многие результаты для моделей пуассоновских процессов, представленные в этом обзоре, есть прямые аналоги результатов, полученных для моделей независимых одинаково распределенных случайных величин, описанных в [17].

2. Методика исследования

Свойства ОМП (4) и БО (5) изучаются с привлечением общих результатов Ибрагимова и Хасьминского [17]. Метод, разработанный этими авторами, довольно универсален и позволяет изучать ОМП и БО как в регулярном случае, так и в сингулярных ситуациях. Основная идея этого метода может быть описана следующим образом. Предположим, что истинное значение равно $\vartheta_0 \in (\alpha, \beta)$ и у нас есть функция $\varphi_T \rightarrow 0$ такая, что нормализованная функция отношения правдоподобия

$$Z_T(u) = \frac{L(\vartheta_0 + \varphi_T u, X^T)}{L(\vartheta_0, X^T)}, \quad u \in \mathbb{U}_T = \left(\frac{\alpha - \vartheta_0}{\varphi_T}, \frac{\beta - \vartheta_0}{\varphi_T} \right)$$

сходится к некоторому невырожденному случайному процессу $Z(u)$, $u \in \mathcal{R}$. Обратите внимание, что $\mathbb{U}_T \nearrow \mathcal{R}$. Асимптотические распределения нормированных разностей

$$\mathbf{P}_{\vartheta_0} \left(\frac{\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0}{\varphi_T} < x \right) \quad \text{и} \quad \mathbf{P}_{\vartheta_0} \left(\frac{\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0}{\varphi_T} < x \right)$$

можно получить из этой сходимости, используя следующие соотношения.

Для ОМП имеем

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}_{\vartheta_0} \left(\varphi_T^{-1} \left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right) < x \right) = \\
& = \mathbf{P}_{\vartheta_0} \left\{ \sup_{\varphi_T^{-1}(\vartheta - \vartheta_0) < x} L(\vartheta, X^T) > \sup_{\varphi_T^{-1}(\vartheta - \vartheta_0) \geq x} L(\vartheta, X^T) \right\} = \\
& = \mathbf{P}_{\vartheta_0} \left\{ \sup_{\varphi_T^{-1}(\vartheta - \vartheta_0) < x} \frac{L(\vartheta, X^T)}{L(\vartheta_0, X^T)} > \sup_{\varphi_T^{-1}(\vartheta - \vartheta_0) \geq x} \frac{L(\vartheta, X^T)}{L(\vartheta_0, X^T)} \right\} = \\
(8) \quad & = \mathbf{P}_{\vartheta_0} \left\{ \sup_{u < x} \frac{L(\vartheta_0 + \varphi_T u, X^T)}{L(\vartheta_0, X^T)} > \sup_{u \geq x} \frac{L(\vartheta_0 + \varphi_T u, X^T)}{L(\vartheta_0, X^T)} \right\} = \\
& = \mathbf{P}_{\vartheta_0} \left\{ \sup_{u < x, u \in \mathbb{U}_T} Z_T(u) > \sup_{u \geq x, u \in \mathbb{U}_T} Z_T(u) \right\} \longrightarrow \\
& \longrightarrow \mathbf{P}_{\vartheta_0} \left\{ \sup_{u < x} Z(u) > \sup_{u \geq x} Z(u) \right\} = \mathbf{P}_{\vartheta_0} \left(\hat{\zeta} < x \right),
\end{aligned}$$

где сделана замена переменной $\vartheta = \vartheta_0 + \varphi_T u$ и обозначено через $\hat{\zeta}$ решение уравнения

$$(9) \quad Z(\hat{\zeta}) = \sup_{u \in \mathcal{R}} Z(u).$$

Следовательно, для ОМП $\hat{\vartheta}_T$ получена сходимость

$$(10) \quad \mathbf{P}_{\vartheta_0} \left(\frac{\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0}{\varphi_T} < x \right) \longrightarrow \mathbf{P}_{\vartheta_0} \left(\hat{\zeta} < x \right).$$

Для БО имеем (с той же заменой $\theta_u = \vartheta_0 + \varphi_T u$):

$$\begin{aligned}
\tilde{\vartheta}_T &= \frac{\int_{\Theta} \theta p(\theta) L(\theta, X^T) d\theta}{\int_{\Theta} p(\theta) L(\theta, X^T) d\theta} = \vartheta_0 + \varphi_T \frac{\int_{\mathbb{U}_T} u p(\theta_u) L(\theta_u, X^T) du}{\int_{\mathbb{U}_T} p(\theta_u) L(\theta_u, X^T) du} = \\
&= \vartheta_0 + \varphi_T \frac{\int_{\mathbb{U}_T} u p(\theta_u) \frac{L(\theta_u, X^T)}{L(\theta_0, X^T)} du}{\int_{\mathbb{U}_T} p(\theta_u) \frac{L(\theta_u, X^T)}{L(\theta_0, X^T)} du} = \vartheta_0 + \varphi_T \frac{\int_{\mathbb{U}_T} u p(\theta_u) Z_T(u) du}{\int_{\mathbb{U}_T} p(\theta_u) Z_T(u) du}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(11) \quad \frac{\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0}{\varphi_T} = \frac{\int_{\mathbb{U}_T} u p(\theta_u) Z_T(u) du}{\int_{\mathbb{U}_T} p(\theta_u) Z_T(u) du} \Longrightarrow \frac{\int_{\mathcal{R}} u Z(u) du}{\int_{\mathcal{R}} Z(u) du} = \tilde{\zeta},$$

и для БО получена сходимость

$$(12) \quad \mathbf{P}_{\vartheta_0} \left(\frac{\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0}{\varphi_T} < x \right) \longrightarrow \mathbf{P}_{\vartheta_0} \left(\tilde{\zeta} < x \right).$$

Видим, что предельные распределения ОМП и БО задаются случайными величинами $\hat{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$, определяемыми соотношениями (9) и (11).

Отметим, что различным типам модуляции (фазовая, частотная) и регулярности/сингулярности соответствуют различные скорости φ_T и различные $\hat{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$.

Покажем, как этот подход работает в простейшем гладком случае и при фазовой модуляции, т.е. $\lambda(\vartheta, t) = S(t - \vartheta) + \lambda_0$, где сигнал $S(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируемый, τ -периодический и $\lambda_0 > 0$. Используя формулу Тейлора и полагая $\varphi_T = T^{-1/2}$, можно написать (ниже $T = n\tau$, $X_j(s) = X_{s+\tau(j-1)} - X_{\tau(j-1)}$, $j = 1, \dots, n$, и $\vartheta_u = \vartheta_0 + \frac{u}{\sqrt{T}}$)

$$\begin{aligned}
\ln Z_T(u) &= \frac{L(\vartheta_0 + \frac{u}{\sqrt{T}}, X^T)}{L(\vartheta_0, X^T)} = \\
&= \int_0^T \ln \left(1 + \frac{S(t - \vartheta_u)}{\lambda(\vartheta_0, s)} \right) dX_t - \int_0^T (S(t - \vartheta_u) - S(t - \vartheta_0)) dt = \\
&= \sum_{j=1}^n \int_0^\tau \ln \left(1 + \frac{S(s - \vartheta_u)}{S(s - \vartheta_0) + \lambda_0} \right) [dX_j(s) - \lambda(\vartheta_0, s) ds] - \\
&\quad - n \int_0^\tau \left(S(s - \vartheta_u) - S(s - \vartheta_0) - \lambda(\vartheta_0, s) \ln \left(1 + \frac{S(s - \vartheta_u)}{\lambda(\vartheta_0, s)} \right) \right) ds = \\
&= -\frac{u}{\sqrt{n\tau}} \sum_{j=1}^n \int_0^\tau \frac{\dot{S}(s - \vartheta_0)}{\lambda(\vartheta_0, s)} d\pi_j(s) - \frac{u^2}{2\tau} \int_0^\tau \frac{\dot{S}(s - \vartheta_0)^2}{\lambda(\vartheta_0, s)} ds + o(1) = \\
&= u\Delta_T(\vartheta_0, X^T) - \frac{u^2}{2} \mathbf{I}(\vartheta_0) + o(1).
\end{aligned}$$

Здесь точка означает дифференцирование по θ , использованы разложения Тейлора $\ln(1 + \varepsilon f(s)) = \varepsilon f(s) + O(\varepsilon^2)$ и $\ln(1 + \varepsilon f(s)) = \varepsilon f(s) - \frac{\varepsilon^2}{2} f(s)^2 + O(\varepsilon^3)$, обозначено $d\pi_j(s) = dX_j(s) - \lambda(\vartheta_0, s) ds$ и положено

$$\begin{aligned}
\Delta_T(\vartheta_0, X^T) &= -\frac{1}{\sqrt{n\tau}} \sum_{j=1}^n \int_0^\tau \frac{\dot{S}(t - \vartheta_0)}{S(t - \vartheta_0) + \lambda_0} d\pi_j(t), \\
\mathbf{I}(\vartheta_0) &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\dot{S}(t)^2}{S(t) + \lambda_0} dt.
\end{aligned}$$

По центральной предельной теореме

$$\Delta_T(\vartheta_0, X^T) \Rightarrow \Delta(\vartheta_0) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_0^\tau \frac{\dot{S}(s)}{\sqrt{S(s) + \lambda_0}} dW_s \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}(\vartheta_0)).$$

Здесь W_s , $0 \leq s \leq \tau$, — это стандартный винеровский процесс. Конечно, информация Фишера $I(\vartheta_0)$ не зависит от ϑ_0 , но сохраним это обозначение, потому что в общем случае эта зависимость имеется.

Следовательно

$$(13) \quad \begin{aligned} Z_T(u) &= \exp \left\{ u \Delta_T(\vartheta_0, X^T) - \frac{u^2}{2} I(\vartheta_0) + o(1) \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow Z(u) = \exp \left\{ u \Delta(\vartheta_0) - \frac{u^2}{2} I(\vartheta_0) \right\}. \end{aligned}$$

Семейства мер, соответствующие наблюдениям с отношениями правдоподобия, удовлетворяющими (13), называются локально асимптотически нормальными (ЛАН), а соответствующие статистические эксперименты считаются регулярными.

Случайную величину $\hat{\zeta}$ получаем следующим образом:

$$\left. \frac{\partial \ln Z(u)}{\partial u} \right|_{u=\hat{\zeta}} = \Delta(\vartheta_0) - \hat{\zeta} I(\vartheta_0) = 0, \quad \hat{\zeta} = \frac{\Delta(\vartheta_0)}{I(\vartheta_0)} \sim \mathcal{N}(0, I(\vartheta_0)^{-1}).$$

Отсюда согласно (10) получаем асимптотическую нормальность ОМП:

$$\sqrt{T}(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0) \Rightarrow \hat{\zeta} \sim \mathcal{N}(0, I(\vartheta_0)^{-1}).$$

Для предела $\tilde{\zeta}$ БО имеем представление (11) с данным процессом $Z(\cdot)$. Можем написать (ниже $\Delta = \Delta(\vartheta_0)$, $I = I(\vartheta_0)$ и $\tilde{\Delta} = I^{-1}\Delta$)

$$\ln Z(u) = u\Delta - \frac{u^2}{2}I = -\frac{I}{2} \left[u^2 - 2u\tilde{\Delta} + \tilde{\Delta}^2 \right] + \frac{\Delta^2}{2I} = -\frac{I}{2} \left[u - \tilde{\Delta} \right]^2 + \frac{\Delta^2}{2I}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}} u Z(u) du &= e^{\frac{\Delta^2}{2I}} \int_{\mathcal{R}} u e^{-\frac{I}{2}[u-\tilde{\Delta}]^2} du = \\ &= e^{\frac{\Delta^2}{2I}} \int_{\mathcal{R}} (u - \tilde{\Delta}) e^{-\frac{I}{2}[u-\tilde{\Delta}]^2} du + \tilde{\Delta} e^{\frac{\Delta^2}{2I}} \int_{\mathcal{R}} e^{-\frac{I}{2}[u-\tilde{\Delta}]^2} du = \\ &= \tilde{\Delta} \int_{\mathcal{R}} Z(u) du, \end{aligned}$$

потому что

$$\int_{\mathcal{R}} v e^{-\frac{I}{2}v^2} dv = 0.$$

Таким образом, получаем

$$\tilde{\zeta} = \frac{\int_{\mathcal{R}} u Z(u) du}{\int_{\mathcal{R}} Z(u) du} = \tilde{\Delta} = \frac{\Delta(\vartheta_0)}{I(\vartheta_0)} \sim \mathcal{N}\left(0, I(\vartheta_0)^{-1}\right),$$

и в соответствии с (12)

$$\sqrt{T}(\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0) \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, I(\vartheta_0)^{-1}\right).$$

Представленные выше вычисления не являются доказательством асимптотической нормальности и приведены для объяснения общего метода в регулярном случае. Настоящие доказательства включают в себя множество технических деталей, которые здесь не обсуждаются (см. [16, 17]).

В нерегулярных случаях (случаи сингулярности типа касп и разладки) нормировки φ_T и предельные процессы $Z(\cdot)$ разные, но соотношения (8)–(12) всегда действительны и позволяют описывать предельное поведение ОМП и БО и в этих случаях тоже.

Предельное отношение правдоподобия $Z(\cdot)$ в этих трех случаях (гладкий, касп и разладка) имеет существенно разные аналитические свойства. Чтобы проиллюстрировать возможные численные трудности в расчете ОМП, включим в эту работу графики реализаций $Z(\cdot)$.

Во всех рассматриваемых ниже задачах нас интересует построение асимптотически эффективных оценок.

В отличие от регулярного случая в сингулярных моделях нет нижней границы Крамера–Рао для определения асимптотически эффективных оценок. Будем использовать минимаксный подход, чтобы ввести нижние границы на среднеквадратические ошибки всех оценок $\tilde{\vartheta}_T$, а затем определим асимптотически эффективные оценки как оценки, которые достигают эти границы. Нижняя граница имеет вид

$$(14) \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| < \nu} \varphi_T^{-2} \mathbf{E}_{\vartheta} |\tilde{\vartheta}_T - \vartheta|^2 \geq \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\tilde{\zeta}|^2.$$

Назовем оценку ϑ_T^* асимптотически эффективной, если для нее в этом неравенстве имеет место равенство для всех $\vartheta_0 \in \Theta$, а точнее, если имеем

$$(15) \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| < \nu} \varphi_T^{-2} \mathbf{E}_{\vartheta} |\vartheta_T^* - \vartheta|^2 = \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\tilde{\zeta}|^2$$

для всех $\vartheta_0 \in \Theta$.

Нижнюю оценку (14) можно получить следующим образом. Предположим, что уже доказаны сходимость (12) и сходимость моментов

$$\varphi_T^{-2} \mathbf{E}_{\vartheta} |\tilde{\vartheta}_T - \vartheta|^2 \longrightarrow \mathbf{E}_{\vartheta} |\tilde{\zeta}|^2,$$

где $D(\vartheta) = \mathbf{E}_\vartheta |\tilde{\zeta}|^2$ — непрерывная функция от $\vartheta \in \Theta$. Зафиксировав некоторые $\vartheta_0 \in \Theta$ и $\nu > 0$, можно написать

$$\begin{aligned} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| < \nu} \varphi_T^{-2} \mathbf{E}_\vartheta |\bar{\vartheta}_T - \vartheta|^2 &\geq \varphi_T^{-2} \int_{\vartheta_0 - \nu}^{\vartheta_0 + \nu} \mathbf{E}_\vartheta |\bar{\vartheta}_T - \vartheta|^2 p_\nu(\vartheta) d\vartheta \geq \\ &\geq \varphi_T^{-2} \int_{\vartheta_0 - \nu}^{\vartheta_0 + \nu} \mathbf{E}_\vartheta |\tilde{\vartheta}_{\bar{p}, T} - \vartheta|^2 p_\nu(\vartheta) d\vartheta \longrightarrow \\ &\longrightarrow \int_{\vartheta_0 - \nu}^{\vartheta_0 + \nu} \mathbf{E}_\vartheta |\tilde{\zeta}|^2 p_\nu(\vartheta) d\vartheta \end{aligned}$$

при $T \rightarrow \infty$. Здесь введена положительная непрерывная плотность $p_\nu(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta_\nu$, где $\Theta_\nu = (\vartheta_0 - \nu, \vartheta_0 + \nu)$, и обозначена через $\tilde{\vartheta}_{\bar{p}, T}$ БО, соответствующая этой плотности. Используя непрерывность функции $D_\nu(\vartheta) = \mathbf{E}_\vartheta |\tilde{\zeta}|^2$, получаем последний предел (при $\nu \rightarrow 0$):

$$\int_{\vartheta_0 - \nu}^{\vartheta_0 + \nu} \mathbf{E}_\vartheta |\tilde{\zeta}|^2 p_\nu(\vartheta) d\vartheta = \int_{\vartheta_0 - \nu}^{\vartheta_0 + \nu} D_\nu(\vartheta) p_\nu(\vartheta) d\vartheta \longrightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\tilde{\zeta}|^2.$$

Напомним, что в гладком случае получаем известную нижнюю границу Гаека–Ле Кама [20]

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| < \nu} \varphi_T^{-2} \mathbf{E}_\vartheta |\bar{\vartheta}_T - \vartheta|^2 \geq I(\vartheta_0)^{-1}.$$

Более общие результаты и подробное доказательство см. в [17].

3. Фазовая модуляция

Рассмотрим задачу оценки ϑ по наблюдениям X^T пуассоновского процесса функции интенсивности

$$\lambda(\vartheta, t) = S(t - \vartheta) + \lambda_0, \quad 0 \leq t \leq T = n\tau,$$

где $S(t)$ — τ -периодическая функция, а интенсивность шума $\lambda_0 > 0$.

3.1. Гладкий случай

Предположим, что функция $S(\cdot) \geq 0$ двукратно непрерывно дифференцируема и тождественно не равна нулю. Напомним, что информация Фишера $I(\vartheta)$ для этой модели наблюдений имеет вид [21]

$$I(\vartheta) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\dot{S}(t)^2}{S(t) + \lambda_0} dt.$$

Тогда имеет место нижняя оценка Гаека–Ле Кама на среднеквадратические ошибки всех оценок $\bar{\vartheta}_T$:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| < \nu} T \mathbf{E}_{\vartheta} |\bar{\vartheta}_T - \vartheta|^2 \geq \mathbf{I}(\vartheta_0)^{-1}.$$

Назовем оценку ϑ_T^* асимптотически эффективной, если для нее в этом неравенстве имеет место равенство для всех $\vartheta_0 \in \Theta$.

Предложение 1. ОМП $\hat{\vartheta}_T$ и БО $\tilde{\vartheta}_T$ равномерно на компактах $\mathbb{K} \subset \Theta$ состоятельны, асимптотически нормальны:

$$\sqrt{T} \left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right) \Rightarrow \hat{\zeta} \sim \mathcal{N} \left(0, \mathbf{I}(\vartheta_0)^{-1} \right), \quad \sqrt{T} \left(\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right) \Rightarrow \hat{\zeta},$$

имеем сходимость моментов: для всех $p > 0$

$$T^{\frac{p}{2}} \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0|^p \longrightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\hat{\zeta}|^p, \quad T^{\frac{p}{2}} \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0|^p \longrightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\hat{\zeta}|^p,$$

и обе оценки асимптотически эффективны.

Доказательство см. в [16, 22].

Пример 1. Предположим, что $S(t - \vartheta) = \frac{a}{2} [1 + \cos(t - \vartheta)]$, где $a > 0$. Функция $S(\cdot)$ периодична с периодом $\tau = 2\pi$ и $T = 2\pi n$. Информация Фишера имеет вид (см. [21])

$$\mathbf{I}(\vartheta_0) = \frac{a}{2} \left[1 + 2q - 2\sqrt{q + q^2} \right], \quad q = \frac{\lambda_0}{2}.$$

Пример 2. Предположим, что $S(t - \vartheta) = b \exp[a \cos(t - \vartheta)]$, где $a, b > 0$. Функция $S(\cdot)$ периодична с периодом $\tau = 2\pi$ и $T = 2\pi n$. Информация Фишера имеет вид (см. [21])

$$\mathbf{I}(\vartheta_0) = ab I'_0(a),$$

где $I'_0(a)$ — производная модифицированной функции Бесселя

$$I_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{a \cos y} dy.$$

В случае многомерного параметра аналогичный результат получен в [21, 23].

Пример 3. Отметим, что существование двух непрерывных ограниченных на $[0, \tau]$ производных — это достаточное условие. Можно показать, что есть регулярные модели с неограниченной первой производной. Если

$$\lambda(\vartheta, t) = a |t - \vartheta|^\kappa + \lambda_0, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

где $a > 0$ и $\kappa > 1/2$, то имеем регулярный (гладкий) случай с конечной информацией Фишера и скорость сходимости оценок $\sqrt{T}$ (случай *a* на рис. 1). Интересно отметить, что если $\kappa = 1/2$ (случай *b* на рис. 1), то имеем регулярный эксперимент (семейство ЛАН с представлением (13)), но ОМП и БО асимптотически нормальны со скоростью $\varphi_T = (T \ln T)^{-1/2}$.

Для модели (1) аналогичный результат получен в [15].

3.2. Случай сингулярности типа касп

Предположим, что функция интенсивности наблюдаемого процесса имеет вид

$$\lambda(\vartheta, t) = S(t - \vartheta) + \lambda_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где сигнал $S(t - \vartheta)$ является τ -периодическим и может быть записан на первом периоде как $S(t - \vartheta) = \psi(t - \vartheta)g(t - \vartheta)$, где $t \in [0, \tau]$, а функция перехода $\psi(\cdot)$ задается формулой

$$(16) \quad \psi(y) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{sgn}(y) \left| \frac{y}{\delta} \right|^\kappa \right) \mathbb{1}_{\{|y| \leq \delta\}} + \mathbb{1}_{\{y > \delta\}}.$$

Здесь $\kappa \in (0, 1/2)$ и постоянная $\delta > 0$ известны, а функция $g(\cdot)$ непрерывно дифференцируема. Кроме того, предполагаем, что $g(y) > 0$ для $y \in (-\delta, \tau_*)$ и $g(y) = 0$ для $y \geq \tau_*$, где $\delta < \tau_* < \tau - \delta$, и что множество $\Theta = (\alpha, \beta)$ с $\delta < \alpha < \beta < \tau - \tau_*$.

Заметим, что $S(t - \vartheta) = 0$ для $t \in [0, \vartheta - \delta]$ и что $S(t - \vartheta) = g(t - \vartheta)$ для $t \geq \vartheta + \delta$ и, следовательно, в частности, $S(t - \vartheta) = 0$ для $t \in [\vartheta + \tau_*, \tau]$. Следовательно, сигнал может быть периодически продолжен на интервал $[0, T]$, и функция $\psi(\cdot)$ описывает фронт сигнала. График такой функции интенсивности $\lambda(\vartheta, t)$ приведен на рис. 2.

Поскольку $\kappa \in (0, 1/2)$, информация Фишера $I(\vartheta_0) = \infty$, и, следовательно, имеем сингулярный статистический эксперимент.

Кратко объясним, почему рассматриваем сигналы с сингулярностью типа касп как альтернативу хорошо известным сигналам разрывного типа. Функция интенсивности неоднородного пуассоновского процесса (сигнала) $S(t)$ в передатчике (источнике сигнала) соответствует вариации электрического тока. В начале излучения по законам физики ток не может иметь

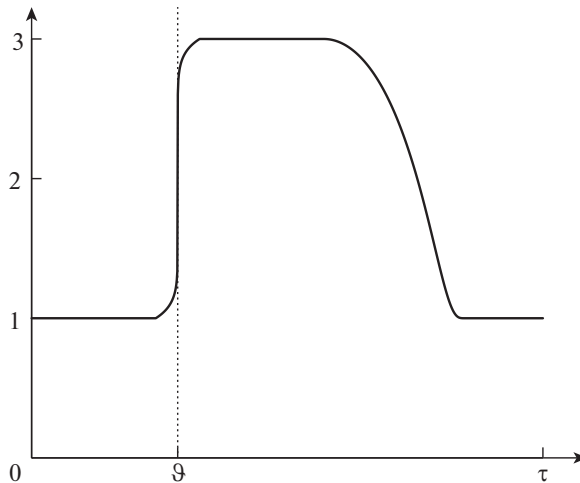


Рис. 2. Пример функции интенсивности с сигналом типа касп.

скачка, и фронт сигнала скорее должен быть описан сильно возрастающей, но непрерывной функцией. В зависимости от параметров электрической цепи это увеличение можно рассматривать как имеющее конечную (медленное увеличение) или бесконечную (быстрое увеличение) информацию Фишера. По нашему мнению, модель с непрерывным сигналом, но бесконечной информацией Фишера лучше подходит для описания так называемой “модели разладки”.

Исследование оценок для моделей наблюдений независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью, имеющей сингулярность типа касп, началось с работы [18]. Отметим, что исчерпывающее описание свойств оценок параметров плотностей, имеющих широкий класс сингулярностей, включающих и сингулярности типа касп, приведено в [17]. Затем исследовались модели нелинейной регрессии [24–27]. Непараметрическое оценивание в модели регрессии изучалось в [28]. Для моделей наблюдений с непрерывным временем и сингулярностями типа касп свойства оценок изучались в следующих работах: неоднородные процессы Пуассона [29], эргодические диффузионные процессы [30, 31], диффузионные процессы с малой диффузией [32], детерминированный сигнал в белом гауссовском шуме [33]. Модели с касп сингулярностями использованы в [10, 34] в задачах локализации источников на плоскости.

Введем следующие обозначения.

- 1) $W^H(u)$, $u \in \mathcal{R}$, — стандартное дробное броуновское движение (fBm) с параметром Херста $H = \kappa + 1/2 \in (0, 1)$, т.е. гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$\mathbf{E} W^H(u_1) W^H(u_2) = \frac{1}{2} \left[|u_1|^{2H} + |u_2|^{2H} - |u_1 - u_2|^{2H} \right].$$

- 2) $Z(\cdot)$ — случайный процесс

$$(17) \quad Z(u) = \exp \left\{ W^{\kappa+\frac{1}{2}}(u) - \frac{|u|^{2\kappa+1}}{2} \right\}, \quad u \in \mathcal{R}.$$

- 3) $\hat{\zeta} = \hat{\zeta}_\kappa$ и $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_\kappa$ — случайные величины, определяемые соотношениями (9) и (11) соответственно с $Z(\cdot)$, см. (17).

- 4) Интеграл

$$(18) \quad Q(\kappa) = \int_{\mathcal{R}} [\operatorname{sgn}(v-1) |v-1|^\kappa - \operatorname{sgn}(v) |v|^\kappa]^2 dv$$

и постоянная

$$\gamma_{\kappa, \tau} = \left(\frac{g^2(0) Q(\kappa)}{2\tau(g(0) + 2\lambda_0)} \right)^{\frac{1}{2\kappa+1}}.$$

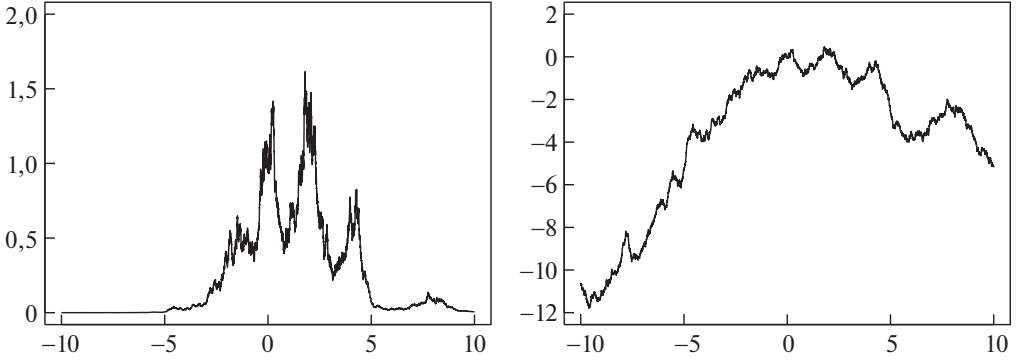


Рис. 3. Примеры реализаций $Z(\cdot)$ (слева) и $\ln Z(\cdot)$ (справа) в случае сингулярности типа касп с $\kappa = 0,1$.

Отметим, что $Q(\kappa)$ допускает представления

$$\begin{aligned}
 (19) \quad Q(\kappa) &= \frac{\Gamma(1+\kappa)\Gamma(\frac{1}{2}-\kappa)}{2^{2\kappa-1}\sqrt{\pi}(2\kappa+1)} [1 + \cos(\pi\kappa)] = \\
 &= 2B(\kappa+1, \kappa+1) \left[\frac{1}{\cos(\pi\kappa)} + 1 \right],
 \end{aligned}$$

где через $\Gamma(\cdot)$ и $B(\cdot, \cdot)$ обозначены гамма и бета функции соответственно (см. раздел VI.4 в [17]). Единственность $\hat{\vartheta}_\rho$ доказана в [35].

Примеры реализаций предельного процесса ОП $Z(\cdot)$ и процесса $\ln Z(\cdot)$ показаны на рис. 3.

Первый результат — это нижняя граница рисков всех оценок $\bar{\vartheta}_T$:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| < \nu} T^{\frac{2}{2\kappa+1}} \mathbf{E}_{\vartheta} |\bar{\vartheta}_T - \vartheta|^2 \geq \frac{\mathbf{E} \tilde{\zeta}_\kappa^2}{\gamma_{\kappa, \tau}^2}.$$

Как обычно, называем оценку ϑ_T^* асимптотически эффективной, если для нее в этом неравенстве имеет место равенство для всех $\vartheta_0 \in \Theta$.

Предложение 2. ОМП $\hat{\vartheta}_T$ и БО $\tilde{\vartheta}_T$ равномерно на компактах $\mathbb{K} \subset \Theta$ состоятельны, имеют разные предельные распределения:

$$T^{\frac{1}{2\kappa+1}} \left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right) \Rightarrow \frac{\hat{\zeta}_\kappa}{\gamma_{\kappa, \tau}}, \quad T^{\frac{1}{2\kappa+1}} \left(\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right) \Rightarrow \frac{\tilde{\zeta}_\kappa}{\gamma_{\kappa, \tau}},$$

моменты сходятся: для всех $p > 0$

$$T^{\frac{p}{2\kappa+1}} \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0|^p \longrightarrow \frac{\mathbf{E}_{\vartheta_0} |\hat{\zeta}_\kappa|^p}{\gamma_{\kappa, \tau}^p}, \quad T^{\frac{p}{2\kappa+1}} \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0|^p \longrightarrow \frac{\mathbf{E}_{\vartheta_0} |\tilde{\zeta}_\kappa|^p}{\gamma_{\kappa, \tau}^p},$$

и БО асимптотически эффективны.

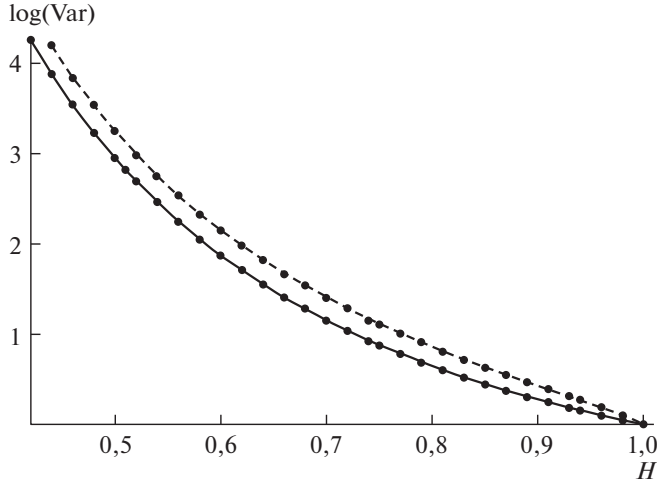


Рис. 4. Графики $\ln \hat{\sigma}_*^2(H - 1/2) \geq \ln \tilde{\sigma}_*^2(H - 1/2)$.

Доказательство см. в [29]. Нормализованная функция ОП в этой задаче имеет вид

$$Z_T(u) = \frac{L(\vartheta_0 + \varphi_T u, X^T)}{L(\vartheta_0, X^T)}, \quad u \in \mathbb{U}_T = \left(\frac{\alpha - \vartheta_0}{\varphi_T}, \frac{\beta - \vartheta_0}{\varphi_T} \right),$$

где

$$\varphi_T = \left(\gamma_{\kappa, \tau} T^{\frac{1}{2\kappa+1}} \right)^{-1}.$$

Имеет место сходимость

$$Z_T(\cdot) \implies Z(\cdot),$$

и поэтому процесс $Z(\cdot)$ является пределом процесса отношения правдоподобия. Следовательно, свойства ОМП и БО следуют согласно соотношениям (8) и (11) соответственно.

Среднеквадратичные ошибки ОМП и БО следующие:

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0} |\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0|^2 = \frac{\hat{\sigma}^2(\kappa)}{T^{\frac{2}{2\kappa+1}}} (1 + o(1)), \quad \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0|^2 = \frac{\tilde{\sigma}^2(\kappa)}{T^{\frac{2}{2\kappa+1}}} (1 + o(1)),$$

где

$$\hat{\sigma}^2(\kappa) = \frac{\mathbf{E} \hat{\zeta}_{\kappa}^2}{\gamma_{\kappa, \tau}^2}, \quad \tilde{\sigma}^2(\kappa) = \frac{\mathbf{E} \tilde{\zeta}_{\kappa}^2}{\gamma_{\kappa, \tau}^2}.$$

Интересно сравнить предельные среднеквадратические ошибки $\hat{\sigma}^2(\kappa)$ и $\tilde{\sigma}^2(\kappa)$ ОМП и БО соответственно. Параметр Херста $H = \kappa + 1/2 \in (1/2, 1)$, где $\kappa \in (0, 1/2)$, и аналитические выражения для значений $\hat{\sigma}^2(\kappa) = \hat{\sigma}^2(H - 1/2)$ и

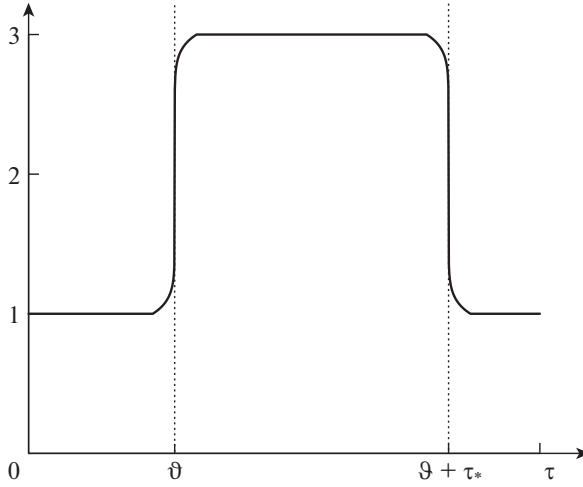


Рис. 5. Функция интенсивности примера 4.

$\tilde{\sigma}^2(\kappa) = \tilde{\sigma}^2(H - 1/2)$ неизвестны. Значения $\hat{\sigma}_*^2(\kappa) = \mathbf{E}\hat{\zeta}_\kappa^2$ и $\tilde{\sigma}_*^2(\kappa) = \mathbf{E}\tilde{\zeta}_\kappa^2$ были рассчитаны путем численного моделирования в [36] для значений $H \in [0, 4, 1]$ и представлены (в логарифмическом масштабе) на рис. 4. Значение $H = 1$ ($\kappa = 1/2$) соответствует регулярному случаю, когда предельные среднеквадратические ошибки ОМП и БО совпадают.

Приведенные выше результаты можно обобщить на случай, когда сигнал имеет K точек сингулярности типа касп на интервале $[0, \tau]$. Точнее, предположим, что есть $K \geq 1$ точек $0 = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_K < \tau - 2\delta$, таких что $\tau_{k+1} - \tau_k > 2\delta$, и что τ -периодический сигнал $S(t - \vartheta)$ можно записать на первом периоде $t \in [0, \tau]$ в виде

$$S(t - \vartheta) = \sum_{k=1}^K \psi(t - \tau_k - \vartheta) g_k(t - \tau_k - \vartheta),$$

где функции $g_k(\cdot)$ непрерывно дифференцируемы, а функция $\psi(\cdot)$ задается формулой (16). Предполагаем, что $g_k(y) \neq 0$ для $y \in (\tau_k - \delta, \tau_*)$ и $g_k(y) = 0$ для $y \geq \tau_*$, где $\tau_K + \delta < \tau_* < \tau - \delta$, и множество $\Theta = (\alpha, \beta)$ с $\delta < \alpha < \beta < \tau - \tau_*$.

Заметим, что $S(t - \vartheta) = 0$ для $t \in [0, \vartheta - \delta]$ и для $t \in [\vartheta + \tau_*, \tau]$, и таким образом, сигнал может быть периодически продолжен на интервал $[0, T]$. Заметим также, что если фронт k -го сигнала описывается функцией $\psi(\cdot)$ (и $g_k(\cdot) \geq 0$) или функцией $-\psi(\cdot)$ (и $g_k(\cdot) \leq 0$), тогда все вышеприведенные результаты остаются верными с единственным отличием, что константа $\gamma_{\kappa, \tau}$ теперь задана формулой

$$\gamma_{\kappa, \tau} = \left(\frac{Q(\kappa)}{4\tau} \sum_{k=1}^K \frac{g_k^2(0)}{S(\tau_k) + \lambda_0} \right)^{\frac{1}{2\kappa+1}}.$$

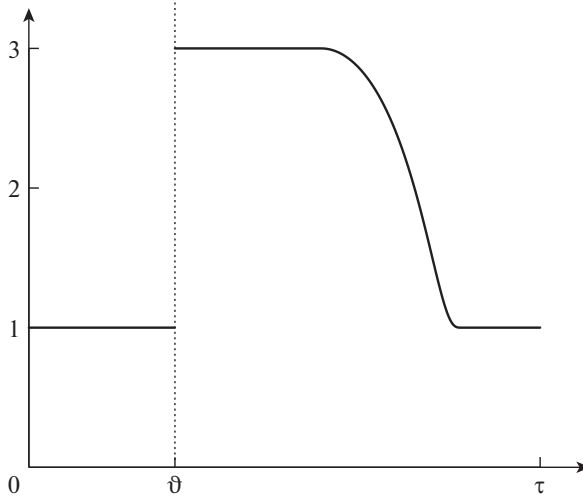


Рис. 6. Пример функции интенсивности сигнала с разладкой в ϑ .

Пример 4. Рассмотрим случай импульсного сигнала конечной длительности с особенностями типа касп в начале и в конце:

$$\lambda(\vartheta, t) = S(t - \vartheta) + \lambda_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $S(t - \vartheta)$ является τ -периодическим сигналом, заданным для $t \in [0, \tau]$ формулой

$$\begin{aligned} S(t - \vartheta) = & \frac{\lambda}{2} \left(1 + \operatorname{sgn}(t - \vartheta) \left| \frac{t - \vartheta}{\delta} \right|^\kappa \right) \mathbb{1}_{\{|t - \vartheta| < \delta\}} + \lambda \mathbb{1}_{\{\vartheta + \delta \leq t \leq \tau_* + \vartheta - \delta\}} + \\ & + \frac{\lambda}{2} \left(1 - \operatorname{sgn}(t - \tau_* - \vartheta) \left| \frac{t - \tau_* - \vartheta}{\delta} \right|^\kappa \right) \mathbb{1}_{\{|t - \tau_* - \vartheta| < \delta\}}. \end{aligned}$$

Здесь $2\delta < \tau_* < \tau - 2\delta$, и множество $\Theta = (\alpha, \beta)$ с $\delta < \alpha < \beta < \tau - \tau_* - \delta$. График такой функции интенсивности $\lambda(\vartheta, t)$ приведен на рис. 5.

Асимптотическое поведение ОМП и БО в этой модели дается в предложении 2 с $\gamma_{\kappa, \tau} = \left(\frac{\lambda^2 Q(\kappa)}{\tau(2\lambda_0 + \lambda)} \right)^{\frac{1}{2\kappa+1}}$. В частности, их среднеквадратические ошибки имеют вид

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0} |\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0|^2 = \frac{\mathbf{E} \zeta_\kappa^2 (1 + o(1))}{\gamma_{\kappa, \tau}^2 T^{\frac{2}{2\kappa+1}}}, \quad \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0|^2 = \frac{\mathbf{E} \tilde{\zeta}_\kappa^2 (1 + o(1))}{\gamma_{\kappa, \tau}^2 T^{\frac{2}{2\kappa+1}}}.$$

Обзор результатов для моделей с касп сингулярностями см. в [37].

3.3. Случай разладки

Рассмотрим проблему оценки точки разладки. Наблюдаем неоднородный периодический пуассоновский процесс $X^T = (X_t, 0 \leq t \leq T)$ с функцией интенсивности

$$\lambda(\vartheta, t) = S(t - \vartheta) + \lambda_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где на первом периоде

$$S(y) = h(y) + g(y) \mathbb{1}_{\{0 \leq y \leq \tau_*\}}.$$

Здесь $h(\cdot)$ и $g(\cdot)$ — τ -периодические непрерывно дифференцируемые неотрицательные функции, причем $g(0) > 0$ и $g(\tau_*) = 0$. Неизвестный параметр — $\vartheta \in (\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta < \tau - \tau_*$. Конечно, предполагаем, что $\tau_* < \tau$. Пример такой функции интенсивности $\lambda(\vartheta, t)$ приведен на рис. 6.

Поскольку период τ известен, можем без ограничения общности предположить, что $T = n\tau$, и привести исходную модель к модели неоднородного пуассоновского процесса $Y^n = (Y_n(t), 0 \leq t \leq \tau)$ с интенсивностью

$$\lambda_n(\vartheta, t) = nS(t - \vartheta) + n\lambda_0, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Справедливо равенство $L(\vartheta, X^T) = L(\vartheta, Y^n)$, и поэтому лог-ОП можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \ln L(\vartheta, Y^n) &= \int_0^\tau \ln \left(\frac{S(t - \vartheta) + \lambda_0}{h(t - \vartheta) + \lambda_0} \right) dY_n(t) - n \int_0^\tau [S(t - \vartheta) - h(t - \vartheta)] dt = \\ &= \int_\vartheta^{\vartheta + \tau_*} \ln \left(1 + \frac{g(t - \vartheta)}{h(t - \vartheta) + \lambda_0} \right) dY_n(t) - n \int_\vartheta^{\vartheta + \tau_*} g(t - \vartheta) dt = \\ &= \int_\vartheta^{\vartheta + \tau_*} \ln \left(1 + \frac{g(t - \vartheta)}{h(t - \vartheta) + \lambda_0} \right) dY_n(t) - n \int_0^{\tau_*} g(t) dt. \end{aligned}$$

Поскольку функция ОП $L(\vartheta, Y^n)$, $\vartheta \in \Theta$, разрывная, ОМП $\hat{\vartheta}_T$ определяется уравнением

$$\max \left(L(\hat{\vartheta}_T^+, X^T), L(\hat{\vartheta}_T^-, X^T) \right) = \sup_{\vartheta \in \Theta} L(\vartheta, X^T).$$

Здесь $L(\vartheta^\pm, X^T)$ — правый и левый пределы ОП в точке ϑ соответственно. БО определяется соотношением (5).

Положим $\rho = \ln \frac{g(0) + h(0) + \lambda_0}{h(0) + \lambda_0}$ и введем предельный процесс отношения правдоподобия

$$(20) \quad Z(u) = \begin{cases} \exp \left\{ -\rho x^+ \left(\frac{u}{1 - e^{-\rho}} \right) + u \right\}, & u \geq 0, \\ \exp \left\{ \rho x^- \left(-\frac{u}{e^\rho - 1} \right) + u \right\}, & u < 0, \end{cases}$$

где $x^\pm(\cdot)$ — два независимых пуассоновских процесса единичной интенсивности.

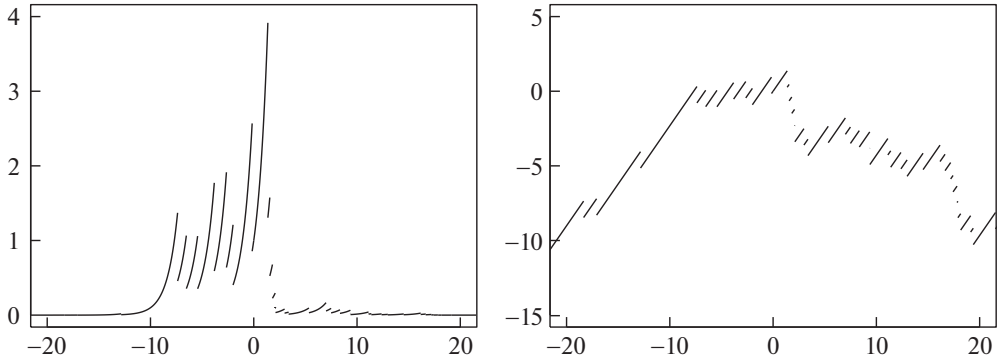


Рис. 7. Примеры реализаций $Z(\cdot)$ (слева) и $\ln Z(\cdot)$ (справа) в случае $\rho = \ln 3$.

Примеры реализаций предельного процесса $Z(\cdot)$ и процесса $\ln Z(\cdot)$ показаны на рис. 7.

Предельные распределения ОМП и БО даны с помощью случайных величин $\hat{\zeta} = \hat{\zeta}_\rho$ и $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_\rho$, которые определяются соотношениями

$$(21) \quad \max \left(Z(\hat{\zeta}_\rho +), Z(\hat{\zeta}_\rho -) \right) = \sup_{u \in \mathcal{R}} Z(u)$$

и (11) соответственно, где $Z(\cdot)$ задано уравнением (20).

Имеем следующую нижнюю границу (15) на среднеквадратические ошибки всех оценок:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| < \nu} T^2 \mathbf{E}_{\vartheta} |\bar{\vartheta}_T - \vartheta|^2 \geq \frac{\mathbf{E} |\tilde{\zeta}_\rho|^2}{\gamma_\tau^2},$$

где $\gamma_\tau = \tau^{-1}g(0)$, и называем оценку ϑ_T^* асимптотически эффективной, если для нее в этом неравенстве имеет место равенство для всех $\vartheta_0 \in \Theta$.

Предложение 3. ОМП $\hat{\vartheta}_T$ и БО $\tilde{\vartheta}_T$ равномерно на компактах $\mathbb{K} \subset \Theta$ состоятельны, имеют разные предельные распределения:

$$T \left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right) \Rightarrow \frac{\hat{\zeta}_\rho}{\gamma_\tau}, \quad T \left(\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right) \Rightarrow \frac{\tilde{\zeta}_\rho}{\gamma_\tau},$$

моменты сходятся: для всех $p > 0$

$$T^p \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0|^p \longrightarrow \frac{\mathbf{E}_{\vartheta_0} |\hat{\zeta}_\rho|^p}{\gamma_\tau^p}, \quad T^p \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0|^p \longrightarrow \frac{\mathbf{E}_{\vartheta_0} |\tilde{\zeta}_\rho|^p}{\gamma_\tau^p},$$

и БО асимптотически эффективны.

Доказательство см. в [16]. Доказывается, что нормированное ОП

$$Z_T(u) = \frac{L \left(\vartheta_0 + \frac{u}{\gamma_\tau T}, X^T \right)}{L(\vartheta_0, X^T)}, \quad u \in \mathbb{U}_T = (\gamma_\tau T(\alpha - \vartheta_0), \gamma_\tau T(\beta - \vartheta_0))$$

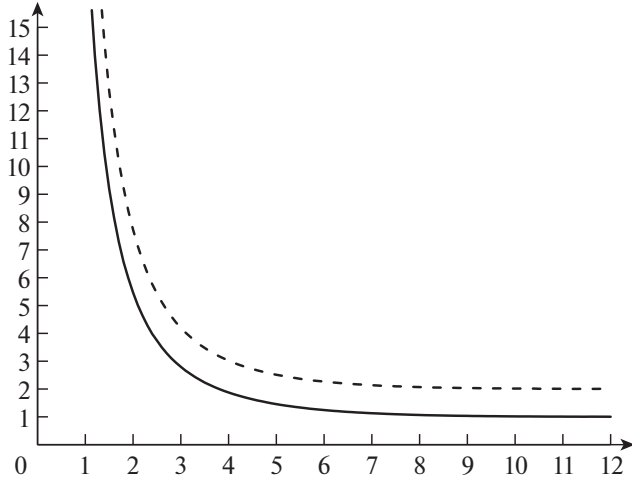


Рис. 8. Графики $\mathbf{E}|\hat{\zeta}_\rho|^2$ (пунктирная линия) и $\mathbf{E}|\tilde{\zeta}_\rho|^2$ (сплошная линия).

сходится:

$$Z_T(\cdot) \Rightarrow Z(\cdot),$$

и для среднеквадратических ошибок получаем представления

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0} \left| \hat{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right|^2 = \frac{\hat{\sigma}^2(\rho)}{T^2} (1 + o(1)), \quad \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left| \tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right|^2 = \frac{\tilde{\sigma}^2(\rho)}{T^2} (1 + o(1)).$$

Здесь также интересно сравнить предельные среднеквадратические ошибки ОМП и БО. Аналитические выражения для $\hat{\sigma}^2(\rho) = \gamma_\tau^{-2} \mathbf{E}|\hat{\zeta}_\rho|^2$ и $\tilde{\sigma}^2(\rho) = \gamma_\tau^{-2} \mathbf{E}|\tilde{\zeta}_\rho|^2$ неизвестны. Исследованию случайной величины $\hat{\zeta}_\rho$ посвящено несколько работ. Распределения случайных величин $\sup_{u \geq 0} Z(u)$ и $\sup_{u \leq 0} Z(u)$ описаны в [38–40]. Распределения положений точек максимума на отрицательной и на положительной полуосях изучены (по отдельности) в [41]. Распределение положения глобальной точки максимума $\hat{\zeta}_\rho$ получено в [42, 43]. Точную экспоненциальную асимптотику больших уклонений для $\hat{\zeta}_\rho$ можно найти в [44].

Значения $\mathbf{E}|\hat{\zeta}_\rho|^2$ и $\mathbf{E}|\tilde{\zeta}_\rho|^2$ получены численным моделированием в [45]. Графики $\mathbf{E}|\hat{\zeta}_\rho|^2$ и $\mathbf{E}|\tilde{\zeta}_\rho|^2$ представлены на рис. 8. Заметим, что при больших значениях ρ предельная ошибка ОМП в два раза больше, чем у БО.

При малых значениях ρ удобнее проследить кривые $\rho^2 \mathbf{E}|\hat{\zeta}_\rho|^2$ и $\rho^2 \mathbf{E}|\tilde{\zeta}_\rho|^2$ (см. рис. 9). Объяснение пределов этих кривых при $\rho \rightarrow 0$ можно найти в [45].

Рассмотрим несколько обобщений.

Пример 5. Предположим, что сигнал $S(t)$ имеет K скачков на один период в точках $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_K < \tau$, скажем,

$$S(t) = \sum_{k=1}^{K+1} h_{k-1}(t) \mathbb{1}_{\{\tau_{k-1} \leq t < \tau_k\}}.$$

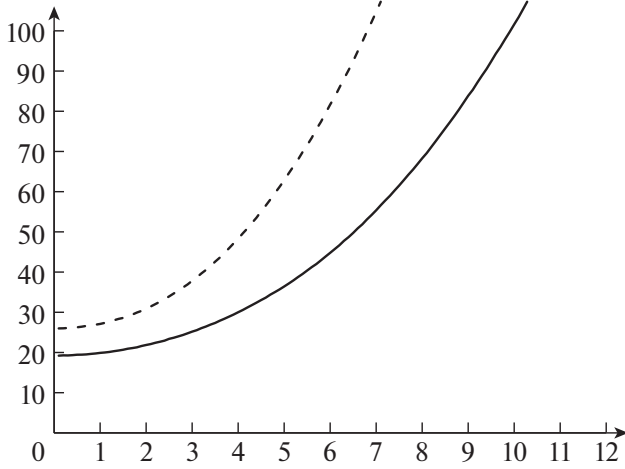


Рис. 9. Графики $\rho^2 \mathbf{E}|\hat{\zeta}_\rho|^2$ (пунктирная линия) и $\rho^2 \mathbf{E}|\tilde{\zeta}_\rho|^2$ (сплошная линия).

Здесь $\tau_0 = 0$ и $\tau_{K+1} = \tau$. Функции $h_k(\cdot)$ такие, что $\delta_k = h_{k-1}(\tau_k-) - h_k(\tau_k+) \neq 0$ для всех $k = 1, \dots, K$. Так как сигнал $S(\cdot)$ является τ -периодической функцией, предполагаем, что $h_0(0) = h_K(\tau)$. Обозначим: $h_{k-1}^- = h_{k-1}(\tau_k-)$, $h_k^+ = h_k(\tau_k+)$,

$$\rho_k = \ln \frac{h_{k-1}^- + \lambda_0}{h_k^+ + \lambda_0}, \quad \delta_\Sigma = \sum_{k=1}^K \delta_k$$

и введем предельное ОП

$$Z(u) = \begin{cases} \exp \left\{ \sum_{k=1}^K \rho_k x_k^+ ((h_k^+ + \lambda_0)u) - \delta_\Sigma u \right\}, & u \geq 0, \\ \exp \left\{ \sum_{k=1}^K -\rho_k x_k^- (-(h_{k-1}^- + \lambda_0)u) - \delta_\Sigma u \right\}, & u < 0. \end{cases}$$

Здесь $x_k^\pm(\cdot)$, $k = 1, \dots, K$, — независимые пуассоновские процессы единичной интенсивности.

Для описания асимптотических свойств ОМП $\hat{\vartheta}_T$ и БО $\tilde{\vartheta}_T$ вводим случайные величины $\hat{\zeta} = \hat{\zeta}_\Sigma$ и $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_\Sigma$ соотношениями (21) и (11) соответственно. Теперь если предположим, что $\delta_\Sigma \neq 0$, то предположение 3 справедливо и для оценок $\hat{\vartheta}_T$ и $\tilde{\vartheta}_T$ с соответствующими обозначениями. Следовательно,

$$T(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0) \Rightarrow \tau \hat{\zeta}_\Sigma, \quad T(\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0) \Rightarrow \tau \tilde{\zeta}_\Sigma.$$

Заметим, что здесь немного другая нормализация.

Пример 6. Рассмотрим частный случай примера 5, где $K = 2$, но $\delta_\Sigma = 0$. Предположим, что имеется прямоугольный импульсный сигнал известной ко-

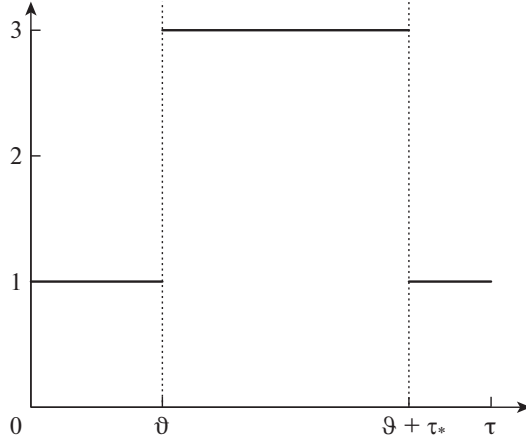


Рис. 10. Функция интенсивности примера 6.

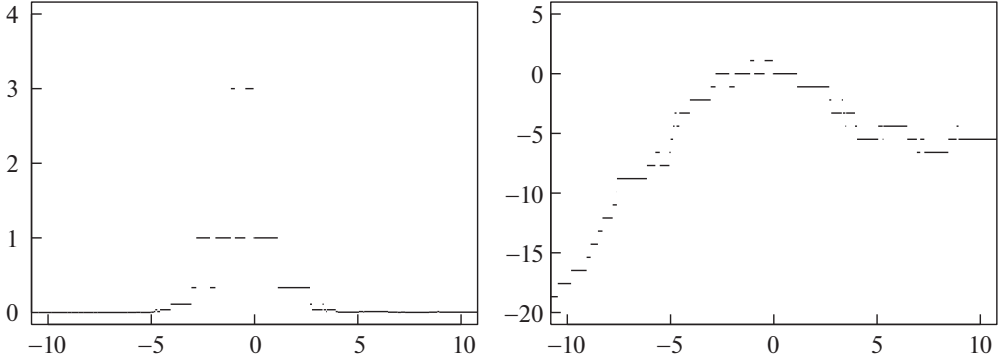


Рис. 11. Примеры реализаций $Z(\cdot)$ (слева) и $\ln Z(\cdot)$ (справа) в случае $\rho = \ln 3$.

нечной продолжительности τ_* . Это соответствует функции интенсивности

$$\lambda(t - \vartheta) = \lambda \mathbb{1}_{\{\vartheta \leq t \leq \vartheta + \tau_*\}} + \lambda_0, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

на первом периоде, где $\lambda > 0$ (см. рис. 10).

Предполагаем, что $0 < \alpha < \vartheta < \beta < \tau - \tau_*$ и $T = n\tau$. Функцию ОП в этой задаче можно записать следующим образом:

$$L(\vartheta, X^T) = \exp \left\{ \ln \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_0} \right) [Y_T(\vartheta + \tau_*) - Y_T(\vartheta)] - n\tau_* \right\}, \quad \vartheta \in (\alpha, \beta),$$

где $Y_n(t) = \sum_{j=1}^n [X_{t+\tau(j-1)} - X_{\tau(j-1)}]$. Введем нормализующую функцию $\varphi_T = (\gamma_\tau T)^{-1}$, где $\gamma_\tau = \lambda/\tau$ и соответствующий нормализованный процесс ОП

$$Z_T(u) = \frac{L\left(\vartheta_0 + \frac{u}{\gamma_\tau T}, X^T\right)}{L(\vartheta_0, X^T)}, \quad u \in \mathbb{U}_T = (\gamma_\tau T(\alpha - \vartheta_0), \gamma_\tau T(\beta - \vartheta_0)).$$

Тогда можно показать, что конечномерные распределения $Z_T(\cdot)$ сходятся к конечномерным распределениям предельного процесса $Z(\cdot)$

$$Z(u) = \begin{cases} \exp \left\{ -\rho \left[x_1^+ \left(\frac{u}{1 - e^{-\rho}} \right) - x_2^+ \left(\frac{u}{e^\rho - 1} \right) \right] \right\}, & u \geq 0, \\ \exp \left\{ \rho \left[x_1^- \left(-\frac{u}{e^\rho - 1} \right) - x_2^- \left(-\frac{u}{1 - e^{-\rho}} \right) \right] \right\}, & u < 0, \end{cases}$$

где $\rho = \ln \frac{\lambda + \lambda_0}{\lambda_0}$, а $x_1^\pm(\cdot)$, $x_2^\pm(\cdot)$ — четыре независимых пуассоновских процесса единичной интенсивности. Примеры реализаций процессов $Z(\cdot)$ и $\ln Z(\cdot)$ показаны на рис. 11.

Заметим, что имеется существенная разница между этим предельным процессом и другими предельными процессами в этой статье. Множество точек $\hat{\zeta}_\rho$, удовлетворяющих уравнению

$$Z(\hat{\zeta}_\rho) = \sup_{u \in \mathcal{R}} Z(u),$$

не является одноэлементным (это интервал со случайными концами или даже конечное объединение таких интервалов). Следовательно, асимптотика ОМП $\hat{\vartheta}_T$ требует специального исследования. Для БО $\tilde{\vartheta}_T$ этой проблемы нет, и имеем предел

$$\gamma_\tau T \left(\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right) \Rightarrow \tilde{\zeta}_\rho = \frac{\int_{\mathcal{R}} u Z(u) du}{\int_{\mathcal{R}} Z(u) du},$$

а сходимость моментов следует из общих рассуждений, аналогичных приведенным выше в доказательстве предложения 2:

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0} \left| \tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right|^2 = \frac{\mathbf{E} |\tilde{\zeta}_\rho|^2}{\gamma_\tau^2 T^2} (1 + o(1)).$$

Пример 7. Рассмотрим случай нескольких точек разладки на одном периоде. Предположим, что функция интенсивности τ -периодического пуассоновского процесса X^T на первом периоде равна

$$\lambda(\vartheta, t) = \sum_{k=1}^K [h_k(t - \vartheta_k) \mathbb{1}_{\{t < \vartheta_k\}} + g_k(t - \vartheta_k) \mathbb{1}_{\{t \geq \vartheta_k\}}] + \lambda_0, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

где $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_K) \in \Theta \subset [0, \tau]^K$. Следовательно, надо оценить K точек разладки $0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \dots < \vartheta_K < \tau$ по наблюдениям неоднородного пуассоновского процесса $X^T = (X_t, 0 \leq t \leq T)$ с такой функцией интенсивности. Предполагаем, что функции $h_k(\cdot)$ и $g_k(\cdot)$ и множество Θ удовлетворяют условиям, обеспечивающим идентифицируемость модели.

ОМП $\hat{\vartheta}_T$ определяется уравнением вида (21), где правый и левый пределы рассчитываются в каждой компоненте. БО определяется как отношение (11).

Случайное поле предельного отношения правдоподобия равно

$$Z(u) = \prod_{k=1}^K Z_k(u_k), \quad u \in \mathcal{R}^K,$$

где

$$Z_k(u_k) = \begin{cases} \exp \left\{ \ln \left(\frac{h_k + \lambda_0}{g_k + \lambda_0} \right) x_k^+ ((g_k + \lambda_0) u_k) - (h_k - g_k) u_k \right\}, & u_k \geq 0, \\ \exp \left\{ \ln \left(\frac{g_k + \lambda_0}{h_k + \lambda_0} \right) x_k^- (-(h_k + \lambda_0) u_k) - (h_k - g_k) u_k \right\}, & u_k < 0. \end{cases}$$

Здесь $h_k = h_k(\tau_k)$, $g_k = g_k(\tau_k)$, а $x_k^\pm(\cdot)$, $k = 1, \dots, K$, — независимые пуассоновские процессы единичной интенсивности.

Введем случайные векторы $\hat{\zeta} = (\hat{\zeta}_1, \dots, \hat{\zeta}_K)$ и $\tilde{\zeta} = (\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_K)$ независимых случайных величин, определяемых соотношениями

$$\max \left(Z_k(\hat{\zeta}_k +), Z_k(\hat{\zeta}_k -) \right) = \sup_{v \in \mathcal{R}} Z_k(v), \quad \tilde{\zeta}_k = \frac{\int_{\mathcal{R}} u_k Z_k(u_k) du_k}{\int_{\mathcal{R}} Z_k(u_k) du_k},$$

где $k = 1, \dots, K$. Используя метод Ибрагимова–Хасьминского [17], можно проверить сходимость

$$T(\tilde{\vartheta}_T - \vartheta) \Rightarrow \tau \tilde{\zeta}, \quad T^p \mathbf{E}_\vartheta \|\tilde{\vartheta}_T - \vartheta\|^p \longrightarrow \tau^p \mathbf{E}_\vartheta \|\tilde{\zeta}\|^p.$$

Здесь $\|\cdot\|$ — евклидово расстояние в $\mathcal{R}^K$. Доказательство аналогичных пределов для ОМП

$$T(\hat{\vartheta}_T - \vartheta) \Rightarrow \tau \hat{\zeta}, \quad T^p \mathbf{E}_\vartheta \|\hat{\vartheta}_T - \vartheta\|^p \longrightarrow \tau^p \mathbf{E}_\vartheta \|\hat{\zeta}\|^p$$

является более сложной задачей, и ее решение пока неизвестно.

Для модели (1) аналогичный результат получен в [46]. Другой подход к исследованию моделей процессов Пуассона с разладкой в интенсивности развит в [47].

4. Частотная модуляция

Теперь рассмотрим практически те же модели с той лишь разницей, что используется частотная модуляция. Наблюдаемый неоднородный пуассоновский процесс $X^T = (X_t, 0 \leq t \leq T)$ имеет функцию интенсивности

$$\lambda(\vartheta, t) = S(\vartheta t) + \lambda_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где сигнал $S(t)$, $t \geq 0$, является τ -периодической функцией. Частота $\vartheta \in \Theta = (\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta$, а интенсивность шума (dark current) $\lambda_0 > 0$. Таким образом, функция $\lambda(\vartheta, t)$ периодическая с периодом $\tau_\vartheta = \vartheta/\tau$. Поскольку ϑ

неизвестно, нельзя заменить X^T на $n = T/\tau_\vartheta$ независимых одинаково распределенных пуассоновских процессов, как это было сделано в предыдущем разделе.

Ниже описываются свойства ОМП $\hat{\vartheta}_T$ и БО $\tilde{\vartheta}_T$, определяемых соотношениями

$$L(\hat{\vartheta}_T, X^T) = \sup_{\vartheta \in \Theta} L(\vartheta, X^T), \quad \tilde{\vartheta}_T = \frac{\int_{\Theta} \vartheta p(\vartheta) L(\vartheta, X^T) d\vartheta}{\int_{\Theta} p(\vartheta) L(\vartheta, X^T) d\vartheta},$$

где функция ОП равна

$$L(\vartheta, X^T) = \exp \left\{ \int_0^T \ln \left(1 + \frac{S(\vartheta t)}{\lambda_0} \right) dX_t - \int_0^T S(\vartheta t) dt \right\}, \quad \vartheta \in \Theta.$$

Как и прежде, рассмотрим три типа регулярности/сингулярности моделей: гладкие модели, модели типа касп и модели разладки.

4.1. Гладкий случай

Предположим, что функция $S(\cdot) \geq 0$ дважды непрерывно дифференцируема и тождественно не равна нулю. Информацию Фишера запишем следующим образом:

$$\int_0^T \frac{\dot{\lambda}(\vartheta, t)^2}{\lambda(\vartheta, t)} dt = \int_0^T \frac{t^2 S'(\vartheta t)^2}{S(\vartheta t) + \lambda_0} dt = \frac{T^3}{3\tau} \int_0^\tau \frac{S'(t)^2}{S(t) + \lambda_0} dt (1 + o(1)).$$

Точка означает производную по ϑ , а штрих — производную по аргументу функции. Здесь $S'(\vartheta t) = S'(y)|_{y=\vartheta t}$. Поэтому для этой модели наблюдений можно положить

$$I(\vartheta) = \frac{1}{3\tau} \int_0^\tau \frac{S'(t)^2}{S(t) + \lambda_0} dt.$$

Нижняя граница (Гаека–Ле Кама) на среднеквадратические ошибки всех оценок $\bar{\vartheta}_T$ имеет вид

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| < \nu} T^3 \mathbf{E}_\vartheta |\bar{\vartheta}_T - \vartheta|^2 \geq I(\vartheta_0)^{-1}.$$

Как обычно, называем оценку ϑ_T^* асимптотически эффективной, если для нее в этом неравенстве имеет место равенство для всех $\vartheta_0 \in \Theta$.

Предложение 4. ОМП $\hat{\vartheta}_T$ и БО $\tilde{\vartheta}_T$ равномерно на компактах $\mathbb{K} \subset \Theta$ состоятельны, асимптотически нормальны:

$$T^{3/2} (\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0) \Rightarrow \hat{\zeta} \sim \mathcal{N}(0, I(\vartheta_0)^{-1}), \quad T^{3/2} (\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0) \Rightarrow \hat{\zeta},$$

имеет место сходимость моментов: для всех $p > 0$

$$T^{\frac{3p}{2}} \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0|^p \longrightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\hat{\zeta}|^p, \quad T^{\frac{3p}{2}} \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0|^p \longrightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\hat{\zeta}|^p,$$

и обе оценки асимптотически эффективны.

Доказательства см. в [21, 22]. Нормализующая функция может быть выбрана как $\varphi_T = T^{-3/2}$, и предельное отношение правдоподобия имеет вид

$$Z(u) = \exp \left\{ u \Delta(\vartheta_0) - \frac{u^2}{2} \mathbf{I}(\vartheta_0) \right\}, \quad u \in \mathcal{R}, \quad \Delta(\vartheta_0) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}(\vartheta_0)).$$

Для среднеквадратических ошибок имеем

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0} |\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0|^2 = \frac{\mathbf{I}(\vartheta_0)^{-1}}{T^3} (1 + o(1)), \quad \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0|^2 = \frac{\mathbf{I}(\vartheta_0)^{-1}}{T^3} (1 + o(1)).$$

Пример 8. Предположим, что $S(\vartheta t) = \frac{a}{2} [1 + \cos(\vartheta t)]$, где $a > 0$. Функция $S(\cdot)$ периодическая с периодом $\tau = 2\pi/\vartheta$. Информация Фишера равна (см. [21])

$$\mathbf{I}(\vartheta_0) = \frac{a}{6} \left[1 + 2q - 2\sqrt{q + q^2} \right], \quad q = \frac{\lambda_0}{2}.$$

Пример 9. Предположим, что $S(\vartheta t) = b \exp[a \cos(\vartheta t)]$, где $a, b > 0$. Функция $S(\cdot)$ периодическая с периодом $\tau = 2\pi/\vartheta$. Информация Фишера равна (см. [21])

$$\mathbf{I}(\vartheta_0) = \frac{ab}{3} I'_0(a),$$

где $I'_0(a)$ — производная модифицированной функции Бесселя.

ОМП является асимптотически эффективной, но ее построение связано с определенными техническими трудностями, поэтому представляет интерес построение вычислительно существенно более простых оценок с теми же асимптотическими свойствами. Такое построение предложено в [48] в случае частотной модуляции для модели (1). Аналогичная конструкция может быть реализована и в случае пуассоновских наблюдений.

Заметим, что задача оценки частоты изучалась также в [49, 50]. В ряде работ рассматриваются задачи непараметрической оценки частоты и формы периодического сигнала, см., например, [51] и ссылки там.

4.2. Случай сингулярности типа касп

Предположим, что функция интенсивности наблюдаемого процесса равна

$$\lambda(\vartheta, t) = S(\vartheta t) + \lambda_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где функция $S(\cdot)$ является τ -периодической и может быть записана на первом периоде как $S(y) = \psi(y)g(y)$, где $y \in [0, \tau]$ и функция $\psi(\cdot)$ задана формулой

$$\psi(y) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{sgn}(y - \mu) \left| \frac{y - \mu}{\delta} \right|^\kappa \right) \mathbb{1}_{\{|y - \mu| < \delta\}} + \mathbb{1}_{\{y \geq \mu + \delta\}}.$$

Здесь $\kappa \in (0, 1/2)$, постоянная $\delta > 0$ известна, $\mu \in (\delta, \tau - \delta)$ и функция $g(\cdot)$ непрерывно дифференцируема. Более того, предполагаем, что $g(y) > 0$ для $y \in (\mu - \delta, \tau_*)$ и $g(y) = 0$ для $y \geq \tau_*$, где $\mu + \delta < \tau_* < \tau$. Как и ранее, множество $\Theta = (\alpha, \beta)$ с $0 < \alpha < \beta$.

Заметим, что $S(y) = 0$ для $y \in [0, \mu - \delta]$ и что $S(y) = g(y)$ для $y \geq \mu + \delta$, и, следовательно, $S(y) = 0$ для $t \in [\tau_*, \tau]$. Таким образом, сигнал можно периодически продолжить, а функция $\psi(\cdot)$ описывает фронт сигнала. Также заметим, что поскольку $\kappa \in (0, 1/2)$, статистический эксперимент сингулярный.

Напомним некоторые обозначения, введенные в разделе 3.2. А именно введем случайные величины $\hat{\zeta} = \hat{\zeta}_\kappa$ и $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_\kappa$ соотношениями (9) и (11) соответственно, используя случайный процесс

$$Z(u) = \exp \left\{ W^{\kappa + \frac{1}{2}}(u) - \frac{|u|^{2\kappa + 1}}{2} \right\}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Здесь $W^H(\cdot)$, как и раньше, обозначает дробное броуновское движение с параметром Херста $H = \kappa + \frac{1}{2}$. Напомним также интеграл $Q(\kappa)$, определенный ранее в (18)–(19). Пример реализации процесса $Z(\cdot)$ приведен на рис. 3.

Введем постоянную

$$\gamma_{\kappa, \tau} = \left(\frac{g^2(\mu) Q(\kappa)}{4\tau(g(\mu) + 2\lambda_0)(\kappa + 1)} \right)^{\frac{1}{2\kappa + 1}}.$$

Первый результат — это нижняя граница рисков всех оценок $\bar{\vartheta}_T$:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| < \nu} T^{\frac{4(\kappa + 1)}{2\kappa + 1}} \mathbf{E}_\vartheta |\bar{\vartheta}_T - \vartheta|^2 \geq \frac{\mathbf{E} \tilde{\zeta}_\kappa^2}{\gamma_{\kappa, \tau}^2}.$$

Как обычно, называем оценку ϑ_T^* асимптотически эффективной, если для нее в этом неравенстве имеет место равенство для всех $\vartheta_0 \in \Theta$.

Предложение 5. ОМП $\hat{\vartheta}_T$ и БО $\tilde{\vartheta}_T$ равномерно на компактах $\mathbb{K} \subset \Theta$ состоятельны, имеют разные предельные распределения:

$$T^{\frac{2(\kappa + 1)}{2\kappa + 1}} (\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0) \Rightarrow \frac{\hat{\zeta}_\kappa}{\gamma_{\kappa, \tau}}, \quad T^{\frac{2(\kappa + 1)}{2\kappa + 1}} (\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0) \Rightarrow \frac{\tilde{\zeta}_\kappa}{\gamma_{\kappa, \tau}},$$

моменты сходятся: для всех $p > 0$

$$T^{\frac{2p(\kappa + 1)}{2\kappa + 1}} \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0|^p \longrightarrow \frac{\mathbf{E}_{\vartheta_0} |\hat{\zeta}_\kappa|^p}{\gamma_{\kappa, \tau}^p}, \quad T^{\frac{2p(\kappa + 1)}{2\kappa + 1}} \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0|^p \longrightarrow \frac{\mathbf{E}_{\vartheta_0} |\tilde{\zeta}_\kappa|^p}{\gamma_{\kappa, \tau}^p},$$

и БО асимптотически эффективны.

Доказательство следует тем же этапам, что и доказательство аналогичного результата в [29]. Нормализованная функция ОП в этой задаче имеет вид

$$Z_T(u) = \frac{L(\vartheta_0 + \varphi_T u, X^T)}{L(\vartheta_0, X^T)}, \quad u \in \mathbb{U}_T = \left(\frac{\alpha - \vartheta_0}{\varphi_T}, \frac{\beta - \vartheta_0}{\varphi_T} \right),$$

где нормирующая функция $\varphi_T = \left(\gamma_{\kappa, \tau} T^{\frac{2(\kappa+1)}{2\kappa+1}} \right)^{-1}$. Устанавливаем сходимость

$$Z_T(\cdot) \Rightarrow Z(\cdot),$$

и поэтому процесс $Z(\cdot)$ является процессом предельного отношения правдоподобия этой модели. Следовательно, свойства ОМП и БО описываются соотношениями (8) и (11) соответственно.

Среднеквадратичные ошибки ОМП и БО имеют вид

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0} |\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0|^2 = \frac{\hat{\sigma}^2(\kappa)}{T^{\frac{4(\kappa+1)}{2\kappa+1}}} (1 + o(1)), \quad \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0|^2 = \frac{\tilde{\sigma}^2(\kappa)}{T^{\frac{4(\kappa+1)}{2\kappa+1}}} (1 + o(1)),$$

где

$$\hat{\sigma}^2(\kappa) = \frac{\mathbf{E}|\hat{\zeta}_\kappa|^2}{\gamma_{\kappa, \tau}^2}, \quad \tilde{\sigma}^2(\kappa) = \frac{\mathbf{E}|\tilde{\zeta}_\kappa|^2}{\gamma_{\kappa, \tau}^2}.$$

Как и в разделе 3.2, предложение 5 можно обобщить на случай, когда функция $S(\cdot)$ имеет несколько точек сингулярности на интервале $[0, \tau]$.

Пример 10. Рассмотрим случай импульсного сигнала конечной длительности с особенностями типа касп в начале и в конце сигнала:

$$\lambda(\vartheta, t) = S(\vartheta t) + \lambda_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $S(y)$ является τ -периодической функцией, заданной для $y \in [0, \tau]$ формулой

$$\begin{aligned} S(y) = & \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{sgn}(y - \mu) \left| \frac{y - \mu}{\delta} \right|^\kappa \right) \mathbb{1}_{\{|y - \mu| < \delta\}} + \mathbb{1}_{\{\mu + \delta \leq y \leq \tau_* - \delta\}} + \\ & + \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{sgn}(y - \tau_*) \left| \frac{y - \tau_*}{\delta} \right|^\kappa \right) \mathbb{1}_{\{|y - \tau_*| < \delta\}}. \end{aligned}$$

Здесь $\delta < \mu < \tau - 3\delta$ и $\mu + 2\delta < \tau_* < \tau - \delta$.

Асимптотическое поведение ОМП и БО в этой модели дается в предложении 5 с $\gamma_{\kappa, \tau} = \left(\frac{Q(\kappa)}{2\tau(2\lambda_0 + 1)(\kappa + 1)} \right)^{\frac{1}{2\kappa+1}}$.

4.3. Случай разладки

Перейдем к проблеме оценки момента разладки. Функция интенсивности наблюдаемого неоднородного пуассоновского процесса $X^T = (X_t, 0 \leq t \leq T)$ имеет вид

$$\lambda(\vartheta, t) = S(\vartheta t) + \lambda_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $\vartheta \in (\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta$, а функция $S(\cdot)$ является τ -периодической. На первом периоде она имеет представление

$$S(t) = h(t) + g(t) \mathbb{1}_{\{\mu \leq t \leq \mu + \tau^*\}}, \quad 0 \leq t < \tau,$$

где $h(\cdot)$ и $g(\cdot)$ — τ -периодические непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям $h(\cdot) > 0$, $g(\mu) > 0$, $g(\mu + \tau^*) = 0$, $0 < \tau^* < \tau - \mu$. Имеем

$$S(\vartheta t) = h(\vartheta t) + g(\vartheta t) \mathbb{1}_{\{\mu \leq \vartheta t \leq \mu + \tau^*\}}, \quad 0 \leq t < \tau_\vartheta \equiv \frac{\tau}{\vartheta}.$$

Функции $h(\cdot)$, $g(\cdot)$ и параметры $\mu > 0$, τ^* предполагаются известными.

Лог-ОП может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} \ln L(\vartheta, X^T) &= \int_0^T \ln \left(\frac{S(\vartheta t) + \lambda_0}{h(\vartheta t) + \lambda_0} \right) dX_t - \int_0^T [S(\vartheta t) - h(\vartheta t)] dt = \\ &= \int_0^{\vartheta T} \ln \left(\frac{S(v) + \lambda_0}{h(v) + \lambda_0} \right) dX_{\frac{v}{\vartheta}} - \frac{1}{\vartheta} \int_0^{\vartheta T} [S(v) - h(v)] dv = \\ &= \sum_{k=1}^{n_\vartheta} \int_{\tau(k-1)}^{\tau k} \ln \left(\frac{S(v) + \lambda_0}{h(v) + \lambda_0} \right) dX_{\frac{v}{\vartheta}} - \frac{1}{\vartheta} \sum_{k=1}^{n_\vartheta} \int_{\tau(k-1)}^{\tau k} [S(v) - h(v)] dv + \\ &\quad + \int_{\tau n_\vartheta}^{\tau T} \ln \left(\frac{S(v) + \lambda_0}{h(v) + \lambda_0} \right) dX_{\frac{v}{\vartheta}} - \frac{1}{\vartheta} \int_{\tau n_\vartheta}^{\tau T} [S(v) - h(v)] dv = \\ &= \sum_{k=1}^{n_\vartheta} \int_{\mu}^{\mu + \tau^*} \ln \left(1 + \frac{g(s)}{h(s) + \lambda_0} \right) dX_k(\vartheta, s) (1 + o(1)) - \\ &\quad - \frac{T}{\tau} \int_{\mu}^{\mu + \tau^*} g(s) ds (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Здесь были использованы следующие обозначения: $n_{\vartheta} = \left[\frac{\vartheta T}{\tau} \right]$ (целая часть) и $X_k(\vartheta, s) = X_{\frac{s+\tau(k-1)}{\vartheta}} - X_{\frac{\tau(k-1)}{\vartheta}}$.

Напомним, что функция ОП $L(\vartheta, X^T)$, $\vartheta \in \Theta$ разрывная, поэтому ОМП $\hat{\vartheta}_T$ определяется уравнением

$$\max \left(L(\hat{\vartheta}_{T+}, X^T), L(\hat{\vartheta}_{T-}, X^T) \right) = \sup_{\vartheta \in \Theta} L(\vartheta, X^T).$$

БО определяется соотношением (5).

Положим

$$\gamma_{\tau} = \frac{g(\mu)}{2\tau}, \quad \rho = \ln \frac{h(\mu) + g(\mu) + \lambda_0}{h(\mu) + \lambda_0}$$

и введем процесс предельного отношения правдоподобия

$$(22) \quad Z(v) = \begin{cases} \exp \left\{ \rho x^+ \left(\frac{v}{e^{\rho} - 1} \right) - v \right\}, & v \geq 0, \\ \exp \left\{ -\rho x^- \left(-\frac{v}{1 - e^{-\rho}} \right) - v \right\}, & v < 0, \end{cases}$$

где $x^{\pm}(\cdot)$ представляют собой два независимых пуассоновских процесса единичной интенсивности. Заметим, что до замены переменной $v = -u$ этот процесс аналогичен процессу (20), который был в случае фазовой модуляции (см. раздел 3.3 и рис. 7).

Предельные распределения ОМП и БО даны с помощью случайных величин $\zeta = \hat{\zeta}_{\rho}$ и $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_{\rho}$, определяемых соотношениями

$$\max \left(Z(\hat{\zeta}_{\rho}+), Z(\hat{\zeta}_{\rho}-) \right) = \sup_{u \in \mathcal{R}} Z(u)$$

и (11) соответственно, где $Z(\cdot)$ задано в (22).

Нижняя граница для среднеквадратических ошибок всех оценок имеет вид

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| < \nu} T^4 \mathbf{E}_{\vartheta} |\bar{\vartheta}_T - \vartheta|^2 \geq \frac{\mathbf{E} |\tilde{\zeta}_{\rho}|^2}{\gamma_{\tau}^2},$$

и называем оценку ϑ_T^* асимптотически эффективной, если для нее в этом неравенстве имеет место равенство для всех $\vartheta_0 \in \Theta$.

Предложение 6. ОМП $\hat{\vartheta}_T$ и БО $\tilde{\vartheta}_T$ равномерно на компактах $\mathbb{K} \subset \Theta$ состоятельны, имеют разные предельные распределения:

$$T^2 \left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right) \Rightarrow \frac{\hat{\zeta}_{\rho}}{\gamma_{\tau}}, \quad T^2 \left(\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right) \Rightarrow \frac{\tilde{\zeta}_{\rho}}{\gamma_{\tau}},$$

моменты сходятся: для всех $p > 0$

$$T^{2p} \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0|^p \rightarrow \frac{\mathbf{E}_{\vartheta_0} |\hat{\zeta}_{\rho}|^p}{\gamma_{\tau}^p}, \quad T^{2p} \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0|^p \rightarrow \frac{\mathbf{E}_{\vartheta_0} |\tilde{\zeta}_{\rho}|^p}{\gamma_{\tau}^p},$$

и БО асимптотически эффективны.

Доказательство см. в [16]. Нормированное ОП определяем соотношением

$$Z_T(u) = \frac{L\left(\vartheta_0 + \frac{u}{\gamma_\tau T^2}, X^T\right)}{L(\vartheta_0, X^T)}, \quad u \in \mathbb{U}_T = (\gamma T^2(\alpha - \vartheta_0), \gamma_\tau T^2(\beta - \vartheta_0)),$$

и проверяем сходимость

$$Z_T(\cdot) \Rightarrow Z(\cdot).$$

Для среднеквадратических ошибок получаем выражения

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0|^2 = \frac{\hat{\sigma}^2(\rho)}{T^4}(1 + o(1)), \quad \mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde{\vartheta}_T - \vartheta_0|^2 = \frac{\tilde{\sigma}^2(\rho)}{T^4}(1 + o(1)),$$

где $\hat{\sigma}^2(\rho) = \gamma_\tau^{-2} \mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat{\zeta}_\rho|^2$ и $\tilde{\sigma}^2(\rho) = \gamma_\tau^{-2} \mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde{\zeta}_\rho|^2$. Результаты численных вычислений значений $\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\hat{\zeta}_\rho|^2$ и $\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\tilde{\zeta}_\rho|^2$ приведены на рис. 8 и 9 в разделе 3.3.

Свойства ОМП частоты разрывного сигнала модели (1) описаны в [16] (см. утверждение 2.4.2). Сходные свойства эта оценка имеет и для более общей модели диффузионного процесса с разрывным периодическим сносом [52].

5. Численное моделирование

Значения ошибок, представленные на рис. 4, 8 и 9, соответствуют предельной модели ($T = \infty$). Интересно посмотреть, как среднеквадратические ошибки

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0} \left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right)^2 = \frac{\sigma^2}{T^m} (1 + o(1))$$

сходятся к своим предельным значениям σ^2 . Скорость этой сходимости можно увидеть по результатам численного моделирования, приведенным ниже.

Рассмотрим функции интенсивности:

гладкий случай (фаза и частота)

$$\begin{aligned} \lambda_{PS}(\vartheta, t) &= \cos^2(2\pi(t - \vartheta)) + 1, & 0 \leq t \leq T, \\ \lambda_{FS}(\vartheta, t) &= \cos^2(2\pi\vartheta t) + 1, & 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

случай сингулярности типа касп (фаза и частота)

$$\begin{aligned} \lambda_{PC}(\vartheta, t) &= f(t - \vartheta) + 1, & 0 \leq t \leq \tau, \\ \lambda_{FC}(\vartheta, t) &= f(\vartheta t) + 1, & 0 \leq t \leq \tau, \end{aligned}$$

где на первом периоде

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{sgn}(2t + \delta) \left| \frac{2t + \delta}{\delta} \right|^\kappa \right] \mathbb{1}_{\{-\delta \leq t \leq 0\}} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{sgn}(2t - \delta) \left| \frac{2t - \delta}{\delta} \right|^\kappa \right] \mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq \delta\}}, \end{aligned}$$

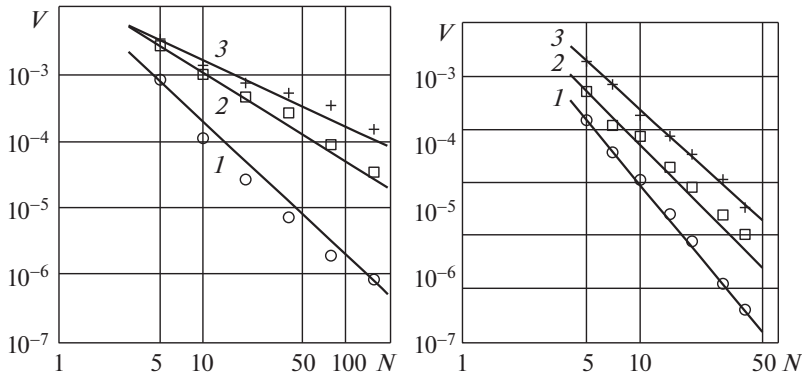


Рис. 12. Результаты симуляций в случаях фазовой (левая часть) и частотной (правая часть) модуляций.

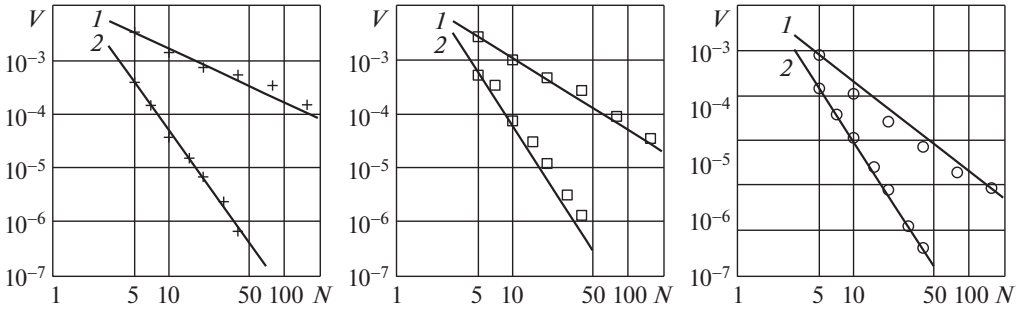


Рис. 13. Результаты симуляций в гладком случае (левая часть), в случае сингулярности типа касп (центральная часть) и в случае разладки (правая часть).

случай разладки (фаза и частота)

$$\begin{aligned}\lambda_{PD}(\vartheta, t) &= f(t - \vartheta) + 1, \quad 0 \leq t \leq \tau, \\ \lambda_{PD}(\vartheta, t) &= f(\vartheta t) + 1, \quad 0 \leq t \leq \tau,\end{aligned}$$

где на первом периоде

$$f(t) = \mathbb{1}_{\{t \geq \mu\}} + 1, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Результаты численной симуляции

$$V(T) = \ln \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0 \right)^2 = \ln \sigma^2 - m \ln T$$

в случаях фазовой и частотной модуляций представлены на рис. 12 и 13. Используем обозначения: + (гладкий случай), $\square$ (случай сингулярности типа касп) и $\circ$ (случай разладки).

6. Выбор модели

Как видим, существует большое разнообразие скоростей сходимости ошибок в зависимости от аналитических свойств сигналов и типа модуляции. Поэтому естественно рассмотреть следующий вопрос:

Как выбрать функцию интенсивности и оценку, обеспечивающие минимально возможную ошибку оценки параметра? В частности, какова оптимальная скорость сходимости среднеквадратической ошибки?

Напомним, что в статистике обычно приводится модель наблюдений и проблема состоит в том, чтобы идентифицировать эту модель оптимальным образом. Здесь утверждение отличается, и можно выбрать и модель, и оценку, которые обеспечат лучшую ошибку.

Таким образом, рассматриваем задачу, которая в некотором смысле является обратной. Предположим, что можно выбрать любую интенсивность $\lambda(\vartheta, t)$, которую хотим, и цель состоит в том, чтобы найти такую функцию $\lambda(\vartheta, t)$, $\vartheta \in \Theta = (0, 1)$ и $t \in [0, T]$, и такую оценку ϑ_T^* , что скорость убывания погрешности оценивания является наилучшей. Конечно, надо наложить некоторые ограничения на “энергию сигнала” (терминология, пришедшая из теории связи), поскольку если допустить $\lambda(\cdot) \rightarrow \infty$, то можно будет получить любую скорость.

Зафиксируем некоторое число $L > 0$ и введем класс функций интенсивности, ограниченных этой константой:

$$\mathcal{F}(L) = \{\lambda(\cdot) : 0 \leq \lambda(\vartheta, t) \leq L, 0 \leq t \leq T\}.$$

Имеется следующий результат:

$$\inf_{\lambda \in \mathcal{F}(L)} \inf_{\vartheta_T} \sup_{\vartheta \in \Theta} \mathbf{E}_{\lambda, \vartheta} (\bar{\vartheta}_T - \vartheta)^2 = \exp \left\{ -\frac{TL}{6} (1 + o(1)) \right\}.$$

На самом деле, здесь представлено два разных результата.

Первый — это нижняя граница на среднеквадратический риск при любом выборе интенсивности из этого класса и любой оценки $\bar{\vartheta}_T$:

$$\inf_{\lambda \in \mathcal{F}(L)} \sup_{\vartheta \in \Theta} \mathbf{E}_{\lambda, \vartheta} (\bar{\vartheta}_T - \vartheta)^2 \geq \exp \left\{ -\frac{TL}{6} (1 + o(1)) \right\}.$$

Второй результат — это выбор такой интенсивности $\lambda_*(\cdot)$ и построение такой оценки ϑ_T^* , что эта граница достигается:

$$\sup_{\vartheta \in \Theta} \mathbf{E}_{\lambda_*, \vartheta} (\vartheta_T^* - \vartheta)^2 \leq \exp \left\{ -\frac{TL}{6} (1 + o(1)) \right\}.$$

Доказательства, приведенные в [53, 54], существенно опираются на вычисление пропускной способности пуассоновского канала (см. [13, 55, 56]).

7. Обсуждения

Представленные выше результаты показывают, что порядок ошибки сильно зависит от свойств регулярности передаваемого сигнала. Заметим, что важно изучить ситуации, в которых предполагаемая регулярность сигнала и реальная регулярность разные. Например, статистик предполагает, что сигнал имеет сингулярность типа разладки, и строит ОМП на основе этого предположения, но реальный сигнал сглажен и функция интенсивности имеет конечную информацию Фишера. Тем самым имеем ошибку в определении регулярности. Тогда ОМП сходится к значению ϑ_* , которое минимизирует расстояние Кульбака–Лейблера, и скорость сходимости среднеквадратической ошибки существенно отличается от предполагаемой. Например, если имеем фазовую модуляцию и ожидаем скорость $\mathbf{E}_{\vartheta_0}(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_0)^2 \sim T^{-2}$, то реальная скорость ошибки ОМП будет $\mathbf{E}_{\vartheta_0}(\hat{\vartheta}_T - \vartheta_*)^2 \sim T^{-2/3}$. Среднеквадратичные ошибки ОМП при различных типах ошибок в типе регулярности сигналов изучались в [33, 57], где исследовалась модель “сигнал в белом гауссовском шуме” (1). Подобное исследование может быть интересно также и в случае пуассоновских процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишневецкий В.М., Дудин А.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей // *АиТ*. 2017. № 8. С. 3–59.
Vishnevskii V.M., Dudin A.N. Queueing Systems with Correlated Arrival Flows and Their Applications to Modeling Telecommunication Networks // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 8. P. 1361–1403.
2. Назаров А.А., Любина Т.В. Немарковская динамическая RQ-система с входящим ММР-потокот заявок // *АиТ*. 2013. № 7. С. 89–101.
Nazarov A.A., Lyubina T.V. The Non-Markov Dynamic RQ System with the Incoming MMP Flow of Requests // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 7. P. 1132–1143.
3. Проскурников А.В., Фрадков А.Л. Задачи и методы сетевого управления // *АиТ*. 2016. № 10. С. 3–39.
Proskurnikov A.V., Fradkov A.L. Problems and Methods of Network Control // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 10. P. 1711–1740.
4. Rao M.M. Optical Communication. Hyderabad: Universities Press, 2001.
5. Karttunen H., Kröger P., Oja H., Poutanene M., Donner K.J. (Ed's) Fundamental Astronomy. New York: Springer, 2017.
6. Chen V.C. The Micro-Doppler Effect in Radar. 2nd ed. Boston: Artech House Publishers, 2019.
7. Breyer B. Physical Principles of the Doppler Effect and Its Application in Medicine // Color Doppler, 3D and 4D Ultrasound in Gynecology, Infertility and Obstetrics (Kupesic S. Ed.). Jaypee Brothers Medical Publishers, 2011. P. 1–11.
8. Zekavat S.A.R., Buehrer R.M. (Ed's) Handbook of Position Location: Theory, Practice and Advances. 2nd ed. Hoboken: John Wiley and Sons, 2019.

9. *Chernoyarov O.V., Kutoyants Yu.A.* Poisson Source Localization on the Plane. Smooth Case // *Metrika*. 2020. V. 83. No. 4. P. 411–435.
10. *Chernoyarov O.V., Dachian S., Kutoyants Yu.A.* Poisson Source Localization on the Plane. Cusp Case // *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 2020. V. 72. No. 5. P. 1137–1157.
11. *Bandyopdhyay M.N.* Optical Communication and Networks. Prentice Hall of India Private, 2014.
12. *Bar-David I.* Communication under the Poisson Regime // *IEEE Trans. Information Theory*. 1969. V. IT-15. No. 1. P. 31–37.
13. *Wyner A.D.* Capacity and Error Exponent for the Direct Detection Photon Channel — Parts I and II // *IEEE Trans. Inform. Theory*. 1988. V. IT-34. P. 1449–1471.
14. *Лунцер П.И., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
Liptser R.S., Shiryaev A.N. Statistics of Random Processes. Berlin: Springer, 2001.
15. *Ибрагимов И.А., Хасъминский Р.З.* Оценка параметра сигнала в гауссовском белом шуме // *Пробл. передачи информ.* 1974. Т. 10. № 1. С. 39–59.
Ibragimov I.A., Khasminskii R.Z. Estimation of a Signal Parameter in Gaussian White Noise // *Problems Inform. Transmission*. 1974. V. 10. No. 1. P. 31–46.
16. *Kutoyants Yu.A.* Parameter Estimation for Stochastic Processes. Berlin: Heldermann, 1984.
17. *Ибрагимов И.А., Хасъминский Р.З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
Ibragimov I.A., Khasminskii R.Z. Statistical Estimation. Asymptotic Theory. New York: Springer, 1981.
18. *Prakasa Rao B.L.S.* Estimation of the Location of the Cusp of a Continuous Density // *Ann. Math. Statist.* 1968. V. 39. No. 1. P. 76–87.
19. *Dachian S.* Estimation of the Location of a 0-type or ∞ -type Singularity by Poisson Observations // *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*. 2011. V. 45. No. 5. P. 509–523.
20. *Hajek J.* Local Asymptotic Minimax and Admissibility in Estimation // *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. 1972. V. 1. P. 175–194.
21. *Kutoyants Yu.A.* Statistical Inference for Spatial Poisson Processes. New York: Springer, 1998.
22. *Kutoyants Yu.A.* Parameter Estimation of Intensity of Inhomogeneous Poisson Processes // *Probl. Contr. Inform. Theory*. 1979. V. 8. P. 137–149.
23. *Kutoyants Yu.A.* Multidimensional Parameter Estimation of Intensity of Inhomogeneous Poisson Processes // *Probl. Contr. Inform. Theory*. 1982. V. 11. P. 325–334.
24. *Prakasa Rao B.L.S.* Asymptotic Theory of Least Squares Estimator in a Nonregular Nonlinear Regression Model // *Statist. and Probab. Lett.* 1985. V. 3. No. 1. P. 15–18.
25. *Prakasa Rao B.L.S.* Estimation of Cusp in Nonregular Nonlinear Regression Models // *Journal of Multivariate Analysis*. 2004. V. 88. No. 2. P. 243–251.
26. *Döring M.* Asymmetric Cusp Estimation in Regression Models // *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*. 2015. V. 49. No. 6. P. 1279–1297.
27. *Döring M., Jensen U.* Smooth Change Point Estimation in Regression Models with Random Design // *Ann. Inst. Stat. Math.* 2015. V. 67. P. 595–619.

28. *Raimondo M.* Minimax Estimation of Sharp Change Points // The Annals of Statistics. 1998. V. 26. No. 4. P. 1379–1397.
29. *Dachian S.* Estimation of Cusp Location by Poisson Observations // Statist. Inference Stoch. Processes. 2003. V. 6. No. 1. P. 1–14.
30. *Dachian S., Kutoyants Yu.A.* On Cusp Estimation of Ergodic Diffusion Process // J. Stat. Plann. Infer. 2003. V. 117. P. 153–166.
31. *Fujii T.* An Extension of Cusp Estimation Problem in Ergodic Diffusion Processes // Statistics and Probability Letters. 2010. V. 80. No. 9–10. P. 779–783.
32. *Kutoyants Yu.A.* On Cusp Location Estimation for Perturbed Dynamical Systems // Scand. J. Statist. 2019. V. 46. P. 1206–1226.
33. *Chernoyarov O.V., Dachian S., Kutoyants Yu.A.* On Parameter Estimation for Cusp-type Signals // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. 2018. V. 70. No. 1. P. 39–62.
34. *Kutoyants Yu.A.* On Localization of Source by Hidden Gaussian Processes with Small Noise // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. 2021. V. 73. No. 4. P. 671–702.
35. *Pflug G.C.* A Statistically Important Gaussian Process // Stochastic Processes and their Applications. 1982. V. 13. P. 45–47.
36. *Новиков А.А., Кордзахия Н.Е., Линг Т.* О моментах оценок Питмена: случай дробного броуновского движения // Теория вероятн. и ее примен. 2013. Т. 58. № 4. С. 695–710.
Novikov A.A., Kordzakhia N.E., Ling T. On Moments of Pitman Estimators: the Case of Fractional Brownian Motion // Theory Probab. Appl. 2014. V. 58. No. 4. P. 601–614.
37. *Dachian S., Kordzakhia N., Kutoyants Yu.A., Novikov A.* Estimation of Cusp Location of Stochastic Processes: A Survey // Stat. Inference Stoch. Process. 2018. V. 21. No. 2. P. 345–362.
38. *Pyke R.* The Supremum and Infimum of the Poisson Process // Ann. Math. Statist. 1959. V. 30. P. 568–576.
39. *Скоруход А.В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1964.
Skorohod A.V. Random Processes with Independent Increments. Dordrecht: Kluwer, 1991.
40. *Shorack G.R., Wellner J.A.* Empirical Processes with Applications to Statistics. New York: John Wiley and Sons, 1986.
41. *Pflug G.C.* On an Argmax-Distribution Connected to the Poisson Process // Proceedings of the Fifth Prague Conference on Asymptotic Statistics (*Mandl P., Huskova M.* Ed's). 1993. P. 123–130.
42. *Мосягин В.Е., Швемлер Н.А.* Распределение момента максимума разности двух пуассоновских процессов с отрицательным линейным сносом // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 1229–1248.
Mosyagin V.E., Shvemler N.A. Distribution of the Time of Attaining the Maximum for the Difference of the Two Poisson's Processes with Negative Linear Drift (in Russian) // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2016. V. 13. P. 1229–1248.
43. *Мосягин В.Е., Швемлер Н.А.* Локальные свойства предельного распределения статистической оценки точки разрыва плотности // Сиб. электрон. матем. изв. 2017. Т. 14. С. 1307–1316.

Mosyagin V.E., Shvemler N.A. Local Properties of the Limiting Distribution of the Statistical Estimator for Jump Point of a Density (in Russian) // *Sib. Elektron. Mat. Izv.* 2017. V. 14. P. 1307–1316.

44. *Мосягин В.Е.* Асимптотика распределения момента достижения максимума траекторией процесса Пуассона со сносом и изломом // *Теория вероятн. и ее примен.* 2021. Т. 66. № 1. С. 94–109.

Mosyagin V.E. Asymptotics for the Distribution of the Time of Attaining the Maximum for a Trajectory of a Poisson Process with Drift and Break // *Theory Probab. Appl.* 2021. V. 66. No. 1.

45. *Dachian S.* On Limit Likelihood Ratio Processes of some Change-Point Type Statistical Models // *J. Stat. Plan. Inference.* 2010. V. 140. P. 2682–2692.

46. *Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З.* Оценка параметра разрывного сигнала в белом гауссовском шуме // *Пробл. передачи информ.* 1975. Т. 11. № 3. С. 31–43.

Ibragimov I.A., Khasminskii R.Z. Parameter Estimation for a Discontinuous Signal in White Gaussian Noise // *Problems Inform. Transmission.* 1975. V. 11. No. 3. P. 203–212.

47. *Галун С.А., Трифонов А.П.* Обнаружение и оценка момента изменения интенсивности пуассоновского потока // *АиТ.* 1982. № 6. С. 95–105.

Galun S.A., Trifonov A.P. Detection and Estimation of the Time when the Poisson Flow Intensity Changes // *Autom. Remote Control.* 1982. V. 43. No. 6. P. 782–790.

48. *Голубев Г.К.* Фишеровский метод накопления в задаче оценивания частоты // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* 1981. Т. 108. С. 22–44.

Golubev G.K. Fisher's Method of Scoring in the Problem of Frequency Estimation // *Journal of Soviet Mathematics.* 1984. V. 25. No. 3. P. 1125–1139.

49. *Helstrom C.* Estimation of Modulation Frequency of a Light Beam // *Optical Space Communication; Proceedings of an MIT-NASA Workshop held at Williams College, Williamstown, MA, August 4–17, 1968 (Kennedy R.S., Karp S. Ed's).* Appendix E. 1968.

50. *Vere-Jones D.* On the Estimation of Frequency in Point-Process Data // *J. Appl. Probab.* 1982. V. 19(A). P. 383–394.

51. *Hall P., Reimann J., Rice J.* Nonparametric Estimation of a Periodic Function // *Biometrika.* 2000. V. 87. No. 3. P. 545–557.

52. *Хепфнер Р., Кутоянц Ю.А.* Об оценивании частоты периодического эргодического диффузионного процесса // *Пробл. передачи информ.* 2012. Т. 48. № 2. С. 48–64.

Hopfner R., Kutoyants Yu.A. On Frequency Estimation for a Periodic Ergodic Diffusion Process // *Problems Inform. Transmission.* 2012. V. 48. No. 2. P. 127–141.

53. *Бурнашев М.В., Кутоянц Ю.А.* О границе сферической упаковки, пропускной способности и о подобных результатах для пуассоновского канала // *Пробл. передачи информ.* 1999. Т. 35. № 2. С. 3–22.

Burnashev M.V., Kutoyants Yu.A. On the Sphere-Packing Bound, Capacity, and Similar Results for Poisson Channels // *Problems Inform. Transmission.* 1999. V. 35. No. 2. P. 95–111.

54. *Burnashev M.V., Kutoyants Yu.A.* On Minimal α -Mean Error Parameter Transmission over Poisson Channel // *IEEE Transactions on Information Theory.* 2001. V. IT-47. No. 6. P. 2505–2515.

55. *Кабанов Ю.М.* Пропускная способность канала пуассоновского типа // Теория вероятн. и ее примен. 1978. Т. 23. № 1. С. 148–153.
Kabanov Yu.M. The Capacity of a Poisson Type Channel // Theory Probab. Appl. 1978. V. 23. No. 1. P. 143–147.
56. *Davis M.H.A.* Capacity and Cutoff Rate for Poisson-type Channels // IEEE Trans. Inform. Theory. 1978. V. IT-26. No. 6. P. 710–715.
57. *Chernoyarov O.V., Kutoyants Yu.A., Trifonov A.P.* On Misspecifications in Regularity and Properties of Estimators // Electron. J. Statist. 2018. V. 12. No 1. P. 80–106.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я.Рубиновичем.

Поступила в редакцию 16.06.2021

После доработки 01.07.2021

Принята к публикации 05.08.2021