

© 2020 г. А.Ю. ГОЛУБИН, канд. физ.-мат. наук (e-mail agolubin@hse.ru)
(Национальный исследовательский университет

“Высшая школа экономики”, Москва;

Центр информационных технологий в проектировании РАН,
Одинцово, Московская обл.),

В.Н. ГРИДИН, д-р техн. наук (e-mail info@ditc.ras.ru)

(Центр информационных технологий в проектировании РАН,
Одинцово, Московская обл.)

О ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ СТРАХОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ РИСКА С ПОШАГОВЫМИ ВЕРОЯТНОСТНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПРИРАЩЕНИЯ ПРОЦЕССА¹

Исследована проблема построения оптимальной стратегии страхования в новой многошаговой модели страхования, где введены пошаговые вероятностные ограничения (Value at Risk (VaR) ограничения) на капитал страховщика, т.е. вероятностные ограничения на приращения капитала страховщика в течение одного шага. В качестве целевого функционала используется математическое ожидание финального капитала страховщика. Суммарный ущерб страховщика на каждом шаге моделируется нормальным распределением с параметрами, зависящими от выбранной функции дележа риска. В отличие от традиционных динамических моделей оптимизации стратегий страхования, предлагаемый подход, учитывающий пошаговые ограничения, позволяет свести построение функций Беллмана — а значит, и нахождение оптимальных дележей риска — просто к решению последовательности статических задач оптимизации страхования. Доказано, что оптимальными дележами риска являются так называемые stop loss страхования.

Ключевые слова: оптимальное страхование, вероятностное ограничение, процесс риска.

DOI: 10.31857/S000523102009007X

1. Введение

Проблемы оптимального управления риском в динамических моделях страхования, основанных на процессе риска Крамера–Лундберга, изучались в [1–7]. В [2] исследована задача минимизации вероятности разорения страховой компании выбором перестрахования в классе так называемых stop loss дележей, применяемых к риску каждого отдельного страхователя. Публикация [3] посвящена решению той же задачи, но в случае, когда страховщику доступны различные виды перестрахования и инвестирование в безрисковый и рисковый активы. Процесс риска, возникающий как диффузионная аппроксимация процесса Крамера–Лундберга, изучался в [3]. Управляемый процесс

¹ Работа поддержана Госзаданием № 0071-2019-0001.

риска на бесконечном временном интервале с одновременным выбором стратегий страхования и перестрахования индивидуальных ущербов рассмотрен в [4, 5] при дополнительных ограничениях на допустимые стратегии. Задача с иным критерием оптимальности, а именно с максимизируемым коэффициентом Лундберга в оценке вероятности разорения, решена в [6] для процесса риска с дискретным временем и целого класса принципов начисления премии перестраховщику. В [7] критерием оптимальности для процесса риска на конечном интервале был функционал полезности типа Марковица. Получены дифференциальные уравнения для определения оптимальных стратегий перестрахования и инвестирования с использованием так называемого time-consistent подхода, который позволяет получить уравнение оптимальности беллмановского типа для этого типа критериев оптимальности. С точки зрения выбора целевого функционала близкие по постановке задачи изучались в [5, 7]. Но в [7] был рассмотрен процесс риска с непрерывным временем (и была предусмотрена возможность инвестирования текущего капитала страховщика), что привело к необходимости решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана и отсутствию явного вида оптимальных стратегий. В обоих случаях в отличие от предлагаемой статьи предусматривалось только перестрахование и не учитывались вероятностные ограничения.

Популярным направлением исследований в последние годы стал поиск оптимальных дележей риска в статических моделях при так называемом “Value at Risk” (VaR) ограничении, которое означает установление нижней границы на вероятность падения капитала ниже заданного уровня (см., например, [8, 9]). Одношаговая задача с целевым функционалом типа Марковица и VaR ограничением была исследована в [10] (там же приведена библиография по оптимизации дележа риска в страховании при VaR ограничениях).

Главным отличием данной статьи от предыдущих исследований, известных авторам, является то, что предложена новая модификация управляемого процесса риска с дискретным временем, где предусмотрены пошаговые VaR ограничения на приращения капитала страховщика. Такой подход позволяет учесть естественное желание страховщика не иметь больших потерь на каждом шаге с заданной вероятностью α , с другой стороны, позволяет свести динамическую задачу оптимального управления процессом риска к решению последовательности относительно простых одношаговых оптимизационных задач. Анализ таких задач основан на результатах [10]. Показано, что на каждом шаге оптимальным с точки зрения страховщика оказывается так называемое stop loss страхование. Приведен численный пример, иллюстрирующий доказанные результаты в случае экспоненциального распределения страховой выплаты.

2. Предварительные результаты

В этом разделе рассматривается одношаговая задача выбора дележа страхования между страховщиком и страхователями при VaR ограничении, где максимизируемым функционалом является средний финальный капитал страховщика. Решение такой задачи будет использоваться в дальнейшем при анализе многошаговой задачи страхования. Результаты, приведенные в этом

разделе, есть просто модификация утверждений, доказанных в [10], на случай отсутствия дополнительного ограничения сверху с вероятностью единица на риск страховщика и при использовании среднего значения финального капитала вместо целевого функционала типа Марковица.

Рассматривается модель страхового рынка, состоящего из страховщика и n клиентов. Потенциальные ущербы (риски) клиентов — независимые неотрицательные случайные величины X_j , $j = 1 \dots, n$, определенные на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. В дальнейшем эта группа клиентов предполагается однородной: все X_j имеют одинаковое распределение $F_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} P\{X_1 \leq x\}$, причем математическое ожидание X_1^2 конечно: $E X_1^2 < \infty$. Отметим характерную особенность функции распределения $F_1(x)$, а именно скачок в нуле: $F_1(0) \in (0, 1)$ — вероятность отсутствия страхового случая для клиента предполагается ненулевой и не равной единице. Страховщик выбирает функцию дележа страхования $I(x)$ из класса борелевских функций, определенных на $[0, \infty)$ и удовлетворяющих неравенствам $0 \leq I(x) \leq x$, которые означают, что возмещение не может быть отрицательным и не может превосходить величины ущерба. Случайная величина $I(X_j)$ есть возмещаемая j -му клиенту часть ущерба, а суммарный риск страховщика $X^I = \sum_{j=1}^n I(X_j)$.

Дополнительное ограничение на дележи $I(x)$, отражающие желание страховщика защититься от больших потерь, состоит в том, что вероятность превышения капитала страховщика $S^I \stackrel{\text{def}}{=} w + nP - X^I$ над заданным уровнем a удовлетворяет неравенству

$$(2.1) \quad P\{S^I \geq a\} \geq \beta.$$

Здесь w — собственный капитал страховщика, a — заданная константа, уровень доверия предполагается достаточно высоким $\beta \in (0,5; 1)$, а страховая премия P вычисляется по формуле среднего значения, известного в актуарной литературе (см., например, [1]): $P = (1 + \alpha)E I(X_1)$, где $\alpha > 0$ — заданный коэффициент нагрузки страховщика.

Максимизируемым функционалом является математическое ожидание финального капитала страховщика S^I . Таким образом, исследуемая задача имеет вид

$$(2.2) \quad J[I] \equiv ES^I \rightarrow \max$$

при ограничении $0 \leq I(x) \leq x$ и ограничении (2.1).

Считая численность группы страхователей n достаточно большой (не менее нескольких десятков) и $n(1 - F_1(0)) > 10$, применим достаточно широко используемую в актуарной математике нормальную модель для аппроксимации распределения суммарного риска $X^I = \sum_{j=1}^n I(X_j)$ (см., например, [1, 10]). Тогда ограничение (2.1) переписывается как

$$P\left\{\frac{S^I - ES^I}{\sigma(S^I)} \geq \frac{a - ES^I}{\sigma(S^I)}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{a - ES^I}{\sigma(S^I)}\right) \geq \beta,$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины, а $\sigma(S^I) = \sqrt{DS^I}$ — стандартное отклонение капитала страховщика. Последнее неравенство эквивалентно неравенству $ES^I - a - x_\beta^N \sigma(S^I) \geq 0$, здесь x_β^N — квантиль уровня β стандартного нормального распределения. В результате (2.2) преобразуется в задачу

$$(2.3) \quad J[I] \equiv w + \alpha n EI(X_1) \rightarrow \max \quad \text{при ограничении} \quad I \in A,$$

т.е.

$$(2.4) \quad 0 \leq I(x) \leq x$$

и

$$(2.5) \quad w + \alpha n EI(X_1) - a - x_\beta^N \sqrt{n} \sqrt{DI(X_1)} \geq 0.$$

Всюду далее будем использовать обозначения

$$\bar{F}_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - F_1(x) \quad \text{и} \quad I_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \wedge k, \quad \text{где} \quad x \wedge k = \min\{x, k\}.$$

Для дальнейшего анализа рассмотрим вспомогательную задачу максимизации функционала в левой части ограничения (2.5)

$$(2.6) \quad J_0[I] \equiv w + \alpha n EI(X_1) - a - x_\beta^N \sqrt{n} \sqrt{DI(X_1)} \rightarrow \max,$$

где максимум берется по множеству дележей $\{I : 0 \leq I(x) \leq x\}$. Выполнение условия регулярности Слейтера (см., например, [3, гл. 3, с. 119]) для задачи (2.3)–(2.5) гарантируется следующим утверждением.

Утверждение 1. Условие Слейтера выполнено, если

$$(2.7) \quad J_0[I^0] > 0 \quad \text{и} \quad \alpha \sqrt{n} - x_\beta^N \sqrt{F_1(0)/\bar{F}_1(0)} > 0,$$

где $I^0(x)$ есть *stop loss* страхование, $I^0(x) = x \wedge k^0$. Здесь k^0 — минимальный корень на промежутке $(0, \infty)$ уравнения

$$(2.8) \quad \psi(k) = 0,$$

функция

$$\psi(k) \stackrel{\text{def}}{=} x_\beta^N (EI_k(X_1) - k) / \sqrt{DI_k(X_1)} + \alpha \sqrt{n}.$$

Теорема 1. Пусть выполнено условие Слейтера (см. (2.7)), тогда задача (2.3)–(2.5) имеет единственное решение — stop loss страхование $I^(x) = x \wedge k^*$. Допустимый дележ $I^*(\cdot)$ оптимален в (2.3)–(2.5) тогда и только тогда, когда существует $\mu \geq 0$:*

$$(2.9) \quad \mu J_0[I^*] = 0,$$

$$(2.10) \quad I^*(x) = x \wedge k^*,$$

где

$$(2.11) \quad k^* = 0,$$

т.е. $I^*(X_1) = 0$ почти наверное (п.н.) при

$$(2.12) \quad (1 + \mu)\alpha\sqrt{n} - x_\beta^N \mu \sqrt{F_1(0)/\bar{F}_1(0)} \leq 0,$$

иначе $k^* > 0$ — минимальный корень уравнения

$$(2.13) \quad \phi(k) = 0,$$

где

$$\phi(k) \stackrel{\text{def}}{=} x_\beta^N \mu (EI_k(X_1) - k) / \sqrt{DI_k(X_1)} + (1 + \mu)\alpha\sqrt{n}.$$

Заметим, что условие (2.12) в теореме 1 является необходимым и достаточным условием отказа страховщика от сделки, т.е. его возмещение клиенту $I^*(X_1) = 0$ п.н.

3. Многошаговая задача страхования

Рассмотрим процесс риска с дискретным временем (см., например, [6]) на интервале $\{0, \dots, T\}$, где на каждом шаге $t = 0, \dots, T - 1$ страховщик заключает сделку с n клиентами однородной группы. Обозначая через Z_t капитал страховщика на шаге t , получаем уравнение динамики

$$(3.1) \quad Z_{t+1} = Z_t + n(1 + \alpha)EI^t(X_1^t) - \sum_{j=1}^n I^t(X_j^t), \quad Z_0 = w.$$

Здесь $(X_1^t, \dots, X_n^t)$, $t = 0, \dots, T - 1$, — независимые векторы ущербов клиентов с независимыми одинаково распределенными компонентами, имеющими функцию распределения $F_1^t(x)$. Дележ риска $I^t(x)$ на шаге t выбирается из множества

$$A_t = \left\{ I(\cdot) : 0 \leq I(x) \leq x, P\{Z_{t+1} \geq a^t + Z_t\} \geq \beta^t \right\}, \quad t = 0, \dots, T - 1.$$

Константы $a^t > 0$ и $\beta^t \in (0, 5; 1)$ обозначают соответственно заданную нижнюю границу допустимого приращения капитала и уровень доверия. Таким образом, VaR ограничения наложены не на значения процесса Z_t , а на его приращения на каждом шаге, обеспечивая “плавность” поведения процесса на всем интервале функционирования. Близкий подход был использован в [11], но для иной модели, где объектом изучения был процесс риска с непрерывным временем и возможностью инвестирования с пропорциональным страхованием рисков.

После применения нормальной аппроксимации для

$$n(1 + \alpha)EI^t(X_1^t) - \sum_{j=1}^n I^t(X_j^t)$$

имеем (см. (2.5), где сейчас $w = 0$)

$$(3.2) \quad A_t = \left\{ I(\cdot) : 0 \leq I(x) \leq x, \alpha n E I(X_1) - a^t - x_{\beta^t}^N \sqrt{n} \sqrt{D I(X_1)} \geq 0 \right\},$$

где $\alpha > 0$ и $x_{\beta^t}^N > 0$ — коэффициент нагрузки и квантиль уровня β^t стандартного нормального распределения.

В результате объектом исследования оказывается задача оптимального управления марковским процессом с дискретным временем

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max_{\mathcal{I} \in \mathcal{A}} E Z_T \\ \text{при ограничениях} \\ (14) \text{ и } I^t \in A_t, \quad t = 0, \dots, T-1. \end{array} \right.$$

Стратегией страхования является вектор-функция $\mathcal{I} = (I^0(\cdot), \dots, I^{T-1}(\cdot))$, а максимум берется по множеству $\mathcal{A}$ всех допустимых стратегий страхования, предсказуемых относительно естественной фильтрации процесса. Ограничимся рассмотрением класса марковских стратегий страхования, который (см., например, [12]) достаточен для поиска решения задачи (3.3).

Определим функции Беллмана $V_t(z) = \max_{\mathcal{I} \in \mathcal{A}} E Z_T$ для рассматриваемого управляемого процесса на интервале $[t; T]$ (точнее на множестве точек $\{t, \dots, T\}$) с начальным состоянием $Z_t = z$. Обозначим через

$$Y_t = n(1 + \alpha) E I^t(X_1^t) - \sum_{j=1}^n I^t(X_j^t)$$

приращение $Z_{t+1} - Z_t$, которое, в рамках нормальной модели, есть случайная величина с нормальным распределением и параметрами

$$\mu_I^t = n\alpha E I^t(X_1^t) \quad \text{и} \quad \sigma_I^t = \sqrt{n} \sqrt{D I^t(X_1^t)}.$$

Тогда

$$V_T(z) = z,$$

$$V_{T-1}(z) = \max_{I \in A_{T-1}} z + E Y_{T-1} = z + \max_{I \in A_{T-1}} G_{T-1}[I] = z + G_{T-1}[I_*^{T-1}],$$

$$V_{T-2}(z) = \max_{I \in A_{T-2}} z + E Y_{T-2} + G_{T-1}[I_*^{T-1}] = z + G_{T-1}[I_*^{T-1}] + G_{T-2}[I_*^{T-2}],$$

...

$$V_0(z) = \max_{I \in A_0} z + \sum_{t=1}^{T-1} G_t[I_*^t] + E Y_0 = z + \sum_{t=0}^{T-1} G_t[I_*^t],$$

где A_t — множество допустимых дележей страхования $I(x)$ на шаге t определено в (3.2). Отметим, что введенные выше функции

$$G_t[I] \stackrel{\text{def}}{=} E Y_I^t = n\alpha E I^t(X_1^t) \quad \text{и} \quad G_t[I_*^t] \stackrel{\text{def}}{=} \max_{I \in A_t} G_t[I], \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Следующая теорема устанавливает форму оптимальных дележей риска $I_*^t(x)$ на каждом шаге t и приводит условия оптимальности для параметров этих функций.

Теорема 2. Пусть для каждого набора входных параметров α, a^t, β^t и распределения $F^t(x)$, $t = 0, \dots, T-1$, выполнено условие (2.7) с $w = 0$. Тогда задача (3.3) имеет решение $\mathcal{I}_* = (I_*^0(x), \dots, I_*^{T-1}(x))$, где каждый дележ риска есть stop loss страхование, $I_*^t(x) = x \wedge k_*^t$, не зависящий от текущего значения z состояния процесса Z_t . Допустимый дележ $I_*^t(x) = x \wedge k_*^t$ оптимален тогда и только тогда, когда существует $\mu \geq 0$:

$$(3.4) \quad \mu J_0^t[I_*^t] = 0,$$

где выражение для $J_0^t[I]$ (2.6) с $w = 0$, $k_*^t > 0$ — минимальный корень уравнения

$$(3.5) \quad \phi_t(k) = 0,$$

где

$$\phi_t(k) \stackrel{\text{def}}{=} x_{\beta^t}^N \mu (E I_k(X_1^t) - k) / \sqrt{D I_k(X_1^t)} + (1 + \mu) \alpha \sqrt{n}.$$

Доказательство. Как было показано выше, вычисление оптимального дележа $I_*^t(x)$ на шаге t состоит в решении задачи максимизации

$$(3.6) \quad G_t[I] \equiv n(1 + \alpha) E I(X_1^t) - E \sum_{j=1}^n I(X_j^t) = n \alpha E I(X_1^t)$$

на множестве A_t , где нет зависимости от текущего состояния процесса $z = Z_t$. Применяя для каждой такой задачи теорему 1, в которой теперь $a^t > 0$ и, следовательно, случай $I_*^t(x) \equiv 0$ исключен, получаем требуемый результат. Теорема 2 доказана.

Согласно утверждению теоремы 2 оптимальной является так называемая “близорукая” стратегия, где на каждом шаге t максимизируется на множестве A_t среднее значение приращения капитала страховщика, которое не зависит от текущего значения капитала Z_t .

Замечание 1. В частном случае однородной модели, где параметры a^t, β^t и распределение ущерба клиента $F_1^t(x)$ не зависят от t , легко показать, что с вероятностью β финальный капитал превысит определенное значение s при использовании оптимальной стратегии. Действительно, финальный капитал

$$Z_T = w + T n (1 + \alpha) E I_*(X_1) - \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i=1}^n I_*(X_i^t)$$

имеет нормальное распределение со средним $w + T n \alpha E I_*(X_1)$ и дисперсией $T n D I_*(X_1)$. Неравенство $n \alpha E I_*(X_1) - x_{\beta}^N \sqrt{n} \sqrt{D I_*(X_1)} \geq a$ (см. (3.2)) эквивалентно

$$w + T n \alpha E I_*(X_1) - x_{\beta}^N \sqrt{T} \sqrt{n} \sqrt{D I_*(X_1)} \geq w + \sqrt{T} a + (T - \sqrt{T}) n \alpha E I_*(X_1).$$

Отсюда получаем требуемый результат

$$(3.7) \quad P\{Z_T \geq s\} \geq \beta,$$

где

$$s = w + \sqrt{T}a + (T - \sqrt{T})n\alpha EI_*(X_1).$$

4. Многошаговая задача страхования с учетом ограничений на приращения капитала

В этом разделе будет получен основной результат данной статьи, касающийся обобщения рассмотренной выше многошаговой задачи страхования. Именно: теперь страховщик может установить уровень “безопасности” $r \leq 0$ такой, что если на момент t выбора дележа риска I^t предыдущее приращение капитала $Z_t - Z_{t-1}$ превышает r , то (см. (3.2)) множество допустимых дележей есть

$$(4.1) \quad \begin{aligned} A_t^+ &= \left\{ I(\cdot) : 0 \leq I(x) \leq x, P\left\{ (1 + \alpha)nEI(X_1^t) - \sum_{i=1}^n I(X_i^t) \geq a_+^t \right\} \geq \beta_+^t \right\} = \\ &= \left\{ I(\cdot) : 0 \leq I(x) \leq x, \alpha nEI(X_1^t) - a_+^t - x_{\beta_+^t}^N \sqrt{n} \sqrt{DI(X_1^t)} \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Если же $Z_t - Z_{t-1} \leq r$, то это не означает “банкротства”, но на шаге t дележ риска выбирается уже из другого множества

$$(4.2) \quad A_t^- = \left\{ I(\cdot) : 0 \leq I(x) \leq x, \alpha nEI(X_1^t) - a_-^t - x_{\beta_-^t}^N \sqrt{n} \sqrt{DI(X_1^t)} \geq 0 \right\}.$$

В последнем случае представляется естественным сузить множество A_t^+ путем увеличения допустимого уровня приращения $a_-^t > a_+^t$ (> 0) и/или увеличением уровня доверия $\beta_-^t > \beta_+^t$ ($> 0,5$) с тем, чтобы добиться на следующем шаге увеличения (в вероятностном смысле, т.е. в смысле значения VaR) приращения капитала. Такой подход, с одной стороны, обеспечивает плавность изменения капитала страховщика от шага к шагу с учетом изменения значений его приращений, а с другой — как будет показано, дает относительно простое решение задачи оптимального управления риском в многошаговой задаче страхования, в которой на каждом шаге оптимальный дележ риска зависит лишь от номера шага и знака $Z_t - Z_{t-1} - r$.

Динамика процесса Z_t по-прежнему описывается уравнением (3.1), целевым функционалом остается среднее значение финального капитала EZ_T , но теперь множество допустимых дележей в момент t есть

$$A_t = \begin{cases} A_t^+ & \text{при } Z_t - Z_{t-1} > r, \\ A_t^- & \text{при } Z_t - Z_{t-1} \leq r. \end{cases}$$

Формально, рассматриваемая задача не является задачей оптимального управления марковским процессом, поскольку множество допустимых решений A_t зависит не только от значения процесса Z_t , но и от Z_{t-1} . Перейдем

к сдвинутому на один шаг процессу приращений $W_t = Z_t - Z_{t-1}$, который задается уравнением

$$(4.3) \quad W_t = (1 + \alpha)nEI^{t-1}(X_1^{t-1}) - \sum_{i=1}^n I^{t-1}(X_i^{t-1}), \quad t = 1, \dots, T, \quad W_0 = w.$$

Тогда целевой функционал

$$(4.4) \quad J[\mathcal{I}] = EZ_T = E \sum_{t=0}^T W_t,$$

а множество допустимых дележей

$$(4.5) \quad A_t(W_t) = \begin{cases} A_t^+ & \text{при } W_t > r, \\ A_t^- & \text{при } W_t \leq r, \end{cases}$$

$t = 0, \dots, T-1$, зависит только от текущего значения W_t .

Найдем функции Беллмана для задачи (4.3)–(4.5) оптимального управления марковским процессом $\{W_t\}$. Обозначим $V_t(y) = \max_{I \in \mathcal{A}} E \sum_{m=t}^T W_m$ для рассматриваемого процесса на интервале $[t; T]$ с начальным состоянием $W_t = y$.

Уравнение динамического программирования здесь имеет вид

$$V_t(y) = y + \max_{I \in A_t(y)} EV_{t+1}(W_{t+1}),$$

где $A_t(y) = A_t^+$ при $y > r$, $A_t(y) = A_t^-$ при $y \leq r$. Тогда

$$V_T(y) = y,$$

при $y > r$

$$\begin{aligned} V_{T-1}(y) &= y + \max_{I \in A_{T-1}^+} EV_T(W_T) = y + n\alpha \max_{I \in A_{T-1}^+} EI(X_1^{T-1}) = \\ &= y + n\alpha EI_+^{T-1}(X_1^{T-1}), \end{aligned}$$

при $y \leq r$

$$\begin{aligned} V_{T-1}(y) &= y + \max_{I \in A_{T-1}^-} EV_T(W_T) = y + n\alpha \max_{I \in A_{T-1}^-} EI(X_1^{T-1}) = \\ &= y + n\alpha EI_-^{T-1}(X_1^{T-1}). \end{aligned}$$

Здесь и далее, с целью упрощения обозначений, положим $I_+^t \stackrel{def}{=} I_+^t(X_1^t)$ и $I_-^t \stackrel{def}{=} I_-^t(X_1^t)$. Для нахождения

$$V_{T-2}(y) = y + \max_{I \in A_{T-2}(y)} EV_{T-1}(W_{T-1})$$

заметим, что случайная величина W_{T-1} может быть выше или ниже r с вероятностями соответственно $P\{W_{T-1} > r\}$ и $1 - P\{W_{T-1} > r\}$. Следовательно, при $y > r$

$$\begin{aligned} V_{T-2}(y) &= y + \max_{I \in A_{T-2}^+} E[W_{T-1} | W_{T-1} > r] P\{W_{T-1} > r\} + \\ &\quad + E[W_{T-1} | W_{T-1} \leq r] P\{W_{T-1} \leq r\} = \\ &= y + \alpha n \left\{ EI_-^{T-1} + \max_{I \in A_{T-2}^+} EI + \left(EI_+^{T-1} - EI_-^{T-1} \right) P\{W_{T-1} > r\} \right\}, \end{aligned}$$

при $y \leq r$

$$V_{T-2}(y) = y + \alpha n \left\{ EI_-^{T-1} + \max_{I \in A_{T-2}^-} EI + \left(EI_+^{T-1} - EI_-^{T-1} \right) P\{W_{T-1} > r\} \right\}.$$

При $y > r$

$$\begin{aligned} V_{T-3}(y) &= \\ &= y + \alpha n \left\{ EI_-^{T-1} + EI_+^{T-2} + \left(EI_+^{T-1} - EI_-^{T-1} \right) P\{W_{T-1} > r\} |_{I^{T-2}=I_+^{T-2}} + \right. \\ &\quad \left. + \max_{I \in A_{T-3}^+} EI + \left(EI_+^{T-2} - EI_-^{T-2} \right) P\{W_{T-2} > r\} \right\}, \end{aligned}$$

при $y \leq r$

$$\begin{aligned} V_{T-3}(y) &= \\ &= y + \alpha n \left\{ EI_-^{T-1} + EI_-^{T-2} + \left(EI_+^{T-1} - EI_-^{T-1} \right) P\{W_{T-1} > r\} |_{I^{T-2}=I_-^{T-2}} + \right. \\ &\quad \left. + \max_{I \in A_{T-3}^-} EI + \left(EI_+^{T-2} - EI_-^{T-2} \right) P\{W_{T-2} > r\} \right\} \end{aligned}$$

и т.д.

Нетрудно видеть, что каждый оптимальный дележ риска $I_*^t(\cdot, y)$ на шаге t при текущем состоянии процесса $y = W_t$ есть решение задачи максимизации функционала

$$(4.6) \quad H_t[I] \equiv EI + (EI_+^{t+1} - EI_-^{t+1})P\{W_{t+1} > r\} \text{ при ограничении } I \in A_t(y),$$

где дележи I_+^{t+1} и I_-^{t+1} являются соответственно решениями задач максимизации $H_{t+1}[I]$ на множествах A_{t+1}^+ и A_{t+1}^- , $t = 0, \dots, T-2$, причем $H_{T-1}[I] \equiv EI$.

Учитывая, что W_{t+1} моделируется нормальной случайной величиной со средним $\mu[I^t] = \alpha n EI^t$ и дисперсией $\sigma^2[I^t] = nDI^t$, получаем, что

$$P\{W_{t+1} > r\} = \bar{\Phi}((r - \mu[I^t])/\sigma[I^t]),$$

где $\bar{\Phi}(x) = 1 - \Phi(x)$ и $\Phi(x)$ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины. Тогда (4.6) преобразуется к виду

$$(4.7) \quad H_t[I] \equiv EI + (EI_+^{t+1} - EI_-^{t+1}) \bar{\Phi}((r - \mu[I])/\sigma[I]) \rightarrow \max, \quad I \in A_t(y).$$

Соотношение (4.7) является рекуррентной формулой для вычисления оптимальных дележей I_+^t и I_-^t , начиная с I_+^{T-1} и I_-^{T-1} , которые определяются максимизацией $H_{T-1}[I] \equiv EI$ на $A_{T-1}(y)$. Таким образом, каждый оптимальный дележ зависит от текущего состояния процесса $y = W_t$ очень простым образом: если $y > r$, то решается задача (4.7) на A_t^+ , в противном случае решается задача с той же целевой функцией, но на A_t^- .

Теорема 3. Пусть для каждого набора параметров $\alpha, a_+^t, \beta_+^t, a_-^t, \beta_-^t$ и распределения $F^t(x)$, $t = 0, \dots, T-1$, выполнено условие (2.7) с $w = 0$. Тогда задача (4.3)–(4.5) имеет решение $I_* = (I_*^t(\cdot, y), \dots, I_*^{T-1}(\cdot, y))$, где каждый дележ риска есть stop loss страхование,

$$I_*^t(x, y) = \begin{cases} x \wedge k_+^t & \text{при } y > r, \\ x \wedge k_-^t & \text{при } y \leq r. \end{cases}$$

Уровни k_+^t и k_-^t являются соответственно решениями задач максимизации функций от скалярной переменной:

$$(4.8) \quad \max_{k > 0} H_t[I_k] \text{ при ограничении } I_k \in A_t^+,$$

$$(4.9) \quad \max_{k > 0} H_t[I_k] \text{ при ограничении } I_k \in A_t^-,$$

где $I_k(x) = x \wedge k$, а выражение для $H_t[I]$ приведено в (4.7).

Доказательство. Как было показано, вычисление оптимального дележа $I_*^t(\cdot, y)$ состоит в решении задачи (4.7), которая зависит лишь от номера шага t и от знака $y - r$. Отметим, что, как и в теореме 2, нулевой дележ исключен в силу условия (2.5), где сейчас $w = 0$ и $a = a_+^t$ (или a_-^t) > 0 . Следующая лемма устанавливает существование решения в этой задаче.

Лемма. Для каждого фиксированного y задача (4.7) имеет решение.

Доказательство леммы приведено в Приложении.

Начнем с изучения случая $y > r$. Обозначим через $M_+^t = EI_+^t(X_1^t)$, где I_+^t — решение (4.7), существование которого гарантируется леммой. Заметим, что в силу ограничения $P\{W_{t+1} \geq a_+^t\} \geq \beta_+^t$ с $a_+^t > 0$ среднее значение $M_+^t > 0$. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$H_t[I] \rightarrow \max, \quad EI = M_+^t \quad \text{и} \quad I \in A_t^+, \quad \text{где} \quad t = 0, \dots, T-2,$$

где выражение для $H_t[I]$ задано в (4.7). Напомним, что задача $H_{T-1}[I] \equiv EI \rightarrow \max, I \in A_{T-1}^+$, уже была изучена в теореме 2. Поскольку $A_{t+1}^- \subset A_{t+1}^+$, то в (4.7) множитель $EI_+^{t+1} - EI_-^{t+1} \geq 0$. Учитывая, что по предположению $r \leq 0$, получаем $r - \mu[I^t] = r - \alpha n M_+^t < 0$. Тогда вспомогательная задача эквивалентна

$$(4.10) \quad EI^2(X_1^t) \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$(4.11) \quad 0 \leq I(x) \leq x, \quad EI(X_1^t) = M_+^t,$$

$$(4.12) \quad J_1[I] \stackrel{def}{=} -\alpha n M_+^t + a_+^t + x_{\beta_+^t}^N \sqrt{n} \sqrt{EI^2(X_1^t) - (M_+^t)^2} \leq 0.$$

Поскольку выполнено условие Слейтера и целевой функционал является выпуклым, а функционал в ограничении (4.12) является сильно квазивыпуклым (см. [10]), то применима теорема Куна–Таккера (см., например, [13]). Согласно этой теореме дележ $I_+^t(\cdot) \in A_+^t$ оптимален в (4.10)–(4.12) тогда и только тогда, когда существуют множители Лагранжа λ и $\gamma \geq 0$ такие, что $\gamma J_1[I_+^t] = 0$ и $I_+^t(\cdot)$ является решением задачи минимизации функционала Лагранжа

$$(4.13) \quad L[I] \equiv EI^2(X_1^t) + \lambda (EI(X_1^t) - M_+^t) + \gamma J_1[I] \rightarrow \min_I, \quad 0 \leq I(x) \leq x.$$

Необходимое и достаточное условие оптимальности дележа I_+^t в задаче (4.13) есть выполнение неравенства

$$\frac{d}{d\rho} L[\rho I_+^t + (1 - \rho)I] \big|_{\rho=1} \leq 0$$

для любой функции дележа $0 \leq I(x) \leq x$. При подстановке выражения для функционала $J_1[I]$ после дифференцирования получаем, что левая часть неравенства равна

$$\int_0^\infty \eta(x) (I_+^t(x) - I(x)) dF_1^t(x),$$

где

$$\eta(x) = I_+^t(x) \left[2 + \gamma x_{\beta_+^t}^N \sqrt{n} / \sqrt{EI_+^t(X_1^t)^2 - (M_+^t)^2} \right] + \lambda.$$

Используя лемму Неймана–Пирсона [14], имеем, что оптимальный дележ определяется как

$$(4.14) \quad I_+^t(x) = \begin{cases} 0, & \eta(x) > 0, \\ x, & \eta(x) < 0, \end{cases}$$

с точностью до множества нулевой меры F_1^t .

Рассмотрим сначала ситуацию, когда $\lambda < 0$. Поскольку $\eta(0) = \lambda < 0$, то при возрастании x от нуля значение $\eta(x)$ возрастает (при этом $I_+^t(x) = x$ в силу (4.14)). После касания в точке k_+^t этой функции оси абсцисс, $\eta(x)$ не может принимать положительных значений, поскольку для таких x (см. (4.14)) значение $I_+^t(x) = 0$, т.е. приходим к противоречию: $\eta(x) < 0$. Убывание $\eta(x)$ от нуля также исключено, так как для таких x выполнено $I_+^t(x) = x$, что означает $\eta(x) > 0$. В результате, $I_+^t(x) = x \wedge k_+^t$.

В случае $\lambda \geq 0$ аналогичные рассуждения приводят к тому, что $I_+^t(x) \equiv 0$, но тогда неравенство $M_+^t > 0$, где $M_+^t = EI_+^t(X_1^t)$, оказывается нарушенным.

Случай $y \leq r$ рассматривается аналогично. Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Даже в частном случае однородной модели, где параметры $a_+^t, a_-^t, \beta_+^t, \beta_-^t$ и распределение ущерба клиента $F_1^t(x)$ не зависят от t , оптимальной является не “близорукая” стратегия, как в теореме 2, а стратегия, где каждый оптимальный дележ риска $I_*^t(x, y)$ зависит, в частности, от номера шага t . С точки зрения вычислений нахождение оптимальной стратегии в задаче (4.3)–(4.5) сводится к определению $2T$ значений $k_+^{T-1}, k_-^{T-1}, \dots, k_+^0, k_-^0$ путем решения последовательности относительно простых задач (4.8)–(4.9) максимизации функций от скалярной переменной. Выбор $k_+^0 (k_-^0)$ в начальный момент $t = 0$ означает, что начальный капитал $w > r (\leq r)$.

5. Пример

Ниже рассмотрен численный пример, иллюстрирующий теорему 3 о решении многошаговой задачи (4.3)–(4.5) управления риском при ограничениях на приращения процесса. Пусть ущербы клиентов имеют распределение $F_1(x) = p(1 - \exp(-0,1x)) + 1 - p$, не зависящее от номера шага t , где вероятность страхового случая $p = 0,1$. Таким образом, функция распределения страховых выплат [1] $F_1^0(x) \stackrel{def}{=} P\{X_1 \leq x | X_1 > 0\} = 1 - \exp(-0,1x)$ экспоненциальна. Пусть численность группы клиентов $n = 250$, уровни доверия $\beta_+^t = \beta_-^t = 0,95$ и начальный капитал страховщика $w = 1$. Интервал функционирования процесса $\{0, \dots, T\} = \{0, \dots, 3\}$. Уровень безопасности, устанавливаемый страховщиком, равен $r = 0$, т.е. если приращение капитала страховщика на предыдущем шаге положительно, то дележ риска выбирается из множества A_t^+ , иначе — из A_t^- (см. (4.1)–(4.2)). Нижняя граница приращения капитала страховщика a_t^+ в A_t^+ равна 10, нижняя граница a_t^- в A_t^- установлена равной 20 для всех $t = 0, \dots, 2$.

Напомним, что по теореме 3 оптимальными дележами являются stop loss страхования

$$I_*^t(x, y) = \begin{cases} x \wedge k_+^t & \text{при } y > r, \\ x \wedge k_-^t & \text{при } y \leq r. \end{cases}$$

Результаты численного расчета уровней удержания страховщика k_+^t, k_-^t и значения целевого функционала $J^* = J[\mathcal{I}_*]$ при варьировании коэффициента нагрузки α приведены в таблице.

Таблица

α	k_+^0	k_+^1	k_-^1	k_+^2	k_-^2	J^*
0,5	118,6861	118,6907	23,6634	119,3200	23,6634	361,0311
0,55	119,3200	119,3200	119,3200	118,8242	118,8242	413,3536

Отметим, что в задачах вычисления оптимального дележа риска на каждом шаге условие регулярности Слейтера оказывается выполненным, поскольку даже для “наихудшего” случая с наименьшим коэффициентом нагрузки $\alpha = 0,5$ и наибольшей нижней границей приращения капитала $a_t^- = 20$

соотношение (2.7) выполнено:

$$J_0[I^0] = 2,4980 > 0 \quad \text{и} \quad \alpha\sqrt{n} - x_\beta^N \sqrt{F_1(0)/\bar{F}_1(0)} = 2,9711 > 0.$$

Во втором столбце таблицы выбор k_+^0 , а не k_-^0 объясняется тем, что начальный капитал $w = 1 > 0 = r$. С ростом коэффициента нагрузки α оптимальное значение J^* ожидаемо увеличивается, поскольку растет цена страхования. Как показывает вторая строка таблицы, уровни k_-^t значимо ниже k_+^t . Причина в том, что максимум в задаче $H_t[I_k] \rightarrow \max, I_k \in A_t^-$ при $\alpha = 0,5$ достигается для значения k_-^t , принадлежащего границе допустимого множества $\{k : I_k \in A_t^-, t = 1, 2$. Увеличение коэффициента нагрузки α , т.е. стоимости страхования, до $\alpha = 0,55$ означает расширение множеств A_t^- . При этом значения k_-^t оказываются уже внутренними точками и, учитывая, что $A_t^- \subset A_t^+$, имеем (см. третью строку таблицы): $k_-^t = k_+^t$.

6. Заключение

Исследована новая задача построения оптимальной стратегии страхования в процессе риска с дискретным временем, пошаговыми вероятностными (VaR) ограничениями на капитал страховщика на каждом шаге процесса и средним значением финального капитала в качестве целевого функционала. Доказана оптимальность “близорукой” (myopic) стратегии страхования, где в каждый момент принятия решения максимизируется среднее приращение капитала на следующем шаге. В обобщении этой модели, где страховщик устанавливает “уровень безопасности” (неположительный) на предыдущее приращение капитала, показано, что определение компонент оптимальной стратегии сводится к решению последовательности относительно простых оптимизационных задач. В обоих случаях оптимальным для страховщика на каждом шаге оказывается stop loss страхование.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Рассмотрим сначала случай $y > r$. Пусть $\{I_n\}$ — максимизирующая последовательность допустимых дележей в задаче (4.7), т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_t[I_n] = H_t^* \stackrel{\text{def}}{=} \sup_I H_t[I].$$

Применяя теорему Хелли отдельно к числителю и знаменателю для дроби $(r - \mu[I_n])/\sigma[I_n] = (r - \alpha n E I_n(X_1^t))/\sqrt{n D I^t(X_1^t)}$ в целевом функционале (4.7), получаем, что существует подпоследовательность случайных величин $\{I_m(X_1^t)\}$, слабо сходящаяся к некоторому пределу ξ . Для доказательства того, что ξ есть собственная случайная величина, т.е. $P\{\xi < \infty\} = 1$, достаточно заметить, что в силу определения функций дележа выполняется $I_m(X_1^t) \leq X_1^t$ п.н. Поскольку ξ измерима относительно сигма-алгебры $\sigma(X_1^t)$, то эта случайная величина может быть представлена как $\xi = I^*(X_1^t)$ для некоторого дележа $I^*(\cdot)$, причем $I^* \in A_t^+$.

Покажем, что для максимизирующей последовательности $\{I_m\}$ знаменатель $\sigma[I_m]$ в (4.7) отделен от нуля. Действительно (см. (4.1)), выполнение ограничения $I^* \in A_t^+$, т.е.

$$P \left\{ (1 + \alpha)nEI^*(X_1^t) - \sum_{i=1}^n I^*(X_i^t) \geq a_+^t \right\} \geq \beta_+^t (> 0),$$

где по предположению $a_+^t > 0$,

означает, что из множества допустимых исключен нулевой дележ риска $I^*(X_1^t) = 0$ п.н. и, таким образом, $\sigma[I^*] > 0$.

Равенство $H_t^* = H_t[I^*]$ теперь следует из слабой сходимости $\{I_m(X_1^t)\}$ и непрерывности целевого функционала в (4.7) по $EI(X_1^t)$ и $DI(X_1^t)$.

Случай $y \leq r$ рассматривается аналогично с заменой множества A_t^+ на A_t^- . Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., et al.* Actuarial Mathematics. Itaca, Illinois: The Society of Actuaries, 1986.
2. *Hipp C., Vogt M.* Optimal Dynamical XL Reinsurance // ASTIN Bulletin. 2003. V. 33. P. 193–207.
3. *Hipp C., Taksar M.* Optimal Non-proportional Reinsurance Control // Insur. Math. Econom. 2010. V. 47. P. 246–254.
4. *Golubin A.Y.* Optimal Insurance and Reinsurance Policies in the Risk Process // ASTIN Bulletin. 2008. V. 38. No. 2. P. 383–398.
5. *Голубин А.Ю., Гридин В.Н.* Оптимизация страхования и перестрахования в динамической модели Крамера-Лундберга // АиТ. 2012. Т. 9. С. 111–123.
Golubin A.Y., Gridin V.N. Optimizing Insurance and Reinsurance in the Dynamic Cramer-Lundberg Model // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 9. P. 1529–1538.
6. *Guerra M., Centeno M.L.* Optimal Reinsurance Policy: The Adjustment Coefficient and the Expected Utility Criteria // Insur. Math. Econ. 2008. V. 42. P. 529–539.
7. *Li Y., Li Z.* Optimal Time-consistent Investment and Reinsurance Strategies for Mean variance Insurers with State Dependent Risk Aversion // Insur. Math. Econ. 2013. V. 53. P. 86–97.
8. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит. 2009.
9. *Zhou C., Wu C.* Optimal Insurance Under the Insurer's VaR Constraint // GRIR. 2009. V. 34. P. 140–154.
10. *Голубин А.Ю., Гридин В.Н.* Оптимальная стратегия страхования в модели индивидуального риска при вероятностном ограничении на величину финального капитала // АиТ. 2019. № 4. С. 144–155.
Golubin A.Y., Gridin V.N. Optimal Insurance Strategy in the Individual Risk Model under a Stochastic Constraint on the Value of the Final Capital // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 4. P. 708–717.
11. *Bi J., Cai J.* Optimal investment and reinsurance strategies with state dependent risk aversion and VaR constraints in correlated markets // Insur. Math. Econ. 2019. V. 85. P. 1–14.

12. *Fleming W.H., Rishel R.W.* Deterministic and Stochastic Optimal Control. Berlin. Springer-Verlag, 1975.
13. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.
14. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Губко.

Поступила в редакцию 11.11.2019

После доработки 04.03.2020

Принята к публикации 25.05.2020