Автоматика и телемеханика, № 1, 2021

Линейные системы

© 2021 г. **А.Л. ШЕСТАКОВ, д-р техн. наук (a.l.shestakov@susu.ru),
С.А. ЗАГРЕБИНА, д-р физ.-мат. наук (zagrebinasa@susu.ru),
Н.А. МАНАКОВА, д-р физ.-мат. наук (manakovana@susu.ru),
М.А. САГАДЕЕВА, канд. физ.-мат. наук (sagadeevama@susu.ru),
Г.А. СВИРИДЮК, д-р физ.-мат. наук (sviridiukga@susu.ru)
(Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет), Челябинск)**

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ИЗМЕРЕНИЯ, ИСКАЖЕННОГО ИНЕРЦИОННОСТЬЮ, РЕЗОНАНСАМИ И ДЕГРАДАЦИЕЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА[1]

Задача оптимальных измерений состоит в минимизации разности значений виртуального наблюдения, т.е. полученного с помощью расчетной модели, и экспериментальных данных. При исследовании задачи оптимального измерения можно выделить три части: математическая модель оптимального измерения, алгоритмы численных исследований этой модели и программы, их реализующие. Описаны первые две части исследования задачи оптимального измерения. Приводится описание математической модели оптимального измерения при наличии помех разного вида, описываются приближения оптимального измерения и доказывается их сходимость к точному. Описывается алгоритм численного нахождения приближений оптимального измерения.

Ключевые слова: приближения оптимального измерения, система леонтьевского типа, вырожденный поток матриц, квадратичный функционал, задача оптимального управления, метод градиентного спуска.

DOI: 10.31857/S0005231021010025

1. Введение

В теории динамических измерений актуальной проблемой является задача восстановления измерения по наблюдению. Традиционным подходом [1] решения данной задачи является метод, основанный на теории обратных задач [2–4]. Другим подходом [5, 6] является метод исследования, основанный на теории автоматического управления [7–9]. В последнее время возник [10] и активно развивается [11–13] подход, основанный на теории оптимального управления решениями уравнений леонтьевского типа [14, 15]. В основе этого подхода лежит поиск оптимума функционала штрафа от нормы разности реального (т.е. зафиксированного на измерительном приборе) и виртуального (т.е. найденного посредством вычислительного алгоритма) наблюдений.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (грант № FENU-2020-0022 (2020072ГЗ)).

Данную задачу называют *задачей оптимального измерения*, а найденный таким образом оптимум объявляется *оптимальным измерением*. К настоящему времени в рамках теории оптимальных измерений исследованы случаи, когда измерение искажено инерционностью измерительного устройства [16], резонансами в его цепях [17] или его деградацией [18]. В настоящей статье рассматривается случай, когда измерение искажено всеми тремя помехами одновременно.

Пусть L и M – квадратные матрицы порядка n, $f(t) = \mathrm{col}(f_1(t), f_2(t), \ldots$ $\ldots, f_n(t))$ — некоторая вектор-функция. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение вида

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + f(t),$$

причем допускаем возможность $\det L = 0$. Заметим, что первым такие уравнения начал изучать В. Леонтьев [19]. Поэтому будем называть эти уравнения *уравнениями леонтьевского типа*, считая синонимами позже появившиеся термины "дифференциально-алгебраические уравнения" [20], "алгебро-дифференциальные системы" [21], "дескрипторные системы" [22] и т.д.

Математическая модель (ММ) измерительного устройства (ИУ) описывается системой уравнений леонтьевского типа вида

$$(1) \qquad L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + Du(t), \qquad y(t) = b(t)Nx(t) + Fu(t),$$

где D, N, F – квадратные матрицы порядка n, $x(t) = \mathrm{col}(x_1(t), x_2(t), \ldots$ $\ldots, x_n(t))$, $y(t) = \mathrm{col}(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ и $u(t) = \mathrm{col}(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))$ – вектор-функции, $a(t)$ и $b(t)$ – функции. Здесь матрицы L, M, D, N и F характеризуют конструкцию ИУ, вектор-функция $x = x(t)$ характеризует состояние ИУ, функции $a = a(t)$ и $b = b(t)$ описывают деградацию ИУ при длительной эксплуатации (например, при эксплуатации в околоземном пространстве), вектор-функция $u = u(t)$ соответствует входному сигналу (*измерению*), а вектор-функция $y = y(t)$ соответствует выходному сигналу (*наблюдению*). В ММ (1) измерение и наблюдение имеют одинаковую размерность, но на практике размерность наблюдения может быть меньше.

Дополним ММ (1) начальным *условием Шоуолтера–Сидорова* [23, 24]

$$(2) \qquad \lim_{t\to 0+} \left[R^L_\mu(M)\right]^{p+1}(x(t) - x_0) = 0,$$

где $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ – *правая L-резольвента матрицы M*, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – некоторый вектор, а параметр p будет описан далее.

Главной частью рассматриваемой математической модели ИУ является функционал штрафа

$$(3) \qquad J(u) = \varepsilon \int_0^\tau ||y(t) - \widetilde{y}(t)||^2 dt + (1-\varepsilon)\int_0^\tau \langle Cx(t), x(t)\rangle dt.$$

Здесь $||\cdot||$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – евклидовы норма и скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, $x(t)$ и $y(t)$ линейно зависят от $u(t)$. Отметим, что в отличие от предыдущих исследований задачи оптимального измерения [11–18] предлагается более простой вид функционала штрафа, что, с одной стороны, позволяет найти решение, а с другой – упрощает численный метод нахождения этого решения. Используя априорную информацию, в пространстве измерений $\mathfrak{U} = \{u \in L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n) : u^{(p)} \in L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n)\}$ выделим выпуклое и замкнутое подмножество $\mathfrak{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$, которое называется *множеством допустимых измерений*. Минимизируя первое слагаемое функционала (3) на множестве $\mathfrak{U}_\partial$, будем добиваться минимизации воздействия инерционности ИУ на измерение. А минимизируя второе слагаемое, будем снижать воздействие резонансов в цепях ИУ. Заметим, что квадратная симметрическая матрица C порядка n характеризует взаимовлияние резонансов в цепях ИУ. Константа $\varepsilon \in (0,1)$ выбирается таким образом, чтобы учесть предпочтения исследователя. Наконец, $\widetilde{y}(t)$ – наблюдение, полученное в результате вычислительного или натурного эксперимента. Итак, задача поиска *оптимального измерения* $v(t)$ заключается в поиске минимума

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u). \tag{4}$$

Таким образом, математической моделью ИУ является *задача оптимального измерения* (1)–(4). Исследование этой задачи можно представить тремя частями. В первой части создается математическая модель ИУ, ставится задача нахождения оптимального измерения и приводятся условия, при которых существует единственное решение данной задачи. Именно такое решение называется *точным оптимальным измерением*. Во второй части конструируются алгоритмы построения приближений решения задачи оптимального измерения и формулируются условия, при которых построенная последовательность приближений решения сходится к точному решению. И наконец, в третьей части исследования задачи оптимального измерения на основе алгоритмов второй части создаются программы, проводятся процедуры проверки для отладки этих программ и ставятся вычислительные эксперименты по восстановлению искаженного измерения, полученного в ходе эксперимента.

Основная цель данной статьи – описание второй части исследования задачи оптимального измерения. В статье построены приближения оптимального измерения и обоснована сходимость этих приближений к точному оптимальному измерению. Также статья содержит описание алгоритма нахождения приближений решения этой задачи. Отметим, что в отличие от более ранних работ [11–18] для поиска минимума в статье предлагается использовать метод градиентного спуска, что стало возможно благодаря упрощению вида функционала (3). По сути, в данной статье развиваются положения обзора [25].

Статья кроме введения и списка литературы состоит из трех частей. В первой из них приводятся теоретические результаты о существовании точного решения этой задачи, т.е. приводится описание первой части исследования задачи оптимального измерения на основе результатов [18]. Во второй части описываются приближения оптимального измерения и приводятся результаты о сходимости этих приближений решения к точному. В третьей части приводится описание численного алгоритма нахождения оптимального измерения, искаженного инерционностью, резонансами и деградацией измерительного устройства.

2. Точное оптимальное измерение

Пусть L и M – квадратные матрицы порядка n. Назовем матрицу M *регулярной относительно матрицы* L (коротко, L-регулярной), если существует число $\alpha\in\mathbb{C}$, такое что $\det(\alpha L-M)\neq 0$. Понятно, что число $\alpha\in\mathbb{C}$, такое что $\det(\alpha L-M)\neq 0$, существует, если $\det L\neq 0$. Однако внимательный анализ реальных ИУ [26, 27] показывает, что случай $\det L=0$ встречается довольно часто. Итак, пусть матрица M L-регулярна, тогда [28, гл. 12] существуют такие невырожденные матрицы A и B порядка n, что $BLA = = \operatorname{diag}\left\{\overset{0}{\mathfrak{J}}_{p_1},\overset{0}{\mathfrak{J}}_{p_2},\ldots,\overset{0}{\mathfrak{J}}_{p_l},\mathbb{I}_{n-m}\right\}$, $BMA=\operatorname{diag}\{\mathbb{I}_m,S\}$, где $\overset{0}{\mathfrak{J}}_{p_k}$ – жорданова клетка порядка p_k с нулями на главной диагонали, $\sum_{k=1}^{l}p_k=m$, $\mathbb{I}_k$ – единичная матрица порядка k, S – квадратная матрица порядка $n-m$. Возьмем число $p=\max\{p_1,p_2,\ldots,p_l\}$ и назовем L-регулярную матрицу M (L,p)-*регулярной*.

Фиксируем число $\tau\in\mathbb{R}_+$ и введем в рассмотрение *пространство измерений* $\mathfrak{U}=\{u\in L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n):u^{(p)}\in L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n)\}$, *пространство наблюдений* $\mathfrak{Y}=L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n)$ и *пространство состояний* $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}$.

Теорема 1. *Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p\in\{0,1,\ldots,n\}$. Тогда для любых $x_0\in\mathbb{R}^n$, $a\in C([0,\tau];\mathbb{R}_+)\cap C^p((0,\tau);\mathbb{R}_+)$, $b\in C([0,\tau];\mathbb{R}_+)$ и $u\in\mathfrak{U}$, существует единственное решение $y\in\mathfrak{Y}$ задачи* (1), (2), *которое имеет вид*

$$y(t)=b(t)Nx(t)+Fu(t), \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} x(t)=X(t,0)x_0+\int\limits_0^t X(t,s)L_1^{-1}QDu(s)ds+\\ +\sum_{q=0}^{p}H^qM_0^{-1}(Q-\mathbb{I}_n)\left(\frac{1}{a(t)}\frac{d}{dt}\right)^q\frac{Du(t)}{a(t)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $X(t,s)=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\left(L-\frac{1}{k}\int_0^t a(r)dr\,M\right)^{-1}L\right)^k$ – *вырожденный поток* [15], т.е. $X(t,r)X(r,s)=X(t,s)$ при всех $t,r,s\in\mathbb{R}$ таких, что $t\geqslant r\geqslant s$, причем $X(t,t)\neq\mathbb{I}_n$ при всех $t\in\mathbb{R}$;

$$P=\lim_{k\to\infty}\left(k\,(kL-M)^{-1}L\right)^k,\qquad Q=\lim_{k\to\infty}\left(kL\,(kL-M)^{-1}\right)^k,$$

$$M_0^{-1}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}L-M\right)^{-1}(\mathbb{I}_n-Q),\qquad L_0=L(\mathbb{I}_n-P),$$

$$H=M_0^{-1}L_0,\qquad L_1^{-1}=\lim_{k\to\infty}\left(L-\frac{1}{k}M\right)^{-1}Q.$$

Утверждение теоремы 1 следует из аналогичного утверждения из [29] с учетом ослабления требований на пространства. Заметим, что (6), по сути, заменяет в системе (1) первое уравнение.

Теперь сформулируем теорему о существовании решения задачи оптимального измерения (1)–(4).

Теорема 2. Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \{0,1,\dots,n\}$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{y} \in \mathfrak{Y}$, $a \in C([0,\tau];\mathbb{R}_+) \cap C^p((0,\tau);\mathbb{R}_+)$ и $b \in C([0,\tau];\mathbb{R}_+)$ существует единственное измерение $v \in \mathfrak{U}_\partial$, для которого выполнено (4).

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству соответствующего утверждения из [29] с учетом корректировки вида функционала (5).

Вектор-функцию $v = v(t)$, существующую по теореме 2, будем в дальнейшем называть *точным оптимальным измерением.* Строго говоря, после замены $u(t) = v(t)$ формула (6) уже не будет решением системы уравнений

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + Dv(t)$$

даже в обобщенном смысле. Однако при подстановке (6) в (5) и замене $u(t) = v(t)$ получим вектор-функцию $y = y(t)$, которую назовем *точным оптимальным наблюдением.* Заметим, что вектор-функции $v = v(t)$ и $y = y(t)$, полученные в результате применения теоремы 1 и теоремы 2, являются *виртуальным точным оптимальным измерением* и *виртуальным точным оптимальным наблюдением.* Алгоритмы конструктивного построения v и y будут предложены ниже.

Однако прежде чем перейти к построению алгоритмов, сделаем пару замечаний, которые упростят решение данной задачи.

Замечание 1. Без потери общности можно считать $\det M \neq 0$. Действительно, сделаем в (1) замену $x(t) = \exp\left(\alpha \int_0^t a(\tau)d\tau\right) z(t)$ и получим

$$L\dot{z} = a(t)(M - \alpha L)z(t) + Dv(t),$$
$$w(t) = b(t)Nz(t) + Fv(t),$$

где $v(t) = \exp\left(-\alpha \int_0^t a(\tau)d\tau\right) u(t)$ и $w(t) = \exp\left(-\alpha \int_0^t a(\tau)d\tau\right) y(t)$. Переобозначив $M - \alpha L$ через M, получим требуемое.

Замечание 2. Вместо решения (6), где x_0 не зависит от функции управления, будем рассматривать решение в виде

$$x(t) = \int\limits_0^t X(t,s)L_1^{-1}QDu(s)ds + \sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(Q - \mathbb{I}_n)\left(\frac{1}{a(t)}\frac{d}{dt}\right)^q \frac{Du(t)}{a(t)}, \tag{7}$$

которое получится, если в (2) взять $x_0 \in \ker[R_\mu^L(M)]^p = \ker X(t,0)$. Подставив (7) вместо (6) в (5) и (3), можем найти (4).

Теорема 3. Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \{0,1,\dots,n\}$, причем $\det M \neq 0$. *Тогда для любых $x_0 \in \ker[R_\mu^L(M)]^p$, $\widetilde{y} \in \mathfrak{Y}$, $a \in C([0,\tau];\mathbb{R}_+) \cap$ $\cap\, C^p((0,\tau);\mathbb{R}_+)$ и $b \in C([0,\tau];\mathbb{R}_+)$ существует единственное $v \in \mathfrak{U}_\partial$, для которого выполнено* (4).

3. Приближения оптимальные измерения

Пусть L, M, D, N и F – квадратные матрицы порядка n, причем матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$, и $\det M \neq 0$. Пусть вектор $x_0 \in \ker[R_\mu^L(M)]^p$, причем заметим, что $\ker[R_\mu^L(M)]^p$ не зависит от $\mu \in \mathbb{C}$, таких что $\det(\mu L - M) \neq 0$ [15]. Приступим к описанию приближений оптимального измерения.

3.1. Первое приближение оптимального измерения

Пространство $\mathfrak{U}$ представим в виде

$$\mathfrak{U} = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathfrak{U}_j,$$

где

$$\mathfrak{U}_j = \Big\{ u^j \in L_2((0,\tau); \mathbb{R}) : (u^j)^{(p)} \in L_2((0,\tau); \mathbb{R}) \Big\}.$$

По построению пространство $\mathfrak{U}_j$ – гильбертово и сепарабельно, $j = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через $\{\varphi_i\}$ ортонормированную последовательность базисных векторов. Понятно, что эта последовательность может быть выбрана в каждом $\mathfrak{U}_j$ одинаковой. Построим конечномерный линеал

$$\mathfrak{U}_j^k = \operatorname{span}\{\varphi_i : i = 1, 2, \ldots, k\}$$

и подпространство

$$\mathfrak{U}^k = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathfrak{U}_j^k.$$

Найдем подмножество $\mathfrak{U}_\partial^k = \mathfrak{U}^k \cap \mathfrak{U}_\partial$. Подмножество $\mathfrak{U}_\partial^k \subset \mathfrak{U}_\partial$ может оказаться пустым, однако в любом случае оно замкнуто и выпукло. Понятно, что все члены последовательности $\{\mathfrak{U}_\partial^k\}$ не могут оказаться пустыми множествами из-за очевидной монотонности этой последовательности и того, что

$$\lim_{k \to \infty} \mathfrak{U}_\partial^k = \mathfrak{U}_\partial.$$

Возьмем вектор $u_k \in \mathfrak{U}_\partial^k$ и построим вектор-функцию

$$x_k(t) = \int_0^t X(t,s) L_1^{-1} Q u_k(s) ds + \sum_{q=0}^{p} H^q M^{-1} (Q - \mathbb{I}_n) \left(\frac{1}{a(t)} \frac{d}{dt} \right)^q \frac{D u_k(t)}{a(t)}, \tag{8}$$

$$y_k(t) = b(t) N x_k(t) + F u_k(t). \tag{9}$$

Теперь подставим x_k и y_k в функционал штрафа J и найдем его минимум

$$J(v_k) = \min_{u_k \in \mathfrak{U}_\partial^k} J(u_k). \tag{10}$$

Если $\mathfrak{U}_\partial^k \neq \emptyset$, то такой вектор v_k существует и единственен в силу теоремы 3. Если окажется $\mathfrak{U}_\partial^k = \emptyset$, то число k необходимо увеличить, чтобы получить $\mathfrak{U}_\partial^k \neq \emptyset$ (см. рассуждения выше). Для того чтобы гарантировать $\mathfrak{U}_\partial^k \neq \emptyset$ для любого $k \in \mathbb{N}$, далее будем требовать выполнения условия $0 \in \mathfrak{U}_\partial$. Действительно, так как $0 \in \mathfrak{U}^k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то при выполнении этого условия $0 \in \mathfrak{U}_\partial^k$, т.е. $\mathfrak{U}_\partial^k \neq \emptyset$. Это требование в дальнейшем возможно будет ослаблено.

Вектор $v_k \in \mathfrak{U}_\partial^k$ будем называть *первым приближением оптимального измерения.*

Лемма 1. Пусть матрица M такая, что $\det M \neq 0$, (L,p)-регулярна, $p \in \{0,1,\ldots,n\}$. Пусть $0 \in \mathfrak{U}_\partial$, вектор-функция $\widetilde{y} \in \mathfrak{Y}$, функции $a \in \in C([0,\tau];\mathbb{R}_+) \cap C^p((0,\tau);\mathbb{R}_+)$ и $b \in C([0,\tau];\mathbb{R}_+)$, а вектор $x_0 \in \ker[R_\mu^L(M)]^p$. Тогда $\lim_{k\to\infty} v_k = v$.

Доказательство. По построению набор множеств $\{\mathfrak{U}_\partial^k\}$ таков, что $\mathfrak{U}_\partial^k \subset \mathfrak{U}_\partial^{k+1}$, т.е. является исчерпанием множества допустимых измерений $\mathfrak{U}_\partial$. Тогда решения v_k и v_{k+1} задачи (8)–(10), найденные на множествах $\mathfrak{U}_\partial^k$ и $\mathfrak{U}_\partial^{k+1}$, таковы, что выполнено неравенство

$$J(v_k) \geqslant J(v_{k+1}).$$

Следовательно, $\{J(v_k):\ v_k \in \mathfrak{U}_\partial\}$ образуют невозрастающую ограниченную последовательность, и в силу того что функционал (3) непрерывный и квадратичный, получаем утверждение леммы 1.

3.2. Второе приближение оптимального измерения

Начнем построение следующего приближения решения. В условиях леммы 1 можем написать

$$P = \lim_{l\to\infty}\Big(l(lL-M)^{-1}L\Big)^l, \qquad Q = \lim_{l\to\infty}\Big(lL(lL-M)^{-1}\Big)^l,$$
$$L_1^{-1} = \lim_{l\to\infty}\left(L - \frac{1}{l}M\right)^{-1} Q, \qquad H = M^{-1}L(\mathbb{I}_n - P).$$

Отсюда

$$x_{kl}(t) = \tag{11}$$
$$= \int_0^t \left(\left(L - \frac{1}{l}\int_s^t a(r)dr M\right)^{-1} L\right)^l \left(L - \frac{1}{l}M\right)^{-1} \left(lL(lL-M)^{-1}\right)^l u_k(s)ds +$$
$$+ \sum_{q=0}^p H^q M^{-1}\left(\left(lL(lL-M)^{-1}\right)^l - \mathbb{I}_n\right)\left(\frac{1}{a(t)}\frac{d}{dt}\right)^q \frac{Du_k(t)}{a(t)},$$

$$y_{kl}(t) = b(t)Nx_{kl}(t) + Fu_k(t). \tag{12}$$

Подставив (11) и (12) в функционал штрафа (3), построим функционал $J_l(u_k)$. Минимизируя этот функционал на множестве $\mathfrak{U}_\partial^k$, получим

$$J(v_{kl}) = \min_{u_k \in \mathfrak{U}_\partial^k} J_l(u_k).$$

Вектор $v_{kl} \in \mathfrak{U}_\partial^k$ будем называть *вторым приближением оптимального измерения.*

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда* $\lim\limits_{l\to\infty} v_{kl} = v_k$.

Доказательство. В силу теоремы 1 и того, как задаются матрицы в решении (6), для функции (11) справедлива оценка

$$\exists C > 0 \qquad \forall t \in [0,\tau] \qquad \|x_{kl}(t) - x_k(t)\| \leqslant \frac{C}{l},$$

откуда для x_{kl} из (11) и y_{kl} из (12) получим, что

$$\lim_{l\to\infty} x_{kl} = x_k \qquad \text{и} \qquad \lim_{l\to\infty} y_{kl} = y_k.$$

И в силу непрерывности и квадратичности функционала (3) получим $\lim\limits_{l\to\infty} v_{kl} = v_k$. Лемма 2 доказана.

3.3. Третье приближение оптимального измерения

В заключительной части для построения третьего приближения оптимального измерения опишем способы вычисления первого слагаемого в (11) (интеграла) и второго слагаемого (суммы производных). Для вычисления интеграла воспользуемся схемой Гаусса, поделив отрезок $[0,\tau]$ на m частей. При этом не исключается возможность найти интеграл в явном виде. Во втором слагаемом заменим производные разностными формулами, причем не исключается возможность, что производные посчитаются в явном виде. После чего вместо формул (11) и (12) получаем приближенные значения векторов $x_{klm} = x_{klm}(t)$ и $y_{klm} = y_{klm}(t)$. Подставив их в функционал штрафа и минимизируя его на множестве $\mathfrak{U}_\partial^k$, получим

$$J(v_{klm}) = \min_{u_k \in \mathfrak{U}_\partial^k} J_{lm}(u_k). \tag{13}$$

Вектор $v_{klm} \in \mathfrak{U}_\partial^k$ будем называть *третьим приближением оптимального измерения.*

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда* $\lim\limits_{m\to\infty} v_{klm} = v_{kl}$.

Доказательство. Воспользуемся квадратурной формулой Гаусса для вычисления интегральных слагаемых и формулой численного дифференцирования для вычисления слагаемого с производными в x_{kl} из (11). Для вычисления $J_{lm}(u_k)$ зафиксируем количество узлов m формулы Гаусса, вычислим узлы τ_j и веса w_j для этой формулы на отрезке $[0,\tau]$ и получим

$$J_{lm}(u_k) = \frac{\tau}{2}\sum_{j=0}^{m}\Big[\varepsilon\|y_{klm}(\tau_j) - \widetilde{y}(\tau_j)\|^2 + (1-\varepsilon)\left\langle Cx_{klm}(\tau_j), x_{klm}(\tau_j)\right\rangle\Big]w_j. \tag{14}$$

Здесь $y_{klm}(\tau_j)$ получено после подстановки вместо x_{kl} в (12) вектора

$$
(15)\quad x_{klm}(\tau_j) = \frac{\tau_j}{2}\times
$$

$$
\times \sum_{\kappa=0}^{j}\left[\left(\left(L - \frac{\tau_j-\tau_\kappa}{2l}\sum_{r=0}^{j-\kappa} a(s_r)\varpi_r M\right)^{-1} L\right)^{l}\left(L-\frac{1}{l}M\right)^{-1}\left(lL(lL-M)^{-1}\right)^{l} u_k(\tau_\kappa)\right]\times
$$

$$
\times\, w_\kappa + \sum_{q=0}^{p} H^q M^{-1}\left(\left(lL\,(lL-M)^{-1}\right)^{l} - \mathbb{I}_n\right)\left(\frac{m}{\tau}\right)^{q}\sum_{\iota=-r}^{\nu} d_{q\iota}A_q\left(\tau_j + \iota\frac{\tau}{m}\right),
$$

где s_r и ϖ_r $(r = 0,\ldots, j-\kappa)$ – узлы и веса квадратурной формулы Гаусса на отрезке $[\tau_\kappa, \tau_j]$, $d_{q\iota}$ – коэффициенты формулы численного дифференцирования порядка точности $\left(\frac{\tau}{m}\right)^{\widetilde{r}}$ $(r \leqslant \iota \leqslant \nu,\ r+\nu+1 = q+\widetilde{r})$, а значения вектор-функции $A_q : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$ специальным образом строятся по значениям функций $a(t)$ и $Du_k(t)$.

Сходимость $x_{klm} \to x_{kl}$ при $m \to \infty$ следует из сходимости формулы Гаусса и точности формулы численного дифференцирования. Откуда, аналогично рассуждениям в доказательствах лемм 1 и 2, получаем, что $\lim\limits_{m\to\infty} v_{klm} = v_{kl}$. Лемма 3 доказана.

Наконец, из лемм 1, 2 и 3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда*

$$
\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\lim_{m\to\infty} v_{klm} = v.
$$

4. Алгоритм нахождения приближения оптимального измерения

Опишем алгоритм численного нахождения приближения оптимального измерения. Для этого в качестве конечномерных пространств $\mathfrak{U}^k$ возьмем пространства вектор-многочленов $u_k = u_k(t)$, имеющих вид

$$
(16)\qquad u_k(t) = \mathrm{col}\left(\sum_{i=0}^{k} c_{1i}t^i, \sum_{i=0}^{k} c_{2i}t^i, \ldots, \sum_{j=0}^{k} c_{ni}t^i\right).
$$

Определим множество $\mathfrak{U}^k_\partial$ с помощью условия $\|u_k\| \leqslant R$ при некотором $R > 0$.

Сам алгоритм численного нахождения приближения оптимального измерения состоит из семи этапов, последний из которых состоит в минимизации методом градиентного спуска.

Этап 1. Ввод начальных данных: размерности модели n, матриц L, M, D, N и F, функций $a(t)$ и $b(t)$, длины отрезка интегрирования τ, параметра ε, определяющего приоритеты оптимизации, вектор-функции наблюдения $\widetilde{y}(t)$, старшего порядка k вектор-многочленов (16), константы R, определяющей $\mathfrak{U}^k_\partial$, точности вычислений δ.

Этап 2. Проверка условия $\det M \neq 0$ при заданной точности δ. Если это условие не выполнено, то выбрать α так, чтобы $\det(M - \alpha L) \neq 0$, провести замену из замечания 1 и продолжить выполнение алгоритма.

Этап 3. Найти порядок полюса p в бесконечно удаленной точке для матриц-функции $(\mu L - M)^{-1}$.

Этап 4. Найти значение l, для которого можно вычислять второе приближение оптимального управления: $l = \max\{l_1, l_2, p+1\}$, где l_1, l_2 определяются следующим образом:

$$l_1 = \frac{1}{d}\sum_{i=0}^{q} |d_i| + 1, \qquad l_2 = \frac{1}{dp^p}\sum_{i=0}^{q} |d_i|(p+1)^{n-1} + 1,$$

где $d = \max\left\{1,\ \sum\limits_{i=0}^{q} |d_i|\right\}$, а d_i – коэффициенты полинома $\det(\mu L - M)$ и d_q – его старший ненулевой коэффициент.

Этап 5. Задав количество узлов m квадратурной формулы Гаусса, найти узлы τ_j и веса w_j на отрезке $[0, \tau]$, а также узлы s_r и веса ϖ_r формулы Гаусса на отрезке $[\tau_\kappa, \tau_j]$. Вычислить значения $a(s_r)$, $\widetilde{y}(\tau_j)$, а также коэффициенты численного дифференцирования $d_{q\iota}$ и значения $a(\tau_j + \iota\frac{\tau}{m})$ и $Du_k(\tau_j + \iota\frac{\tau}{m})$.

Этап 6. В качестве начальных значений $c_{ji}^{(0)}$ возьмем нулевые значения и для них вычислим x_{klm} по формуле (15), y_{klm}, подставив x_{klm} вместо x_{kl} в (12), и $J_{lm}(u_k)$ по формуле (14).

Этап 7. Решается задача (13), (14) с u_k из (16) относительно коэффициентов c_{ji} как задача выпуклого программирования на множестве $\mathfrak{U}_\partial^k$. Для решения этой задачи будем использовать алгоритм скорейшего градиентного спуска. Распишем его по шагам.

Шаг 1. Задать относительный шаг дифференцирования Δ и положить счетчик числа итераций $\ell = 0$.

Шаг 2. Определить направление градиента по коэффициентам c_{ji} штрафного функционала $J_{lm}(u_k) = J(c_{10}, \ldots, c_{1k}, c_{20}, \ldots, c_{2k}, c_{30}, \ldots, c_{nk})$ по формуле

$$\nabla J(\overline{c^{(\ell)}}) = \left(\frac{\partial J(\overline{c^{(\ell)}})}{\partial c_{10}}, \ldots, \frac{\partial J(\overline{c^{(\ell)}})}{\partial c_{1k}}, \frac{\partial J(\overline{c^{(\ell)}})}{\partial c_{20}}, \ldots, \frac{\partial J(\overline{c^{(\ell)}})}{\partial c_{nk}}\right)$$

в точке $\overline{c^{(\ell)}} = \left(c_{10}^{(\ell)}, \ldots, c_{1k}^{(\ell)}, c_{20}^{(\ell)}, \ldots, c_{2k}^{(\ell)}, c_{30}^{(\ell)}, \ldots, c_{nk}^{(\ell)}\right)$. Для нахождения значений частных производных $\frac{\partial J(\overline{c^{(\ell)}})}{\partial c_{ji}}$ воспользуемся стандартной разностной формулой с заданным шагом Δ.

Шаг 3. Проверить условие продолжения поиска

$$\left\|\nabla J(\overline{c^{(\ell)}})\right\| > \delta \qquad \text{и} \qquad u_k \in \mathfrak{U}_\partial^k.$$

Если условие нарушено, то расчет окончен и $\overline{c^*} = \overline{c^{(\ell)}}$, иначе перейти к следующему шагу.

Шаг 4. Найти шаг h_ℓ по формуле

$$h_\ell = \frac{\Big(\nabla J(\overline{c^{(\ell)}}), \nabla J(\overline{c^{(\ell)}})\Big)}{\Big(H_J(\overline{c^{(\ell)}})\nabla J(\overline{c^{(\ell)}}), \nabla J(\overline{c^{(\ell)}})\Big)},$$

используя результаты вычислений шага 2 и стандартные разностные формулы с заданным относительным шагом дифференцирования Δ для вычислений элементов матрицы Гессе $H_J(\overline{c^{(\ell)}})$ в точке $\overline{c^{(\ell)}}$.

Шаг 5. Определить координаты следующей точки

$$\overline{c^{(\ell+1)}} = \overline{c^{(\ell)}} - h_\ell \nabla J(\overline{c^{(\ell)}}),$$

положить $\ell = \ell + 1$ и перейти к шагу 2.

В результате приближение оптимального измерения, найденное численно, будет иметь вид

$$v_{klm}(t) = \mathrm{col}\left(\sum_{i=0}^{k} c_{1i}^* t^i, \sum_{i=0}^{k} c_{2i}^* t^i, \ldots, \sum_{j=0}^{k} c_{ni}^* t^i\right).$$

5. Заключение

В статье описана математическая модель измерительного устройства, которая позволяет находить измерение по наблюдению. При этом данная модель учитывает помехи, воздействующие на ИУ разного вида, а именно: инерционность ИУ, резонансы в его цепях, а также воздействие деградации ИУ в процессе его эксплуатации. В статье представлен и обоснован алгоритм численного нахождения приближений оптимального измерения. В дальнейшем планируется выполнение третьей части исследования задачи оптимального измерения, т.е. реализация данного алгоритма в виде программы и проведение вычислительных экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Грановский В.А.* Динамические измерения. Основы метрологического обеспечения. Л.: Энергоатомиздат, 1984.
2. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
3. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
4. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
5. *Шестаков А.Л.* Модальный синтез измерительного преобразователя // Проблемы управления и информатики. 1995. № 4. С. 67–75.
6. *Шестаков А.Л.* Методы теории автоматического управления в динамических измерениях. Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2013.

7. *Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч.* Пространство состояний в теории управления. М.: Наука, 1970.
8. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
9. *Кузовков Н.Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976.
10. *Шестаков А.Л., Свиридюк Г.А.* Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2010. № 16 (192). С. 116–120.
11. *Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V.* The Theory of Optimal Measurements // J. Comp. Eng. Math. 2014. V. 1. No. 1. P. 3–15.
12. *Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V.* Optimal Measurements // XXI IMEKO World Congr. "Measurement in Research and Industry". 2015. ID 116100.
13. *Shestakov A.L., Sagadeeva M.A., Manakova N.A., Keller A.V., Zagrebina S.A., Zamyshlyaeva A.A., Sviridyuk G.A.* Optimal Dynamic Measurements in Presence of the Random Interference // J. Phys.: Conf. Series. 2018. V. 1065. No. 21. ID 212012.
14. *Keller A.V.* On the Computational Efficiency of the Algorithm of the Numerical Solution of Optimal Control Problems for Models of Leontieff Type // J. Comp. Eng. Math. 2015. V. 2. No. 2. P. 39–59.
15. *Keller A.V., Sagadeeva M.A.* Degenerate Matrix Groups and Degenerate Matrix Flows in Solving the Optimal Control Problem for Dynamic Balance Models of the Economy // Semigroups of Operators – Theory and Applications. SOTA 2018. Springer Proc. in Mathematics & Statistics. V. 325. Cham: Springer, 2020. P. 263–277.
16. *Шестаков А.Л., Келлер А.В., Назарова Е.И.* Численное решение задачи оптимального измерения // АиТ. 2012. № 1. С. 107–115.

    Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical Solution of the Optimal Measurement Problem // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 1. P. 97–104.
17. *Keller A.V., Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyakov Y.V.* The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals // Semigroups of Operators – Theory and Applications. SOTA 2013. Springer Proc. in Mathematics & Statistics. V. 113. Cham: Springer, 2015. P. 183–195.
18. *Sagadeeva M.A.* Mathematical Bases of Optimal Measurements Theory in Nonstationary Case // J. Comp. Eng. Math. 2016. V. 3. No. 3. P. 19–32.
19. *Леонтьев В.В.* Экономические эссе. Теории, исследования, факты, политика. М.: Политиздат, 1990.
20. *Бояринцев Ю.Е.* Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск: Наука, 2000.
21. *März R.* On Initial Value Problems in Differential-algebraic Equations and Their Numerical Treatment // Computing. 1985. V. 35. No. 1. P. 13–37.
22. *Белов А.А., Курдюков А.П.* Дескрипторные системы и задачи управления. М.: Физматлит, 2015.
23. *Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyakov Y.V.* Dynamical Measurements in the View of the Group Operators Theory // Semigroups of Operators – Theory and Applications. SOTA 2013. Springer Proc. in Mathematics & Statistics. V. 113. Cham: Springer, 2015. P. 273–286.
24. *Келлер А.В., Загребина С.А.* Некоторые обобщения задачи Шоуолтера – Сидорова для моделей соболевского типа // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2015. Т. 8. № 2. С. 5–23.

25. *Shestakov A.L., Keller A.V., Zamyshlyaeva A.A., Manakova N.A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A.* The Optimal Measurements Theory as a New Paradigm in the Metrology // J. Comp. Eng. Math. 2020. V. 7. No. 1. P. 3–23.
26. *Khudyakov Yu.V.* On Mathematical Modeling of the Measurement Transducers // J. Comp. Eng. Math. 2016. V. 3. No. 3. P. 68–73.
27. *Khudyakov Yu.V.* On Adequacy of the Mathematical Model of the Optimal Dynamic Measurement // J. Comp. Eng. Math. 2017. V. 4. No. 2. P. 14–25.
28. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2004.
29. *Сагадеева М.А.* Построение наблюдения для задачи оптимального динамического измерения по искаженным данным // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2019. Т. 12. № 2. С. 82–96.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 30.07.2020

После доработки 03.09.2020

Принята к публикации 10.09.2020