

© 2020 г. Б.Р. АНДРИЕВСКИЙ, д-р техн. наук (boris.andrievsky@gmail.com)
(Институт проблем машиноведения РАН;
Санкт-Петербургский государственный университет;
Балтийский государственный технический университет,
Санкт-Петербург, Россия),
И.Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук (cainenash@mail.ru)
(Институт проблем машиноведения РАН;
Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия)

НАБЛЮДАТЕЛИ ВОЗМУЩЕНИЙ: МЕТОДЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ. ЧАСТЬ 1. МЕТОДЫ¹

Обзор посвящен изложению истории развития и современного состояния теоретических методов построения наблюдателей возмущений, появление которых в теории и практике управления восходит к середине 60-х гг. прошлого века и связано с расширением алгебраических методов синтеза регуляторов, появлением компьютерно-ориентированных процедур синтеза и усложнением круга решаемых задач и стремлением оптимизировать процесс управления. В обзоре описываются наблюдатели гармонических возмущений, излагается метод внутренней модели, рассматриваются наблюдатели ограниченных возмущений и описываются методы оценки возмущений с использованием вспомогательных фильтров в форме передаточных функций и наблюдателей состояния.

Ключевые слова: возмущения, оценивание, наблюдатель.

DOI: 10.31857/S0005231020090019

1. Введение

История появления наблюдателей возмущений в теории и практике управления восходит к середине 60-х гг. XX в. и связана с расширением алгебраических методов синтеза регуляторов, появлению компьютерно-ориентированных процедур синтеза, с усложнением круга решаемых задач и стремлением оптимизировать процесс управления. В теории оптимального управления стало уделяться все большее внимание решению таких сложных задач, как управление нелинейными и многосвязными (ММО) системами, а используемые в то время методы управления часто оказывались более чувствительными к возмущениям и помехам, чем классические [1]. В начале 1970-х гг. появились многие публикации о неудаче в применении имеющихся методов

¹ Результаты разделов 1–4 получены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-38-20037). Результаты раздела 5 получены в ИПМаш РАН в рамках госзадания Минобрнауки РФ (Пер. № НИОКТР АААА-А19-119120290136-9).

оптимального управления из-за отсутствия робастности синтезированных регуляторов [2–4]. Решением явилось понимание важности учета при синтезе регуляторов существенных возмущений, что в 1970-х гг. инициировало разработку методов *робастного управления* [2, 5–7]. Для снижения чувствительности к возмущениям обычных наблюдателей состояния (Калмана, Луенбергера) в то время были предложены робастные варианты наблюдателей, учитывающие внешние неизмеряемые возмущения. Сюда же можно отнести и наблюдателей неизвестных входных сигналов [1, 8–15]. В настоящее время робастность по отношению к возмущениям и помехам, как и выполнение требований устойчивости и качества работы системы, стали ключевой задачей синтеза регуляторов в обратной связи [1]. Как хорошо известно и из классической теории управления, робастность по отношению к возмущениям может достигаться подавлением влияния возмущений обратной связью или их компенсацией в разомкнутом контуре [16–18]. Возможно также *комбинированное управление*, сочетающее оба метода [19, гл. 9].

Поскольку в рассматриваемых в данном обзоре публикациях принято, что возмущения непосредственно не измеряются, то компенсация в разомкнутом контуре становится подавлением возмущений по измерениям выхода, т.е. также с помощью обратной связи. В обзорах [20, 21] аннотированы появившиеся за период 1980–1998 гг. публикации по оцениванию изменяющихся во времени входных сигналов (в том числе и возмущений) для различных классов динамических систем.

К публикациям по проблеме идентификации (восстановления) нестационарного входного сигнала, действующего на динамический объект относятся публикации по аппроксимационным методам идентификации с использованием глобальной аппроксимации [22–25], локальной аппроксимации [26–29], по методам на основе теории инвариантных наблюдателей [30, 31], теории обращения и смежных подходов [32–35] и некоторые другие публикации [36–39].

Чтобы преодолеть проблему, возникающую при невозможности непосредственного измерения возмущений для их компенсации в разомкнутом контуре, разработаны наблюдатели, позволяющие оценивать возмущения на основе доступных измерению переменных состояния объекта и модели его динамики. Робастность регулятора достигается использованием оценок возмущений вместо их истинных значений. Тем самым неявно синтезируется регулятор в обратной связи. Поэтому для задач подавления неизмеряемых возмущений разница между указанными двумя подходами имеет методический характер, относящийся больше к способу синтеза регулятора, а не к свойствам полученной системы. Поскольку для синтеза наблюдателя возмущений используется их представление как процесс на выходе некоторой динамической системы, которая дополняет модель самого объекта управления, то в большом числе публикаций такая структура трактуется в качестве реализации “*принципа внутренней модели*” (англ. — *Internal Model Principle*), см., например, [1, 6, 13, 17, 40–52].

Методы синтеза наблюдателей возмущений получили дальнейшее развитие в направлениях применения адаптивного подхода [48, 51, 53–64], скользящих режимов [65–69], нелинейных наблюдателей [70, 71], наблюдателей для объектов с запаздыванием [57, 59, 60, 63, 72–79] и других. Следует отметить,

что задача оценивания и подавления возмущений может иметь более широкое применение, чем просто парирование влияния внешней среды: под возмущениями можно также понимать неопределенность параметров объекта, несоответствие принятой модели динамики объекта его поведению и действие других факторов. Подавление таких возмущений позволяет повысить робастность системы управления по отношению к данным условиям [80].

В данной части обзора приводятся сведения о теоретических результатах по наблюдателям возмущений. Оценка возмущений с использованием наблюдателей состояния описывается в разделе 2. Оценке возмущений с использованием вспомогательных фильтров в форме передаточных функций посвящен раздел 3. Наблюдателям ограниченных возмущений посвящен раздел 4. В разделе 5 описываются наблюдатели гармонических возмущений и связанный с ними метод внутренней модели.

Практическому применению наблюдателей возмущений будет посвящена следующая часть обзора [81].

В статье используются следующие обозначения и аббревиатуры: \mathbb{R} — множество вещественных чисел, \mathbb{C} — множество комплексных чисел, ОУ — объект управления, ПФ — передаточная функция, ИПВ — инвариантные по времени (системы) — системы с постоянными параметрами. Для таких систем в литературе используется также термин “стационарные системы”. ЛМН — линейное матричное неравенство (англ. — *Linear Matrix Inequality*, LMI), SISO системы — системы со скалярными входами и выходами (англ. — *Single-Input, Single-Output*), МИМО системы — системы с векторными входами и выходами (англ. — *Multiple-Input, Multiple-Output*). Для SISO и МИМО систем в отечественной литературе часто используются термины “одноканальные” (“одно-связные”) или соответственно “многоканальные” (“много-связные”) системы.

2. Оценка возмущений с использованием наблюдателей состояния

Для решения поставленной задачи — оценивания и компенсации аддитивных возмущений в течение более 60-ти лет известен подход, связанный с применением *наблюдателей состояния* (а в стохастической постановке — *оптимальных фильтров Калмана-Бьюси*), см., например, [82–88]. Приведем краткие сведения.

В реальных условиях измерение вектора состояния ОУ, как правило, неосуществимо из-за необходимости установки датчиков в труднодоступных местах, измерения производных высоких порядков и т.д. Еще более сложной задачей является измерение возмущений. Преодолеть (или уменьшить) эти трудности можно, если наиболее полно использовать имеющуюся априорную информацию о модели объекта и текущие измерения его входов и выходов. С этой целью в систему управления вводится подсистема (алгоритм) оценивания состояния объекта и возмущений. Рассматриваемая задача оценивания состояния системы по доступной текущей информации о ее входах и выходах принципиально разрешима, если имеется взаимно однозначное соответствие между переменными вход-выход и состоянием объекта. Это соответствие имеется для полностью наблюдаемых объектов [84–87, 89, 90]. При этом предполагается, что имеется достаточно полная априорная информация об объекте

в виде его математической модели и значений параметров. Задачи оценивания при неполной априорной информации относятся к *робастным* [9, 91–93] или к *адаптивным* [64, 85, 89, 91, 94, 95].

Рассмотрим модель ОУ в виде уравнений состояния

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + d(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + v(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0. \end{aligned}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния объекта; $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — входной и выходной векторы; $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — известные матричные функции. Объект подвержен действию *возмущений* $d(t)$ и *шума (погрешности) измерений* $v(t)$. Во время работы системы датчиками измеряются переменные $u(t)$, $y(t)$, а переменные $x(t)$, $d(t)$, $v(t)$ — не измеряются. Рассматривается задача получения *оценки состояния объекта* $\hat{x}(t)$, в некотором смысле близкой к $x(t)$. Для полностью наблюдаемого ИПВ объекта при отсутствии возмущений и шумов измерения можно получить асимптотически точную оценку состояния с любым заданным временем переходного процесса. Более того, полная наблюдаемость теоретически позволяет построить алгоритм оценивания, обладающий конечным временем сходимости оценок состояния. Влияние возмущений и шумов измерения приводит к появлению ошибок оценивания.

Наблюдатель состояния (идентификатор состояния, наблюдающее устройство, наблюдатель) можно представить в виде модели объекта управления, на вход которой поступает то же управляющее воздействие, что и на объект управления, и дополнительный сигнал коррекции (обратной связи), который получается из невязки между выходами объекта и модели. Для линейных систем наблюдатель описывается уравнением [82–88]

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + L(t)(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) &= C(t)\hat{x}(t), \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0, \quad t \geq t_0. \end{aligned}$$

Здесь $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния наблюдателя, служащий оценкой состояния объекта; $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^l$ — вектор выхода; $L(t)$ — подлежащая выбору при синтезе $(n \times l)$ -матрица коэффициентов обратной связи.

У наблюдателя (2.2) размерность вектора состояния $\hat{x}(t)$ такая же, как и у объекта управления (так называемый *наблюдатель полного порядка*, или *наблюдатель Калмана*), и равна n . Порядок наблюдателя можно понизить, используя непосредственно содержащуюся в выходных переменных информацию о состоянии объекта. Это дает возможность построить алгоритм оценивания порядка $n - p$, где $p = \text{rank } C$. Такие наблюдатели пониженного порядка часто называются *наблюдателями Луенбергера* [82–85]. Известны и наблюдатели повышенного порядка — *адаптивные наблюдатели* [64, 85, 89, 94, 95].

Рассмотрим теперь *ошибку оценивания* $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Вычитая из (2.1) уравнение (2.2), получим

$$(2.3) \quad \dot{\varepsilon}(t) = (A(t) - L(t)C(t))\varepsilon(t) + d(t) - L(t)v(t), \quad \varepsilon(t_0) = \varepsilon_0, \quad t \geq t_0.$$

Как видно из (2.3), источниками ошибки $\varepsilon(t)$ являются начальное рассогласование $\varepsilon_0 = x_0 - \hat{x}_0$, возмущение $d(t)$ и помеха измерений $v(t)$. Динамика переходного процесса $\varepsilon(t)$ определяется матрицей $A_{\text{obs}}(t) = A(t) - L(t)C(t)$.

Если матрица A_{obs} постоянна (не меняется со временем), то динамика $\varepsilon(t)$ определяется ее собственными числами. Если эти собственные числа имеют отрицательные вещественные части, а возмущения $d(t)$ и шумы $v(t)$ отсутствуют, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$ для любых начальных значений x_0, \hat{x}_0 . Матрица A_{obs} зависит от A, C и от выбираемой при синтезе матрицы L . Как известно [84–87, 90], для полностью наблюдаемого объекта всегда имеется такая матрица L , что собственные числа матрицы A_{obs} будут заданными. Матрица L влияет и на точность процесса оценивания при внешних воздействиях. Как видно из (2.3), это влияние оказывается разным по отношению к возмущениям $d(t)$, с одной стороны, и помехам измерений $v(t)$ — с другой. Поэтому при определении L следует учитывать характеристики внешних воздействий, обеспечивая компромисс между требованиями быстродействия и точности системы. Обычно повышение быстродействия связано с увеличением элементов матрицы L и, следовательно, с подавлением влияния возмущений и усилением действия помех измерения. Для более детального анализа можно использовать передаточные функции по ошибке от возмущений $W_d^\varepsilon(s)$ и помех $W_v^\varepsilon(s)$, определяемые формулами:

$$(2.4) \quad W_d^\varepsilon(s) = (s\mathbf{I}_n - A + LC)^{-1}, \quad W_v^\varepsilon(s) = -(s\mathbf{I}_n - A + LC)^{-1}L.$$

Оптимальный в стохастическом смысле выбор матрицы $L(t)$ приводит к *оптимальному фильтру Калмана–Бьюси* [86].

Перейдем к задаче оценивания возмущений и помех. Как видно из (2.3), неизмеряемые внешние воздействия (возмущения и помехи) приводят к появлению дополнительных составляющих ошибки оценивания переменных состояния и снижают точность системы управления. Уменьшить их влияние можно путем совместного оценивания состояния ОУ и неизмеряемых внешних воздействий.

Основная идея использования наблюдателей для оценивания возмущений и помех измерения состоит в следующем [84, 85, 96]. Для внешних воздействий строится некоторая математическая модель (“*модель внешней среды*”, англ. “*internal model of disturbances*”) [6, 13, 17, 41–44]. В этой модели возмущения обычно представляются как решения системы однородных дифференциальных (или разностных) уравнений с известными коэффициентами и неизвестными начальными условиями, в которых и содержится вся неопределенность относительно внешних воздействий². Затем модель внешних воздействий объединяется с моделью объекта управления, и для полученной *расширенной системы* строится наблюдатель. Полученные с помощью наблюдателя оценки содержат как собственно оценки состояния объекта, так и оценки внешних воздействий. Естественно, что для этого требуется полная наблюдаемость расширенной системы.

Подход к синтезу систем управления на основе постулирования динамических моделей для отдельных подсистем и сигналов нашел широкое применение и называется “*принципом внутренних моделей*” (“*internal model principle*”). Для построения эффективных алгоритмов проектирования, оценива-

² Случай неизвестных параметров модели среды рассматривается в рамках *теории адаптивного оценивания* [56, 58, 64, 85, 87–89, 95, 97].

ния, управления системами модели в виде уравнений состояния могут задаваться не только для возмущающих воздействий, но и для помех измерений, командных сигналов (“*эталонные модели*”), динамики изменения параметров объекта и т.д.

Процедура синтеза выглядит достаточно просто, если внешние процессы можно представить как *квазимногочлены* — выражения вида $\sum_{i=1}^N e^{\lambda_i t} P_i(t)$, где $\lambda_i \in \mathbb{C}$ — известные постоянные, $P_i(t)$ — многочлены с заданными коэффициентами [85, 98, 99]. Сюда относятся степенные функции, гармоники с заданной частотой, экспоненты с заданным показателем затухания, произведения гармоник на экспоненты и их линейные комбинации. Рассмотрим процедуру оценивания для этого случая более подробно.

Пусть внешние воздействия $d(t)$, $v(t)$ можно представить в виде процессов на выходе линейной системы, заданной уравнениями

$$(2.5) \quad \dot{x}_s(t) = A_s(t)x_s(t), \quad y_s(t) = C_s x_s(t), \quad x_s(t_0) = x_{s_0}, \quad t \geq t_0.$$

Здесь $x_s(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$ — вектор состояния “среды”, $y_s(t) \in \mathbb{R}^{n+l}$ — выход модели источника возмущений — вектор внешних по отношению к объекту воздействий, $y_s(t) = \text{col} \{d(t), v(t)\}$; A_s, C_s — известные матрицы; $C_s = \begin{bmatrix} C_d \\ C_v \end{bmatrix}$; C_d, C_v — подматрицы размеров $n \times n_s, l \times n_s$, определяющие связь между состоянием $x_s(t)$ модели внешних воздействий, возмущениями $d(t)$ и помехами $v(t)$ в (2.1). Начальное состояние x_{s_0} системы (2.5) неизвестно. Введем расширенный вектор состояния, включающий состояние объекта и среды: $\bar{x}(t) = \text{col} \{x(t), x_s(t)\} \in \mathbb{R}^{n+n_s}$. Объединяя уравнения (2.1), (2.5), получим уравнения расширенной системы в виде

$$(2.6) \quad \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t), \quad y(t) = \bar{C}\bar{x}(t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad t \geq t_0,$$

в которых матрицы $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ имеют следующую блочную структуру:

$$(2.7) \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A & C_d \\ \mathbf{0}_{n_s \times n} & A_s \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ \mathbf{0}_{n_s \times m} \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [C, C_v].$$

Расширенная система (2.6) рассматривается как некоторый новый объект порядка $\bar{n} = n + n_s$, для которого строится наблюдатель (2.2).

Рассмотрим возможность приведения системы с компенсацией возмущения с помощью наблюдателя (2.2) для расширенной системы (2.6) с “внутренней моделью” возмущений [6, 13, 17, 41–44] к традиционному виду с корректирующими звеньями в прямой цепи и местной корректирующей обратной связью [19, 100–102], аналогичным (3.2). Для определенности будем считать, что возмущение $d(t)$ — скалярная переменная, действующая аддитивно со скалярным управлением $u(t)$. Структурная схема системы представлена на рис. 1.

Здесь через $u_r(t)$ обозначено воздействие, вырабатываемое регулятором с ПФ $R(s)$ в главной обратной связи, через $u(t)$ — сигнал управления, поступающий на объект с передаточной функцией (ПФ) $P(s)$, на который действу-

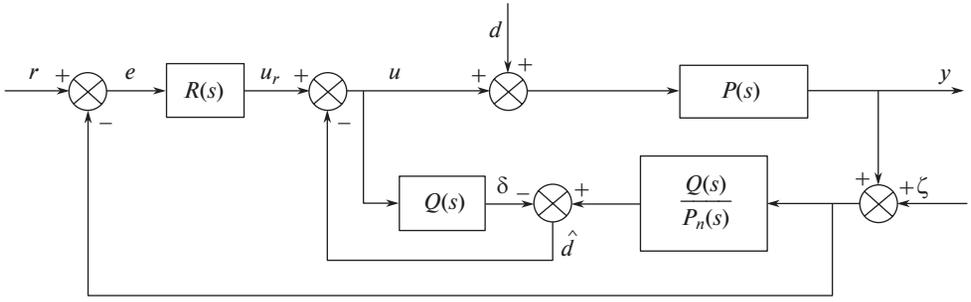


Рис. 1. Структура системы управления с компенсацией возмущений по [103].

ет аддитивное возмущение $d(t)$, которое считается низкочастотным и описывает как воздействие со стороны среды, так и нелинейность и неопределенность модели ОУ. (Стоит заметить, что при неопределенности и нелинейности ОУ $d(t)$ зависит от его состояния, что следует учитывать при анализе.) Выход объекта $y(t)$ измеряется вместе с аддитивным “шумом измерения” $\zeta(t)$, который предполагается высокочастотным. Через $\hat{d}(t)$ обозначена оценка возмущения, вырабатываемая как разность между фильтрованным сигналом управления $\delta = Q(s)u$ и выходом фильтра сигнала измерений с передаточной функцией $Q(s)P_n(s)^{-1}$. Передаточная функция $P_n(s)$ соответствует “номинальной” модели объекта. Управление $u(t)$ получается как разность между сигналом $u_r(t)$ и оценкой возмущений $\hat{d}(t)$.

Найдем связь между сигналами $u_r(t)$ (выходом регулятора в цепи главной обратной связи, $v(t) = y(t) + \zeta(t)$ (сигналом измерений выхода), с одной стороны, и управлением $u(t)$ — с другой. В качестве примера, используем следующие приведенные в [103] выражения для передаточных функций:

$$P_n(s) = \frac{k_0}{(Ts + 1)s}, \quad R(s) = \frac{k_D s^2 + k_P s + k_I}{s}, \quad Q(s) = \frac{1}{\tau s^2 + 2\tau s + 1}.$$

При синтезе наблюдателя для расширенной системы (2.6) возмущение $d(t)$ считаем неизвестной постоянной величиной: $\dot{d}(t) = 0$, а модель шума измерений $\zeta(t)$ в процесс оценивания включать не будем.

Для ОУ, имеющего ПФ $P_n(s) = \frac{k_0}{(Ts+1)s}$, запишем следующие уравнения состояния в канонической форме фазовой переменной [84, 85]:

$$(2.8) \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), & y(t) = x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = T^{-1}(-x_2(t) + k_0(u(t) + d(t))). \end{cases}$$

Введем матрицу (вектор-строку) $\bar{C}_d \in \mathbb{R}^{1 \times n_s}$ так, что для расширенного наблюдателя имеет место $\hat{d}(t) = \bar{C}_d \hat{x}(t)$. (В рассмотренном выше примере, так как $\bar{d}(t) = \hat{x}_3(t)$, выполнено $\bar{C}_d = [0 \ 0 \ 1]$.) По уравнениям состояния наблюдателя расширенной системы с матрицами (2.7) и \bar{C}_d получим его передаточные функции $W_u^{\hat{d}}(s)$ — от сигнала управления u к оценке возмущения \hat{d} и

$W_v^{\hat{d}}(s)$ — от сигнала измерений $v = y + \zeta$ к \hat{d} . Получим

$$(2.9) \quad W_u^{\hat{d}}(s) = \bar{C}_d(s\mathbf{I} - A_{\text{obs}})^{-1}\bar{B}, \quad W_v^{\hat{d}}(s) = \bar{C}_d(s\mathbf{I} - A_{\text{obs}})^{-1}L.$$

Учитывая что $u(t) = u_r(t) - \hat{d}(t)$, запишем $(1 + W_u^{\hat{d}}(s))u = u_r - W_v^{\hat{d}}(s)v$, откуда следует что

$$(2.10) \quad W_1(s) = \frac{1}{1 + W_u^{\hat{d}}(s)}, \quad W_2(s) = \frac{W_v^{\hat{d}}(s)}{1 + W_u^{\hat{d}}(s)},$$

где $W_u^{\hat{d}}(s)$, $W_v^{\hat{d}}(s)$ приведены в (2.9).

В [104] рассмотрен синтез линейных регуляторов для линейных с постоянными параметрами (ИПВ, англ. — *linear time-invariant, LTI*) ОУ с векторными входом и выходом, обеспечивающих заданное расположение корней характеристического многочлена замкнутой системы, и асимптотическое подавление постоянных возмущений. Рассматриваются ОУ, заданные уравнениями состояния

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + d(t), \\ y(t) &= Cx(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \end{aligned}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ($m \leq n$), $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — входной и выходной векторы; A , B , C — матрицы соответствующих размеров. Принято, что $\text{rank } C = l$. Неизвестное и неизмеряемое возмущение $d(t) \in \mathbb{R}^n$ представляет собой сумму импульсных (δ -Дирака) или ступенчатых (*единичная функция Хевисайда* $1(t)$) вектор-функций, возникающих на ограниченном временном интервале, а именно: считается, что для некоторых натуральных p_1 , p_2 и положительных $T_1, T_2 < \infty$ выполнено

$$(2.12) \quad \begin{aligned} d(t) &= \sum_{i=1}^{p_1} d_i^1(t) \cdot 1(t - t_i^*) + \sum_{j=1}^{p_2} d_j^2 \cdot \delta(t - t_j^*), \\ 0 &\leq t_i^* \leq T_1 < \infty, \quad i = 1, \dots, p_1, \\ 0 &\leq t_j^* \leq T_2 < \infty, \quad j = 1, \dots, p_j, \end{aligned}$$

причем для вектор-функций $d_i^1(t) \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$(2.13) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} d_i^1(t) = \bar{d}_i^1, \quad \|\bar{d}_i^1\| < \infty.$$

Требуется найти минимальный реализуемый динамический ИПВ регулятор в обратной связи, решающий задачу *модального управления* [84–86, 89, 105], т.е. обеспечивающий заданное, с отрицательными вещественными частями расположение полюсов замкнутой системы (при естественных условиях комплексной сопряженности невещественных полюсов и полной управляемости ОУ) и асимптотическое стремление выхода $y(t)$ к нулю для всех возмущений $d(t)$ указанного класса.

Замечание 1. С нашей точки зрения, в обобщенном представлении возмущений (2.12) нет необходимости, и оно только усложняет восприятие основной идеи. Действительно, в силу свойств суперпозиции и инвариантности во времени ИПВ систем достаточно рассмотреть только случай $p_1 = p_2 = 1$ и совместить моменты времени t_0, t_1^*, t_2^* , полагая $t_0 = t_1^* = t_2^* = 0$. Кроме того, естественным образом (см., например, [85]) δ -образное воздействие $d_1^2 \cdot \delta(t)$ пересчитывается в начальные условия: $x(0_+) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = x_0 + d_1^2$, и затухание реакции $y(t)$ на такое возмущение тривиально следует из асимптотической устойчивости замкнутой системы. Следовательно, δ -образную компоненту возмущений можно не включать. Что касается компоненты $d_1^1(t) \cdot 1(t - t_1^*)$, то при $t_0 = t_1^* = 0$ выполнено $1(t - t_1^*) \equiv 1$, поэтому этот множитель можно не записывать. Таким образом, возмущение имеет смысл представить в виде $d(t) \equiv d_1^1(t)$ с условием (2.13). В силу этого условия $d_1^1(t)$ можно представить как сумму ограниченного затухающего сигнала и постоянной составляющей \bar{d}_i^1 . Поскольку реакция асимптотически устойчивой линейной системы на ограниченный затухающий сигнал тоже стремится к нулю, то указанное выше требование компенсации возмущений обеспечивается известным в классической теории управления свойством *астатизма по возмущению*, которое может быть обеспечено введением интегральной составляющей (И-, ПИ-, ПИД-регулятор) в закон управления [19, 102]. К такому управлению приводит и работа [104]. Некоторая специфика заключается в рассмотрении многосвязных (ММО) систем.

Основной результат работы [104] заключается в том, что искомый закон управления минимального порядка (равного l) имеет вид пропорциональной обратной связи по состоянию и интегральной — по выходу:

$$(2.14) \quad u(t) = K_1 x(t) + K_2 \int_0^t y(\tau) d\tau + u_0,$$

где $K_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times l}$ — матричные коэффициенты регулятора, значение вектора $u_0 \in \mathbb{R}^m$ несущественное (например, им могут быть начальные состояния интеграторов или приведенные ко входу системы δ -образные компоненты возмущения, см. замечание 1). Обратная связь по состоянию служит для получения желаемого расположения полюсов замкнутой системы, а интегральная составляющая от выхода $y(t)$ — для обеспечения *астатизма первого порядка* [19] по возмущению.

Коэффициенты K_1, K_2 должны быть выбраны на основе заданного спектра матрицы уравнений состояния расширенной (включающей интеграторы выхода) замкнутой системы

$$(2.15) \quad A^* = \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 \\ C & \mathbf{0}_{l \times l} \end{bmatrix}.$$

Матрица A^* уравнений состояния замкнутой системы вида (2.15) получается из (2.11), (2.14), если ввести для интеграторов в (2.14) вектор состояния

$v(t) \in \mathbb{R}^l$. Этот вектор подчиняется уравнению $\dot{v}(t) = y(t)$. Введением расширенного вектора состояния $\bar{x} = \text{col}\{x, v\}$ и после подстановки (2.14) в (2.11) получим указанную матрицу A^* уравнений состояния расширенной системы.

Показано [104, теорема 2], что задача разрешима, если выполнены следующие условия: пара (A, B) – управляема, и

$$(2.16) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & \mathbf{0}_{l \times l} \end{bmatrix} = n + l.$$

Как отмечено в [104], результат не изменится при отклонении параметров ОУ и регулятора, не нарушающего условий асимптотической устойчивости матрицы A^* . Показано, что при отсутствии вариаций матрицы C выполняется и условие (2.16). Свойство подавления постоянных возмущений независимо от параметров объекта типично для систем со скалярными входом и выходом (односвязные системы, англ. — *single-input single-output, SISO*) и с интегралом в контуре управления, так как оно является структурным (не зависящим от параметров) [19, 102]. От системы требуется только асимптотическая устойчивость.

Отметим, что при выполнении (2.16) возможна полная компенсация постоянного возмущения $d \in \mathbb{R}^n$ управлением $u \in \mathbb{R}^m$ меньшей размерности. В выполнении условия согласованности (которое имеет место при возмущении, действующем аддитивно управлению) тоже нет необходимости. В качестве примера рассмотрим систему

$$(2.17) \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + d_1, \\ \dot{x}_1(t) = -a_2x_1(t) - a_2x_1(t) + u(t) + d_2, \\ y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t), \end{cases}$$

$$(2.18) \quad u(t) = -k_1x_1(t) - k_2x_2(t) - k_I \int_0^t y(\tau) d\tau.$$

Легко получить, что выход замкнутой системы (2.17), (2.18) отвечает уравнению

$$(2.19) \quad \alpha(p)y(t) = \beta_1(p)d_1(t) + \beta_2(p)d_2(t),$$

где $\alpha(p)$, $\beta_1(p)$, $\beta_2(p)$ — многочлены от оператора дифференцирования $p = d/dt$:

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= p^3 + (a_1 + k_2)p^2 + (a_2 + k_1 + c_2k_I)p + c_1k_I, \\ \beta_1(p) &= c_1s^2 + (a_1c_1 - a_2c_2 + c_1k_2 - c_2k_1)p, \\ \beta_2(p) &= (c_1p + a_1c_1 - a_2c_2 + c_1k_2 - c_2k_1)p, \\ &\beta_1(p) = (c_2p + c_1)p. \end{aligned}$$

Условием разрешимости задачи в данном случае будет $c_1 \neq 0$, и поскольку $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0$, то вынужденная составляющая ошибки от постоянных возмущений d_1 , d_2 будет равна нулю. Если известны оценки \hat{d}_1 , \hat{d}_2 постоянных

возмущений d_1, d_2 , то эффекта их компенсации можно добиться заменой (или дополнением) интегральной составляющей в законе управления (2.18) компенсирующим сигналом

$$u_c = -\hat{d}_1(a_1c_1 - a_2c_2 + c_1k_2 - c_2k_1)c_1^{-1} - \hat{d}_2 \quad (c_1 \neq 0).$$

Заметим, что закон управления с компенсацией возмущений через u_c , в отличие от интегрального (2.18), чувствителен к отклонению параметров от расчетных. Кроме того, могут появиться проблемы с оценкой возмущений, так как ОУ (2.17), расширенный уравнениями внутренней модели $\dot{d}_1 = 0, \dot{d}_2 = 0$, при $a_1c_1 = a_2c_2$ не полностью наблюдаем по компоненте d_1 . Далее, при таком сочетании параметров возникает сложность в использовании наблюдателя при оценке состояния $x(t)$ для перехода от управления по состоянию (2.18) к управлению по выходу. Эти трудности устраняются использованием вместо (2.18) стандартного ПИ-регулятора $u(t) = -k_P y(t) - k_I \int_0^t y(\tau) d\tau$ (см., например, [19, 102]). ПИ-регулятор, в отличие от (2.18), не дает возможности обеспечить здесь заданное расположение полюсов замкнутой системы, но это требование имеет скорее академическое, чем практическое, значение при разработке систем управления.

В [40] получены необходимые и достаточные условия управления системой (2.11) линейным динамическим регулятором при действии неизмеряемых возмущений $d_1(t), \dots, d_n(t)$, которые можно представить в виде решений следующего однородного линейного дифференциального уравнения r -го порядка

$$(2.20) \quad d_k^{(r)}(t) + \alpha_r d_k^{(r-1)}(t) + \dots + \alpha_2 \dot{d}_k(t) + \alpha_1 d_k(t) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

с заданными коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ и неизвестными начальными условиями $d_k^{(r-1)}(0), \dots, \dot{d}_k(0), d_k(0)$, у которого все корни $\lambda_i, i = 1, \dots, r$, характеристического многочлена $\lambda^r + \alpha_r \lambda^{(r-1)} + \dots + \alpha_2 \lambda + \alpha_1$ имеют неотрицательные вещественные части, $\operatorname{Re} \lambda_i \geq 0$. Требуется, чтобы независимо от действующих на систему возмущений, ее выход $y(t) \in \mathbb{R}^l$ асимптотически приближался к вектор-функции $y^*(t) \in \mathbb{R}^l$, компоненты $y_k(t)$ которой известны заранее и удовлетворяют однородному линейному дифференциальному уравнению

$$(2.21) \quad y_k^{(r)}(t) + \alpha_r y_k^{(r-1)}(t) + \dots + \alpha_2 \dot{y}_k(t) + \alpha_1 y_k(t) = 0, \quad k = 1, \dots, l,$$

с известными начальными условиями $y_k^{(r-1)}(0), \dots, \dot{y}_k(0), y_k(0)$. Заметим, что характеристические многочлены “генераторов” возмущений (2.20) и задающего воздействия (2.21) совпадают, поэтому процессы $d_k(t)$ и $y_k(t)$ отличаются только начальными условиями.

Синтез регулятора выполняется так, чтобы либо оптимизировать заданный интегральный квадратичный функционал [86, 87, 95, 101], либо получить требуемое расположение полюсов замкнутой системы. Кроме того, обеспечивается ее полная управляемость. Как и в [104], закон управления в [40] содержит интегральную составляющую.

Условиями разрешимости задачи являются полная управляемость пары (A, B) и аналогичный публикации [104] ранговый критерий. Критерии, приведенные в [104], где рассмотрены постоянные возмущения, и в [12, 13], в которых принято что $\text{rank } C = n$, получаются из критерия [40] как частные случаи. Показано, что, как и в [40], полученная система робастна по отношению к вариациям параметров. Отметим, что, хотя описание возмущений в виде квазимногочленов (решения (2.20)) оправдано и часто используется на практике, представление программного воздействия $y^*(t)$ в форме (2.21) является довольно специфичным. В частности, указанный вид $y^*(t)$ не позволяет воспользоваться результатами [40] для задачи *слежения*, в которой поведение задающего воздействия заранее не известно [19].

Принцип внутренней модели работы [40] нашел применение в статье [106], которая посвящена классу *гибридных систем*, образованных семейством ИПВ подсистем (называемых *модами*), с дискретными событиями переключения из одной моды на другую. Рассматриваются *переключающиеся* (англ. — *switching*) системы, в которых переключение наступает в зависимости от текущего состояния системы. Ставится задача обеспечения асимптотического отслеживания периодических траекторий такими системами при условии, что динамика каждой моды линейна. В [106] показано, как обеспечить робастность асимптотического слежения по отношению к вариациям параметров у этого класса гибридных систем.

Задача построения робастных следящих систем (сервомеханизмов) рассматривается в [6, 107]. Получены необходимые и достаточные условия, а также дана характеристика всех робастных регуляторов, позволяющих осуществлять асимптотическое слежение, независимо от действующих на ОУ возмущений, погрешности измерения и изменения параметров объекта и регулятора.

Линейный объект управления с постоянными параметрами в [6] описывается следующими уравнениями состояния

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ed(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + Du(t) + Fd(t), \end{aligned}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — вектор выхода (подлежащая управлению переменная); A, B, C, D, E, F — матрицы соответствующих размеров; $d(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$ — вектор возмущений, содержащий как измеряемые, так и неизменяемые компоненты. Вводится *ошибка слежения* $e(t) = y(t) - y^*(t) \in \mathbb{R}^l$, где $y^*(t) \in \mathbb{R}^l$ — задающее (командное) воздействие. Предполагается, что вектор возмущений удовлетворяет однородному линейному дифференциальному уравнению

$$(2.23) \quad \dot{x}_s(t) = A_s(t)x_s(t), \quad d(t) = C_s x_s(t), \quad x_s(t_0) = x_{s_0}, \quad t \geq t_0.$$

Здесь $x_s(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$ — вектор состояния модели возмущений (см. также (2.5)–(2.7)). Пара (A_s, C_s) считается полностью наблюдаемой.

Замечание 2. Наблюдаемость пары (A_s, C_s) с первого взгляда кажется естественным требованием, но заметим, что ее отсутствие говорит о том, что

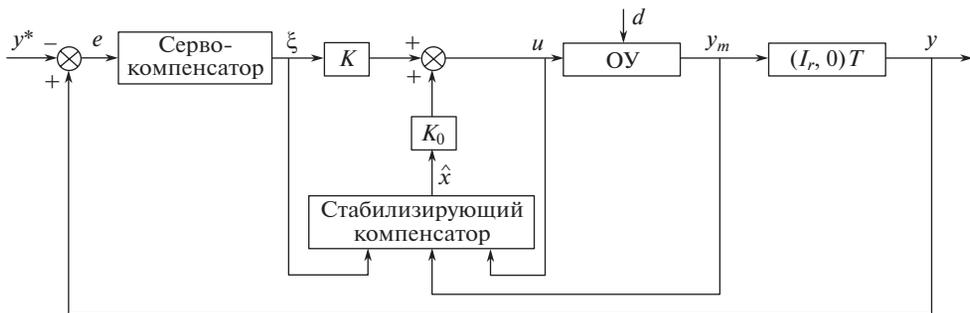


Рис. 2. Обобщенная структурная схема робастного серворегулятора по [6].

некоторые компоненты x_s или их комбинации не участвуют в формировании возмущения. Следовательно, такая модель была бы избыточной. Выбор же этой модели определяется не физическими свойствами среды — источника возмущений, а возлагается на разработчика системы управления.

Предполагается, кроме того, что задающее воздействие $y^*(t) \in \mathbb{R}^l$ также подчиняется аналогичному однородному уравнению состояния порядка n_y с матрицами A_y, C_y соответствующих размеров. Пара (A_y, C_y) считается наблюдаемой, а начальное значение вектора состояния генератора задающего воздействия — известным (тем самым заранее известно и $y^*(t)$). Принято, что измеряется только сигнал $y_m(t) = C_m(t)x(t) + D_mu(t) + F_md(t)$. При этом требуется с помощью регулятора обеспечить асимптотическое стремление к нулю ошибки $e(t)$ при всех начальных значениях состояния объекта и “генераторов” возмущающего и задающего воздействий.

Далее в [6] вводится новый тип компенсатора, называемый *сервокомпенсатором*, который соответствует интегральному регулятору в классической теории управления и в обобщенном виде описывается уравнением $\dot{\xi} = S\xi + Be, e = y - y^*$, где S, B — матрицы соответствующих размеров, определяемые при синтезе, ξ — выход сервокомпенсатора. Второй структурой, входящей в серворегулятор, является *стабилизирующий компенсатор* — динамический регулятор, обеспечивающий устойчивость замкнутой системы. Его выход — оценка \hat{x} состояния ОУ, полученная с помощью наблюдателя по входным сигналам y_m, u, ξ . Окончательно управление u имеет вид $u = K_0\hat{x} + K\xi$ с некоторыми выбираемыми при синтезе матрицами K_0, K . Обобщенная структурная схема робастного серворегулятора по [6] представлена на рис. 2. Эта структура объединяет идею введения в закон управления интеграла от ошибки (развивая результаты [40, 104]) и метод внутренней модели в сочетании с наблюдателем для оценивания состояния ОУ и источников входных сигналов.

Замечание 3. Заметим, что в [6] предполагается, что $y^*(t)$ известно заранее. Это допустимо для систем программного регулирования [19], но не для следящих систем, у которых $y^*(t)$ известно только для моментов времени $s \leq t$. Кроме того, в [6, 40, 107] и ряде следующих работ рассматривается весьма узкий класс функций $y^*(t)$ (“квазимногочлены” [98, 99]), в то время как для сервоприводов $y^*(t)$ может иметь сложный, в том числе случайный харак-

тер. Исходя из принципа суперпозиции можно заметить, что рассмотренные в этих работах регуляторы обеспечивают инвариантность (стремление ошибки регулирования к нулю) только частично, а именно для тех составляющих внешних воздействий, которые описываются принятыми моделями.

Работа [108] посвящена наблюдателю возмущений, названному “оценивающий возмущения фильтр” (англ. — *Disturbance Estimating Filter*, DEO). В [108] отмечено, что преимуществом наблюдателя возмущений является то, что он компенсирует влияние возмущений в системе обычным регулятором в обратной связи без влияния на качество процессов в системе. Это *свойство разделения* обеспечивает два независимых этапа синтеза всего регулятора: один этап — обеспечение качества системы, а другой — для подавления помех. Через несколько лет после введения наблюдателя возмущения этот подход привел к концепции регулятора с “двумя степенями свободы” (*2-dof*), см., например, [109–111]. В [108] показано, что свойства подавления возмущений *2-dof*-регулятора для линейных объектов и некоторых методологий проектирования эквивалентны давно известному наблюдателю возмущений Джонсона (*Johnson*), названному “наблюдателем неизвестных входных возмущений” (англ. — *Unknown Input Disturbance Observer*, UIDO) [14]. Авторы [108] отмечают, что в силу эквивалентности результатов термины UIDO и DEO относятся только к методикам синтеза, а не к наблюдателям как таковым. В [108] показана также эквивалентность регуляторов, основанных на наблюдателях возмущений и на обеспечении пассивности. С этой целью показано, как наблюдатель возмущений может быть преобразован к классической структуре систем с обратной связью, откуда следует, что любой метод проектирования регуляторов с обратной связью можно использовать для синтеза наблюдателей возмущений.

Структура наблюдателя возмущений в [108] идентична внутреннему контуру системы управления с компенсацией возмущений работы [103], показанной на рис. 1³. В [108, 112] приведена эквивалентная система наблюдателя возмущений, соответствующая введению в контур управления последовательного корректирующего звена и местной обратной связи объекта управления, идентичная представленной уравнениями (3.2) (в [108] сигнал местной обратной связи поступает на вход последовательного корректирующего звена, что приводит к ПФ обратной связи $W_2'(s) = Q(s)P_n(s)^{-1}$, не такой, как в (3.2). Принципиального значения это не имеет). В [108] обсуждается выбор фильтра $Q(s)$, при котором обеспечивается подавление возмущений, которые могут быть представлены решениями однородного уравнения $p^{n_j}d(t) = 0$ (где $p = d/dt$), т.е. многочленов от t степени $n_j - 1$. Со ссылкой на метод внутренней модели в изложении [43] указано, что тогда ПФ фильтра должна иметь вид

$$(2.24) \quad Q(s) = \frac{1 + \sum_{m=1}^{n_q - \rho_q} \alpha_m s^m}{1 + \sum_{m=1}^{n_q} \alpha_m s^m},$$

³ Точнее говоря, структура [103] идентична структуре [108] как хронологически более ранней.

где ρ_q — относительная степень $Q(s)$, выбор которой определяется требованием неотрицательности относительной степени $Q(s)P_n^{-1}(s)$. Коэффициенты α_m , $m = 1, \dots, n_q$, должны обеспечивать гурвицевость многочлена $1 + \sum_{m=1}^{n_q} \alpha_m s^m$. Кажущаяся разница с [103] при определении $Q(s)$ состоит в том, что в последней работе используется ПИ-регулятор в основном контуре обратной связи, что и обеспечивает астатизм по возмущению. В [108] этого регулятора нет и астатизм достигается выбором $Q(s)$. При таком виде $Q(s)$ выполнено

$$(2.25) \quad \frac{1}{1 - Q(s)} = \frac{1 + \sum_{m=1}^{n_q} a_m s^m}{s^{n_j} \left(a_{n_j} + \sum_{m=1}^{\rho_q - 1} a_{n_j + m} s^m \right)},$$

где выполнено $n_j = n_q - \rho_q + 1$. Как видно из (2.25), для компенсации степенных возмущений, последовательное корректирующее звено в регуляторе должно содержать n_j “чистых” интеграторов, что полностью согласуется с классическим методом обеспечения астатизма системы по отношению к возмущениям [19, гл. 9]. Авторы [108] отмечают, что структура (2.24) была изложена ранее в [109, 110, 113], а в своей работе они предлагают новую (по отношению к (2.24)) структуру, преимуществом которой является возможность ее применения к неминимально-фазовым объектам (см. замечание 4). С этой целью в [108] производится *сепарация* ПФ объекта управления, т.е. представление ее числителя произведением устойчивого $N_s(s)$ степени n_s и неустойчивого $N_u(s)$ степени $n_u = n - n_s$ многочленов:

$$(2.26) \quad P_n(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_u(s)N_s(s)}{D(s)}.$$

Тогда $Q(s)$ формируется в виде

$$(2.27) \quad Q(s) = \frac{1 + \sum_{m=1}^{n_j - 1} \alpha_m s^m + \sum_{m=1}^{n_u} g_m s^{n_j + m - 1}}{1 + \sum_{m=1}^{n_q} \alpha_m s^m}.$$

В этой структуре коэффициенты g_1, \dots, g_n выбираются так, чтобы числитель $Q(s)$ для некоторых r_0, \dots, r_{n-1} можно было представить в виде $N_u(s) \cdot (r_{n_j - 1} s^{n_j - 1} + \dots + r_1 s + r_0)$. Далее в [108] излагается пошаговая процедура синтеза наблюдателя возмущений с фильтром (2.27), продемонстрировано преобразование наблюдателя возмущений к форме системы с обратной связью, показана эквивалентность структур с DEF-наблюдателем и с UIDO-наблюдателем работы [14], обсуждается использование общих моделей возмущений, попадающих под определение “квазимногочленов” (т.е. решений (2.20)), в том числе гармонических процессов. Рассмотрено применение изложенных методов к синтезу систем управления роботами-манипуляторами с n степенями свободы и систем слежения.

3. Оценка возмущений с использованием вспомогательных фильтров в форме передаточных функций

В [103], основываясь на предложенном в [114, 115] подходе, рассматривается система с компенсацией возмущений, структурная схема которой представлена на рис. 1. Скорректированная система замыкается обратной связью по ошибке от задающего воздействия $r(t)$ через регулятор с ПФ $R(s)$. Заметим, что если шумы измерения отсутствуют, $\zeta \equiv 0$, а $P_n(s) \equiv P(s)$, то при устойчивости замкнутой системы по окончании переходных процессов сигнал управления $u(t)$ содержит слагаемое $-Q(s)d$, которое частично (в полосе пропускания частот фильтра $D(s)$) компенсирует возмущение $d(t)$. Выбор $D(s)$ производится таким образом, чтобы обеспечить реализуемость (отсутствие упрещения, т.е. “идеального дифференцирования”) у звена с ПФ $Q(s)P_n(s)^{-1}$, что достигается, если относительная степень (разность между порядками знаменателя и числителя) ПФ $Q(s)$ превосходит или равна относительной степени ПФ $P_n(s)$.

Нетрудно получить, что для номинальных значений параметров, при $P_n(s) \equiv P(s)$, выходной сигнал $y(t)$ ОУ определяется через входы выражением

$$(3.1) \quad y = P(s)u_r + P(s)(1 - Q(s))d + P(s)Q(s)\zeta.$$

С учетом замыкания системы главной обратной связью с регулятором $R(s)$ по окончании переходных процессов выход $y(t)$ выражается через внешние воздействия как

$$y = D(s)^{-1}((P(s)(1 - Q(s))d + (R(s) + Q(s))\zeta + R(s)r),$$

где

$$D(s) = 1 + R(s)P(s).$$

Отсюда видно, что в области частот ω , для которых $|Q(i\omega)| \ll 1$, происходит подавление шума измерений, а при $|Q(i\omega)| \approx 1$ — подавляется внешнее возмущение. Близкие соотношения (но с дополнительными искажениями) имеют место и при некотором отличии между ПФ $P(s)$ и $P_n(s)$. Изложенный подход, связанный с формированием полосы пропускания системы с подавлением возмущений и шумов в характерных для них областях частот, весьма распространен в инженерной практике (см., например, [19, 100–102]) и вряд ли представляет собой что-то принципиально новое. Очевидно, что рассматриваемую систему можно представить в виде, типичном для традиционных систем автоматического управления с последовательным корректирующим звеном и местной отрицательной обратной связью, охватывающей ОУ [19, 102], представив сигнал управления в виде $u = W_1(s)u_r - W_2(s)v$, где $v = y + \zeta$ — сигнал измерений выхода ОУ. Для рассматриваемой структуры выполнены выражения

$$(3.2) \quad W_1(s) = \frac{1}{1 - Q(s)}, \quad W_2(s) = \frac{Q(s)}{(1 - Q(s))P_n(s)}.$$

Замечание 4. Подход работы [103] можно рассматривать в качестве некоторой регулярной процедуры синтеза корректирующих звеньев систем управления. Надо, однако, учесть, что он непригоден (приводит к неустойчивости) для неминимально-фазовых ОУ (числитель ПФ $P_n(s)$ должен быть гурвицевым многочленом). Действительно, при $P(s) \equiv P_n(s)$ ПФ представленной на рис. 1 замкнутой системы от r к y содержит в качестве общих множителей числитель ПФ объекта $P_n(s)$, что говорит о неполной управляемости данной системы, а если этот множитель не гурвицев, то о ее нестабилизированности [84–86, 89, 90] (при любом выборе регулятора $R(s)$ замкнутая система будет неустойчивой).

4. Наблюдатели и оценка ограниченных возмущений

Для компенсации ограниченных возмущений в [116] предложен метод вспомогательного контура. Рассмотрим линейный ОУ

$$(4.1) \quad Q(p)y(t) = R(p)u(t) + f(t),$$

где $f(t)$ — ограниченная функция, операторы $Q(p)$ и $R(p)$ порядков n и m содержат неизвестные коэффициенты. Для получения информации о возмущении вводится вспомогательный контур (параллельная эталонная модель) в виде

$$(4.2) \quad Q_0(p)y_0(t) = R_0(p)u(t),$$

где $Q_0(p)$ и $R_0(p)$ — известные операторы порядков n и m . В силу уравнений (4.1) и (4.2) разность $e(t) = y(t) - y_0(t)$ можно переписать в виде

$$(4.3) \quad Q_0(p)e(t) = R_0(p)u(t) + \varphi(t),$$

откуда будет определено новое возмущение

$$\varphi(t) = \Delta R(p)u(t) - \Delta Q(p)y(t) + f(t),$$

которое включает в себя параметрическую неопределенность и сигнал $f(t)$. Если производные $y(t)$ измеряемы, то закон управления $u(t) = -\frac{Q_0(s)}{R_0(s)}e(t)$ обеспечит полную компенсацию параметрических и внешних возмущений. Если же производные $y(t)$ не измеряются, то используется закон управления $u(t) = -\frac{Q_0(s)}{R_0(s)}\hat{e}(t)$, где $\hat{e}(t)$ — оценка сигнала $e(t)$, полученная с помощью наблюдателя с большим коэффициентом усиления [117]

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}(t) &= G\hat{\xi}(t) + B(\hat{e}(t) - e(t)), \\ \hat{e}(t) &= L\hat{\xi}(t). \end{aligned}$$

Здесь $\xi \in \mathbb{R}^\rho$, $\rho = \deg Q(s) - \deg R(s)$ — относительная степень ОУ,

$$G = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} d_1 & \dots & d_\rho \\ \mu & \dots & \mu^\rho \end{bmatrix}^T,$$

d_1, \dots, d_ρ выбираются из условия гурвицевости матрицы $G - [d_1, \dots, d_\rho]^T L$, $L = [1, 0, \dots, 0]$. По сути, наблюдатель (4.4) является наблюдателем возмущений, поскольку сигнал $\xi(t)$ содержит информацию о новом возмущении $\varphi(t)$.

В [118] результат [116] обобщен для управления объектами с неизвестными параметрами, возмущениями и неизвестным переменным порядком ОУ. На базе [118] в [76–78] рассмотрена компенсация возмущений в динамических сетях, в том числе и сетях с коммуникационным запаздыванием.

В [72] рассмотрено применение метода [116] для компенсации возмущений в линейных объектах с запаздыванием в канале управления. В [119] предложена компенсация ограниченных возмущений вместе с заданным количеством производных в линейных объектах, которые могут быть неустойчивыми. Показано, что интегральный предиктор [120] на практике не может быть реализован точно, вследствие чего есть возможность компенсации возмущений в неустойчивых объектах только определенного класса.

В [121] предложен новый метод компенсации возмущений, основанный на схеме [116] и применении процедуры многошагового прогнозирования вектора состояния и возмущения (суб-предикторы состояния и возмущения). Показано, что такая схема позволяет управлять объектом с большей величиной возмущения, чем при использовании численной реализации интегрального предиктора [120]. Итак, рассматривается объект управления

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t-h) + Bf(t), \\ t &\geq 0, \quad u(\tau) = 0 \quad \text{при} \quad \tau < 0, \end{aligned}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — измеряемый вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — сигнал управления, $f(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение с ограниченными $r+3$ производными, $r \geq 0$ — параметр, который будет использоваться при синтезе алгоритма управления, $h > 0$ — известное время запаздывания, A и B — известные матрицы соответствующих размеров, пара (A, B) управляема и выполнено условие $B^+B = I$, B^+ — псевдообратная матрица для матрицы B . Схема управления состоит из:

1) субпредиктора вектора состояния

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{x}}_i(t) &= A\bar{x}_i(t) + D_i (\bar{x}_{i+1}(t) - \bar{x}_i(t - \bar{h})) + Bu_1(t - (i-1)\bar{h}), \\ i &= 1, \dots, M-1, \\ \dot{\bar{x}}_M(t) &= A\bar{x}_M(t) + D_M (x(t) - \bar{x}_M(t - \bar{h})) + Bu_1(t - (M-1)\bar{h}), \end{aligned}$$

где $\bar{x}_i(t) \in \mathbb{R}^n$, $\bar{h} = \frac{h}{M}$. Число M задается разработчиком, а матрицы D_i выбираются из условия устойчивости субпредиктора;

2) вспомогательного контура

$$(4.7) \quad \dot{e}_a(t) = Ae_a(t) - De_a(t-h) + Bu_2(t-h),$$

где $e_a(t) \in \mathbb{R}^n$;

3) субпредиктора возмущения

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(t + \hat{h}) &= \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \hat{f}(t - \hat{h}(j-1)), \\
 \tilde{f}(t + l\hat{h}) &= \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \tilde{f}(t - \hat{h}(j-l)) + \sum_{j=l}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \times \\
 (4.8) \quad &\quad \times \hat{f}(t - \hat{h}(j-l)), \quad l = 2, \dots, r+1 \\
 &\quad (\text{или } l = 2, \dots, N, \text{ если } N < r+2), \\
 \tilde{f}(t + k\hat{h}) &= \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \tilde{f}(t - \hat{h}(j-k)), \quad k = r+2, \dots, N \\
 &\quad (\text{если } N \geq r+2);
 \end{aligned}$$

4) закона управления

$$\begin{aligned}
 u(t) &= u_1(t) + u_2(t), \\
 (4.9) \quad u_1(t) &= -K\bar{x}_1(t), \\
 u_2(t) &= -\tilde{f}(t+h), \quad \hat{\xi}_i(t) = \frac{p}{\mu p + 1} \xi_i(t), \quad i = 1, \dots, n,
 \end{aligned}$$

где матрица K задается из условия гурвицевости матрицы $A - BK$, $\mu > 0$ — достаточно малое число.

В [122] решена задача компенсации возмущений в условиях ограничений на сигнал управления. Идея решения состоит в следующем. С одной стороны, выделяется информация о возмущении в виде некоторой доступной измерению функции (или ее оценки с помощью наблюдателя возмущений). Сигнал управления противоположен значению новой функции возмущения. С другой стороны, по условию задачи на сигнал управления наложены ограничения в виде насыщения. Следовательно, для решения задачи на функцию возмущения накладываются соответствующие ограничения.

Совершенно другой подход к компенсации возмущений рассмотрен в [123]. Здесь параметрические и внешние возмущения выделяются в виде новой функции. Для компенсации возмущений требуется существование правого делителя нуля матрицы управления, с помощью которого реализуется управление, инвариантное к возмущениям. Более общие условия существования инвариантного управления получены в [124] в виде так называемого “универсального регулятора”.

В [125] предложены методы каскадного синтеза наблюдателей состояний линейных и нелинейных динамических систем. При синтезе алгоритмов управления исходная динамическая система представляется в блочно-наблюдаемой форме. Затем используются алгоритмы с большим коэффициентом усиления в обратной связи и/или с разрывными управлениями. В отличие от других существующих схем управления здесь предлагается декомпозиция многомерной задачи синтеза корректирующих воздействий наблюдателя на независимые подсистемы меньшей размерности по сравнению с

исходной системой. Решена задача инвариантного управления по отношению к параметрической неопределенности и внешним возмущениям. В [66, 71, 125] также предложены наблюдатели возмущений. Остановимся более подробно на некоторых результатах по компенсации возмущений с использованием наблюдателей возмущений.

В [71, 125] предложен наблюдатель возмущений в нелинейных системах вида

$$(4.10) \quad \dot{x} = f(x, u) + Q(x)\eta,$$

где $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in U \subset \mathbb{R}^r$ — вектор управления, $\eta \in H \subset \mathbb{R}^p$ — вектор неконтролируемых внешних возмущений, $f(x, u)$ — вектор-функция, $Q(x)$ — нелинейная матрица соответствующих размеров. Если в системе доступна оценка вектора состояния $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, то возмущение можно оценить в виде

$$Q(x(t))\eta(t) = \left(\dot{\hat{x}}(t) - f(x(t), u(t)) \right).$$

В более общем виде в [71, 125] наблюдатель возмущений формируется в виде

$$\hat{\eta}(t) = \tilde{Q}^{-1}(x(t))(\tau(t)),$$

где $\mu_i \dot{\tau}_i = -\tau_i + v_i$, $i = 1, \dots, n$, $\mu_i > 0$, v — вектор разрывных корректирующих воздействий, полученный с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \hat{z} &= f(z, u) + v, \\ \dot{\varepsilon} &= f(x, u) - f(z, u) + Q(x)\eta - v, \\ v &= M \operatorname{sign} \varepsilon, \quad M > 0. \end{aligned}$$

В [66, 125] рассмотрен синтез наблюдателя возмущений для системы второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f(x, t) + b(x_1)u, \end{aligned}$$

где $x \in X \subset \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}$ — вектор управления, $b(x_1) \neq 0$ — известная функция, $f(x, u)$ — неизвестная ограниченная функция, которая зависит от внешних возмущений, причем \dot{f} — также ограниченная функция. Для решения задачи используется наблюдатель на скользящих режимах

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + v_1, \\ \dot{z}_2 &= b(x_1)u + v_2, \end{aligned}$$

где $\mu_2 \dot{\tau}_2 = -\tau_2 + v_2$, $v_1 = M_1 \sigma(k_1 \varepsilon_1)$, $v_2 = M_2 \sigma(k_2 v_1)$, μ_2, M_1, M_2, k_1 и k_2 — положительные константы, $\sigma(kx) = 2/(1 + e^{-kx}) - 1$, $k > 0$.

Достоинства алгоритмов компенсации ограниченных возмущений по сравнению с алгоритмами компенсации гармонических возмущений состоят в возможности рассмотрения более общих возмущений, что расширяет класс рассматриваемых задач, а также независимость структуры алгоритма от источника возмущений.

4.1. Динамическое восстановление входов

Работа [21], посвященная в основном идентификации нестационарных и нелинейных объектов, содержит раздел, относящийся к идентификации входных воздействий. Указано, что в [126] обсуждается история вопроса и приводятся результаты теоретических исследований по восстановлению нестационарных сигналов, проходящих через линейную стационарную систему. Согласно [126] в общей постановке эта задача сводится к обратной — решению интегрального уравнения Вольтерра. В [126] рассматриваются различные (аппроксимационные, итерационные и алгебраические) методы решения основного интегрального уравнения и проблема борьбы с шумами в канале измерения (некорректностью). Обсуждаются регуляризационные методы решения задачи и вопросы их численной реализации.

Суть этой теории состоит в том, что алгоритм восстановления представляется в виде алгоритма управления по принципу обратной связи некоторой подходящим образом сконструированной вспомогательной динамической системы — моделью. Такой алгоритм, выходом которого служит, в частности, реализация управления в модели, по своему определению является динамическим. Управление в модели адаптируется к результатам текущих наблюдений таким образом, что его реализация во времени обеспечивает малое возрастание некоторого специальным образом выбранного функционала типа Ляпунова. При этом обратная связь в цитированных выше работах строится на основе известного в теории позиционных дифференциальных игр принципа экстремального сдвига, локально регуляризованного с помощью широко применяемых в теории некорректных задач методов сглаживающего функционала или невязки.

В [127] рассматривается нелинейная система с запаздыванием по состоянию

$$(4.11) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \nu)) + Bu(t), \quad x(s) = x_0(s), \quad s \in [-\nu, 0],$$

$t \in [0, T]$, $x(t) \in \mathbb{R}^q$; $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$; B ($q \times n$)-мерная матрица. $u(t) \in \mathbb{R}^n$ — возмущение (управление) неизвестно, $u(\cdot) \in P(\cdot) = L_\infty([0, T]; \mathbb{R}^n)$ — принадлежит множеству допустимых возмущений $P(\cdot)$.

Цель: реконструкция $u(\cdot)$ с некоторой точностью μ — построить алгоритм вычисления $v(\cdot)$ такой, что

$$\|u(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2([0, T]; \mathbb{R}^n)} < \mu.$$

Входные данные — результат измерения состояния $x(t)$. *Динамический алгоритм реконструкции*: а) вычисление $v(\tau)$, $0 \leq \tau \leq t$, на основе измерения состояния $x(\tau)$ при $\tau < t$; б) только после вычисления $v(\tau)$ на промежутке $0 \leq \tau \leq t$ возможно использование новой информации о состоянии $x(t)$ для вычисления $v(\tau)$ при $\tau > t$.

Следуя подходу [26, 128–130], вводится вспомогательная система — “модель”:

$$(4.12) \quad \dot{w}_n(t) = f(\tau_{k,n}, \xi_{k,n}, \xi_{k-r_k,n}) + Bv_n(t), \quad w_n(0) = x_0(0)$$

при почти всех $t \in \delta_{k,n} = [\tau_{k,n}, \tau_{k+1,n})$, где входное воздействие (управление) аппроксимирует $u(\cdot)$, а $\tau_{k-r_k,n}$ — единственная точка наблюдения, принадлежащая интервалу $[\tau_{k,n} - \nu, \tau_{k,n} - \nu + \delta)$. С другими результатами данного направления можно ознакомиться в [131–139].

В статье [140] для некоторых классов систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, дается обзор алгоритмов динамического восстановления входов. Предлагаемые алгоритмы, устойчивые к помехам измерений и погрешностям вычислений, основаны на методах теории некорректных задач и на подходящих модификациях известного в теории гарантированного управления метода экстремального прицеливания Н.Н. Красовского. Траектория системы зависит от меняющегося во времени входного воздействия (управления). Заранее как вход, так и траектория не заданы. Однако известно множество, ограничивающее допустимую реализацию входа. Требуется сконструировать алгоритм приближенного восстановления ненаблюдаемой “части” координат, а также входа, обладающий свойствами динамичности (текущие значения приближения соответствующих координат и входа вырабатываются в реальном времени) и устойчивости (приближения сколь угодно точны при достаточной точности наблюдения).

Рассматриваются динамические системы, функционирующие на конечном интервале времени $T = [t_0, \vartheta]$, $\vartheta < +\infty$, заданные системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$(4.13) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t) + F(t), \quad y(t) = Cx(t),$$

где $t \in T$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $x(t_0) = x_0$, $u(t) \in \mathbb{R}^N$, $F(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n)$ — заданная функция, суммируемая с квадратом нормы, $y(t) \in \mathbb{R}^r$ — выход системы, C — матрица размера $r \times n$. Траектория $x(t) = x(t; t_0, x_0, u(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$, $t \in T$, системы (4.13) зависит от начального состояния x_0 и изменяющегося во времени неизвестного входного воздействия $u(\cdot) \in P(\cdot) \subset L_2(T; \mathbb{R}^n)$, где P — некоторое заданное “множество допустимых управлений”.

Измерения $y(t)$ происходят в некоторые дискретные моменты времени $\tau_i = \delta i$, $\tau_m = \vartheta$, δ — интервал дискретности, полученный равномерным разбиением промежутка T на m подынтервалов, $i = 0, 1, \dots, m$. Выход измеряется некоторой ошибкой, так что результатом являются неточные измерения $\xi_i \in \mathbb{R}^r$, удовлетворяющие неравенствам $\|\xi_i - y(\tau_i)\| \leq h$, где $0 < h < 1$ — уровень ошибки измерений. Требуется построить алгоритм, позволяющий синхронно с развитием процесса по результатам неточных измерений $y(\cdot)$ восстанавливать как весь фазовый вектор $x(\cdot)$, так и управление $u(\cdot)$, порождающее выход $y(\cdot)$. При $C = I_n$ задача трансформируется к оценке входа $u(t)$ по неточным измерениям состояния $x(\tau_i)$.

Метод решения задачи базируется на одном из известных принципов позиционного управления — принципе вспомогательных моделей, восходящем к работам Н.Н. Красовского [141, 142]. Согласно этому принципу после разбиения отрезка T на полуинтервалы $[\tau_i, \tau_{i+1})$ выбирается система M (называемая моделью), движение которой $w(t)$, $t \in T$, описывается некоторым дифференциальным уравнением

$$(4.14) \quad \dot{w}(t) = \varphi(t, w(t), \xi_i, \hat{u}(t), \hat{v}(t)), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

где $i = 0, 1, \dots, m - 1$, $w(t_0) = w_0$, $\hat{u}(t)$, $\hat{v}(t)$ — два входных сигнала (управления). Размерность вектора $w(t)$ априори не оговаривается. Обозначение $w(t) = w(t; w_0, \hat{u}(\cdot), \hat{v}(\cdot))$ используется для решения системы (4.14).

После того как задано уравнение (4.14), алгоритм решения задачи отождествляется с законом формирования управлений в модели по принципу обратной связи. При этом процедуре управления моделью предшествует выбор ее начального состояния w_0 . Законы формирования управлений $\{\hat{u}(\cdot), \hat{v}(\cdot)\}$ в модели, называемые по терминологии, принятой в теории гарантированного управления [141, 142], *стратегиями*, отождествляются с парами $S = (\Delta, \mathcal{U})$, где $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, \mathcal{U} — функция, ставящая в соответствие позиции $q^{(i)}(\cdot)$ вектор $\mathcal{U}(q^{(i)}(\cdot)) = \{\hat{u}_i, \hat{v}_i\}$. Позицией, например, может являться тройка $q^{(i)}(\cdot) = \{\tau_i, \xi_i, \hat{w}(\tau_i)\}$ или вектор, содержащий предысторию, как $q^{(i)}(\cdot) = \{\tau_i, \xi_i, \xi_{i-1}\hat{w}(\tau_i)\}$, и т.д.

4.2. Наблюдатели входных и выходных возмущений

В отличие от вышеприведенных результатов, в настоящем разделе будет рассмотрена задача оценки и компенсации возмущений при наличии помех измерения (выходного возмущения). Рассмотрим объект управления

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Df(t), \\ z(t) &= x(t) + \xi(t). \end{aligned}$$

Здесь все обозначения несут тот же смысл, что и раньше, $x \in \mathbb{R}^n$, $f(t)$ — ограниченное возмущение, $\xi(t)$ — ограниченная помеха измерения (выходное возмущение).

В [143] на базе метода вспомогательного контура [116] предложен метод компенсации входных и выходных возмущений, когда хотя бы одно уравнение (4.15) содержит нулевую компоненту вектора выходного возмущения. В [119] предложено обобщение результата [143] на случай, когда вектор $\xi(t)$ может не содержать нулевых компонент. Синтез алгоритма осуществляется по следующей схеме: 1) выделяется произвольная j -я строка во втором уравнении (4.15) и синтезируется алгоритм оценки помехи измерения без j -й компоненты; 2) выделяется информация о возмущении f из первого уравнения (4.15) с учетом восстановленной информации о помехе измерения. Такая схема позволяет свести к нулю ошибку регулирования в установившемся режиме, зависящей от максимального значения f и j -й компоненты ξ .

Алгоритм [119] представлен следующими уравнениями:

— алгоритм оценки вектора выходных возмущения без i -й компоненты ($\tilde{\xi} = [\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n]^T$)

$$(4.16) \quad \hat{\xi} = \int_0^t \left(\tilde{A}\tilde{\xi}(s) - \tilde{A}_1 z(s) \right) ds + \tilde{z},$$

где $\hat{\xi}$ — вектор оценки сигнала $\tilde{\xi}$, $\tilde{z} = \tilde{I}z$, $\tilde{A} = \tilde{I}A\tilde{I}^T$, $\tilde{A}_1 = \tilde{I}A$, \tilde{I} — матрица размера $(n - 1) \times n$, полученная из единичной матрицы порядка n путем вычеркивания i -й строки;

— алгоритм оценки вектора состояния

$$(4.17) \quad \hat{x} = z - \tilde{I}^T \hat{\xi};$$

— алгоритм компенсации входных возмущений

$$(4.18) \quad u = -\frac{1}{\mu} (E_i^T B)^{-1} \left(\hat{x}_i - E_i^T A \int_0^t \hat{x}(s) ds \right).$$

Как отмечалось ранее, качество работы алгоритма (4.16)–(4.18) зависит от величины ξ_i и f . Если $\xi_i = 0$, то уменьшением значения μ можно сколько угодно уменьшить величину $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup |x(t)|$, которая будет зависеть только от $\sup |f(t)|$.

4.3. Робастное обращение систем

Во многих работах, см., например, [26, 115, 127–139, 144–152], задача оценивания неизвестного внешнего воздействия (в том числе возмущения) по результатам измерения выхода трактуется как задача обращения (инверсии) динамической системы, в качестве которой выступает объект управления. Налагается естественное для задач управления требование получения оценки в реальном времени, т.е. в темпе с управляемым процессом. В качестве дополнительных условий также выступают обеспечение наименьшего порядка уравнений динамики инвертора, робастности системы оценивания по отношению к параметрам модели объекта и снижение влияния погрешностей измерения выхода [146–149, 153].

Ранние работы, см., например, [144], приводят к алгоритмам инверсии, которые непригодны для решения задач реального времени, а подход [115] связан с построением нереализуемой инверсной системы (с порядком числителя ПФ большим порядка знаменателя). В последующих работах эти недостатки устранены, а метод инверсии был развит и распространен на дискретные, нелинейные и нестационарные системы, системы с запаздыванием и пространственно-распределенные системы [24, 33, 35, 127, 131, 134, 135].

Для иллюстрации, следуя [150, гл. 1], рассмотрим применение этого подхода для обращения линейных стационарных скалярных (SISO) систем.

Рассматривается линейная динамическая система вида⁴

$$(4.19) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bd(t), \quad y(t) = Cx(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ — измеряемый выход, $d(t) \in \mathbb{R}^1$ — неизвестное неизмеряемое входное воздействие (возмущение), A, B, C — матрицы соответствующих размеров с постоянными вещественными коэффициентами. Пара (A, B) считается полностью управляемой, а пара (A, C) — полностью наблюдаемой. Необходимо по известному выходу $y(t)$ построить (в темпе с процессом) оценку неизвестного входного сигнала $d(t)$. Известные

⁴ Используются обозначения, принятые в данном обзоре.

внешние воздействия (например, управляющее) в модель (4.19) не входят, так как их оценивать не требуется, и в силу свойства суперпозиции линейных систем реакции на эти воздействия и $d(t)$ можно рассматривать независимо.

В силу управляемости системы (4.19) можно считать, что матрицы A , B , C записаны в следующей канонической форме управляемости [84, 85]:

$$(4.20) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n].$$

Передаточная функция системы (4.19) от входа d к выходу y имеет вид

$$(4.21) \quad W(s) = C(sI - A)^{-1} = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad s \in \mathbb{C},$$

с многочленами $A(s)$, $B(s)$ вида

$$(4.22) \quad A(s) = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1, \quad B(s) = c_n s^{n-1} + \dots + c_1.$$

Рассмотрим сначала *строго-минимально-фазовую* систему (4.19), т.е. такую, у которой многочлен $B(s)$ – гурвицев (устойчивый) многочлен с положительными коэффициентами. (При $c_n \neq 0$ говорят, что система (4.19) имеет *относительный порядок* $r = \deg A(s) - \deg B(s) = 1$.)

Для решения поставленной задачи оценивания возмущения $d(t)$ вводится (согласно терминологии работ [146, 148, 153]) следующая *управляемая модель*:

$$(4.23) \quad \dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + Bv(t), \quad \tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t),$$

где $\tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния модели, $v(t) \in \mathbb{R}^1$ – подлежащее выбору управляющее воздействие. Введя отклонение $e(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$ и вычитая (4.19) из (4.23), получим уравнение в отклонениях

$$(4.24) \quad e(t) = Ae(t) + B(v(t) - d(t)), \quad \tilde{\varepsilon}(t) = \tilde{y}(t) - y(t) \equiv C\tilde{e}(t).$$

Для нахождения сигнала $v(t)$, стабилизирующего систему (4.24), используются стандартные методы теории управления. Рассмотрим это подробнее.

Выполним в (4.24) невырожденное преобразование координат $\bar{e} = Pe$, $\det P \neq 0$, чтобы получить новый вектор состояния $\bar{e} = \text{col}\{e', \varepsilon\}$, где компоненты вектора $e' \in \mathbb{R}^{n-1}$ совпадают с соответствующими компонентами исходного вектора e , $e'_i = e_i$, $i = 1, \dots, n-1$. Учитывая уравнение выхода $\varepsilon = Ce$, получим, что матрица преобразования P должна иметь вид

$$(4.25) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & c_n \end{bmatrix}.$$

Так как $CB \neq 0$, то нормировкой можно привести уравнения системы к виду, в котором $CB = 1$. В результате система (4.24) приводится к форме

$$(4.26) \quad \begin{cases} \dot{\bar{e}}'(t) = A_1 \bar{e}'(t) + B_1 \varepsilon(t), \\ \dot{\varepsilon}(t) = A_2 \bar{e}'(t) + B_2 \varepsilon(t) + (v(t) - d(t)) \end{cases}$$

с соответствующими матрицами $A_1 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{1 \times (n-1)}$, $B^{(n-1) \times 1}$ и скаляром B_2 (подробные выражения приведены в [150]).

Далее в [150] рассматриваются два способа стабилизации системы (4.26): линейное управление с “глубокой обратной связью” с большим коэффициентом $v \equiv v_\mu = -\mu \varepsilon$; и с наблюдателем состояния и разрывной обратной связью $v = -A_2 \bar{e}' - (B_2 + \alpha) \varepsilon + F \text{sign} \varepsilon$ с некоторыми выбираемыми разработчиком константами $\alpha, F > 0$. В случае разрывного управления, начиная с некоторого момента времени t^* , в системе возникает скользящий режим на плоскости $\varepsilon = Ce = 0$.

При использовании линейного управления в качестве оценки $\tilde{d}(t)$ процесса $d(t)$ берется сигнал управления $v_\mu(t)$ в предположении, что μ достаточно велико: $\tilde{d}(t) = v_\infty(t) \equiv \lim_{\mu \rightarrow \infty} u_\mu(t)$. При разрывном управлении аналогичная оценка выполняется на основе *метода эквивалентного управления* [154, 155] фильтрацией разрывного процесса $v(t)$ по методу скользящего среднего, т.е. $\tilde{d}(t) = 1/T \int_{t-T}^t v(\tau) d\tau$.

Заметим, что преобразование координат для приведения уравнений состояния к виду (4.26) и последующий синтез наблюдателя со скользящим режимом аналогичны приведенным в [155, гл. 13], см также [64].

Обратимся теперь к инвертированию систем с максимальным относительным порядком, полагая $r = n$ в (4.21) [150]. Тогда многочлен $B(s)$ в (4.22) будет константой, $B(s) = c_n$. Для решения задачи обращения используется следующая вспомогательная система

$$(4.27) \quad \dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + Lv(t), \quad \tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t),$$

где $L \in \mathbb{R}^n$ — подлежащий выбору вектор параметров. Уравнение относительно отклонения $e(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$ имеет вид

$$(4.28) \quad \dot{e}(t) = Ae(t) + Lv(t) - Bd(t), \quad \varepsilon(t) = Ce(t).$$

Выбором $v(t) = -\varepsilon(t)$ получаем замкнутую систему

$$(4.29) \quad \dot{e}(t) = A_L e(t) - Bd(t), \quad \varepsilon(t) = Ce(t),$$

где $A_L = A - LC$. В силу наблюдаемости пары (A, C) подходящим выбором L можно получить любой заданный спектр матрицы A_L . В [150] предлагается следующая процедура: вводятся вещественные значения $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, такие что $\bar{\lambda}_1 = -1, \bar{\lambda}_{i+1} < \lambda_i$. Затем находятся желаемые собственные числа λ_i матрицы A_L как $\lambda_i = \mu \bar{\lambda}_i$, где $\mu > 0$ — выбираемый при синтезе параметр (по смыслу он должен быть взят достаточно большим). Стандартными процедурами синтеза наблюдателя находится вектор L , обеспечивающий требуемый спектр $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ матрицы A_L .

Искомая оценка входного процесса получается по формуле

$$(4.30) \quad \tilde{d}(t) = \frac{\varepsilon(t)}{CA_L^{-1}B}.$$

Далее в [148] рассматривается инвертирование системы с произвольным относительным порядком $1 \leq r \leq n$. Для такой системы выполнены условия $c_{m+2} = c_{m+3} = \dots = c_n = 0$, $c_{m+1} = CA^{r-1}B \neq 0$. По-прежнему считается, что система (4.24) — минимально-фазовая (числитель $V(s)$ ее ПФ (4.21) — гурвицев многочлен). Как и выше, здесь используется невырожденная замена переменных состояния уравнения ошибки (4.24), при которой первые m переменных состояния в новом базисе (считается что исходная система (4.24) уже приведена к канонической форме управляемости) совпадают с исходными, а остальные $n - m$ переменные пересчитываются с коэффициентами c_1, \dots, c_m . Уравнения полученной в результате преобразования первой подсистемы копируются в алгоритм оценивания, а для второй подсистемы строится наблюдатель состояния порядка $n - m$. Затем по сигналу обратной связи наблюдателя пересчитывается оценка входного сигнала $\tilde{d}(t)$ (подробное изложение можно найти в [148]).

Для неминимально-фазовых систем, у которых многочлен $V(s)$ не гурвицев, данный метод непосредственно неприменим в силу неустойчивости нуль-динамики уравнения ошибки оценивания. Эта задача также исследуется в [148]. Выполняется сепарация системы на подсистемы с устойчивой и неустойчивой нуль-динамикой. Для первой из них задача обращения решается описанным выше методом. Для оценки неизвестного сигнала $d(t)$ выполняется вычисление интеграла свертки на некотором временном интервале $\Delta > 0$, соответствующим выбором которого при заданном μ и заданной скорости изменения $d(t)$ можно обеспечить требуемую точность оценивания. Как отмечено авторами [148], “Главным недостатком предложенной схемы обращения является тот факт, что для восстановления сигнала d в момент времени t необходимо знать значение $\tilde{y}(t)$ (а значит, и $y(t)$) на промежутке $[t, t + \Delta]$, причем для увеличения точности оценки необходимо увеличивать промежуток наблюдения Δ , т.е. оценивание происходит с запаздыванием по времени на величину Δ .”

В [148] описывается также ситуация, когда имеется дополнительная информация о процессе $d(t)$ — например, если известна (по терминологии авторов) его *волновая модель*, для которой $d(t)$ описывается однородным дифференциальным уравнением с известными параметрами и неизвестными начальными условиями. Это предположение позволяет свести задачу обращения системы к задаче восстановления вектора состояния расширенной системы, что, в частности, дает возможность избежать неустойчивости процесса оценивания для неминимально-фазовых объектов. Такой подход достаточно стандартен для публикаций по оцениванию возмущений и достаточно подробно представлен в разделе 2 настоящего обзора.

Проиллюстрируем подход работы [148] для приведенного в разделе 2 примера из [103]. Объект задан передаточной функцией $P(s) = \frac{k_0}{(Ts+1)^s}$. На его вход поступает неизвестное возмущение $d(t)$, а измерения выхода $y(t)$ содер-

жат аддитивную погрешность (шум) $\zeta(t)$. Матрицы (4.20) уравнений состояния системы в канонической форме (см. (2.8)) имеют вид

$$(4.31) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -T^{-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [k_0 T^{-1} \quad 0].$$

Введем вектор-столбец $L = [l_1 \quad l_2]^T$ с подлежащими выбору при синтезе элементами l_1, l_2 . Характеристический многочлен $D(s)$ матрицы $A_L = A - LC$ имеет вид

$$D(s) = \det(sI - A) = s^2 + (1 + k_0 l_1)T^{-1}s + (k_0 l_1 + Tk_0 l_2)T^{-2}.$$

Согласно методике [148] зададим значения $\bar{\lambda}_1 = -1$, $\bar{\lambda}_2 = -2$ и запишем желаемые собственные числа матрицы A_L в виде $\lambda_i = \mu \bar{\lambda}_i$, $i = 1, 2$, где $\mu > 0$ — выбранное (большое) значение. Получим желаемый характеристический многочлен $D(s)$ в виде

$$D(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 + 3\mu s + 2\mu^2.$$

Приравнивая выражения для коэффициентов желаемого и располагаемого многочленов, получим

$$l_1 = (3T\mu - 1)k_0^{-1}, \quad l_2 = (2T^2\mu^2 - 3T\mu + 1) \cdot (Tk_0)^{-1}.$$

Для исследования точности оценивания выпишем уравнение для ошибки $e(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$, принимая также во внимание действие погрешностей измерения $\zeta(t)$. Для этого будем считать, что на вход системы оценивания поступает сигнал $y(t) = Cx(t) + \zeta(t)$. Уравнение (4.29) в отклонениях относительно $e(t)$ тогда принимает вид

$$(4.32) \quad \dot{e}(t) = A_L e(t) - Bd(t) + L\zeta(t), \quad \varepsilon(t) = Ce(t) - \zeta(t).$$

Формула (4.30) с учетом погрешности измерений $\zeta(t)$ приводит к следующему выражению

$$(4.33) \quad \tilde{d}(t) = \frac{\varepsilon(t)}{CA_L^{-1}B} = -2T\mu^2 k_0^{-1} \varepsilon(t) = -2T\mu^2 k_0^{-1} (Ce(t) - \zeta(t)).$$

Исходя из выражений (4.32), (4.33) получаются следующие формулы для передаточных функций к ошибке оценивания $\Delta d(t) = d(t) - \tilde{d}(t)$ от входных сигналов $d(t)$ и $\zeta(t)$:

$$(4.34) \quad W_d(s) = \left\{ \frac{\Delta d}{d} \right\} = \frac{s(s + 3\mu)}{s^2 + 3\mu s + 2\mu^2},$$

$$(4.35) \quad W_\zeta(s) = \left\{ \frac{\Delta d}{\zeta} \right\} = -\frac{2\mu^2 s(Ts + 1)}{k_0(s^2 + 3\mu s + 2\mu^2)}.$$

Как видно из (4.34), (4.35), частотные характеристики системы по ошибке от возмущения и шума измерений имеют сходную асимптотику: нулевой коэффициент передачи для постоянного сигнала и пропускание сигналов верхних частот.

Обратимся теперь к использованию описанного в разделе 2 подхода, основанного на представлении процесса $d(t)$ как неизвестного постоянного сигнала и включении его модели $\dot{d}(t) = 0$ в уравнения состояния системы, с последующим использованием наблюдающего устройства для оценивания. Следуя этому подходу, введем расширенную систему вида (2.6) и сформируем матрицы (2.7) ее уравнений состояния как

$$(4.36) \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -T^{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [k_0 T^{-1} \quad 0 \quad 0].$$

Введем вектор конструктивных параметров наблюдателя $L = [l_1 \quad l_2 \quad l_3]^T$, которые вычислим, исходя из заданного расположения корней характеристического многочлена $\bar{D}(s) = \det(sI - \bar{A}_L)$, $\bar{A}_L = \bar{A} - L\bar{C}$. Получим $\bar{D}(s) = s^3 + (1 + k_0 l_1)T^{-1}s^2 + k_0(l_1 + Tl_2)T^{-2}s + k_0 l_3 T^{-1}$. Для удобства сравнения, как и выше, зададимся вещественными корнями характеристического многочлена в форме $\bar{\lambda}_1 = -1$, $\bar{\lambda}_2 = -2$, $\bar{\lambda}_3 = -3$ и запишем желаемые корни многочлена $\bar{D}(s)$ в виде $\lambda_i = \mu \bar{\lambda}_i$, $i = 1, 2, 3$, для выбранного $\mu > 0$. Отсюда получаем следующий вектор L :

$$(4.37) \quad L = k_0^{-1} \begin{bmatrix} 6T\mu - 1 \\ (11T^2\mu^2 - 6T\mu + 1)T^{-1} \\ 6T\mu^3 \end{bmatrix}.$$

Передаточные функции по ошибке оценивания от входного сигнала и погрешностей измерения получаются для этой системы в виде:

$$(4.38) \quad \bar{W}_d(s) = \left\{ \frac{\Delta d}{d} \right\} = \frac{s(s^2 + 6\mu s + 11\mu^2)}{s^3 + 6\mu s^2 + 11\mu^2 s + 6\mu^3},$$

$$(4.39) \quad W_\zeta(s) = \left\{ \frac{\Delta d}{\zeta} \right\} = \frac{6\mu^3 s(Ts + 1)s}{s^3 + 6\mu s^2 + 11\mu^2 s + 6\mu^3}.$$

Из сравнения ПФ (4.35) и (4.39) видно, что за счет повышения порядка наблюдатель для расширенной системы позволяет отфильтровать высокочастотные погрешности измерений.

5. Метод внутренней модели. Наблюдатели гармонических возмущений

В [17, 41–44] систематически излагается *принцип внутренней модели* (англ. — *Internal Model Principle*) в теории автоматического управления. Согласно этому принципу для устранения ошибок, вызванных внешними воздействиями (задающими, возмущающими), в систему должна быть введена

“внутренняя модель” — автономная система, которая порождает эти сигналы. Например, с этой точки зрения, интегрирование сигнала рассогласования в регуляторе, обеспечивающее астатизм системы, есть воплощение такой модели, поскольку постоянное воздействие можно представить выходом интегрирующего звена (при нулевом входе) [44, §8.2]. Введение внутренней модели дает возможность представить замкнутую систему однородными уравнениями, и тогда решение задачи асимптотической стабилизации такой автономной системы влечет стремление к нулю ошибок регулирования по задающему и возмущающему воздействиям. Более того, это свойство робастно по отношению к параметрическим возмущениям в силу непрерывной зависимости корней многочлена от параметров, см. также [6].

В [41–43] рассматриваются подверженные возмущениям объекты, для управления которыми вводится *компенсатор*, обрабатывающий результаты измерений, задающее (опорное) воздействие $r(t)$, и, возможно, некоторые возмущения. Компенсатор служит для обеспечения устойчивости замкнутого контура, а также управления переменной $z(t)$, которая представляет собой функцию от выхода ОУ $y(t)$ и $r(t)$. Обычно в качестве $z(t)$ выступает *ошибка слежения* $e(t) = e(t) - y(t)$. Замкнутая система с этими двумя свойствами (“синтез” по [43]) называется *структурно устойчивой*, если эти два свойства сохраняются при некоторых возмущениях параметров системы.

Рассматриваются ИПВ системы, заданные следующими обобщенными уравнениями

$$(5.1) \quad \dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + A_3x_2(t) + B_1u(t),$$

$$(5.2) \quad \dot{x}_2(t) = A_2x_2(t),$$

$$(5.3) \quad z(t) = D_1x_1(t) + D_2x_2(t),$$

$$(5.4) \quad y_1(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t),$$

$$(5.5) \quad \dot{x}_c(t) = A_cx_c(t) + B_cy(t),$$

$$(5.6) \quad u(t) = F_cx_c(t) + Fy(t).$$

Здесь введены

— векторы состояния: x_1 — объекта, x_2 — модели источника возмущений и задающего воздействия (тем самым характер этих сигналов задан, и они подчиняются однородному линейному дифференциальному уравнению (5.2), см. также (2.5)), x_c — вектор состояния динамического компенсатора (5.5), (5.6);
 — переменные: z — выходная переменная, относительно которой формулируется цель управления (далее — “управляемая переменная”), y — выходная переменная, измеряемая датчиками, u — управление, вырабатываемое компенсатором (5.5), (5.6). Считается, что переменные x , y , z принадлежат конечномерным вещественным линейным пространствам \mathcal{X} , \mathcal{Y} , \mathcal{Z} (в порядке перечисления).

Вводится совокупный вектор состояния $x_L = \text{col}(x_1, x_c)$, относительно которого из (5.1)–(5.6) следуют уравнения замкнутой системы

$$(5.7) \quad \dot{x}_L(t) = A_Lx_L(t) + B_Lx_2(t), \quad z_l(t) = D_Lx_L(t) + D_2x_2(t),$$

где

$$A_L = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 F C_1 & B_1 F c \\ B_c C_1 & A_c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_3 + B_1 F C_2 \\ B_c C_2 \end{bmatrix}, \quad D_L = [D_1 \ 0].$$

Назначение компенсатора, таким образом, заключается в обеспечении гурвицевости матрицы A_L , а регулирование выхода — в выполнении требования $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$. Для определения регулятора, обеспечивающего указанную структурную устойчивость, вводятся понятия *читабельности* (англ. — *readability*) и *внутренней модели*.

Определение 1 [43]. *Считается, что z читабельно (readable) из y , если имеется отображение $Q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ такое, что $z = Qy$. Это значит, что $D_1 = Q C_1$, $D_2 = Q C_2$.*

Определение 2 [43]. *Считается, что отображение $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ включает в себя внутреннюю модель A_2 , если минимальный многочлен матрицы A_2 есть делитель не менее $d(Z)$ инвариантных сомножителей матрицы A .*

Таким образом, внутренняя модель представляет собой l -кратную редупликацию в A максимальной циклической компоненты A_2 , где $l \geq d(Z) =$ числу независимых выходов, которые подлежат управлению.

В [41, 43] сформулирована следующая теорема о необходимости читабельности для структурной устойчивости.

Теорема 1 [41, 43, теорема 1]. *Необходимым условием структурной устойчивости синтеза при $(A_3, B_c | \mathcal{Z})$ является читабельность z по y .*

Для получения основного результата о необходимости внутренней модели в [41, 43] делается следующее предположение.

Предположение 1. Имеет место соотношение

$$(5.8) \quad \text{Im} B_{cw} \subset \langle A_c | B_{cw} E_1 \text{Ker } D_1 \rangle.$$

Предположение 1 говорит о том, что информация, отправленная от w и обработанная компенсатором, относится только к объекту управления и недоступна из z . В [41] показана необходимость выполнения (5.8) для структурной устойчивости. На основе этого сформулирована следующая теорема.

Теорема 2 [41, 43, теорема 2]. *Пусть z читабельно из y и выполнено (5.8). Тогда синтез структурно устойчив в A_3 , только если компенсатор включает внутреннюю модель A_2 , которая управляема по z и наблюдаема по u .*

В заключение авторы [43] справедливо отмечают: “Задача регулирования, которую мы рассмотрели, несколько идеализирована: например, мы потребовали точного асимптотического подавления возмущений. На практике эта задача ставится в нечетких терминах; таким образом, может потребоваться ослабление возмущений только в определенной степени”. Далее авторы указывают, что использованная в работе идеализация позволила дать точную постановку задачи, в результате чего получен рациональный базис и

качественное понимание для практического синтеза многосвязных регуляторов. Заметим, что реальные задачи проектирования отличаются не столько ослабленными и нечеткими требованиями к характеристикам разработанной системы, сколько наличием ряда *спецификаций*, которые естественнее представить в виде системы ограничений, а не одного критерия.

Компенсация внешних возмущений в дискретных по времени системах на базе метода внутренней модели и принципа поглощения рассмотрена в [46, 50]. Рассматриваются объекты, в которых частотные характеристики известны не полностью, а внешнее возмущение описывается линейным разностным уравнением. Предложена структура управления в форме обратной связи, гарантирующего робастную устойчивость и устраняющего влияние внешних возмущений за минимальное число шагов. Результат [46, 50] обобщен в [156] для непрерывных по времени объектов. Предложены полиномиальные соотношения многочленов объекта и алгоритма управления, выполнение которых обеспечивает робастную устойчивость замкнутой системы.

В [96] предложены наблюдатели возмущений для стабилизации линейных ОУ в окрестности точки равновесия. Модель ОУ задана уравнениями

$$(5.9) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Df(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

с известными матрицами A , B и D . По сравнению с (5.68), здесь динамика возмущений описывается внутренней моделью вида

$$(5.10) \quad \dot{w}(t) = Rw(t) + lf(t), \quad f(t) = Nw(t),$$

где $w \in \mathbb{R}^q$. Показано [96], что модель возмущения $f(t)$ может быть переписана в виде

$$(5.11) \quad \begin{aligned} f(t) &= N^T \hat{\zeta}(t) + \varepsilon_f(t), \\ \hat{\zeta}(t) &= \eta(t) + Tx(t), \\ \dot{\eta}(t) &= R\eta(t) + (RT - TA)x(t) - TBu(t). \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon_f(t)$ — экспоненциально затухающая функция, матрица T удовлетворяет равенству $TD = l$. Если же параметры ОУ неизвестны, то наблюдатель возмущений описывается следующими уравнениями [56]:

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \dot{\eta}_0(t) &= \eta_0 + (RT - TA_0)x(t), \\ \dot{\eta}_i(t) &= R\eta_i(t) + Ta_0x_i(t), \quad 1 \leq i \leq n, \\ \dot{\eta}_u(t) &= R\eta_u(t) - Tb_0u(t). \end{aligned}$$

Здесь матрицы A_0 , a_0 и b_0 полагаются известными и находятся из условий структурных согласований: $A = A_0 + a_0\tau^T$ и $b = \beta b_0$, τ и β — неизвестные вектор и число.

В отличие от [96] в статье [48] решена задача слежения за эталонным сигналом линейным ОУ с неизвестными постоянными параметрами при измерении только его выхода. Модель неизвестного эталонного сигнала описывается

внутренней моделью с неизвестными параметрами. Разработан адаптивный наблюдатель для оценок производных по времени эталонного сигнала и получена адаптивная система управления с неявной эталонной моделью.

В работах [48, 96] рассмотрено управление линейными и нелинейными объектами. В отличие от [48, 96] в [49] предложена компенсация возмущений в нелинейных SISO системах с неизвестными постоянными параметрами и неизвестным входным возмущением. Доступны измерению только скалярные входные и выходные сигналы ОУ. Модель ОУ задана в следующей форме *metric-strict-feedback*

$$\begin{aligned}\dot{x}_j &= x_{j+1} + \theta^T \varphi(x_1, \dots, x_j), \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ \dot{x}_n &= \beta(x) + \theta^T \varphi_n(x) + \gamma(x)(u + f), \\ y &= x_1.\end{aligned}$$

Закон управления u задается в виде $u = u_y + u_f$, где сигнал u_y необходим для управления объектом с целью слежения за эталонным сигналом y_m , сигнал u_f необходим для компенсации возмущений. Возмущение f описывается внутренней моделью вида (5.68). Вначале строится наблюдатель возмущений, подобный наблюдателю (5.11). Затем с использованием процедуры бэкстепинга синтезируется первая компонента закона управления u_y . Из-за громоздкости структуры алгоритма для u_y он в обзоре не приводится. Результаты [48, 49, 96] более подробно описаны в монографии [157].

В результате основное достоинство описанных выше алгоритмов состоит в улучшении качества регулирования, по крайней мере в установившемся режиме, за счет предположения о том, что возмущение описывается суммой синусоидальных сигналов. Однако данные алгоритмы зачастую сложны в расчете и реализации при увеличении числа синусоид. Поэтому в описанных выше источниках численные примеры работы алгоритмов в основном тестируются на сумме двух или трех синусоид. Кроме того, качество регулирования таких алгоритмов существенно зависит от величины несинусоидальной составляющей. Если данная составляющая принимает большие значения, то рекомендуется использовать алгоритмы подавления или компенсации ограниченных возмущений, которые будут приведены далее.

5.1. Нелинейные наблюдатели гармонических возмущений

В [70] рассматривается задача стабилизации подверженной гармоническим возмущениям нелинейной системы на основе наблюдателя возмущений.

Модель ОУ со скалярными входом и выходом описывается нелинейными аффинными по управлению и возмущению уравнениями

$$(5.13) \quad \dot{x}(t) = f(x) + g_1(x)u + g_2(x)d(t), \quad y = h(x),$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния ОУ; $y(t)$, $u(t)$, $g(t)$ — выход, управление и неизмеряемое возмущение (соответственно) — скалярные переменные. Внешние гармонические возмущения $d(t)$ с известной частотой ω_0 моделируются гармоническим осциллятором

$$(5.14) \quad \dot{\xi}(t) = A\xi(t), \quad d(t) = C\xi(t)$$

с состоянием $\xi(t) \in \mathbb{R}^2$, неопределенными начальными условиями $x_s(0)$ и матрицами

$$(5.15) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0].$$

Предложен следующий нелинейный наблюдатель возмущения $d(t)$

$$(5.16) \quad \begin{cases} \dot{z} = (A - L(x)g_2(x)C)z + Ap(x) - L(x)f(x) - \\ \quad - L(x)g_1(x)u - L(x)g_2(x)Cp(x), \\ \dot{\xi} = z + p(x), \\ \hat{d} = C\xi, \end{cases}$$

где ξ — вектор состояния наблюдателя возмущений, \hat{d} — оценка возмущений; $p(x) \in \mathbb{R}^2$, $L(x) \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ — подлежащие определению при синтезе вспомогательная функция и матричный коэффициент усиления наблюдателя, связанные соотношением

$$(5.17) \quad L(x) = \frac{\partial p(x)}{\partial x}.$$

Для асимптотического затухания ошибки оценивания $e(t) = \xi(t) - \hat{\xi}(t)$ требуется существование $L(x)$, обеспечивающей асимптотическую устойчивость с желаемой скоростью затухания ошибки $\dot{e}(t) = (A - L(x)g_2(x)C)e(t)$ для всех x , принадлежащих рабочей области. Если g_2 не зависит от x , то задача решается выбором $L(x) = Lx$. В общем случае можно задаться одной из функций $p(x)$ или $L(x)$ и найти другую из (5.17).

В [70] разработана следующая регулярная процедура синтеза, использующая предположение, что *относительный порядок* ρ [47, 158] объекта (5.13) вполне определен во всей рабочей области. Для синтеза устойчивого наблюдателя используется концепция *пассивности* [64, 159, 160]. Коэффициент усиления ищется в виде

$$(5.18) \quad L(x) = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \frac{\partial L_f^{\rho-1} h(x)}{\partial x},$$

где k_1, k_2 — постоянные, подлежащие определению при синтезе. Тогда из (5.17) следует, что

$$(5.19) \quad p(x) = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} L_f^{\rho-1} h(x).$$

Вводится в рассмотрение функция

$$(5.20) \quad n(x) = \frac{\partial L_f^{\rho-1} h(x)}{\partial x} g_2(x),$$

так что $L(x)g_2(x) = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} n(x)$. В предположении, что $n(x) > 0$ во всей рабочей области, вводится величина $n_0 > 0$, такая что $0 < n_0 < n(x)$. Доказано, что если имеются постоянные k_1 и k_2 , такие что передаточная функция

$$(5.21) \quad H(s) = \frac{k_1 s + k_2 \omega_0}{s^2 + k_1 n_0 s + \omega_0 (\omega_0 + k_2 n_0)}$$

асимптотически устойчива и *положительно вещественна* (см. [64, 159, 160]), то при сделанном предположении об относительном порядке выход $\hat{d}(t)$ нелинейного наблюдателя (5.16) асимптотически отслеживает гармоническое возмущение $d(t)$, действующее на ОУ (5.13).

В [70] обсуждается вопрос использования наблюдателя (5.16) совместно с регулятором, который стабилизирует нелинейную систему без возмущений, для стабилизации подверженного гармоническим возмущениям ОУ. На первом этапе синтеза разрабатывается закон управления для объекта, не подверженного влиянию возмущений, после чего в замкнутую систему добавляется наблюдатель возмущений (5.16). Исследована задача управления нелинейными системами в условиях гармонических помех неизвестной частоты. Основной результат работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 3 [70, теорема 3]. *Рассмотрим нелинейную систему (5.13), подверженную влиянию гармонических возмущений (5.14). Замкнутая система, включающая традиционный (линейный или нелинейный) регулятор, нелинейный наблюдатель (5.16) и ОУ (5.13), является \mathcal{L}_2 -устойчивой если:*

– *нелинейный коэффициент усиления $L(x)$ и дополнительная переменная $p(x)$ выбраны согласно (5.18), (5.19), и выполнены условия [70, теорема 2]:*

– *коэффициенты k_1, k_2 удовлетворяют неравенствам $k_2 > 0, k_1 > \sqrt{\frac{k_2 \omega_0}{n_0}}$.*

В [161] рассматривается класс систем, модели которых имеют “номинальную” линейную часть и неопределенную, нелинейную и, возможно, изменяющуюся во времени часть в виде аддитивного воздействия, зависящего от состояния и времени, а именно:

$$(5.22) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(t, x), \quad y(t) = C(t)x(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ — измеряемый в каждый момент времени t вектор выхода, A, B, C — известные матрицы соответствующих размеров. Неизвестная непрерывная функция $f(t, x) \in \mathbb{R}^m$ моделирует имеющиеся в системе неопределенность и нестационарность. Рассматривается задача построения наблюдателя состояния x и неизмеряемого “входного воздействия” f .

Сделаны следующие предположения.

Предположение 2.

1) $\text{rank } CB = \text{rank } B$;

2) для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, такого что $\text{Re } \lambda \geq 0$, выполнено

$$(5.23) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + \text{rank } B.$$

Как отмечено в [161], нарушение предположения 2.2 для некоторого λ может повлечь неотличимость по измерениям выхода процессов $x(t) \equiv 0$ и $f(t, x) \equiv 0$, с одной стороны, от процессов $x(t) = e^{\lambda t} x_0$, $f(t, x) = e^{\lambda t} v$ при некоторых $x_0 \neq 0$ и $v \neq 0$ — с другой, поэтому оно является естественным с точки зрения принципиальной возможности решения поставленной задачи оценивания. При выполнении предположений о том, что $\text{rank } B = m$, $\text{rank } C = p$, сделанных в [162] для аналогичной задачи, выполняются и предположения 1, 2.

В [161, лемма 3] устанавливается следующее условие, эквивалентное выполнению предположений 1, 2:

Условие 1. Имеются $(n \times p)$ -матрица L , $(m \times p)$ -матрица G и $(n \times n)$ -матрица P , $P = P^T > 0$, такие что:

$$(5.24) \quad P(A + LC) + (A + LC)^T P < 0,$$

$$(5.25) \quad B^T P = GC.$$

Замечание 5. Указанное условие встречается в работах по адаптивному управлению под названием гиперминимально-фазовости по отношению к выходу $\sigma = Gy$ [163–166].

Для нахождения матриц P , L , G , в [161] предлагается процедура, основанная на решении ЛМН [167–169]. Отмечено, что выполнение условия 1 эквивалентно тому, что следующая задача минимизации

Задача.

$$(5.26) \quad P > I,$$

$$(5.27) \quad PA + KC + (PA + KC)^T < 0,$$

$$(5.28) \quad \begin{bmatrix} \delta I & B^T P - GC \\ * & \delta I \end{bmatrix} \geq 0$$

имеет минимум при $\delta = 0$. Матричный коэффициент наблюдателя L находится при этом из соотношения

$$(5.29) \quad L = P^{-1}K.$$

Далее, после некоторых дополнительных предположений, таких как $\text{rank } B = m$, существование известной (“номинальной”) функции f_0 и известных неотрицательных констант β_1 и \varkappa таких, что для всех $t \in \mathbb{R}$, $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ выполнено $\|f(t, x) - f_0(t, \hat{x})\| \leq \beta_1 + \varkappa \|x - \hat{x}\|$, а также ограниченности по норме производных функций f , f_0 (см. подробнее в [161]), несмотря на то что асимптотически точное оценивание в рамках данной схемы не может быть обеспечено, наблюдатель

$$(5.30) \quad \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B\hat{f}(t, x) + L(C\hat{x}(t) - y(t)), \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0,$$

$$(5.31) \quad \hat{f}(t) = f_0(t, \hat{x}) - \gamma G(C\hat{x}(t) - y(t))$$

при достаточно большом коэффициенте усиления $\gamma > 0$ вырабатывает, асимптотически, оценки переменных x , f в виде \hat{x} , \hat{f} (соответственно) с любой заданной точностью, см. [161, теорема 1].

Основываясь на подходе [161], в [170] рассматриваются линейные системы вида

$$(5.32) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gd(t), \quad y(t) = C(t)x(t),$$

подверженные действию измеряемого $u(t) \in \mathbb{R}^m$ и неизмеряемого $d(t) \in \mathbb{R}^q$ входов. Переменная $d(t)$ может моделировать как внешние возмущения, так и присущие системе нелинейность, неопределенность описания и нестационарность параметров. G — известная $(n \times q)$ -матрица. Остальные обозначения совпадают с принятыми в (5.22). Предполагается, что матрицы C , G имеют полный ранг.

В [170] предлагается использовать близкую к (5.30), (5.31) структуру наблюдателя, но, основываясь на [54], с интегрированием оценки \hat{d} возмущения d :

$$(5.33) \quad \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + G\hat{d}(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)),$$

$$(5.34) \quad \dot{\hat{d}}(t) = \rho K(y(t) - C\hat{x}(t)),$$

где $\rho > 0$ — коэффициент усиления (названный в [170] “скоростью обучения”)⁵. В работе утверждается, что если условия [161, теорема 1] выполнены, т.е. если существуют матрицы $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$ такие, что

$$(5.35) \quad P(A - LC) + (A - LC)^T P = -Q, \quad G^T P = KC,$$

то точное асимптотическое оценивание может быть достигнуто как для состояния, так и для входа, но при этом наблюдатель (5.33), (5.34) “может оперировать только с медленно меняющимися входами” [170].

В [170] ставится задача перехода от наблюдателей полного порядка (5.30), (5.31) и (5.33), (5.34) к наблюдателям пониженного порядка. Первый из предложенных наблюдателей описывается уравнениями

$$(5.36) \quad \dot{z}(t) = Fz(t) + Ly(t) + TBu(t) + TG\hat{d}(t), \quad z(t_0) = z_0,$$

$$(5.37) \quad \dot{\hat{d}}(t) = \gamma(Wy(t) - Nz(t)),$$

где $z(t)$, $\hat{d}(t)$ — оценки $Tx(t)$ и $d(t)$ соответственно, $\gamma > 0$ — коэффициент усиления, F , T , L , N , W — матрицы, подлежащие выбору при синтезе. В [170, теорема 2]) найдены достаточные условия предельной ограниченности норм ошибок оценивания $\|z(t) - Tx(t)\|$, $\|\hat{d}(t) - d(t)\|$ произвольными положительными константами ε_1 , ε_2 . В условия теоремы входят как матричные соотношения, так и ограничения на $\|d(t)\|$ и $\|\dot{d}(t)\|$.

Второй, “адаптивный”, наблюдатель пониженного порядка имеет вид

$$(5.38) \quad \dot{z}(t) = Fz(t) + Ly(t) + TBu(t) + TG\hat{d}(t), \quad z(t_0) = z_0,$$

$$(5.39) \quad \dot{\hat{d}}(t) = \rho(Wy(t) - Nz(t)),$$

⁵ Неясно, почему в [170] наблюдатель (5.33), (5.34) называется “адаптивным” — это обычная линейная система с интегралом от ошибки оценивания по выходу.

$\rho > 0$. Для постоянного возмущения, $d = \text{const}$, в [170, теорема 3] получено, что при выполнении условий [170, теорема 2] на матрицы наблюдателя (5.38), (5.39) имеет место асимптотическое стремление к нулю ошибок $z(t) - Tx(t)$ и $\hat{d}(t) - d$.

Далее, в [170] излагаются алгоритмы синтеза (выбора матриц F, T, L, N, W) наблюдателей. В частности, показано [170, теорема 4], что для существования матриц, удовлетворяющих [170, теорема 2], необходимо и достаточно, чтобы: 1) $\text{rank}(CG) = \text{rank} G$ и 2) все неустойчивые полюса системы (A, G, C) соответствовали ненаблюдаемым модам пары (A, C) . Тем самым оказывается, что возможна оценка входа и для некоторых неминимально-фазовых объектов, а для состояния $x(t)$ ненаблюдаемых объектов возможна оценка значений линейной функции $Tx(t)$.

По мнению авторов, наблюдатель (5.38), (5.39) не отличается от наблюдателя Луенбергера [82–85], построенного для расширенной системы (2.6) с матрицей $A_s = 0_q$.

Для класса нелинейных систем вида $\dot{x}(t) = F(x) + D(x)u(t) + Dd(t)$ в [51] синтезируется наблюдатель возмущений, благодаря использованию которого задача компенсации возмущений переводится в задачу адаптивного управления. В [51] используется метод внутренней модели, в рамках которого возмущения рассматриваются как выход $d(t)$ линейной системы $\dot{x}_s(t) = A_s x_s(t)$, $d(t) = C_s x_s(t)$, $x_s(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$. Для решения задачи адаптивного управления используется метод бэкстепинга (“обратного шага”) [64, 158, 171–174]. Порядок n_s модели возмущений известен, пара (A_s, C_s) считается полностью наблюдаемой, но матрицы A_s, C_s — неизвестны. На основе результатов [96, лемма 1], [48, 49] возмущение $d(t)$ представляется как выход системы $\dot{z}(t) = Gz(t) + l d(t)$, $d(t) = \theta^T z(t)$, где $z \in \mathbb{R}^{n_s}$, $\theta^T = C_s M^{-1}$, G — гурвицева матрица порядка n с попарно различными собственными значениями, l — матрица размера $(n_s \times n)$ и пара (G, l) полностью управляема. Матрица M порядка n_s удовлетворяет уравнению Сильвестра $MS - GM = lC$. Нетрудно заметить, что $z = Mx_s$. Используя результаты [96], неопределенность параметров модели возмущений (матрицы A_s) трансформируется в неопределенность коэффициентов матрицы θ . Для устранения этой неопределенности в [51] используется метод бэкстепинга [158, 172]. В качестве иллюстрации рассматривается задача управления беспилотным гидросамолетом при различных волнениях.

В [73] рассматривается задача граничной стабилизации гиперболических дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных с помощью обратной связи. Для синтеза регулятора используется метод бэкстепинга [158, 172]. В работе показано, что предложенный метод может быть использован и для граничного управления распределенными системами третьего порядка типа Кортевега–де Фриза. Для систем с временным запаздыванием исполнительного устройства авторами [73] предложен наблюдатель состояния. Рассматривается следующая система с постоянным запаздыванием $\tau > 0$:

$$(5.40) \quad \dot{X}(t) = AX(t),$$

$$(5.41) \quad Y(t) = CX(t - \tau),$$

пара (A, C) считается полностью наблюдаемой. Уравнение выхода (5.41) преобразуется к следующему гиперболическому уравнению первого порядка в частных производных:

$$(5.42) \quad u_t(x, t) = u_x(x, t),$$

$$(5.43) \quad u(x, \tau) = CX(t),$$

$$(5.44) \quad Y(t) = u(0, t),$$

где обозначено: $u_t = \partial u(x, t)/\partial t$, $u_x = \partial u(x, t)/\partial x$. Для системы (5.40), (5.42)–(5.44) строится наблюдатель [73, теорема 5]

$$(5.45) \quad \dot{\hat{X}}(t) = A\hat{X}(t)e^{A\tau}L(Y(t) - \hat{u}(0, t)),$$

$$(5.46) \quad \hat{u}_t(x, t) = \hat{u}_x(x, t) + Ce^{Ax}L(Y(t) - \hat{u}(0, t)),$$

$$(5.47) \quad \hat{u}(x, \tau) = C\hat{X}(t),$$

где $\hat{u}_t(x, t)$, $\hat{u}_x(x, t)$ — оценки переменных $u_t(x, t)$, $u_x(x, t)$ (соответственно). Матрица L выбирается так, чтобы обеспечить гурвицевость матрицы $A - LC$. Результаты получили развитие в [175].

Адаптивное подавление несогласованных (англ. — *unmatched*) неизмеряемых гармонических возмущений с неизвестными параметрами, действующих на линейную инвариантную по времени систему (система, имеющая постоянные параметры, англ. — *LTI*) методом бэкстепинга на основе обратной связи по производной от состояния объекта, рассматривается в [61]. Исследование мотивируется задачей стабилизации судна при морском волнении, см. [176], для которой характерна возможность измерения ускорений, и вычисления скоростей движения, но не координат. Синтез состоит из следующих шагов: 1) параметризация синусоидальных возмущений в виде выхода известной с неизвестным выходом, который зависит от неизвестных параметров возмущений; 2) синтез адаптивного наблюдателя возмущений как для самого возмущения, так и его производной; 3) синтез адаптивного регулятора с виртуальным управлением; 4) окончательный синтез регулятора введением уравнения ошибки на основе процедуры бэкстепинга [158, 172].

В [61] рассматривается следующая инвариантная по времени линейная система со скалярным управлением и многочастотным гармоническим возмущением:

$$(5.48) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + B(p(t) + v(t)),$$

$$(5.49) \quad \dot{p}(t) = a^T x(t) + b_p p(t) + b_u u(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $p(t) \in \mathbb{R}$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $v(t) \in \mathbb{R}$ — синусоидальное возмущение вида

$$(5.50) \quad v(t) = \sum_{i=1}^q g_i \sin(\omega_i t + \varphi_i),$$

где ω_i , g_i , φ_i — неизвестные вещественные параметры, причем частоты ω_i попарно различны ($\omega_i \neq \omega_j$ при $i \neq j$), а сам процесс возмущений $v(t)$ не измеряется датчиками. Возмущение $v(t)$ представляется как выход линейной

экосистемы (см. также (2.5)–(2.7) и (5.68))

$$(5.51) \quad \dot{w}(t) = Sw(t), \quad v(t) = h^T w(t),$$

где $(2q \times 2q)$ -матрица S и вектор-столбец $h \in \mathbb{R}^{2q}$ выбраны соответствующим образом (см., например, (5.15)).

Делаются следующие предположения.

Предположение 3.

3.1. Матрица A обратима.

3.2. Пара (A, B) управляема.

3.3. $b_u \neq 0$.

3.4. Переменные $x(t)$ и $v(t)$ — неизмеряемые, а $\dot{x}(t)$ и $p(t)$ — измеряемые.

3.5. Пара (S, h^T) наблюдаема.

3.6. Собственные числа матрицы S — мнимые, различные и рациональные.

3.7. натуральное число q известно.

3.8. S и h неизвестны.

3.9. $g_i \neq 0$ для всех $i \in \{1, \dots, q\}$.

В рамках указанных предположений для системы (5.48)–(5.51) в [61] строится следующий адаптивный регулятор с наблюдателем возмущений:

$$(5.52) \quad \begin{aligned} u = & \frac{1}{(1 + KB)b_u} \left((\dot{\theta}^T l - (1 + KB)(b_p - a^T A^{-1} B)) p - \right. \\ & - (\dot{\hat{\theta}}^T N + (\hat{\theta}^T N + K)A + (1 + KB)a^T A^{-1} - (A^{-1} B)^T P) \dot{x} + \\ & + (1 + KB)(a^T A^{-1} B) \hat{\theta}^T \xi - (KB + \hat{\theta}^T l) \hat{\beta}^T \xi - \dot{\hat{\theta}}^T \eta - \hat{\theta}^T \dot{\eta} - \\ & \left. - ((KB + \hat{\theta}^T l)^2 + c)e \right), \end{aligned}$$

где $c > \frac{1}{2}$ и

$$(5.53) \quad e = p + K\dot{x} + \hat{\theta}^T \xi.$$

Алгоритмы настройки параметров регулятора $\hat{\theta}(t)$ и $\hat{\beta}(t)$ имеют вид

$$(5.54) \quad \dot{\hat{\theta}} = -\gamma_t \xi \left(A^{-1} B^T P \dot{x} + (1 + KB)(a^T A^{-1} B) e \right),$$

$$(5.55) \quad \dot{\hat{\beta}} = \gamma_b \xi \left(KB + \hat{\theta}^T l \right),$$

где $\gamma_t, \gamma_b > 0$ — выбранные разработчиком коэффициенты усиления алгоритма, а матрица $P = P^T$ удовлетворяет матричному уравнению

$$(5.56) \quad (A^{-1} + A^{-1} BK)^T P + P (A^{-1} + A^{-1} BK) = -2I.$$

Используется следующий наблюдатель возмущений

$$(5.57) \quad \dot{\eta} = G(\eta + N(\dot{x} - Bp)) - NA\dot{x},$$

$$(5.58) \quad \xi = \eta + N(\dot{x} - Bp),$$

где G — $(2q \times 2q)$ -гурвицева матрица с попарно различными собственными числами, образующая управляемую пару с выбранным вектором $l \in \mathbb{R}^{2q}$, а N — матрица размера $2q \times n$, которая отвечает уравнению $NB = l$, одним из решений которого является

$$(5.59) \quad N = \frac{1}{B^T B} l B^T.$$

В [61] приводится иллюстративный пример для системы с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a^T = [1 \ 2], \quad b_u = b_p = 1,$$

$$v(t) = 1,2 \sin(0,8t + \pi/4) - 0,5 \sin(t + \pi/2), \quad c = 0,8, \quad \gamma_t = \gamma_b = 2.$$

Результаты моделирования показывают асимптотическую стабилизацию системы и сходимостью оценки возмущения $\hat{\theta}^T \xi$ к самому процессу $v(t)$.

Адаптивный регулятор, построенный методом бэкстеппинга предлагается в [62] для подавления синусоидальных возмущений, действующих на линейную инвариантную во времени скалярную систему с одним входом и неизвестными параметрами, имеющую каноническое управляемое представление [84, 85, 177], на входе которой имеется линейная подсистема, параметры которой тоже неизвестны. Рассматриваемая система, таким образом, описывается уравнениями

$$(5.60) \quad \dot{x} = A_0 x + B(\bar{\gamma}_1^T x + v + \bar{b}_p p),$$

$$(5.61) \quad \dot{p} = \bar{\gamma}_2^T x + \bar{b}_1 p + \bar{b}_2 u,$$

где

$$(5.62) \quad A_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-1} & \mathbf{I}_{n-1} \\ 0 & \mathbf{0}_{n-1}^T \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(5.63) \quad \bar{\gamma}_1 = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}]^T, \quad \bar{\gamma}_2 = [a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}]^T,$$

$\mathbf{0}_{n-1} = [0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $p(t) \in \mathbb{R}$ — “*виртуальный вход*” системы (5.60), $u(t) \in \mathbb{R}$ — управление, $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_p, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$ — неизвестные постоянные, $v(t) \in \mathbb{R}$ — синусоидальное возмущение вида (5.50). Как обычно, возмущение $v(t)$ представляется в форме решения однородного уравнения (5.51). По (5.60)–(5.62) видно, что возмущение v не согласовано с управлением u . Принято, что сигнал управления должен вырабатываться с использованием только измерений производных по времени от переменных состояния основной системы и состояния входной подсистемы (прикладной смысл такого представления поясняется в [61], см. выше). Регулятор предназначен для подавления синусоидальных возмущений, действующих на систему. Синтез регулятора состоит из следующих этапов: 1) параметризация возмущения в форме выхода известной системы с обратной связью с неизвестным выходом, зависящим от неизвестных параметров возмущения; 2) синтез

адаптивного наблюдателя возмущения для оценки самого возмущения и его производной по времени; 3) синтез адаптивного регулятора для виртуального управления; 4) синтез окончательного адаптивного регулятора на основе процедуры бэкстепинга [158, 172].

В [62] для параметризации возмущений используются результаты [56, 96]. С этой целью выполняется преобразование координат модели возмущений (5.51), при котором возмущения представляются скалярным произведением неизвестного постоянного вектора и производной от вектора состояния преобразованной модели. Для оценки этой производной вводится наблюдатель специального вида, включающий набор фильтров и использующий избыточную параметризацию. В [62] доказано, что состояние равновесия замкнутой адаптивной системы устойчиво и обеспечивается точная асимптотическая оценка возмущения. Эффективность предложенного регулятора иллюстрируется результатами моделирования системы третьего порядка.

В последующей статье [63] этих авторов рассмотрена задача подавления гармонических возмущений одновременно с компенсацией задержек входного сигнала. В статье отмечено, что задача синтеза регулятора для подавления неизвестных синусоидальных возмущений с запаздыванием по управлению рассмотрена в [57, 59, 74, 75], но в этих работах алгоритмы подавления возмущений получены для систем, параметры которых известны. Целью работы [63] является разработка метода, для которого не требуется знания фактических значений параметров системы, что имеет важное прикладное значение. В [63] адаптивный регулятор предназначен для оценки и подавления неизвестных синусоидальных возмущений, действующих на линейную инвариантную во времени систему в управляемой канонической форме с неизвестными параметрами и запаздыванием по входу через обратную связь по состоянию объекта. Возмущение представляется в параметризованной форме на основе методики работы [56]. Суть подхода для компенсации запаздывания заключается в использовании обратной связи предиктора, предложенной в [73] в качестве вида граничного управления на основе бэкстепинга для систем в частных производных [178]. Результаты работ [56, 73] и позволяют переформулировать рассматриваемую задачу как задачу адаптивного управления для неопределенной системы, описываемой уравнениями в частных производных и обыкновенными дифференциальными уравнениями. Аналогично подходу работы [179], законы уточнения оценок неизвестных параметров основаны на методе Ляпунова.

Синтез регулятора состоит из трех этапов: 1) параметризация синусоидального возмущения; 2) представление запаздывания в качестве транспортного уравнения с распределенными параметрами; 3) разработка адаптивного управления граничными условиями системы с распределенными параметрами на основе метода бэкстепинга для распределенных систем. В [63] доказано, что состояние равновесия замкнутой адаптивной системы устойчиво и обеспечивается точная асимптотическая оценка возмущения. Эффективность предложенного регулятора иллюстрируется результатами моделирования системы второго порядка.

В [180] приведена улучшенная версия так называемого “расширенного наблюдателя”. Улучшение достигается распространением леммы Даяванса

(*Dayawansa*) [181] на случай систем, нормальная форма которых включает изменяющиеся во времени (и измеряемые) коэффициенты передачи в системе, моделируемой цепочкой интеграторов между входом и выходом. Именно: рассматриваются линейные системы с изменяющимися параметрами

$$(5.64) \quad \dot{x} = A(t)x + Bu, \quad y = C(t)x,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, матрицы $A(t)$, B , $C(t)$ имеют вид

$$(5.65) \quad A(t) = \begin{bmatrix} -a_{n-1}g_1(t) & g_2(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_{n-2}g_1(t) & 0 & g_3(t) & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ -a_1g_1(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & g_n(t) \\ -a_0g_1(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [a_0g_1(t) \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$$

с зависящими от времени непрерывными функциями $g_i(t)$ такими, что для некоторых фиксированных g_{\min} , g_{\max} для всех $t \geq 0$ и $i = 1, 2, \dots, n$ выполнено $0 < g_{\min} \leq g_i(t) \leq g_{\max}$. Доказано [180, лемма 2], что для любого $\gamma > 1$ имеется набор параметров a_0, \dots, a_{n-1} и некоторое $\lambda > 0$, таких что вдоль траекторий системы (5.64) может быть обеспечено выполнение неравенства диссипации вида

$$(5.66) \quad D^+_{(5.64)}V \leq -\lambda V(x) + \gamma|u| - |y|,$$

где $D^+_{(5.64)}V(x(t))$ — производная Дини (*Dini*) [182] в силу системы (5.64):

$$D^+_{(5.64)}V(x(t)) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (V(x(h+t)) - V(x(t))),$$

где $x(t)$ подчиняется (5.64). В качестве примера в [183] рассматривается задача удержания положения квадратора без измерения углов тангажа и крена (см. [81]).

5.2. Наблюдатели синусоидальных возмущений

Огромный пласт работ посвящен синтезу наблюдателей синусоидальных возмущений, где сами возмущения представлены выражением

$$(5.67) \quad f(t) = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i).$$

Здесь A_0 определяет смещение синусоидального сигнала, A_i , ω_i и φ_i задают амплитуду, частоту и фазу i -й составляющей синусоидального сигнала. В зависимости от решаемой задачи сигнал $f(t)$ либо измеряется, либо оценивается. Однако в обоих случаях необходимо восстановить оценку сигнала $f(t)$, для

чего восстанавливается информация о величинах A_0, A_i, ω_i и $\varphi_i, i = 1, \dots, n$. Предполагается, что частоты ω_i различны.

Представление возмущений в виде суммы синусоидальных сигналов обусловлено несколькими факторами:

1) существует ряд периодических процессов, которые могут описываться синусоидальными функциями: вращение пропеллера в вентиляционных системах, гашение колебаний в некоторых типах вибрационных систем и т.п.;

2) возможность представления возмущений в виде синусоидальных сигналов позволяет синтезировать алгоритмы управления, которые могут улучшить качество регулирования по сравнению с алгоритмами, разработанными в предположении только ограниченности возмущений;

3) возможность представления синусоидальных возмущений в виде системы дифференциальных уравнений порядка $2n$, что позволяет применять большинство алгоритмов управления и идентификации, разработанных в теории автоматического управления динамическими объектами.

Перепишем сигнал (5.67) в виде следующего дифференциального уравнения

$$(5.68) \quad \dot{w}(t) = Rw(t), \quad f(t) = Nw(t),$$

где $w(t) \in \mathbb{R}^{2n}$, матрицы R и N получены при переходе от (5.67) к (5.68). В литературе представление возмущений в виде некоторого генератора возмущений, в частности в виде (5.68), называется *внутренней моделью* [44, 47].

С использованием градиентного алгоритма в [55] при $A_0 = 0$ получен следующий простой адаптивный идентификатор возмущения

$$(5.69) \quad \dot{\Theta}(t) = \alpha(\hat{f} - f)W(t),$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент, от значения которого зависит скорость идентификации частоты, $\hat{f} = \sum_{i=1}^n \lambda_{2i} h_{2i} + \sum_{i=1}^n \hat{\varphi}_{i-1} h_{2i-1}$, $h = [h_1, \dots, h_{2n}]$, λ_i — коэффициенты гурвицевого полинома $\gamma(s) = s^{2n} + \lambda_{2n} s^{2n-1} + \dots + \lambda_2 s + \lambda_1$, s — комплексная переменная,

$$\dot{h} = \Lambda h + bf, \quad b = [0, \dots, 0, 1]^T, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & \dots & -\lambda_{2n} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\varphi}_i = \lambda_{2i+1} - \hat{\theta}_{n-i}, \quad \Theta = [\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n]^T, \quad W(t) = \text{col} \{h_1(t), h_3(t), \dots, h_{2n-1}(t)\}.$$

Сигналы $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n$ являются репараметризованными оценками исходных неизвестных частот $\omega_1, \dots, \omega_n$.

Алгоритмы, подобные [55], рассматривались в [184, 185]. В [186] решена задача идентификации сигнала (5.67) с неизвестным значением n . Достоинства данных алгоритмов состоят в простоте их вывода и реализации. Моделирование показывает, что не всегда можно получить удовлетворительное качество

переходных процессов в смысле малого значения перерегулирования и времени переходного процесса. При этом сложность и динамический порядок алгоритмов существенно возрастает при увеличении числа синусоидальных сигналов. Кроме того, качество идентификации значительно зависит от наличия несинусоидальных составляющих.

В [187] приведен алгоритм оценки возмущения (5.67) (при $n = 1$) с наличием несинусоидальной аддитивной ограниченной составляющей $\Delta f(t)$. В данном случае идентификатор возмущения описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
 \hat{\omega}(t) &= \max \left\{ \underline{\omega}, \sqrt{|\hat{\theta}_1(t)|} \right\}, \\
 \hat{\sigma}(t) &= \hat{\omega}(t)^{-2} \hat{\theta}_2(t), \\
 \hat{\theta}(t) &= \chi(t) + k \dot{\xi}(t) \varphi(t), \\
 \dot{\chi}(t) &= -k \varphi(t) \varphi(t)^T \hat{\theta}(t) - k \dot{\xi}(t) \dot{\varphi}(t), \\
 \dot{\zeta}_1(t) &= \zeta_2(t), \\
 \dot{\zeta}_2(t) &= -2\lambda \zeta_2(t) - \lambda^2 \zeta_1(t) + \lambda^2 f(t),
 \end{aligned}
 \tag{5.70}$$

где $\varphi(t) = [-\zeta_1(t) \ 1]^T$, $\hat{\theta}(t) = [\hat{\theta}_1(t) \ \hat{\theta}_2(t)]^T$, $\lambda > 0$ и $k > 0$. Однако для реализации алгоритма (5.70) нижние оценки $\underline{\omega} \leq \omega$, $\underline{A}_0 \leq A_0$ и $\underline{A}_1 \leq A_1$ должны быть известны.

В отечественной литературе также предложено много оригинальных работ по построению наблюдателей и идентификаторов синусоидальных сигналов с дальнейшей компенсацией возмущений. Подавляющая часть работ в данном направлении опубликована сотрудниками Университета ИТМО с целью уменьшения времени идентификации и уменьшения величины перерегулирования. В отличие от [55, 184–186] далее будут представлены работы по оценке и компенсации возмущений, которые действуют на объект управления и не подлежат прямому измерению. В работе [188] рассматривается компенсация синусоидальных возмущений для минимально-фазовых SISO ОУ с измеряемым выходным сигналом, представленных в виде

$$a(p)y(t) = b(p)u(t) + c(p)f(t),
 \tag{5.71}$$

где возмущение f определено выражением (5.67) при $n = 1$, $p = d/dt$ — оператор дифференцирования, $a(p)$, $b(p)$ и $c(p)$ — линейные дифференциальные операторы с постоянными неизвестными коэффициентами, y и u — скалярные сигналы. Центральным моментом в [188] является представление гармонического сигнала со смещением как линейного выхода линейной канонической системы с неизвестным параметром θ

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= x_3, \\
 \dot{x}_3 &= -\theta x_2, \\
 f &= k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3,
 \end{aligned}$$

где $k_1 = \alpha^3$, $k_2 = 3\alpha^2$, $k_3 = 3\alpha$, $\alpha > 0$, параметр θ подлежит оценке. Для решения задачи закон управления представляется в виде суммы

$$(5.72) \quad u(t) = u_1(t) + u_2(t),$$

где сигнал u_1 необходим для стабилизации ОУ, а сигнал u_2 – для компенсации возмущений. Для оценки синусоидального возмущения и его компенсации строится следующий наблюдатель и закон управления u_2 :

$$(5.73) \quad \begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_0 \hat{x}(t) - d\hat{\theta}\hat{x}_2(t) + d\mu y(t), \\ \hat{x}(t) &= \xi(t) + d\mu y(t), \\ u_2(t) &= -k_1 \hat{x}_1(t) - k_2 \hat{x}_2(t) - k_3 \hat{x}_3(t). \end{aligned}$$

Здесь $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $d = [0 \ 0 \ 1]^T$, $\hat{x} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3]^T$, μ можно выбирать как

положительное число или настраивать согласно алгоритму $\mu(t) = \int_0^t r(g)dg$, где $r(t) = r_0 > 0$ при $|y(t)| > \varepsilon$ или $r(t) = 0$ при $|y(t)| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ – точность регулирования в установившемся режиме. Стабилизирующая составляющая задается в виде $u_1 = -\gamma y$ с алгоритмом настройки $\dot{\gamma} = \gamma_0 y^2$. Алгоритм (5.73) по сравнению с [55, 184–186] позволяет оценить и скомпенсировать синусоидальные возмущения по косвенным измерениям, т.е. по измерениям только выходного сигнала ОУ. При этом условия согласования для ОУ могут быть не выполнены, что не позволит реализовать непосредственную компенсацию возмущений.

В работе [189] рассматривается компенсация синусоидальных возмущений для SISO ОУ вида

$$(5.74) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Bf(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

где $f = A \sin(\omega t + \varphi)$. Модель ОУ преобразуем к виду

$$a(p)y(t) = b(p)(u(t) + f(t)),$$

где полином $a(s)$ гурвицев и коэффициенты полиномов $a(s)$ и $b(s)$ известны. Поскольку ОУ устойчивый с известными постоянными параметрами, то ресурс управления тратится только на компенсацию возмущения. Для компенсации синусоидального возмущения используется следующий алгоритм

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= -\frac{1}{\hat{L}} \bar{w}(t + R - \hat{T}), \\ \bar{w} &= \frac{2}{\alpha} \dot{\zeta}(t) + \zeta(t) + \frac{1}{\alpha^2} \hat{\theta}(t) \zeta(t), \\ R &= \left| \frac{\hat{\varphi}}{\hat{\omega}} \right|, \end{aligned}$$

$$\hat{T} = \frac{2\pi}{\hat{\omega}} \quad \text{при} \quad \hat{\omega} \neq 0,$$

$$\hat{L} = \left| \frac{b(j\hat{\omega})}{a(j\hat{\omega})} \right|,$$

$$\hat{\varphi} = \arg \frac{b(j\hat{\omega})}{a(j\hat{\omega})},$$

$$\hat{w}(t) = \sqrt{|\hat{\theta}(t)|},$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = k\alpha^2 \zeta(t)(y(t) - u(t) - \hat{w}(t)),$$

$$(p + \alpha)^2 \zeta(t) = \alpha^2(y(t) - u(t)),$$

$$a(p)u(t) = b(p)\bar{u}(t),$$

где $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. По сравнению с [190] в [189] алгоритм управления позволяет сократить время оценивания параметров возмущения. Однако данный факт можно проиллюстрировать только на численных примерах моделирования.

В [58] рассматривается компенсация возмущения (5.67) при $A_0 = 0$ и $n = 1$, которое аддитивно действует только на выходе ОУ (5.74) в виде $y(t) = Cx(t) + f(t)$. Строится следующий наблюдатель

$$\dot{\hat{\delta}}(t) = \hat{\sigma} \sin(\hat{\omega}t),$$

$$p\gamma(p)\hat{\sigma}(t) = \beta a(p) \sin(\hat{\omega}t)(w(t) - \hat{w}(t)),$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = k\zeta(t)(z(t) - \hat{z}(t)), \quad \hat{\omega}(t) = \sqrt{|\hat{\theta}(t)|},$$

(5.75)

$$z(t) = w(t) - 2\dot{\zeta}(t) - \zeta(t),$$

$$\dot{\varsigma}_1(t) = \varsigma_2(t),$$

$$\dot{\varsigma}_2(t) = -2\varsigma_2(t) - \varsigma_1(t) + w(t),$$

$$\varsigma(t) = \varsigma_1(t),$$

$$\gamma(p)w(t) = \gamma(p)y(t) - a_1(p)y(t) - b(p)u(t).$$

Здесь $\beta > 0$, $\gamma(s)$ — произвольный гурвицев полином степени n , $a_1(p) = \gamma(p) - a_1(p)$.

В работах [189, 190] результаты из [57, 59, 60] используются для решения задачи адаптивной компенсации возмущений в линейных и нелинейных ОУ с известным запаздыванием в канале управления. Модель нелинейного ОУ представлена в виде дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau) + G\varphi(y(t)) + Ef(t),$$

$$y(t) = Cx(t),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, u — скалярное управление, y — скалярный выходной сигнал, φ — неизвестная нелинейность. Матрицы ОУ и запаздыва-

ние известны. Предполагается, что модель $\dot{x}(t) = Ax(t) + G\varphi(y(t))$ — экспоненциально устойчивая. Возмущение описывается функцией вида (5.67). Для компенсации возмущений используется сигнал управления

$$u(t) = -\frac{1}{L_0}\hat{\sigma} - \sum_{i=1}^k \frac{1}{\hat{L}_i} \hat{f}_i \left(t + \tau - \frac{\hat{\varphi}_i}{\hat{\omega}_i} \right),$$

где $L_0 = \left| \frac{b(0)}{a(0)} \right|$, $L_i = \left| \frac{b(j\hat{\omega}_i)}{a(j\hat{\omega}_i)} \right|$, $\hat{\varphi}_i = \arg \frac{b(j\hat{\omega}_i)}{a(j\hat{\omega}_i)}$ — оценка фазы возмущения φ_i , $\hat{\omega}_i$ — оценка частоты возмущения ω_i , которая получена с помощью алгоритма, аналогичного (5.75). Теоретические результаты работ [189, 190] экспериментально исследованы на маятнике на тележке в [60].

В [79] результаты [57, 59, 60] обобщены на решение задачи управления объектом при наличии неизвестного запаздывания в канале управления. В данном случае с учетом того что возмущение периодическое, оно оценивалось вместе с неизвестным запаздыванием и строился прогноз возмущения на время запаздывания.

6. Заключение

Наблюдатели возмущений находят все более широкое применение в теории и практике построения систем управления, и им посвящена обширная литература. Так, по состоянию на сентябрь 2019 г. в системе Scopus по ключевым словам “disturbance”&“observer” имеется более 16 тысяч цитирований. В частности, статья [18] в течение 10 лет после опубликования получила 2122 цитирования, статья [107] — 750 цитирований, обзор [80] за три года получил 525 цитирований. Это говорит о высокой востребованности данного направления для современной теории и практики построения автоматических систем. В настоящем обзоре авторами сделана попытка представить основные теоретические результаты и направления исследований по синтезу и применению наблюдателей возмущений. Практическим приложениям будет посвящена следующая часть обзора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sariyildiz E., Oboe R., Ohnishi K.* Disturbance Observer-Based Robust Control and Its Applications: 35th Anniversary Overview // *IEEE Trans. Ind. Electron.* 2020. V. 67. No. 3. P. 2042–2053.
2. *Athans M.* On the LQG Problem // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1971. Dec. V. 16. No. 6. P. 528–528.
3. *Rosenbrock H., McMorran P.* Good, Bad, or Optimal? // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1971. Dec. V. 16. No. 6. P. 552–554.
4. *Doyle J.* Guaranteed Margins for LQG Regulators // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1971. Aug. V. 23. No. 4. P. 756–757.
5. *Pearson J., Staats P.* Robust Controllers for Linear Regulators // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1974. Jun. V. 19. No. 3. P. 231–234.
6. *Davison E.J., Goldenberg A.* Robust Control of a General Servomechanism Problem: The Servo Compensator // *Automatica.* 1975. V. 11. No. 5. P. 461–471.

7. Davison E. the Robust Control of a Servomechanism Problem for Linear Time-Invariant Multivariable Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1976. Feb. V. 21. No. 1. P. 25–34.
8. Schweppe F. Recursive State Estimation: Unknown But Bounded Errors and System Inputs // IEEE Trans. Automat. Control. 1968. V. 13. No. 1. P. 22–28.
9. Bhattacharyya S. the Structure of Robust Observers // IEEE Trans. Automat. Control. 1976. August. V. 21. No. 4. P. 581–588.
10. Bhattacharyya S. Observer Design for Linear Systems with Unknown Inputs // IEEE Trans. Automat. Control. 1978. V. 23. No. 3. P. 483–484.
11. Meditch J., Hostetter G. Observers for Systems with Unknown And Inaccessible Inputs // Int. J. Control. 1974. V. 19. No. 3. P. 473–480.
12. Johnson C.D. Optimal Control of the Linear Regulator with Constant Disturbances // IEEE Trans. Automat. Control. 1968. V. 13. No. 4. P. 416–421.
13. Johnson C.D. Further Study of the Linear Regulator with Disturbances — the Case of Vector Disturbances Satisfying a Linear Differential Equation // IEEE Trans. Automat. Control. 1970. V. AC-15. No. 2. P. 222–228.
14. Johnson C. Accommodation of External Disturbances in Linear Regulator and Servomechanism Problems // IEEE Trans. Automatic Control. 1971. V. 16. No. 6. P. 635–644.
15. Johnson C. Accommodation of Disturbances in Optimal Control Problems // Int. J. Control. 1972. V. 15. No. 2. P. 209–231.
16. Doyle J.C. Structured Uncertainty in Control System Design // Proc. Conf. Decision and Control (CDC'85), Fort Lauderdale, USA. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 1985. P. 260–265.
17. Francis B.A., Wonham W.M. The Internal Model Principle of Linear Control Theory // IFAC Proc. Volumes. 1975. V. 8. No. 1, Part 1. P. 331–336. (6th IFAC World Congress (IFAC 1975) – Part 1: Theory, Boston/Cambridge, MA, USA, August 24–30, 1975). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667017677565>.
18. Han J. From PID to Active Disturbance Rejection Control // IEEE Trans. Ind. Electron. 2009. V. 56. No. 3. P. 900–906.
19. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. Изд. 4-е, перераб. и дополн. СПб: “Профессия”, 2003.
20. Клейман Е.Г., Мочалов И.А. Идентификация нестационарных объектов // АиТ. 1994. № 2. С. 3–22.
Kleiman E.G., Mochalov I.A. Identification of Time-Dependent Plants // Autom. Remote Control. 1994. V. 55. No. 2. P. 149–163.
21. Клейман Е.Г. Идентификация входных сигналов в динамических системах // АиТ. 1999. № 12. С. 3–15.
Kleiman E.G. Identification of Input Signals in Dynamical Systems // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 12. P. 1675–1685.
22. Sunahara Y. Identification of Distributed-Parameter Systems // Distrib. param. control syst. Theory and appl. 1982. P. 57–86.
23. Ohnaka K., Uosaki K. Identification of the External Input of Distributed-Parameter Systems by the Boundary-Element Approach // Int. J. Control. 1986. V. 43. No. 4. P. 1125–1133.
24. Ohnaka K., Uosaki K. Simultaneous Identification of the External Input and Parameters of Diffusion Type Distributed Parameter Systems // Int. J. Control. 1989. V. 46. No. 3. P. 889–895.

25. *Ohnaka K., Uosaki K.* Boundary Element Approach for Identification of Point Forces of Distributed Parameter Systems // *Int. J. Control.* 1989. V. 49. No. 1. P. 119–127.
26. *Кряжымский А.В., Осипов Ю.С.* О моделировании управления в динамической системе // *Изв. АН СССР. Технич. кибернетика.* 1983. № 2. С. 29–41.
27. *Ким А.В., Короткий А.М.* Динамическое моделирование возмущения в параболических системах // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* 1989. № 6. С. 78–84.
28. *Короткий А.И., Осипов Ю.С.* Динамическое моделирование параметров в гиперболических системах // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* 1991. № 2. С. 154–164.
29. *Богуславский И.А., Пятенко Т.В.* Идентификация возмущений динамической системы // *Докл. АН СССР.* 1990. Т. 310. № 3. С. 549–553.
30. *Kurek J.* Observation of the State Vector of Linear Multivariable Systems with Unknown Inputs // *Int. J. Control.* 1982. V. 36. No. 3. P. 511–515.
31. *Любчик Л.М., Толстопятова С.В.* Оптимальное оценивание входных сигналов дискретных стохастических систем // *Вестн. Харьков. ун-та.* 1988. № 252. С. 5–7.
32. *Херманис Э.Х.* Сведение задачи восстановления сигнала к задаче идентификации системы // *Аналого-дискретное преобразование сигналов.* 1981. № 5. С. 103–111.
33. *Борухов В.Г., Колесников П.М.* Идентификация входных воздействий систем с распределенными параметрами // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* 1983. № 3. С. 168–174.
34. *Корноушенко Е.К.* Восстановление скалярного сигнала на входе дискретной линейной нестационарной системы // *АиТ.* 1991. № 6. С. 84–94.
Kornoushenko E.K. Reconstruction of Scalar Input Signals for Discrete Linear Non-stationary Systems // *Autom. Remote Control.* 1991. V. 52. No. 6. P. 815–824.
35. *Корноушенко Е.К.* Восстановление входных сигналов в дискретных линейных нестационарных системах по накопленным данным // *АиТ.* 1992. № 12. С. 40–51.
Kornoushenko E.K. Reconstruction of Input Signals in Discrete Linear Time-Dependent Systems on the Basis of Accumulated Data // *Autom. Remote Control.* 1992. V. 53. No. 12. P. 1852–1862.
36. *Fhirin M.* ARMAX Lattice Algorithm for Identification and Prediction of Dynamic Systems // *Int. J. Syst. Sci.* 1990. V. 21. No. 4. P. 771–781.
37. *Murio D., Hinestroza D.* Numerical Identification of Forcing Terms by Discrete Mollification // *Computers & Mathematics with Applications* 1988. V. 17. No. 11. P. 1441–1447.
38. *Kobayashi T.* Discrete-Time Observers and Parameter Determination for Distributed Parameter Systems with Discrete-Time Input-Output Data // *SIAM J. Contr. Optim.* 1983. V. 21. No. 3. P. 331–351.
39. *Ahlén A.* Identifiability of the Deconvolution Problem // *Automatica.* 1990. V. 26. No. 1. P. 177–181.
40. *Davison E.J.* the Output Control of Linear Time-Invariant Multivariable Systems with Unmeasurable Arbitrary Disturbances // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1972. Oct. V. 17. No. 5. P. 621–630.
41. *Francis B.A., Wonham W.M.* The Internal Model Principle for Linear Multivariable Regulators // *Appl. Math. Opt.* 1975. V. 2. No. 2. P. 170–194.

42. *Francis B.A., Wonham W.M.* The Role of Transmission Zeros in Linear Multivariable Regulators // *Int. J. Control.* 1975. V. 22. No. 5. P. 657–681.
43. *Francis B.A., Wonham W.M.* The Internal Model Principle of Control Theory // *Automatica.* 1976. V. 12. No. 5. P. 457–465.
44. *Wonham W.M.* Linear Multivariable Control: a Geometric Approach (3rd Ed.) / Ed. A.V. Balakrishnan, I. Karatzas, M. Yor. N.Y.: Springer-Verlag, 1985. V. 10 of Applications of Mathematics.
45. *Gorez R., Galardini D., Zhu K.Y.* Internal Model Control and Disturbance Observers // *Proc. 30th IEEE Conf. Decision and Control (CDC'91), Brighton, UK.* V. 1. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 1991. P. 229–234.
46. *Цыпкин Я.З.* Адаптивно-инвариантные дискретные модели управления // *АиТ.* 1991. № 5. С. 96–121.
Tsytkin Ya.Z. Adaptively Invariant Discrete Control System // *Autom. Remote Control.* 1991. V. 52. No. 5. P. 673–696.
47. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems (3rd edn). N.Y.: Springer, 1995.
48. *Nikiforov V.O.* Adaptive Servomechanism Controller with an Implicit Reference Model // *Int. J. Control.* 1997. V. 68. No. 2. P. 277–286.
49. *Nikiforov V.O.* Adaptive Non-Linear Tracking with Complete Compensation of Unknown Disturbances // *Europ. J. Control.* 1998. V. 4. No. 2. P. 132–139.
50. *Цыпкин Я.З.* Робастно оптимальные дискретные системы управления // *АиТ.* 1999. № 3. С. 25–37.
Tsytkin Ya.Z. Robustly Optimal Discrete Control Systems // *Autom. Remote Control.* 1991. V. 60. No. 3. P. 315–324.
51. *Du H., Fan G., Yi J., et al.* Disturbance Compensated Adaptive Backstepping Control for an Unmanned Seaplane // *Proc. 2014 IEEE Int. Conf. on Robotics and Biomimetics (ROBIO 2014), Bali, Indonesia.* Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2014. Dec. 5–10. P. 1725–1730.
52. *Sariyildiz E., Ohnishi K.* A Guide to Design Disturbance Observer // *J. Dyn. Sys. Meas. Control.* 2014. V. 136. No. 2.
53. *Johnson C.* Adaptive Controller Design Using Disturbance-Accommodation Techniques // *Int. J. Control.* 1985. V. 42. No. 1. P. 193–210.
54. *Wang H., Daley S.* Actuator Fault Diagnosis: an Adaptive Observer-Based Technique // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1996. V. 41. P. 1073–1078.
55. *Xia X.* Global Frequency Estimation Using Adaptive Identifiers // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2002. V. 47. No. 7. P. 1188–1193.
56. *Никифоров В.О.* Наблюдатели внешних детерминированных возмущений II. Объекты с неизвестными параметрами // *АиТ.* 2004. № 11. С. 40–48. URL: <http://mi.mathnet.ru/at1658>.
Nikiforov V.O. Observers of External Deterministic Disturbances. II. Objects With Unknown Parameters // *Autom. Remote Control.* 2004. V. 65. No. 11. P. 1724–1732.
57. *Бобцов А.А., Пыркин А.А.* Компенсация гармонического возмущения в условиях запаздывания по управлению // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* 2008. № 4. С. 19–23.
58. *Арановский С.В., Бобцов А.А., Пыркин А.А.* Адаптивный наблюдатель неизвестного синусоидального выходного возмущения для линейного объекта // *АиТ.* 2009. № 11. С. 108–116. URL: <http://mi.mathnet.ru/at558>.

- Aranovskii S.V., Bobtsov A.A., Pyrkin A.A.* Adaptive Observer of an Unknown Sinusoidal Output Disturbance for Linear Plants // *Autom. Remote Control*. 2009. V. 70. No. 11. P. 1862–1870.
59. *Pyrkin A.A., Smyshlyaev A., Bekiaris-Liberis N., Krstic M.* Rejection of Sinusoidal Disturbance of Unknown Frequency for Linear System with Input Delay // *Proc. American Control Conf. (ACC 2010)*, Baltimore, USA. IEEE, 2010. 30 June–2 July. P. 5688–5693.
60. *Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Kapitanyuk Y.A., et al.* Adaptive Cancellation of Unknown Multiharmonic Disturbance for Nonlinear Plant with Input Delay // *Proc. 19th Mediterranean Conf. Control Automation (MED 2011)*, Corfu, Greece. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2011. 20–23 June.
61. *Baştürk H. İ., Krstic M.* Adaptive Backstepping Cancellation of Unmatched Unknown Sinusoidal Disturbances for Unknown LTI Systems by State Derivative Feedback // *Proc. ASME 5th Annual Dynamic Systems and Control Conf. joint with the JSME 11th Motion and Vibration Conf. (DSCC2012-MOVIC2012)*. Fort Lauderdale, Florida, USA: 2012. Oct. 17–19. P. 6054–6059.
62. *Basturk H.I., Krstic M.* State Derivative Feedback for Adaptive Cancellation of Unmatched Disturbances in Unknown Strict-Feedback LTI Systems // *Automatica*. 2014. V. 50. P. 2539–2545.
63. *Basturk H.I., Krstic M.* Adaptive Sinusoidal Disturbance Cancellation for Unknown LTI Systems Despite Input Delay // *Automatica*. 2015. V. 58. P. 131–138.
64. *Андреевский Б.Р., Бобцов А.А., Фрадков А.Л.* Методы анализа и синтеза нелинейных систем управления. М.–Ижевск: ИКИ, 2018.
65. *Utkin V., Guldner J., Shi J.* Sliding Mode Control In Electromechanical Systems. Boca Raton, London, N.Y.: Taylor & Francis, 1999.
66. *Krasnova S.A., Utkin V.A.* Prelimit Implementation of States and Disturbances Observer on Sliding Modes // *Proc. 2015 Int. Workshop on Recent Advances in Sliding Modes, RASM 2015*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2015. 9–11 Apr.
67. *Brown M., Shtessel Y.B.* Disturbance Rejection Techniques for Finite Reaching Time Continuous Sliding Mode Control // *Proc. American Control Conference (ACC 2001)*, Arlington, Virginia, USA. V. 6. Piscataway, NJ: IEEE Publications, 2001. June, 24. P. 4998–5003.
68. *Massey T., Shtessel Y.* Continuous Traditional and High-Order Sliding Modes for Satellite Formation Control // *J. Guid., Contr. Dynam.* 2005. July–Aug. V. 28. No. 4. P. 826–831.
69. *Besnard L., Shtessel Y.B., Landrum B.* Quadrotor Vehicle Control Via Sliding Mode Controller Driven by Sliding Mode Disturbance Observer // *J. Franklin I.* 2012. V. 349. No. 2. P. 658–684.
70. *Chen W.-H.* Nonlinear Disturbance Observer Based Control for Nonlinear Systems with Harmonic Disturbances // *IFAC Proc. Volumes*. 2001. V. 34. No. 6. P. 329–334. (Proc. 5th IFAC Sympos. on Nonlinear Control Systems 2001, St. Petersburg, Russia, 4–6 July 2001.)
71. *Краснова С.А., Кузнецов С.И.* Оценивание на скользящих режимах неконтролируемых возмущений в нелинейных динамических системах // *АиТ*. 2005. № 10. С. 54–69. URL: <http://mi.mathnet.ru/at1443>.
- Krasnova S.A., Kuznetsov S.I.* Uncontrollable Perturbations of Nonlinear Dynamic Systems: Estimation on Moving Modes // *Autom. Remote Control*. 2005. V. 66. No. 10. P. 1580–1593.

72. *Цыкунов А.М.* Алгоритм робастного управления линейными динамическими объектами по выходу // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 8. С. 7–12.
73. *Krstic M., Smyshlyaev A.* Backstepping Boundary Control for First-Order Hyperbolic PDEs and Application to Systems with Actuator and Sensor Delays // Syst. Control Lett. 2008. V. 57. No. 9. P. 750–758.
74. *Бобцов А.А., Колобин С.А., Пыркин А.А.* Компенсация неизвестного мультигармонического возмущения для нелинейного объекта с запаздыванием по управлению // АиТ. 2010. № 11. С. 136–148.
Bobtsov A.A., Kolyubin S.A., Pyrkin A.A. Compensation of Unknown Multi-Harmonic Disturbances in Nonlinear Plants with Delayed Control // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 11. P. 2383–2394.
75. *Pyrkin A., Smyshlyaev A., Bekiaris-Liberis N., Krstic M.* Output Control Algorithm for Unstable Plant with Input Delay and Cancellation of Unknown Biased Harmonic Disturbance // IFAC Proc. Volumes. 2010. V. 43. No. 2. P. 39–44.
76. *Зайцева М.В., Паршева Е.А.* Компенсация возмущений и помех при управлении линейным объектом // АиТ. 2011. № 10. С. 28–38. URL: <http://mi.mathnet.ru/at2287>.
Zaitseva M.V., Parsheva E.A. Compensating for Noise And Perturbances in Linear Object Control // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 10. P. 2031–2040.
77. *Фуртат И.Б.* Робастная синхронизация динамической сети с компенсацией возмущений // АиТ. 2011. № 12. С. 104–114.
Furtat I.B. Robust Synchronization of Dynamical Networks With Compensation of Disturbances // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 12. P. 2516–2526.
78. *Фуртат И.Б.* Робастное управление определенным классом неминимально-фазовых динамических сетей // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2014. № 1. С. 35–48.
79. *Borisov O.I., Gromov V.S., Pyrkin A.A., Bobtsov A.A.* Stabilization of Linear Plants with Unknown Delay and Sinusoidal Disturbance Compensation // Proc. 24th Mediterranean Conf. Control and Automation (MED 2016). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2016. June 21–24. P. 426–430.
80. *Chen W.-H., Yang J., Guo L., Li S.* Disturbance-Observer-Based Control and Related Methods — an Overview // IEEE Trans. Ind. Electron. 2016. Feb. V. 63. No. 2. P. 1083–1095.
81. *Андриевский Б.Р., Фуртат И.Б.* Наблюдатели возмущений. Методы и приложения. Часть 2. Приложения // АиТ. 2020.
82. *Luenberger D.G.* Observing the State of a Linear System // IEEE Trans. Mil. Electron. 1964. April. V. 8. No. 2. P. 74–80.
83. *Luenberger D.G.* an Introduction To Observers // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. Dec. V. 16. P. 596–602.
84. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
85. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке МАТЛАВ. СПб: Наука, 1999.
86. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1986.
87. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления: Уч. пос. М.: Наука, 1986.

88. *Справочник по теории автоматического управления* / Под ред. А.А. Красовского. М.: Физматлит, 1987.
89. *Кузовков Н.Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976.
90. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
91. *Chen Y.H.* Adaptive Robust Observers for Non-Linear Uncertain Systems // *Int. J. Syst. Sci.* 1990. V. 21. No. 5. P. 803–814.
92. *Wang Z., Huang B., Unbehauen H.* Robust H_∞ Observer Design of Linear Time-Delay Systems with Parametric Uncertainty // *Syst. Control Lett.* 2001. V. 42. No. 4. P. 303–312.
93. *Lin H., Zhai G., Antsaklis P.J.* Set-Valued Observer Design for A Class of Uncertain Linear Systems with Persistent Disturbance and Measurement Noise // *Int. J. Control.* 2003. V. 76. No. 16. P. 1644–1653.
94. *Lüders G., Narendra K.* an Adaptive Observer and Identifier for A Linear System // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1973. October. V. 18. No. 5. P. 496–499.
95. *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы. Учебное пособие. М.: Высш. шк., 1989.
96. *Никифоров В.О.* Наблюдатели внешних детерминированных возмущений I. Объекты с известными параметрами // *АиТ.* 2004. № 10. С. 13–24. URL: <http://mi.mathnet.ru/at1642>.
Nikiforov V.O. Observers of External Deterministic Disturbances. I. Objects With Known Parameters // *Autom. Remote Control.* 2004. V. 65. No. 10. P. 1531–1541.
97. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
98. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
99. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. 2-е изд. М.: Наука, 1998.
100. *Воронов А.А.* Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 1980.
101. *Красовский А.А., Поспелов Г.С.* Основы автоматике и технической кибернетики. М.: Госэнергоиздат, 1982.
102. *Попов Е.П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления: Учебное пособие для вузов. — Второе издание, переработанное и дополненное. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1989.
103. *Sun J., Wang C., Xin R.* Anti-Disturbance Study of Position Servo System Based on Disturbance Observer // *IFAC-PapersOnLine.* 2018. V. 51. No. 4. P. 202–207.
104. *Davison E.J., Smith H.W.* Pole Assignment in Linear Time-Invariant Multivariable Systems with Constant Disturbances // *Automatica.* 1971. V. 7. No. 4. P. 489–498.
105. *Simon J.D., Mitter S.K.* a Theory of Modal Control // *Inform. Control.* 1968. V. 13. No. 4. P. 316–353.
106. *Galeani S., Menini L., Potini A.* Robust Trajectory Tracking for A Class of Hybrid Systems: an Internal Model Principle Approach // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2012. V. 57. No. 2. P. 344–359.
107. *Davison E.J.* the Robust Control of a Servomechanism Problem for Linear Time-Invariant Multivariable Systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1976. Feb. V. 21. No. 1. P. 25–34.

108. *Schrijver E., van Dijk J.* Disturbance Observers for Rigid Mechanical Systems: Equivalence, Stability, and Design // *J. Dyn. Sys. Meas. Control.* 2002. Dec. V. 124. No. 4. P. 539–548.
109. *Lee H.S., Tomizuka M.* Robust Motion Controller Design for High-Accuracy Positioning Systems // *IEEE Trans. Ind. Electron.* 1996. V. 43. No. 1. P. 48–55.
110. *Mita T., Hirata M., Murata K., Zhang H.* H -infinity Control Versus Disturbance-Observer-Based Control // *IEEE Trans. Ind. Electron.* 1998. Jun. V. 45. No. 3. P. 488–495.
111. *Bickel R., Tomizuka M.* Passivity-Based Versus Disturbance Observer Based Robot Control: Equivalence and Stability // *J. Dyn. Sys. Meas. Control.* 1999. V. 121. No. 1. P. 41–47.
112. *Umeno T., Kaneko T., Hori Y.* Robust Servosystem Design with Two Degrees of Freedom and Its Application To Novel Motion Control of Robot Manipulators // *IEEE Trans. Ind. Electron.* 1993. Oct. V. 40. No. 5. P. 473–485.
113. *Umeno T., Hori Y.* Robust Speed Control of DC Servomotors Using Modern Two Degrees-of-Freedom Controller Design // *IEEE Trans. Ind. Electron.* 1991. Oct. V. 38. No. 5. P. 363–368.
114. *Ohishi K., Ohnishi K., Miyachi K.* Torque-Speed Regulation of DC Motor Based On Load Torque Estimation Method // *Proc. Int. Power Electronics Conf. (IPEC–Tokyo '83) Tokyo, Japan / Ed. D. Gakkai. Inst. Electrical Engineers of Japan, 1983. March 27–31. V. 2. P. 1209–1218.*
115. *Ohnishi K.* New Development of Servo Technology in Mechatronics // *IEEE Trans. Ind. Applicat.* 1987. V. 107. No. 1. P. 83–86.
116. *Цыкунов А.М.* Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // *АиТ.* 2007. № 7. С. 103–115.
Tsykunov A.M. Robust Control Algorithms With Compensation of Bounded Perturbations // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 7. P. 1213–1224.
117. *Atassi A.N., Khalil H.K.* a Separation Principle for The Stabilization of a Class of Nonlinear Systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1999. Sep. V. 44. No. 9. P. 1672–1687.
118. *Фуртат И.Б., Цыкунов А.М.* Робастное управление нестационарными нелинейными структурно неопределенными объектами // *Пробл. управления.* 2008. № 5. С. 2–7.
119. *Furtat I., Fridman E., Fradkov A.L.* Disturbance Compensation With Finite Spectrum Assignment for Plants with Input Delay // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2018. V. 63. No. 1. P. 298–305.
120. *Manitius A.Z., Olbrot A.W.* Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1979. V. AC-24. No. 4. P. 541–553.
121. *Фуртат И.Б., Гуцин П.А.* Алгоритм управления объектами с запаздывающим входным сигналом на базе субпредикторов регулируемой величины и возмущения // *АиТ.* 2019. № 2. С. 3–21.
Furtat I.B., Gushchin P.A. A Control Algorithm for an Object with Delayed Input Signal Based on Subpredictors of the Controlled Variable and Disturbance // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 2. P. 201–216.
122. *Фуртат И.Б.* Алгоритм робастного управления линейными объектами с векторными входами-выходами в условии насыщения сигнала управления // *Мехатроника, автоматизация, управление.* 2016. № 9. С. 579–587.
123. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006.

124. *Проскурников А.В., Якубович В.А.* Универсальные регуляторы в задачах оптимального управления с эталонной моделью при неизвестных внешних сигналах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2012. № 2. С. 49–62.
125. *Краснова С.А., Уткин В.А.* Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. М.: Наука, 2006.
126. *Василенко Г.И.* Теория восстановления сигналов. М.: Сов. радио, 1979.
127. *Близорукова М.С., Максимов В.И., Пандолфи Л.* Динамическая реконструкция входа в нелинейной системе с запаздыванием // АиТ. 2002. № 2. С. 3–13.
Blizorukova M.S., Maksimov V.I., Pandolfi L. Dynamic Input Reconstruction for a Nonlinear Time-Delay System // Autom. Remote Control. V. 63. No. 2. P. 171–180.
128. *Osipov Y., Kryazhimskii A.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. London: Gordon and Breach, 1995. ISBN: 2-88124-944-2.
129. *Maksimov V.I.* On the Reconstruction of a Control Through Results of Observations // Proc. 3rd Europ. Control Conf. (ECC'95). Rome, Italy. 1995. P. 3766–3771.
130. *Кряжимский А.В., Максимов В.И., Осипов Ю.С.* О позиционном моделировании в динамических системах // Прикл. математика и механика. 1983. Т. 47. № 6. С. 815–825.
131. *Максимов В.И.* О реконструкции граничных возмущений: случай краевых условий Неймана // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11. № 1. С. 160–176.
132. *Близорукова М.С., Максимов В.И.* Об одном алгоритме динамической реконструкции входных воздействий при измерении части координат // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 6. С. 1007–1017.
133. *Близорукова М.С., Максимов В.И.* Об одном алгоритме динамического восстановления входного воздействия // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 1. С. 88–100.
134. *Максимов В.И.* О применении конечномерных управляемых моделей к задаче реконструкции входа в линейной системе с запаздыванием // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 196–204.
135. *Максимов В.И.* К проблеме реконструкции входа нелинейной системы с постоянным запаздыванием // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 121–130.
136. *Максимов В.И.* О динамической реконструкции возмущений системы по неточным дискретным измерениям фазовых координат // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2018. № 3. С. 15–32.
137. *Максимов В.И.* Реконструкция входного воздействия динамической системы при измерении части координат фазового вектора // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 5. С. 752–761.
138. *Максимов В.И.* Реконструкция возмущения нелинейной системы при измерении части координат фазового вектора // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 11. С. 1836–1845.
139. *Kryazhimskii A., Maksimov V.* On Identification of Nonobservable Contamination Inputs // Environ. Modell. Software. 2005. V. 20. P. 1057–1061.
140. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 129–161.
141. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
142. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.

143. *Цыкунов А.М.* Компенсация возмущений при управлении линейным объектом по косвенным измерениям // *АиТ.* 2010. № 4. С. 120–129.
Tsykunov A.M. Indirect Measurements-Based Compensation of Disturbances At Control of A Linear Plant // *Autom. Remote Control.* 2010. V. 71. No. 4. P. 654–662.
144. *Silverman L.D.M.* Inversion of Multivariable Linear Systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1969. V. 14. No. 3. P. 270–276.
145. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Алгоритмы обращения линейных управляемых систем // *Дифференц. уравнения.* 1997. Т. 34. № 6. С. 744–750.
146. *Коровин С.К., Ильин А.В., Фомичев В.В.* Метод управляемой модели в задачах обращения динамических систем // *Докл. РАН. Теория управления.* 1997. Т. 354. № 2. С. 171–173.
147. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Робастное обращение векторных систем // *Дифференц. уравнения.* 1998. Т. 34. № 11. С. 1478–1486.
148. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: Физматлит, 2007.
149. *Ильин А.В., Емельянов С.В., Фомичев В.В.* Синтез робастных инверторов минимального порядка // *Дифференц. уравнения.* 2009. Т. 45. № 4. С. 575–585.
150. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Методы робастного обращения динамических систем. М.: Физматлит, 2009.
151. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Обращение линейных динамических систем с запаздыванием // *Дифференц. уравнения.* 2012. Т. 48. № 3. С. 405–413.
152. *Атамась Е.И., Ильин А.В., Фомичев В.В.* Обращение векторных систем с запаздыванием // *Дифференц. уравнения.* 2013. Т. 49. № 11. С. 1363–1369.
153. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Алгоритмы обращения линейных скалярных динамических систем: метод управляемой модели // *Дифференц. уравнения.* 1997. Т. 33. № 3. С. 329–339.
154. *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.
155. *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981.
156. *Цыкунов А.М.* Робастное управление с компенсацией возмущений. М.: Физматлит, 2012.
157. *Никифоров В.О.* Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб.: Наука, 2003.
158. *Халлил Х.К.* Нелинейные системы / Под ред. А.Л. Фрадкова. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика: Ин-т компьютерных исследований, 2009.
159. *Дезоер Ч., Видьясагар М.* Системы с обратной связью. Вход-выходные соотношения / Под ред. Ю.С. Попкова. М.: Наука, 1983.
160. *Полушин И.Г., Фрадков А.Л., Хилл Д.Д.* Пассивность и пассивфикация нелинейных систем // *АиТ.* 2000. Т. 3. С. 3–37.
Polushin I.G., Fradkov A.L., Hill D.D. Passivity And Passification of Nonlinear Systems // *Autom. Remote Control.* 2000. V. 61. No. 3. P. 355–388.
161. *Corless M., Tu J.* State and Input Estimation for a Class of Uncertain Systems // *Automatica.* 1998. June. V. 34. No. 6. P. 757–764.
162. *Kudva P., Viswanadham N., Ramakrishna A.* Observers for Linear Systems with Unknown Inputs // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1980. V. AC-25. P. 113–115.

163. *Fradkov A.L.* Passification of Non-square Linear Systems and Feedback Yakubovich–Kalman–Popov Lemma // *Eur. J. Control.* 2003. No. 6. P. 573–582.
164. *Efimov D.V., Fradkov A.L.* Adaptive Tuning To Bifurcation for Time-Varying Non-linear Systems // *Automatica.* 2006. V. 42. P. 417–425.
165. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Метод пассивации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации // *АиТ.* 2006. № 11. С. 3–37.
166. *Андриевский Б.Р., Селиванов А.А.* Новые результаты по применению метода пассивации. Обзор // *АиТ.* 2018. № 6. С. 3–48.
Andrievskii B.R., Selivanov A.A. New Results on the Application of the Passification Method. A Survey // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 6. P. 957–995.
167. *Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM, 1994.
168. *Чурилов А.Н., Гессен А.В.* Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным пакетам. СПб.: Изд.-во СПбГУ, 2004.
169. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Использование LMI toolbox пакета Matlab в синтезе законов управления. Нижний Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2006.
170. *Xiong Y., Saif M.* Unknown Disturbance Inputs Estimation Based On A State Functional Observer Design // *Automatica.* 2003. V. 39. P. 1389–1398.
171. *Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V., Morse A.S.* Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1991. Nov. V. 36. No. 11. P. 1241–1253.
172. *Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.* Nonlinear and Adaptive Control Design. Wiley, 1995.
173. *Мирошник И.В., Никуфоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
174. *Фуртат И.Б., Нехороших А.Н.* Метод бэкстеппинга для структурно неопределенных объектов // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики.* 2016. Т. 16. № 1. С. 61–67.
175. *Bekiaris-Liberis N., Krstic M.* Compensation of Transport Actuator Dynamics with Input-Dependent Moving Controlled Boundary // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2018. Nov. V. 63. No. 11. P. 3889–3896.
176. *Sorensen A.J., Egeland O.* Design of Ride Control System for Surface Effect Ships Using Dissipative Control // *Automatica.* 1995. Feb. V. 31. No. 2. P. 183–199.
177. *Luenberger D.G.* Canonical Forms for Linear Multivariable Systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1967. June. V. 12. No. 3. P. 290–293.
178. *Krstic M., Smyshlyaev A.* Boundary Control of PDEs: A Course On Backstepping Designs. SIAM, 2008.
179. *Bresch-Pietri D., Krstic M.* Adaptive Trajectory Tracking Despite Unknown Input Delay and Plant Parameters // *Automatica.* 2009. Sep. V. 45. No. 9. P. 2074–2081.
180. *Isidori A., Pyrkin A., Borisov O.* an Extension of a Lemma of Dayawansa and Its Application in the Design of Extended Observers for Nonlinear Systems // *Automatica.* 2019. Aug. V. 106. P. 178–183.
181. *Gauthier J.-P., Kupka I.* Solutions to Part I Exercises // *Deterministic Observation Theory and Applications.* Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2001. P. 195–216.
182. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.

183. *Borisov O.I., Pyrkin A.A., Isidori A.* Application of Enhanced Extended Observer in Station-Keeping of a Quadrotor with Unmeasurable Pitch and Roll Angles // Proc. Joint 8th IFAC Symp. Mechatronic Systems and 11th IFAC Symp. Nonlinear Control Systems (MECHATRONICS & NOLCOS 2019), Vienna, Austria. IFAC, 2019. Sept. 4–6.
184. *Bodson M., Douglas S.C.* Adaptive Algorithms for the Rejection of Sinusoidal Disturbances with Unknown Frequency // IFAC Proc. Volumes. 1996. June–July. V. 29. No. 1. P. 5168–5173.
185. *Bodson M., Douglas S.C.* Adaptive Algorithms for the Rejection of Sinusoidal Disturbances with Unknown Frequency // Automatica. 1997. Dec. V. 33. No. 12. P. 2213–2221.
186. *Marino R., Tomei P.* Global Estimation of n Unknown Frequencies // IEEE Trans. Automat. Control. 2002. Aug. V. 47. No. 8. P. 1324–1328.
187. *Bobtsov A.A., Efimov D., Pyrkin A.A., Zolghadri A.* Switched Algorithm for Frequency Estimation with Noise Rejection // IEEE Trans. Automat. Control. 2012. Sept. V. 57. No. 9. P. 2400–2404.
188. *Бобцов А.А.* Алгоритм управления по выходу с компенсацией гармонического возмущения со смещением // АиТ. 2008. № 8. С. 25–32. URL: <http://mi.mathnet.ru/at701>.
Bobtsov A.A. Output Control Algorithm With The Compensation of Biased Harmonic Disturbances // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 8. 1289–1296.
189. *Бобцов А.А., Пыркин А.А.* Компенсация неизвестного синусоидального возмущения для линейного объекта любой относительной степени // АиТ. 2009. № 3. С. 114–122. URL: <http://mi.mathnet.ru/at436>.
Bobtsov A.A., Pyrkin A.A. Compensation of Unknown Sinusoidal Disturbances in Linear Plants of Arbitrary Relative Degree // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 3. P. 449–456.
190. *Бобцов А.А.* Робастное управление по выходу линейной системой с неопределенными коэффициентами // АиТ. 2002. № 11. С. 108–117. URL: <http://mi.mathnet.ru/at2180>.
Bobtsov A.A. Robust Output-Control for a Linear System with Uncertain Coefficients // Autom. Remote Control. 2002. V. 63. No. 11. P. 1794–1802.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 20.09.2019

После доработки 10.05.2020

Принята к публикации 25.05.2020