Автоматика и телемеханика, № 9, 2020

© 2020 г. **А.Д. ИСКЕНДЕРОВ, д-р физ.-мат. наук (asaf.iskander@mail.ru)**
(Национальная академия авиации, Баку),
Р.А. ГАМИДОВ, канд. физ.-мат. наук (rqamidov@mail.ru)
(Ленкоранский Государственный Университет, Ленкорань)

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С ГРАДИЕНТОМ УПРАВЛЕНИЯ В КОЭФФИЦИЕНТАХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается задача оптимального управления для линейных эллиптических уравнений с коэффициентами, зависящими от управляющей функции и ее градиента. Доказывается существование и единственность решения рассматриваемой задачи, результаты применены к задаче оптимального управления границей области.

Ключевые слова: оптимальное управление, эллиптические уравнения, существование и единственность решения, корректность постановки, управление границей области.

DOI: 10.31857/S0005231020090032

1. Введение

Задачи с управлениями в коэффициентах уравнений в частных производных относятся к наиболее важным прикладным классам задач, которые являются наиболее трудными для теоретического исследования и численного решения. Вариационные методы решения обратных задач для уравнений математической физики тесно связаны с задачами оптимального управления в коэффициентах этих уравнений [1–3]. В [1–9] и др. для ряда постановок задач с управлениями в коэффициентах основных типов уравнений математической физики исследуются вопросы корректности, необходимые и достаточные условия оптимальности, разработки вычислительных методов их решения.

В данной работе рассматриваются задачи оптимального управления для эллиптических уравнений с коэффициентами, зависящими не только от управляющей функции, но и от ее градиента. Именно зависимость коэффициентов уравнения от градиента функции управления создает дополнительные трудности для применения известных методов доказательства разрешимости и условий оптимальности решения. Критерий качества в постановке рассматриваемой задачи оптимального управления связан с теорией обратных задач, и частные случаи этого критерия применены в [2–7] и др. В заключении даны приложения результатов к задаче оптимального управления границей области [4, 8].

Изучаемая в работе задача связана с такими важными прикладными задачами, как задачи управления границей области, задачи с неизвестной границей, процессы управления, когда коэффициенты уравнения состояния зависят не только от управляющего фактора, но и от его градиента. Для теоретического и прикладного исследования подобных задач наряду с их разрешимостью важным является также установление условий оптимальности решения, а также другие вопросы применения в практике. Поэтому данная работа частично носит и подготовительный характер; в ней излагаются вопросы разрешимости рассматриваемых задач и их связь с главными представителями процессов из этого класса практики, т.е. с задачами управления границей области, а также даются основные понятия, необходимые для дальнейшего изложения. В последующей работе будут рассмотрены вопросы об условиях оптимальности управления для основной задачи, а также задачи с неизвестной границей области и др. Поэтому последующая работа посвящена необходимому условию оптимальности для задач оптимизации с градиентом управления в коэффициентах уравнений эллиптического типа.

2. Постановка задачи

Пусть D — ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве R^n — с достаточно гладкой границей Γ, $\overline{D}$ — замыкание области D, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная точка области $\overline{D}$. Общеизвестные функциональные пространства $L_p(D)$, $W_p^l(D)$, $\overset{\circ}{W}{}_p^l(D)$ и др., где $p \geq 1$, $l \geq 0$ — заданные числа, которые ниже используются, определены, например, в [10], обозначения $\forall$ означает «для любого», $\overset{\circ}{\forall}$ означает «при почти всех».

Рассмотрим процесс с управлениями в коэффициентах эллиптического уравнения

$$(1)\qquad -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, v(x), v_x(x)) \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, v(x), v_x(x)) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + $$

$$+ c(x, v, v_x(x)) u_k = f(x, v, v_x(x)), \quad k = 1, 2,$$

и с краевыми условиями

$$(2)\qquad u_1|_{\Gamma} = g_1(x), \quad x \in \Gamma,$$

$$(3)\qquad \left.\frac{\partial u_2}{\partial N}\right|_{\Gamma} \equiv \left.\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, v(x), v_x(x)) \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \cos(x_i, \hat{N})\right|_{\Gamma} = g_2(x), \quad x \in \Gamma,$$

где $g_1(x) \in W_2^{1/2}(\Gamma)$, $g_2(x) \in L_2(\Gamma)$ — заданные функции, коэффициенты уравнения (1) $a_{ij}(x, v, w)$, $b_i(x, v, w)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $c(x, v, w)$ и правая часть уравнения $f(x, v, w)$ — заданные функции своих аргументов, $v = v(x)$ — функция управления, которая принадлежит множеству

$$V = \left\{ v:\ v = v(x) \in W_\infty^1(D),\ 0 < v_1 \leq v(x) \leq v_2(x),\ |v_x(x)| \leq v_3,\ \overset{\circ}{\forall} x \in D \right\},$$

v_1, v_2, v_3 — заданные положительные постоянные, $u_k = u_k(x) = u_k(x, v)$, $k = 1, 2,$ — решения, соответственно первой и второй краевых задач для уравнения (1), N — внешний конормаль границы $\varGamma$. Пусть требуется минимизировать функционал

$$
J_\alpha(v) = \Big\| \omega(v(E)) \big[u_1(x) - u_2(x) \big] \Big\|^2_{L_2(D)} + \\
+ \alpha \Big\| v(x) - \bar{v}(x) \Big\|^2_{L_2(D)} \to \inf, \quad \alpha \geq 0, \tag{4}
$$

на множестве V при условиях (1)–(3), где $\omega(v)$ — непрерывно-дифференцируемая функция определенная на отрезке $[v_1, v_2]$, $\bar{v} \in L_2(D)$ — заданный элемент, $\alpha \geq 0$ — заданное число. Предположим, что функции $u_k \equiv u_k(x) \equiv u_k(x, v)$, $k = 1, 2$, для каждого выбранного $v(x) \in V$ являются обобщенными решениями из $W_2^1(D)$ краевых задач (1), (2) и (1), (3), соответственно. Ниже всюду предполагается, что:

1) $a_{ij}(x, v, w)$, $b_i(x, v, w)$, $i, j = \overline{1, n}$, $c(x, v, w)$, $f(x, v, w)$ — заданные непрерывные функции своих аргументов в области

$$
\varPi \equiv \Big\{ (x, v, w) : \ x \in \bar{D}, \ v \in [v_1, v_2], \ w \in [-v_3, v_3] \Big\};
$$

2) коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям равномерной эллиптичности:

$$
\mu_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, v, w) \xi_i \xi_j \leq \mu_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad a_{ij}(x, v, w) = a_{ji}(x, v, w),
$$

$$
0 < \mu_1 \leq c(x, v, w) \leq \mu_3, \ \forall (x, v, w) \in \varPi, \ \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n, \ i, j = \overline{1, n},
$$

μ_m, $m = \overline{1, 3}$ — заданные положительные числа;

3) операторы суперпозиции $F(v) \equiv f(x, v(x), v_x(x))$, $C(v) \equiv c(x, v(x), v_x(x))$, $B_i(v) \equiv b_i(x, v(x), v_x(x))$, $A_{ij}(v) \equiv a_{ij}(x, v(x), v_x(x))$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$, непрерывно действуют из $W_\infty^1(D)$ в пространства $L_2(D)$, $L_\infty(D)$, $L_\infty(D)$, $L_\infty(D)$, соответственно. Нетрудно указать достаточные условия, обеспечивающие справедливость этого предположения [11].

Из теории эллиптических уравнений [10] следует, что при принятых выше предположениях если число μ_2 «достаточно большое», то задачи Дирихле и Неймана для эллиптических уравнений разрешимы. Точнее, доказывается [10], что для каждого выбранного v из множества V при принятых выше предположениях, решения задач (1), (2) и (1), (3) из пространства $W_2^1(D)$ существуют, единственны и верны априорные оценки

$$
\|u_1\|_{W_2^1(D)} \leq C_1 \left[\|f\|_{L_2(D)} + \|g_1\|_{W_2^{1/2}(\varGamma)} \right], \tag{5}
$$

$$
\|u_2\|_{W_2^1(D)} \leq C_2 \left[\|f\|_{L_2(D)} + \|g_2\|_{L_2(\varGamma)} \right], \tag{6}
$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 определяются параметрами v_i и μ_i, $i = 1, 2, 3$. Нетрудно проверить, что [10] при условиях $g_1(x) \in W_2^{1/2}(\varGamma)$,

$g_2(x) \in L_2(\Gamma)$ и при принятых выше предположениях заменой неизвестных функций граничные условия (2), (3) всегда могут быть приведены к однородному виду

$$u_1|_\Gamma = 0, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial N}\right|_\Gamma = 0. \tag{8}$$

Поэтому в дальнейшем предположим, что граничные условия (2) и (3) приведены к однородному виду (7) и (8). Ниже воспользуемся определением.

Определение 1. При каждом выбранном управлении $v \in V$ функцию $u_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ назовем решением краевой задачи (1), (7), *функцию $u_2(x) \in W_2^1(D)$ назовем решением краевой задачи* (1), (8), *если для любых функций $\eta_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ и $\eta_2(x) \in W_2^1(D)$ они удовлетворяют интегральному тождеству*

$$\int_D \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, v(x), v_x(x)) \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_k(x)}{\partial x_i} + \right.$$
$$+ \left[\sum_{i=1}^n b_i(x, v(x), v_x(x)) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + c(x, v(x), v_x(x)) u_k(x) - \right. \tag{9}$$
$$\left. \left. - f\left(x, v(x), v_x(x)\right) \right] \eta_k(x) \right) dx = 0, \quad k = 1, 2.$$

Ниже используется теорема, которая доказана в [12].

Теорема 1 [12]. *Пусть X – равномерно выпуклое банахово пространство, U – замкнутое, ограниченное в метрике X множество, функционал $I(v)$ на U полунепрерывен снизу и снизу ограничен, $r \geq 1$, $\alpha > 0$ — заданные числа. Тогда существует плотное подмножество K пространства X такая, что для любых $\bar{v} \in K$ функционал $I_\alpha(v) \equiv I_0(v) + \alpha \|v - \bar{v}\|_X^r$ достигает своего наименьшего значения на U и при любом $r > 1$ это решение единственно.*

3. Существование и единственность решения

Задачу о минимизации функционала (4), т.е. функционала $J_\alpha(v)$ на множестве V при условиях (1), (7), (8), назовем задачей (4).

Теорема 2. При любом $\alpha > 0$ существует плотное подмножество K пространства $L_2(D)$ такое, что для любого $\bar{v} \in K$ задача (4) *имеет единственное решение.*

Доказательство теоремы дано в Приложении.

З а м е ч а н и е. Одним из центральных вопросов в теории экстремальных задач являются условия оптимальности решения. Методика доказательства теоремы 2 и способы установления необходимых условий, изложенных в [5, 7, 9], указывают на то, что этими способами можно доказать не только непрерывность, но и дифференцируемость функционала $J_\alpha(v)$. Градиент функционала $J_\alpha(v)$ дает возможность выразить необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства (см. [5, 7, 9]).

4. Задача оптимального управления границей области

Задачи управления границей области часто возникают в практике, они имеют разные корни происхождения. Исследованы различные аспекты теории этих задач. Ниже изучена задачи оптимального управления границей многомерной области. Эта задача преобразованием системы координат сводится к задаче с управлениями в коэффициентах эллиптического уравнения.

Области границы, которые выражаются функциями, равномерно удовлетворяющими условию Липшица, называются строго липшицевыми областями [10]. Линейно нормированное пространство функций, равномерно удовлетворяющих условию Липшица в области $\overline{D}$, обозначим через $Lip(\overline{D})$. Известно, что это пространство эквивалентно пространству $W^1_\infty(\bar{D})$ [10]. Следовательно, границы строго липшицевых областей выражаются функциями из $W^1_\infty(D)$. Ниже рассматриваются задачи управления границей строго липшицевых областей.

Пусть D_0' — ортогональная проекция области D_0 на $(n-1)$-мерное евклидово подпространство R^{n-1}, $\varGamma_0$ — граница области D_0, $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ — произвольная точка области D_0, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $x' \in D_0' \subset R^{n-1}$ при $x \in D_0$.

Пусть $\varGamma_+$ — известная часть, а $\varGamma_-$ — неизвестная часть границы $\varGamma_0$, т.е. $\varGamma_0 = \varGamma_+ \bigcup \varGamma_-$. Если $\varGamma_+$ — пустое множество, тогда вся граница $\varGamma_0$ неизвестна. Обозначим через $\Omega_a = \{x = (x', x_n) : x' \in D_0', 0 \le x_n \le a\}$ область в R^n, где a — положительное число. Предположим, что

4) $\varGamma_+$ — известная часть границы $\varGamma_0$ и она строго липщицева;

5) $\varGamma_-$ — неизвестная часть границы $\varGamma_0$ и однозначно выражается функцией $v = v(x_1, \ldots, x_{n-1}) = v(x')$ при $x' \in D_0'$;

6) существует такое положительное число a, что $D_0 \subset \Omega_a$.

Множество

$$V_1 = \left\{ v : \ v = v(x') \in W^1_\infty(D_0'), \ 0 < v_1 \le v(x') \le v_2, \ \left| v_x(x') \right| \le v_3, \ \overset{\circ}{\forall} x' \in D_0' \right\}$$

назовем множеством допустимых управлений границей области D_0, где v_i, $i = 1, 2, 3$ — заданные положительные постоянные.

Рассмотрим эллиптическое уравнение с измеримыми ограниченными коэффициентами $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $i, j = \overline{1, n}$, $c(x)$:

$$(10) \quad Au \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u = f(x), \quad x \in D_0,$$

с первым

$$(11)\qquad u\big|_{\Gamma} = g_1(x), \quad x \in \Gamma_0$$

и со вторым

$$(12)\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\Gamma} = g_2(x), \quad x \in \Gamma_0$$

краевыми условиями. Предположим, что

7) $f(x) \in L_2(D_0)$, $g_1(x) \in W_2^{1/2}(\Gamma_0)$, $g_2(x) \in L_2(\Gamma_0)$, $a_{ij}(x) \in L_\infty(D_0)$, $b_i(x) \in \in L_\infty(D_0)$, $c(x) \in L_\infty(D_0)$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $\forall\, i, j = \overline{1, n}$, — заданные функции;

8) $\mu_1 \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \mu_2 \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$, $\forall\, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n$, $0 < \mu_1 \le \le c(x) \le \mu_3$, где μ_i — заданные положительные числа, $i = 1, 2, 3$.

Ради простоты изложения граничные условия (11), (12) примем однородными, т.е. предположим, что $g_1(x) = g_2(x) = 0$. Если же эти функции отличны от нуля, но принадлежат к указанным выше классам, то, как это было отмечено, при принятых выше предположениях граничные условия (11), (12) могут быть сведены к однородным граничным условиям [10]. Решение уравнения (10) с первым краевым условием (11) обозначим через $u_1(x)$, а с вторым краевым условием (12) через $u_2(x)$. При предположении однородности граничных условий соотношения (10)–(12) вкратце могут быть записаны в следующем виде:

$$(13)\qquad Au_k(x) = f(x), \quad x \in D_0, \quad k = 1, 2,$$

$$(14)\qquad u_1(x)|_{\Gamma_0} = \left.\frac{\partial u_2\,(x)}{\partial N}\right|_{\Gamma_0} = 0.$$

Определение 2. Решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_0)$ и $W_2^1(D_0)$ соответственно краевых задач (13) *и* (14) *понимаются в смысле выполнения ими следующих интегральных тождеств*:

$$(15)\qquad \int\limits_{D_0} \Bigg\{ \sum a_{ij}(x) \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_k(x)}{\partial x_i} + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_i} + c(x)u_k(x) - f\,(x) \right] \eta_k(x) \Bigg\}\, dx = 0$$

для любых $\eta_k(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_0)$, $k = 1, 2$.

Пусть требуется найти минимум функционала

$$(16)\qquad J_\alpha(v) = \Big\| \omega(v(E)) \big[u_1(x) - u_2(x) \big] \Big\|^2_{L_2(D)} + \alpha \Big\| v(x) - \bar{v}(x) \Big\|^2_{L_2(D)}, \quad \alpha \ge 0,$$

на множестве

$$V_1 = \left\{ v: \ v = v(x') \in W^1_\infty(D'_0),\ 0 < v_1 \le v(x') \le v_2,\ \left|v_x(x')\right| \le v_3,\ \overset{\circ}{\forall} x' \in D'_0 \right\},$$

где $\omega(v)$ — непрерывно-дифференцируемая функция на отрезке $[v_1, v_2]$, $\bar{v}(x)$ — заданный элемент пространства $L_2(D_0)$, $\alpha \ge 0$ — числовой параметр, $u_1(x)$ и $u_2(x)$ являются решениями краевых задач (13), (14) в смысле тождества (15). Частные случаи функционала (16) с $\omega(v) = 1$ были рассмотрены в [2–7] и др. Ввод множителя $\omega(v)$ в выражение функционала качества (16) обобщает его и связан с другими применениями результатов, в том числе к задачам управления границей области.

Теорема 3. *При любом $\alpha > 0$ существует плотное подмножество K пространства $L_2(D_0)$ такое, что для любого $\bar{v} \in K$ задача управления границей области* (13)–(16) *имеет единственное решение.*

Доказательство теоремы дано в Приложении.

5. Заключение

Рассмотренные выше задачи относятся к классу некорректных задач [1, 3–5]. Нетрудно привести примеры, подобно работам [4, 5], которые показывают, что решения этих задач являются неустойчивыми. Условие $\alpha > 0$ в теоремах 2 и 3 является достаточно точным. Примерами подобно [4, 5] проверяется, что при $\alpha = 0$, с сохранением других условий этих теорем, решения задач (1)–(4) и (13)–(16) могут не существовать и быть неединственными.

Для задач с управлениями в коэффициентах уравнений в частных производных в [1–3, 5, 9] разработан ряд итеративных методов регуляризации для их численного решения. Эти алгоритмы не только теоретически обоснованы, но и практически неоднократно испытаны. Для задач оптимального управления границей области также имеются ряд вычислительных методов, которые успешно применялись для решения прикладных задач [8]. Неустойчивость подобных задач создает немало трудностей для их численного решения [4, 5]. Однако сведение задачи оптимального управления границей области к задачам с управлениями в коэффициентах дифференциальных уравнений расширяет класс методов их решения. Так как методы решения вариационных задач относительно развиты, то вариационные методы дают дополнительные возможности для применения разных вычислительных алгоритмов решения рассматриваемых задач. Одним из основных выводов данной работы является еще то, что в ней указывается на принадлежность задач оптимального управления в коэффициентах дифференциальных уравнений, обратных задач и задач с неизвестной границей, а также управления границей области к одному классу в смысле неустойчивости их решения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем непрерывность функционала $J_0(v)$ на множестве V. Обозначим через $u_k(x; v + \Delta v)$ и $u_k(x; v)$

решения задач (1), (7) и (1), (8), соответствующие управлениям $v + \Delta v \in V$ и $v \in V$. Пусть $\Delta u_k(x) \equiv u_k(x; v + \Delta v) - u_k(x; v)$, $k = 1, 2$. Если из уравнения для $u_k(x; v + \Delta v)$ вычтем соответствующее уравнение для $u_k(x; v)$, то получим, что функция $\Delta u_k(x)$, $k = 1, 2$, удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_D \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, v + \Delta v, v_x + \Delta v_x) \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, v + \Delta v, v_x + \Delta v_x) \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j} \eta_k + c(x, v + \Delta v) \Delta u_k \eta_k \right] dx =$$

(П.1)
$$= -\int\limits_D \left[\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x, v + \Delta v, v_x + \Delta v_x) - a_{ij}(x, v, v_x)) \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} + \right.$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i(x, v + \Delta v, v_x + \Delta v_x) - b_i(x, v, v_x)) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \right.$$

$$+ (c(x, v + \Delta v, v_x + \Delta v_x) - c(x, v, v_x)) u_k -$$

$$\left. \left. - (f(x, v + \Delta v, v_x + \Delta v_x) - f(x, v, v_x)) \right) \eta_k(x) \right] dx, \quad k = 1, 2,$$

$$\forall \eta_1 = \eta_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D) \text{ и } \forall \eta_2 = \eta_2(x) \in W_2^1(D).$$

При этом

$$\Delta u_k(x) \in W_2^1(D), \quad k = 1, 2.$$

Примем обозначения:

$$\bar{A}_{ij}(x) = a_{ij}(x, v + \Delta v, v_x + \Delta v_x), \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$\bar{B}_i(x) = b_i(x, v + \Delta v, v_x + \Delta v_x), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\bar{C}(x) = c(x, v + \Delta v, v_x + \Delta v_x),$$

$$F_{jk}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[a_{ij}(x, v + \Delta v, v_x + \Delta v_x) - a_{ij}(x, v, v_x)\right] \frac{\partial u_k}{\partial x_i},$$

$$F_{0k}(x) = (f(x, v + \Delta v, v_x + \Delta v_x) - f(x, v, v_x)) -$$

$$- (c(x, v + \Delta v, v_x + v) - c(x, v, v_x)) u_k +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left[b_i(x, v + \Delta v, v_x + \Delta v_x) - b_i(x, v, v_x)\right] \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \quad j = \overline{1, n}, k = 1, 2.$$

Если в этих обозначениях учитывать соотношение (9) из определения 1 обобщенного решения из $W_2^1(D)$, то получим, что функции Δu_1 и Δu_2 являются обобщенными решениями соответственно первой и второй краевых задач. Тогда из [10] следует, что эти краевые задачи для функций Δu_1 и Δu_2 имеют единственные решения и для них верны аналоги априорных оценок типа (5) и (6). Если в этих оценках учесть вид функции F_{jk}, $j=\overline{0,n}$, то получим

$$\begin{aligned}
&\|\Delta u_k\|_{W_2^1(D)} \le \\
&\le C_3 \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} \left[a_{ij}(x, v+\Delta v, v_x+\Delta v_x) - a_{ij}(x, v, v_x) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right]^2 \right\|_{L_2(D)}^{1/2} + \right. \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \left\| (b_i(x, v+\Delta v, v_x+\Delta v_x) - b_i(x, v, v_x)) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\|_{L_2(D)} + \\
&+ \| f(x, v+\Delta v, v_x+\Delta v_x) - f(x, v, v_x) \|_{L_2(D)} + \\
&\left. + \| (c(x, v+\Delta v, v_x+\Delta v_x) - c(x, v, v_x)) u_k \|_{L_2(D)} \right\},
\end{aligned} \tag{П.2}$$

где $C_3 > 0$ – некоторая постоянная. Согласно принятому выше предположению 3) операторы $A_{ij}(v) \equiv a_{ij}(x, v, v_x)$, $i, j = \overline{1,n}$, $B_i(v) \equiv b_i(x, v, v_x)$, $i=\overline{1,n}$, $C(v) \equiv c(x, v, v_x)$ и $F(v) \equiv f(x, v, v_x)$ непрерывно действуют из $W_\infty^1(D)$ в $L_\infty(D)$, $L_\infty(D)$, $L_\infty(D)$, $L_2(D)$ соответственно. Поэтому правая часть неравенства (П.2) оценивается через Δv и Δv_x в норме $L_\infty(D)$, другими словами в норме $\|\Delta v\|_{W_\infty^1}$. Следовательно, доказывается, что $\|\Delta u_k\|_{W_2^1(D)} \to 0$ при $\|\Delta v\|_{W_\infty^1(D)} \to 0$, $k=1,2$. Тем самым доказывается, что решения задач (1), (7) и (1), (8) в $W_2^1(D)$ непрерывно зависят от Δv в норме $W_\infty^1(D)$. Очевидно, что приращение функционала $J_0(v)$ представимо в виде

$$\begin{aligned}
&\Delta J_0(v) = J_0(v+\Delta v) - J_\alpha(v) = \\
&= \| \omega(v(E) + \Delta v(x)) [u_1(x) + \Delta u_1(x) - u_2(x) - \Delta u_2(x)] \|_{L_2(D)}^2 - \\
&- \| \omega(v(E)) [u_1(x) - u_2(x)] \|_{L_2(D)}^2 .
\end{aligned} \tag{П.3}$$

Из непрерывно дифференцируемости функции $\omega(v)$ на отрезке $[v_1, v_2]$ следует, что $\omega(v+\Delta v) = \omega_v(v) + 0\left(\|\Delta v\|_{L_2(D)}\right)$. Тогда из формулы (П.3) для приращения функционала $\Delta J_0(v)$ и из того, что $\|\Delta u_k\|_{W_2^1(D)} \to 0$, $k=1,2$, при $v \in V$, $v+\Delta v \in V$ и $\|\Delta v\|_{W_\infty^1(D)} \to 0$ следует, что приращение $\Delta J_0(v) \to 0$ при $\|\Delta v\|_{W_\infty^1(D)} \to 0$. Другими словами, функционал $J_0(v)$ является непрерывным на множестве V.

Теперь воспользуемся теоремой 1. В условиях этой теоремы в качестве пространства X, множества U и функционала $I_0(v)$ примем, соответственно, пространство $L_2(D)$, множество V и функционал $J_0(v)$. Согласно доказанному выше утверждению функционал $J_0(v)$ непрерывен на V. Ограниченность снизу функционала $J_0(v)$ непосредственно следует из его вида. Множество V замкнутое и ограниченное в $L_2(D)$. Пространство $L_2(D)$ равномерно выпукло. Тогда из теоремы 1 следует существование такого плотного подмножества K пространства $L_2(D)$, что для любого $\bar{v} \in K$ задача (4) имеет единственное решение при любом $\alpha > 0$.

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. В задаче оптимального управления границей области произведем преобразование системы координат. Докажем, что эта задача сводится к задаче с управлениями в коэффициентах эллиптического уравнения типа (2). В системе (13)–(16) введем новые переменные: $t_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, $t_n = x_n / v(x')$, $t = (t', t_n)$. Отсюда получим, что $x' = t'$, $x_n = t_n v(t')$. Обозначим $z(t', t_n)$ через $z(t)$. Нетрудно проверить, что в новых переменных $z(t) = z(x', x_n)/v(x') = u(t', t_n v(t')) = u(x', x_n) = u(x)$ и область D_0 преобразуется к области D_1 с границей Γ_1.

Преобразованием системы координат получим, что решения эллиптического уравнения (13) с граничными условиями (14), которые удовлетворяют интегральным тождествам (15), будут преобразованы, к тождествам

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{D_1} \Bigg\{ \sum_{i,j=1}^{n-1} a^0_{ij}(t) \left(\frac{\partial z_k(t)}{\partial t_j} - \frac{t_n}{v(t')} \frac{\partial v(t')}{\partial t_i} \frac{\partial z_k(t)}{\partial t_n} \right) \left(\frac{\partial \varphi_k(t)}{\partial t_i} - \frac{y_n}{v(t')} \frac{\partial v(t')}{\partial t_i} \frac{\partial \varphi_k(t)}{\partial t_n} \right) + \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{n-1} a^0_{nj}(t) \left(\frac{\partial z_k(t)}{\partial t_j} - \frac{t_n}{v(t')} \frac{\partial v(t')}{\partial t_j} \frac{\partial z_k(t)}{\partial t_n} \right) \frac{1}{v(y')} \frac{\partial \varphi_k(t)}{\partial t_n} + \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{n-1} a^0_{in}(t) \frac{\partial z_k(t)}{\partial t_n} \frac{1}{v(t')} \left(\frac{\partial \varphi_k(t)}{\partial t_i} - \frac{t_n}{v(t')} \frac{\partial v(t')}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial \varphi_k(t)}{\partial t_n} \right) + \\
&\qquad + \left[\sum_{i=1}^{n-1} b^0_i(t) \left(\frac{\partial z_k(t)}{\partial t_i} - \frac{t_n}{v(t')} \frac{\partial v(t')}{\partial t_i} \frac{\partial z_k(t)}{\partial t_n} \right) + \right. \\
&\left. + b^0_n(t) \frac{1}{v(y')} \frac{\partial z_k(t)}{\partial t_n} + c^0(t) z_k(t) - f^0(t) \right] \varphi_k(t) \Bigg\} \sqrt{v(t)}\, dt = 0, \quad k = 1, 2,
\end{aligned} \tag{П.4}$$

где приняты следующие обозначения:

$$z_k(t) = u_k\left(t', t_n v(t')\right), \quad \varphi_k(t) = \eta_k\left(t', t_n v(t')\right),$$
$$a^0_{ij}(t) = a_{ij}\left(t', t_n v(t')\right), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad b^0_i(t) = b_i\left(t', t_n v(t')\right), \quad i = \overline{1, n},$$
$$c^0(t) = c\left(t', t_n v(t')\right), \quad f^0(t) = f\left(t', t_n v(t')\right).$$

Функционал $J_\alpha(v)$ в новых переменных имеет вид

$$J_\alpha(v) = \left\| \omega(v(t)) \sqrt{v(t)} \left(z_1(t) - z_2(t) \right) \right\|^2_{L_2(D_1)} + \alpha \left\| v(t) - \bar{v}(t) \right\|^2_{L_2(D'_0)}, \quad \alpha \geq 0. \tag{П.5}$$

При этом тождество (П.4) окончательно может быть записано в виде

$$\int\limits_{D_1}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(t,v(t'),v_t(t'))\frac{\partial z_k(t)}{\partial t_j}\frac{\partial \varphi_k(t)}{\partial t_i}+\left[\sum_{i=1}^{n}\overline{b}_i(t,v(t'),v_t(t'))\frac{\partial z_k(t)}{\partial t_i}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,\overline{c}(t,v(t'))z_k(t)-\overline{f}(t,v(t'))\right]\varphi_k(t)\right\}dt=0,\quad k=1,2,$$

для любых $\varphi_1(t)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_1)$ и $\varphi_2(t)\in W_2^1(D_1)$, где $z_1(t)\,\overset{\circ}{W}{}_2^1(D_1)$, $z_2(t)W_2^1(D_1)$ — решения интегрального тождества (П.4). Здесь приняты следующие обозначения:

$$\overline{a}_{ij}(t,v(t'),v_t(t'))=a_{ij}(t',t_nv(t')),$$

$$\bar{a}_{in}(t,v(t'),v_t(t'))=a_{in}^0(t)\frac{1}{v(t')}-\sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}^0(t)\frac{t_n}{v(t')}\frac{\partial v(t')}{\partial t_j},$$

$$\bar{a}_{nn}(t,v(t'),v_t(t'))=\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}^0(t)\frac{t_n^2}{v^2(t')}\frac{\partial v(t')}{\partial t_i}\cdot\frac{\partial v(t')}{\partial t_j}-$$

$$-\sum_{j=1}^{n-1}a_{nj}^0(t)\frac{t_n}{v^2(t')}\frac{\partial v(t')}{\partial t_j}-\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}^0(t)\frac{t_n}{v^2(t'')}\cdot\frac{\partial v(t')}{\partial t_i},$$

$$\bar{b}_i(t,v(t'),v_t(t'))=b_i^0(t)=b_i(t',t_nv(t')),$$

$$\bar{b}_n(t,v(t'),v_t(t'))=b_n^0(t)\frac{1}{v(t')}-\sum_{i=1}^{n-1}b_i^0(t)\frac{t_n}{v(t')}\frac{\partial v(t')}{\partial t_i},$$

$$\bar{c}(t,v(t'),v_y(t''))=c^0(t)=c(t',t_nv(t')),$$

$$\bar{f}(t,v(t'),v_t(t'))=f^0(t)=f(t',t_nv(y')),\quad i=\overline{1,n-1}.$$

Нетрудно убедиться, что последнее тождество является интегральным тождеством для решения следующих краевых задач для эллиптического уравнения с управлениями в коэффициентах:

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t_i}\left(\overline{a}_{ij}(t,v(t'),v_t(t'))\frac{\partial z_k(t)}{\partial t_j}\right)+$$

(П.6)

$$+\sum_{i=1}^{n}\overline{b}_i(t,v(t'),v_t(t'))\frac{\partial z_k(t)}{\partial t_i}+\overline{c}(t,v(t'))z_k(t)=\overline{f}(t,v(t')),$$

(П.7)
$$z_1\big|_{\Gamma_1}=\frac{\partial z_2}{\partial N}\bigg|_{\Gamma_1}=0,\quad k=1,2.$$

Следовательно, исходная задача оптимального управления границей области после преобразования, указанного выше, системы координат сводится к задаче об оптимальном управлении в коэффициентах эллиптического уравнения (П.6) в области D_1 с граничными условиями (П.7) и с функционалом качества (П.5), который минимизируется на множестве допустимых управлений V_1. Для этой задачи выполняются все условия теоремы 2. Из этой теоремы следует справедливость утверждения теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
2. *Леонс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
3. *Искендеров А.Д.* О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики. М.: Наука. ДАН СССР. Т. 274. № 3. 1984. С. 531–535.
4. *Iskenderov A.D.* On conditional well-posedness of problems with an unknown boundary of the domain // Soviet. Math. Dokl. 1991. V. 42. No. 2. P. 588–592.
5. *Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я., Мусаева М.А.* Идентификация квантовых потенциалов. Баку: Чашыоглы, 2012.
6. *Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я.* Оптимальное управление нелинейными квантомеханическими системами // АиТ. 1989. № 12. С. 27–38.

   Iskenderov A.D., Yadubov G.Ya. Optimal Control of Nonlinear Quantum-Mechanical Systems // Autom. Remote Control. 1989. V. 50. No. 12. P. 1631–1641.
7. *Искендеров А.Д., Гамидов Р.А.* Оптимальная идентификация коэффициентов эллиптических уравнений // АиТ. 2011. № 12. С. 144–156.

   Iskenderov A.D., Gamidov R.A. Optimal Identification of Coefficients of Elliptic Equations // Automat. Remote Control. 2011. V. 72. No. 12. P. 2553–2563.
8. *Баничук Н.Б.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980.
9. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
10. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
11. Функциональный анализ. Справочная математическая литература. М.: Наука, 1972.
12. *Gaebel M.* On the existence of optimal control // Math. Nachr. 1979. V. 93. P. 67–73.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Хрусталевым.

Поступила в редакцию 03.11.2018

После доработки 08.12.2019

Принята к публикации 30.01.2020