

© 2020 г. М.А. ФЕДОТКИН, д-р физ.-мат. наук (fma5@rambler.ru),
А.М. ФЕДОТКИН, канд. физ.-мат. наук (fandr@vmk.unn.ru),
Е.В. КУДРЯВЦЕВ (evgkudryavcev@gmail.com)
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕОДНОРОДНОГО ПОТОКА ТРАНСПОРТА НА МАГИСТРАЛЯХ¹

Рассматривается кибернетический метод описания и анализа реальных потоков, когда интервалы между последовательными моментами поступления требований являются статистически зависимыми и имеют разные распределения. Предложены эвристические алгоритмы, которые позволяют выделить в потоке два класса неоднородных требований. В качестве описания предлагается использовать только интервалы между соседними требованиями первого класса и количество всех требований в каждом таком интервале. Целесообразность предлагаемого описания продемонстрирована не только на примере транспортного потока движущихся автомобилей на магистрали, но и при определении вероятностных законов распределения реальных потоков другой физической природы.

Ключевые слова: неоднородные требования, управляющая кибернетическая система, уравнения Колмогорова, нелокальное описание, алгоритм разбиения потока, статистические гипотезы, критерий Валлиса–Мура.

DOI: 10.31857/S0005231020080115

1. Введение

В теории массового обслуживания известно [1], что классическое описание входного потока систем массового обслуживания выполняется в виде векторной случайной последовательности $\{(\tau'_j, \eta'_j); j = 1, 2, \dots\}$, в которой через η'_j обозначено число поступивших требований в момент времени τ'_j с номером j . Классическое описание входных потоков успешно применил Ю.И. Неймарк для изучения динамики процесса управления транспортом на перекрестке [2, 3]. Ю.И. Неймарк внес фундаментальный вклад в теорию управления конфликтными пуассоновскими потоками в классе циклических алгоритмов [4]. При классическом описании потоков предполагается независимость и одинаковое распределение как величин $\tau'_{j+1} - \tau'_j, j = 1, 2, \dots$, так и независимость и одинаковое распределение величин $\eta'_j, j = 1, 2, \dots$. Из-за увеличения интенсивности входных потоков в современных реальных системах это предположение отсутствует [5]. Поэтому классический способ описания входного потока для таких систем не является удобным, так как требует задания сложных конечномерных распределений последовательности $\{(\tau'_j, \eta'_j); j = 1, 2, \dots\}$. Задача остается сложной, если даже $\eta'_j(\omega) \equiv 1$ при $j = 1, 2, \dots$

В данной статье предлагается описание входного потока в виде последовательности $\{(\tau_{i+1} - \tau_i, \chi_i); i = 0, 1, \dots\}$. Здесь $\{\tau_i; i = 0, 1, \dots\}$ — строго возраста-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-413-520005).

тающая последовательность случайных точек на оси времени Ot , и χ_i определяет случайное число требований на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ или в группе с номером i . Проблема заключается в том, чтобы по наблюдению за конечной реализацией случайной последовательности $\{(\tau'_j, \eta'_j); j = 1, 2, \dots\}$ и по алгоритму выбора последовательности $\{\tau_i; i = 0, 1, \dots\}$ найти распределение последовательностей случайных интервалов $\{\tau_{i+1} - \tau_i; i = 0, 1, \dots\}$ и размеров групп $\{\chi_i; i = 0, 1, \dots\}$ в некоторых классах вероятностных распределений, для которых ряд распределения или плотность можно выписать в явном виде. В теории маркированных случайных потоков каждое требование потока отображается точкой или интервалом на оси времени Ot . В этом предположении для определения распределения последовательности $\{\tau_{i+1} - \tau_i; i = 0, 1, \dots\}$ можно применять известные тестовые распределения, в том числе смещенные. Способ описания потока предполагает наблюдение только за группами требований, а не за каждым требованием потока сложной вероятностной структуры. Такой принцип описания потоков требований можно назвать нелокальным [6, 7]. Поэтому необходимо предложить не только механизм формирования каждой группы реального потока, но и на этом основании выбрать алгоритм выбора последовательности $\{\tau_i; i = 0, 1, \dots\}$. В силу этого определение и выбор тестовых распределений для последовательности $\{\chi_i; i = 0, 1, \dots\}$ вызывает большие трудности.

Процесс образования величины χ_i группы с номером i потока рассматривается как функционирование по возможности простой управляющей системы обслуживания [6, 7]. Это обстоятельство позволяет предложить адекватный механизм образования группы (пачки) с номером i для сложного реального потока. Интерпретация такого механизма образования группы дается на примере потока пачек автомобилей на бесконечной или кольцевой магистрали с однополосным движением, либо на магистрали с многополосным движением, если рассматривать образование пачек только на одной из полос. При этом в потоке будем различать требования с медленным движением и требования с быстрым движением. Значит, в потоке имеется два класса (типа) требований, что и означает их неоднородность. При многополосном движении с возможностью перестроения интенсивность потока автомобилей с быстрым движением для конкретной полосы изменяется за счет требований из других полос, которые будут осуществлять обгон по этой полосе. В этом случае следует предположить, что поток автомобилей с быстрым движением является пуассоновским. Только требования с быстрым движением имеют возможность обгона требований с медленным движением. Предлагаемый в статье подход дает возможность генерировать различные и неизвестные ранее законы распределения реальных входных потоков, не используя предельные теоремы теории вероятностей и математической статистики.

2. Представление механизма формирования потока в виде процесса функционирования управляющей кибернетической системы обслуживания

В статье предполагается существование основного вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}(\cdot))$, которое является математической моделью изучаемого случайного эксперимента E . Здесь Ω есть достоверный исход или множество

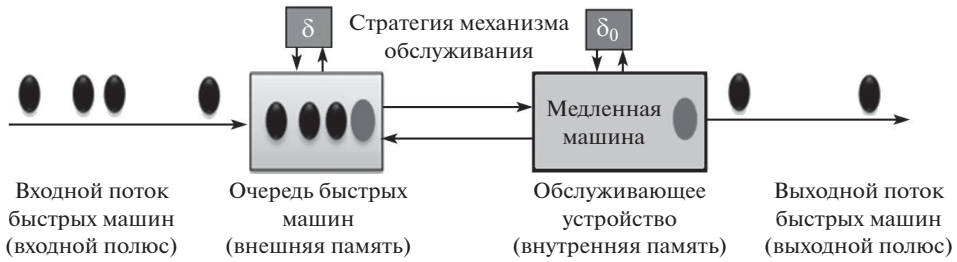


Схема управляющей системы.

описаний всех элементарных исходов эксперимента E . Вероятностная функция $\mathbf{P}(A): \mathfrak{F} \rightarrow [0, 1]$ задана на σ -алгебре $\mathfrak{F}$, элементами которой являются наблюдаемые исходы $A \subset \Omega$ случайного эксперимента E . В некоторых случаях не будем явно фиксировать символ ω как аргумент каких-либо функций. При этом будем помнить о том, что все случайные события, случайные величины и случайные элементы рассматриваются на указанном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}(\cdot))$. Типичным примером эксперимента E может служить процесс движения разнотипных автомобилей на магистрали с однопослонным движением или временной процесс прибытия автомобилей к стоп-линии некоторого управляемого перекрестка.

Модель механизма формирования размера χ_i каждой транспортной пачки реального потока неоднородных и точечных движущихся автомобилей будем представлять в виде эволюции управляющей кибернетической системы обслуживания [6, 7] из некоторого класса. Для такой системы на рисунке представлены следующие ее блоки: входной полюс, внешняя память, устройство δ по переработке информации внешней памяти, внутренняя память, устройство δ_0 по переработке информации внутренней памяти и выходной полюс.

Рассмотрим математическое описание каждого из указанных блоков. Входной полюс есть пуассоновский поток требований с быстрым движением. Интенсивность этого потока равна $\lambda_0 > 0$. Интенсивность $\lambda' > 0$ потока из требований с медленным движением достаточно мала и такова, что расстояние между любыми соседними требованиями с медленным движением велико. Это обеспечивает восстановление пуассоновского потока требований с быстрым движением после процесса обгона [8, 9]. Пусть здесь и далее символ $o(\Delta t)$ обозначает неотрицательную бесконечно малую величину по сравнению с величиной $\Delta t > 0$ и пусть за промежуток времени $[t, t + \Delta t)$ в очередь из требований для обгона медленного требования поступает случайное число $\xi(\omega; t, \Delta t)$ требований с быстрым движением. Тогда для пуассоновского потока с параметром λ_0 при $\Delta t \rightarrow 0$ хорошо известны следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(\{\omega: \xi(\omega; t, \Delta t) = 0\}) &= 1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t), \\
 \mathbf{P}(\{\omega: \xi(\omega; t, \Delta t) = 1\}) &= \lambda_0 \Delta t - o(\Delta t), \\
 \mathbf{P}(\{\omega: \xi(\omega; t, \Delta t) \geq 2\}) &= o(\Delta t).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Соотношение (1) является математическим описанием входного полюса.

По наблюдениям за реальными потоками оказалось, что каждое требование с быстрым движением догоняет требование с медленным движением и поступает в некоторую очередь. При этом группа состоит из требований с быстрым движением, которые ожидают возможности обгона, и обязательно из требования с медленным движением. Возможны ситуации, когда размер очереди равен нулю. В этом случае группа состоит только из требования с медленным движением. Итак, физически внешняя память есть очередь из требований с быстрым движением и единственного требования с медленным движением. Если случайная величина $\chi(\omega; t) \in \{1, 2, \dots\}$ измеряет число требований всех типов в группе в момент времени $t \geq 0$, то случайный процесс $\{\chi(t): t \geq 0\}$ является математическим описанием блока внешней памяти.

Блок внутренней памяти отвечает за процесс обгона требований с быстрым движением требования с медленным движением. Каждое требование с медленным движением можно интерпретировать как обслуживающий прибор для требований с быстрым движением. При этом под временем обслуживания, естественно, понимается случайное время обгона. Для такого класса систем не задается интегральная функция распределения случайного времени обслуживания, так как времена обгона быстрыми машинами медленной являются зависимыми случайными величинами и имеют различные законы распределения. Более того, из реальных наблюдений нет возможности найти статистические законы распределения указанных величин. Поэтому вместо семейства многомерных интегральных функций распределения времен обслуживания для такого рода систем удобно задавать так называемый поток насыщения [6, 7] в виде семейства $\{\kappa(t, t_0): t \geq 0, t_0 > 0\}$ случайных величин. Здесь через $\kappa(\omega; t, t_0)$ обозначено случайное число требований с быстрым движением, которые могут обогнать требование с медленным движением за промежуток времени $[t, t + t_0]$. Тогда семейство случайных величин вида $\{\kappa(t, t_0): t \geq 0, t_0 > 0\}$ определяет математическое описание блока внутренней памяти.

Так как в потоке не происходит потеря требований, то при $\Delta t > 0$ устройство δ по переработке информации внешней памяти можно математически описать с помощью функционального соотношения

$$(2) \quad \chi(\omega; t + \Delta t) = \chi(\omega; t) + \xi(\omega; t, \Delta t) - \kappa(\omega; t, \Delta t).$$

В силу физического смысла величин $\chi(\omega; t)$, $\xi(\omega; t, \Delta t)$, $\kappa(\omega; t, \Delta t)$ должно выполняться соотношение $0 \leq \kappa(\omega; t, \Delta t) \leq \chi(\omega; t) + \xi(\omega; t, \Delta t) - 1$. Отсюда с учетом (2) получаем, что $\chi(\omega; t + \Delta t) \geq 1$. Устройство δ по переработке внешней памяти реализует функциональный закон (2) отбора требований с быстрым движением из очереди для обгона требования с медленным движением. Для процесса обгона в транспортном потоке механизм отбора естественно должен происходить в порядке поступления (FIFO). Для потоков другой физической природы можно допустить другую дисциплину обслуживания, но соотношение (2) есть условие модели и оно должно выполняться.

На практике распределение времени обслуживания (обгона) существенно зависит от величины очереди из требований с быстрым движением. Вполне естественно предположить, что при малых значениях $\Delta t > 0$ условные ве-

роятности событий, которые порождаются дискретной случайной величиной $\kappa(\omega; t, \Delta t)$, определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}(\{\omega: \kappa(\omega; t, \Delta t) = 0\} | \{\omega: \chi(\omega; t) = m, \xi(\omega; t, \Delta t) = 0\}) = 1 - \mu_{m-1}\Delta t + o(\Delta t), \\
 & \mathbf{P}(\{\omega: \kappa(\omega; t, \Delta t) = 1\} | \{\omega: \chi(\omega; t) = m, \xi(\omega; t, \Delta t) = 0\}) = \mu_{m-1}\Delta t - o(\Delta t), \\
 & \qquad \qquad \qquad m = 2, \dots, q; \\
 (3) \quad & \mathbf{P}(\{\omega: \kappa(\omega; t, \Delta t) = 0\} | \{\omega: \chi(\omega; t) = m, \xi(\omega; t, \Delta t) = 0\}) = 1 - \mu_q\Delta t + o(\Delta t), \\
 & \mathbf{P}(\{\omega: \kappa(\omega; t, \Delta t) = 1\} | \{\omega: \chi(\omega; t) = m, \xi(\omega; t, \Delta t) = 0\}) = \mu_q\Delta t - o(\Delta t), \\
 & \qquad \qquad \qquad m = q + 1, q + 2, \dots
 \end{aligned}$$

В (3) параметры $\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \dots, \mu_{q-1}^{-1}$ задают условное среднее время обгона, когда число требований всех типов в группе равно $2, 3, \dots, q$ соответственно. Здесь величина $q > 1$ — заданное натуральное число. Аналогично параметр μ_q^{-1} в соотношении (3) определяет условное среднее время обгона, если транспортная пачка состоит из $q + 1$ и более требований. Параметры $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$ будем называть условными интенсивностями обгона. Таким способом моделируется зависимость распределения времени обгона от числа требований всех типов в очереди. Условные вероятности в (3) задают математическое описание блока δ_0 или устройства по переработке внутренней памяти. Другими словами, соотношение (3) определяет изменение вероятностного закона для обгона требований с быстрым движением.

В указанных предположениях относительно всех блоков управляющей системы обслуживания, которая моделирует процесс образования групп, требуется найти нелокальное описание [6, 7] входного потока. При этом на входной поток неоднородных требований следует смотреть как на поток групп, которые осуществляют перемещение. Следует иметь в виду, что каждое требование с медленным движением является источником образования очереди движущихся требований. Соотношения типа (1), (2), (3) и управляющие параметры $\lambda_0, q, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$ — это удобный способ задания класса математических моделей управляющих систем обслуживания. Это класс систем с ожиданием, неограниченной очередью, одним прибором с переменной структурой и с некоторой заданной стратегией механизма отбора требований.

Пусть величина $Q(t, m) = \mathbf{P}(\{\omega: \chi(\omega, t) = m\})$ при фиксированных значениях $t \geq 0$ и $m = 1, 2, \dots$. Для вероятностей $Q(t, m)$ в [10] получена бесконечная система линейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}
 & dQ(t, 1)/dt = -\lambda_0 Q(t, 1) + \mu_1 Q(t, 2), \\
 & dQ(t, m)/dt = \lambda_0 Q(t, m-1) - (\lambda_0 + \mu_{m-1})Q(t, m) + \mu_m Q(t, m+1), \\
 (4) \quad & \qquad \qquad \qquad m = 2, \dots, q; \\
 & dQ(t, m)/dt = \lambda_0 Q(t, m-1) - (\lambda_0 + \mu_q)Q(t, m) + \mu_q Q(t, m+1), \\
 & \qquad \qquad \qquad m \geq q + 1.
 \end{aligned}$$

В [11] рассмотрены различные динамические системы, в том числе детерминированные и случайные. Для каждой задачи предложен метод описания состояния системы и уравнения или соотношения, задающие динамику изменения состояния. Так, для одной из задач в качестве состояния динамической системы выбрано вероятностное распределение случайной величины.

При этом динамика изменения состояний системы может задаваться в виде системы дифференциальных уравнений для вероятностного распределения. Используя описанный подход для рассматриваемой задачи, состоянием блока внешней памяти в момент t является не конкретное значение случайной величины $\chi(t) \in \{1, 2, \dots\}$, а ее распределение $(Q(t, 1), Q(t, 2), \dots)$. Соотношение (4) определяет функционирование динамической системы. В [10] доказано, что эргодическое распределение $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t, m) = Q(m)$, $m \geq 1$, существует при $\lambda_0 < \mu_q$. При $q = 3$ и обозначениях $\alpha = \lambda_0 \mu_1^{-1}$, $\beta = \lambda_0 \mu_2^{-1}$, $\gamma = \lambda_0 \mu_3^{-1}$ получены формулы для эргодического распределения в виде

$$(5) \quad \begin{aligned} Q(1) &= p = (1 + \alpha + \alpha\beta/(1 - \gamma))^{-1}, \\ Q(2) &= \alpha(1 + \alpha + \alpha\beta/(1 - \gamma))^{-1}, \\ Q(m) &= \alpha\beta\gamma^{m-3}(1 + \alpha + \alpha\beta/(1 - \gamma))^{-1}, \quad m \geq 3. \end{aligned}$$

Будем считать, что соотношение (5) является распределением случайного числа $\chi(\omega)$ требований в группе в установившемся режиме движения транспорта по магистрали. В этом случае каждая из случайных величин χ_i , $i = 1, 2, \dots$, имеет также распределение (5). Для случайной величины $\chi(\omega)$ получены математическое ожидание $\mathbf{M}\chi(\omega)$ и дисперсия $\mathbf{D}\chi(\omega)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\chi(\omega) &= p \left(1 + 2\alpha + \alpha\beta \left(\frac{2}{1 - \gamma} + \frac{1}{(1 - \gamma)^2} \right) \right), \\ \mathbf{D}\chi(\omega) &= p^2 \left[\alpha + \alpha\beta \left(\frac{1}{1 - \gamma} + \frac{1}{(1 - \gamma)^2} + \frac{2}{(1 - \gamma)^3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2\beta \left(-\frac{1}{(1 - \gamma)^2} + \frac{2}{(1 - \gamma)^3} \right) + \alpha^2\beta^2 \left(-\frac{1}{(1 - \gamma)^3} + \frac{1}{(1 - \gamma)^4} \right) \right]. \end{aligned}$$

Сделаем одно важное замечание. При $\beta = \gamma$ предельное распределение (5) для числа $\chi(\omega)$ требований всех типов в каждой группе входного потока совпадает с распределением Бартлетта [12]. Это возможно только при $\mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_q$. Другими словами, среднее время обгона остается постоянным, если число требований всех типов в каждой группе равно $3, 4, \dots$. Наконец, при $\alpha = \beta = \gamma$ распределение (5) совпадает с геометрическим распределением. Это возможно при $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_q$, когда среднее время обгона не зависит от числа требований всех типов в каждой группе входного потока. Свойства таких потоков подробно изучены в [9].

Для реальных потоков другой вероятностной структуры можно допустить несколько иные соотношения (1), (2), (3) и управляющие параметры. Для этого в следующем абзаце рассмотрим другой класс динамических моделей неоднородных потоков.

Пусть условные интенсивности $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$ обгона в транспортном потоке достаточно высоки и интенсивность λ_0 быстрых машин мала. Тогда будем наблюдать образование величины пачек не более целого числа $N \geq 2$. В этом случае $\chi(\omega; t) \in \{1, 2, \dots, N\}$. Если $\chi(\omega; t) = N$ и на малом промежутке $[t, t + \Delta t)$ в группу поступает требование, то мгновенно происходит обгон и,

значит, в потоке не происходит потеря требований. В этих предположениях для потока неоднородных требований имеет место соотношение (1), равенство (2) при $\chi(\omega; t) \in \{1, 2, \dots, N\}$ и соотношения

$$(6) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \kappa(\omega; t, \Delta t) = 0\} | \{\omega: \chi(\omega; t) = m, \xi(\omega; t, \Delta t) = 0\}) &= 1 - \mu_{m-1}\Delta t + o(\Delta t), \\ \mathbf{P}(\{\omega: \kappa(\omega; t, \Delta t) = 1\} | \{\omega: \chi(\omega; t) = m, \xi(\omega; t, \Delta t) = 0\}) &= \mu_{m-1}\Delta t - o(\Delta t), \\ m &= 2, \dots, N; \\ \mathbf{P}(\{\omega: \kappa(\omega; t, \Delta t) = 1\} | \{\omega: \chi(\omega; t) = N, \xi(\omega; t, \Delta t) = 1\}) &= 1 - o(\Delta t). \end{aligned}$$

Соотношения (6) задают математическое описание блока δ_0 или устройства по переработке внутренней памяти в случае образования пачек величины не более N . Динамическая модель механизма образования транспортной пачки величины не более N была подробно изучена в [13]. В частности, для вероятностей $Q(t, m)$, $m \in \{1, 2, \dots, N\}$, в данной модели получена система линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dQ(t, 1)/dt &= -\lambda_0 Q(t, 1) + \mu_1 Q(t, 2), \\ dQ(t, m)/dt &= \lambda_0 Q(t, m-1) - (\lambda_0 + \mu_{m-1})Q(t, m) + \mu_m Q(t, m+1), \\ m &= 2, \dots, N-1; \\ dQ(t, N)/dt &= \lambda_0 Q(t, N-1) - \mu_{N-1} Q(t, N). \end{aligned}$$

Данная система имеет решение при любых параметрах. Для эргодического распределения $(Q(1), Q(2), \dots, Q(N))$ при $\mu_3 = \mu_4 = \dots = \mu_{N-1}$ получены формулы

$$\begin{aligned} Q(1) &= (1 + \alpha + \alpha\beta(1 - \gamma^{N-2})/(1 - \gamma))^{-1}, \\ Q(2) &= \alpha (1 + \alpha + \alpha\beta(1 - \gamma^{N-2})/(1 - \gamma))^{-1}, \\ Q(m) &= \alpha\beta\gamma^{m-3} (1 + \alpha + \alpha\beta(1 - \gamma^{N-2})/(1 - \gamma))^{-1}, \quad m = 3, 4, \dots, N. \end{aligned}$$

3. Алгоритмы получения нелокального описания потоков неоднородных требований

Ради сокращения записи в дальнейшем при $\eta'_j(\omega) \equiv 1$ для всех $j = 1, 2, \dots$ обозначим τ'_j через θ_j . В этом случае θ_j определяет момент появления требования с номером j . В этом разделе по информации о конечной реализации потока $\{\theta_j; j = 1, 2, \dots\}$ предлагаются различные алгоритмы определения последовательности $\{\tau_{i+1} - \tau_i; i = 0, 1, \dots\}$ такого типа, чтобы можно было считать ее элементы одинаково распределенными и независимыми случайными величинами. Эффективность предложенных алгоритмов показана в разделе 4 статьи. Приведем два алгоритма выделения моментов τ_i , $i = 0, 1, \dots$, поступления первых требований групп из последовательных моментов θ_i , $i = 0, 1, \dots$, поступления всех требований.

Согласно первому алгоритму требования объединяются в группы по следующему принципу близости. Предположим, что $\theta_1 = 0$. Это означает, что начинаем наблюдать систему с момента прихода первого требования (этот

случай называется синхронным [8]). Зададим некоторый параметр близости $h_0 = \text{const} > 0$ и коэффициенты $0 < a < 1$ и $b > 0$. Тогда величины τ_i , $i \geq 0$, будут определяться из следующих соотношений:

$$\tau_i = \theta_{k_i}, \quad k_0 = 0, \quad k_{i+1} = \inf \left\{ k: k > k_i, \theta_k - \theta_{k-1} \geq h_i a^{k-k_i-1} \right\},$$

$$h_{i+1} = h_i a^{k_{i+1}-k_i-1} b.$$

Если при некотором $i \geq 0$ множество $\{k: k > k_i, \theta_k - \theta_{k-1} \geq h_0\}$ окажется пустым, то будем считать, что $\tau_{i+1} = +\infty$. Заметим, что при таком разбиении моменту τ_i , $i \geq 0$, будет соответствовать поступление i -й группы требований, или i -й транспортной пачки. Длина каждой такой пачки будет равна $\eta_i = k_{i+1} - k_i$. Данный алгоритм подстраивается под интенсивность поступающих требований, изменяя параметр близости требований h_i . Выбирая параметры a и b , можно регулировать математическое ожидание размера группы.

Согласно второму алгоритму исходный поток делится на группы поэтапно. На этапе с номером m ($m = 0, 1, \dots$) будем получать векторную случайную последовательность $\{(\tau_i^m, \eta_i^m); i \geq 0\}$, которую для краткости будем называть далее последовательностью (или потоком) m -го уровня. Как и раньше, для любого m моменты τ_i^m , $i \geq 0$, совпадают с моментами поступлений некоторых требований исходного потока в систему, т.е. $\tau_i^m = \theta_{k_{m,i}}$, $k_{m,i} \geq 1$. Далее, количество требований в i -й группе потока m -го уровня определяется как $\eta_i^m = k_{m,i+1} - k_{m,i}$. Также введем величину $\delta_i^m = \theta_{k_{m,i+1}} - \theta_{k_{m,i+1}-1}$, которая определяет интервал между i -й и $(i+1)$ -й пачками исходного процесса при его нелокальном описании с помощью последовательности m -го уровня. Параметрами данного способа являются натуральное число d и постоянные величины h_0, h_1 , удовлетворяющие соотношению $0 < h_0 < h_1$. Итак, рекуррентные формулы для определения моментов τ_i^m при $m \geq 0$, $i \geq 0$ имеют следующий вид:

$$k_{0,0} = 1, k_{0,i+1} = \inf \{k: k > k_{0,i}, \theta_k - \theta_{k-1} \geq h_0\},$$

$$s_m = \inf \{k: k \geq 0, \eta_k^m \leq d, \eta_{k+1}^m \leq d, \delta_k^m < h_1, \eta_k^m = \eta_{k-1}^m\},$$

$$\tau_i^{m+1} = \begin{cases} \tau_i^m, & i \leq s_m, \\ \tau_{i+1}^m, & i > s_m. \end{cases}$$

Здесь полагается $\eta_{-1}^m = 0$ при любом $m \geq 0$. Две группы из последовательности предыдущего уровня объединяются, когда каждая из них содержит не больше d требований, интервал между пачками меньше, чем h_1 , а также размер первой группы в рассматриваемой паре совпадает с размером группы, ей предшествующей. Отметим, что $\{\omega: \lim_{m \rightarrow \infty} \tau_i^m \text{ существует}\} = \Omega$, поэтому, определив $\tau_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \tau_i^m$ и $\eta_i = k_{i+1} - k_i$ для любого $i \geq 0$, получим нелокальное описание $\{(\tau_i, \eta_i); i \geq 0\}$ исходного потока требований.

Получим оценку параметров распределения (5) для модели с неограниченным размером группы. Пусть есть выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$ объема n реализаций случайной величины χ . Обозначим через m_k число значений в выборке, равных k (число пачек размера k). Неизвестные параметры α, β и γ будем

оценивать методом максимального правдоподобия [14, 15]. Для применения данного метода удобно перейти от параметров α и β к новым параметрам p и f , где $p = Q(1)$ и $f = \sum_{k=3}^{\infty} Q(k)$. В новых обозначениях выражения для $Q(k)$, $k = 1, 2, \dots$, примут вид:

$$\begin{aligned} Q(1) &= p, \\ Q(2) &= 1 - f - p, \\ Q(k) &= f(1 - \gamma)\gamma^{k-3}, \quad k \geq 3. \end{aligned}$$

Функция правдоподобия равна

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n, p, f, \gamma) &= Q(x_1)Q(x_2) \dots Q(x_n) = \\ &= p^{m_1}(1 - f - p)^{m_2} \prod_{k=3}^{\infty} \left(f(1 - \gamma)\gamma^{k-3} \right)^{m_k}. \end{aligned}$$

Далее найдем натуральный логарифм функции правдоподобия

$$\begin{aligned} \ln L(x_1, \dots, x_n, p, f, \gamma) &= m_1 \ln p + m_2 \ln(1 - f - p) + \\ (7) \quad &+ \sum_{k=3}^{\infty} m_k \ln \left(f(1 - \gamma)\gamma^{k-3} \right). \end{aligned}$$

Согласно методу максимального правдоподобия необходимо найти аргументы функции, при которых она достигает максимума. Для этого приведем систему уравнений правдоподобия

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial p} \ln L(x_1, \dots, x_n, p, f, \gamma) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial f} \ln L(x_1, \dots, x_n, p, f, \gamma) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln L(x_1, \dots, x_n, p, f, \gamma) = 0. \end{cases}$$

Используя соотношения (7) и (8), получим окончательную систему уравнений

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{m_1}{p} - \frac{m_2}{1 - f - p} = 0, \\ -\frac{m_2}{1 - f - p} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{m_k}{f} = 0, \\ -\frac{m_3}{1 - \gamma} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{m_k}{(1 - \gamma)\gamma^{k-3}} \left((k - 3)\gamma^{k-4}(1 - \gamma) - \gamma^{k-3} \right) = 0 \end{cases}$$

для нахождения оценок методом максимального правдоподобия. Решая систему уравнений (9), получим оценки для параметров p , f и γ :

$$\begin{aligned} p^* &= m_1/n, \\ f^* &= (n - m_1 - m_2)/n, \\ \gamma^* &= \sum_{k=3}^{\infty} (k - 3)m_k / \sum_{k=3}^{\infty} (k - 2)m_k. \end{aligned}$$

Данный результат является ожидаемым, так как p — это вероятность получить группу из одной машины, а f — из трех или более машин. Оценки для исходных параметров α^* , β^* и γ^* выражаются так:

$$(10) \quad \begin{aligned} \alpha^* &= \frac{1-f-p}{p} = \frac{m_2}{m_1}, \\ \beta^* &= \frac{f(1-\gamma)}{1-f-p} = \frac{n-m_1-m_2}{m_2} \sum_{k=3}^{\infty} m_k / \sum_{k=3}^{\infty} (k-2)m_k, \\ \gamma^* &= \sum_{k=3}^{\infty} (k-3)m_k / \sum_{k=3}^{\infty} (k-2)m_k. \end{aligned}$$

4. Нелокальное описание реальных потоков

В [16] было проведено исследование транспортного потока. Покажем эффективность предложенного подхода для анализа данных другой физической природы. Исследуем данные BC-pAug89.TL (<ftp://ita.ee.lbl.gov/html/contrib/BC.html>) [17]. В файле содержатся моменты поступления и размеры пакетов в сети Ethernet. Общий объем данных составляет 1 млн пакетов. Проанализируем моменты поступления пакетов. Реализация $\{x_1, x_2, \dots, x_V\}$ объема $V = 96$ потока вида $\{\theta_{j+1} - \theta_j; j = 1, 2, \dots, V\}$ приведена в табл. 1. В этой таблице по строкам приведены значения интервалов между поступлениями пакетов.

Применяя фазово-частотный критерий Валлиса–Мура [9] о независимости и одинаковом распределении интервалов между соседними пакетами к статистическим данным табл. 1, получаем значение статистики

$$\begin{aligned} Z(V, x_1, x_2, \dots, x_V) &= \\ &= [Z_1(V, x_1, x_2, \dots, x_V) - (2V - 7)3^{-1}] \times (90)^{1/2} \times (16V - 29)^{-1/2} \end{aligned}$$

при $V = 10000$, равное 9,6221. Здесь функция $Z_1(V, x_1, x_2, \dots, x_V)$ определяет так называемое число фаз по выборочным значениям $x_1, x_2, \dots, x_V$ случайных интервалов $\theta_{i+1} - \theta_i$, $i = 1, 2, \dots, V$, и вычисляется следующим образом.

Таблица 1. Значения интервалов $\theta_{i+1} - \theta_i$, $i = 1, 2, \dots, 80$

0,000168	0,002668	0,003964	0,002896	0,004036	0,00282	0,002712	0,001428
0,002268	0,000452	0,002604	0,001336	0,002148	0,000768	0,004236	0,002624
0,004056	0,00152	0,00128	0,001972	0,001952	0,001112	0,001824	0,001636
0,002536	0,002688	0,003984	0,002872	0,004132	0,002728	0,003968	0,002888
0,004116	0,002744	0,004008	0,002848	0,00416	0,00434	0,00392	0,00458
0,004008	0,004492	0,00392	0,00294	0,00408	0,00278	0,00396	0,002896
0,001104	0,002836	0,000712	0,002208	0,00084	0,003172	0,000088	0,002756
0,003932	0,002928	0,004128	0,002732	0,004056	0,0028	0,004016	0,002844
0,003324	0,00062	0,002912	0,000956	0,003688	0,00036	0,003496	0,001436
0,002592	0,002832	0,00128	0,002688	0,002892	0,001432	0,001956	0,000576

Для всех $j = 1, 2, \dots, (V - 1)$ фиксируется знак разности $x_{j+1} - x_j$. При этом нулевые значения разностей не учитываются. Последовательность одинаковых знаков называют фазой. Далее вычисляют суммарное число плюсовых и минусовых фаз, причем начальная и конечная фазы исключаются. Тогда значение функции $Z_1(V, x_1, x_2, \dots, x_V)$ равно такому суммарному числу фаз. В случае справедливости выдвинутой гипотезы последовательность случайных величин вида

$$\{Z(V, \theta_2 - \theta_1, \theta_3 - \theta_2, \dots, \theta_{V+1} - \theta_V; V \geq 30)\}$$

сходится по распределению к стандартному нормальному закону. Пороговое значение на 5-процентном уровне значимости равно 1,96. Так как значение статистики Валлиса–Мура для данного потока удовлетворяет условию $9,6221 > 1,96$, то согласно фазово-частотному критерию выдвинутую гипотезу о независимости и одинаковом распределении интервалов между последовательными пакетами следует отклонить.

По данным табл. 1 заметим, что интервалы имеют значительно отличающиеся длины. Так в первых 10000 наблюдений минимальный интервал имеет длину 0,000064, а максимальный — 0,11617. Данное поведение можно объяснить образованием групп. Разобьем описанные данные на пачки с помощью первого предложенного алгоритма. Подбирая управляющие параметры h_0 , a и b , можно разбить первоначальный поток объема $V = 10000$ на группы. Например, при $h_0 = 0,001$, $a = 0,96$ и $b = 1,44$ получим $N = 1009$ значений интервалов $\tau_{i+1} - \tau_i$, где $i = 0, 1, \dots, 1008$ между группами, и последовательность из 1009 значений для размеров $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{1008}$ групп пакетов. Часть обработанных данных приведены в табл. 2.

Статистика Валлиса–Мура вида $Z(1009, y_0, y_1, \dots, y_{1008})$ для временных интервалов между первыми пакетами в группах равна 0,772. Значение статистики Валлиса–Мура для этих интервалов удовлетворяет условию $|Z(1009, y_0, y_1, \dots, y_{1008})| = 0,772 < 1,96$. Тогда согласно фазово-частотному критерию [9] гипотеза о независимости и одинаковом распределении интервалов между группами пакетов не отклоняется. С помощью формул (13) из [16] при параметрах

$$\begin{aligned} s &= 5, \quad a_1 = \min\{y_0, y_1, \dots, y_{1008}\} + \\ &+ (\max\{y_0, y_1, \dots, y_{1008}\} - \min\{y_0, y_1, \dots, y_{1008}\}) / (6(s - 1)), \\ b_1 &= (\max\{y_0, y_1, \dots, y_{1008}\} - \min\{y_0, y_1, \dots, y_{1008}\}) / (s - 1) \end{aligned}$$

получены следующие оценки для параметров смещенного экспоненциального распределения h и σ : $h^* = 0,0042$ и $\sigma^* = 0,0198$. С помощью критерия хи-квадрат проверим гипотезу о том, что последовательность $\{\tau_{i+1} - \tau_i; i \geq 0\}$ составлена из случайных величин, каждая из которых имеет смещенное экспоненциальное распределение. При $N = 1009$, $s = 5$, $a_1 = 0,0075$ и $b_1 = 0,0343$ из табл. 2 вычислим приближенное значение статистики хи-квадрат, равное 5,42. При двух степенях свободы и уровне значимости в 5% пороговое значение хи-квадрат распределения равно 5,991. Отсюда видно, что принятое гипотетическое распределение для интервалов $\tau_{i+1} - \tau_i$, $i \geq 0$, между последовательными группами пакетов хорошо соответствует экспериментальным данным из табл. 2. Таким образом, можно принять, что распределение ин-

Таблица 2. Значения (z_i, y_i) вектора $(\chi_i; \tau_{i+1} - \tau_i)$, где $i = 0, 1, \dots, 49$

(2; 0,002836)	(1; 0,003964)	(1; 0,002896)	(1; 0,004036)	(10; 0,020772)
(2; 0,00668)	(10; 0,020504)	(10; 0,034464)	(10; 0,03902)	(10; 0,020544)
(12; 0,035004)	(25; 0,038748)	(1; 0,004)	(2; 0,00684)	(15; 0,02566)
(6; 0,0146)	(1; 0,012168)	(9; 0,027832)	(4; 0,040048)	(6; 0,034612)
(1; 0,02306)	(4; 0,039592)	(11; 0,071748)	(7; 0,08092)	(9; 0,05648)
(50; 0,110752)	(6; 0,013856)	(11; 0,030088)	(10; 0,031168)	(9; 0,02788)
(16; 0,042356)	(2; 0,007064)	(18; 0,041292)	(4; 0,013376)	(10; 0,022272)
(11; 0,034268)	(9; 0,020552)	(5; 0,0218)	(2; 0,026012)	(13; 0,034444)
(2; 0,014516)	(2; 0,02656)	(8; 0,083952)	(4; 0,057936)	(21; 0,12668)
(34; 0,076308)	(21; 0,024744)	(13; 0,015112)	(6; 0,010656)	(3; 0,006644)

тервалов между последовательными группами в наблюдаемом потоке имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \tau_{i+1} - \tau_i < t\}) &= 1 - \exp\{-(t - 0,0042)/0,0198\}, \quad t > 0,0042; \\ \mathbf{P}(\{\omega: \tau_{i+1} - \tau_i < t\}) &= 0, \quad t \leq 0,0042. \end{aligned}$$

Статистика Валлиса–Мура $Z(1009, z_0, z_1, \dots, z_{1008})$ для количества пакетов в группе равна 1,694 и удовлетворяет условию $|Z(1009, z_0, z_1, \dots, z_{1008})| = 1,694 < 1,96$. Значит, гипотеза о независимости и одинаковом распределении размеров групп не отклоняется. С помощью формулы (10) получены оценки для α , β и γ : $\alpha^* = 0,864$, $\beta^* = 0,688$, $\gamma^* = 0,9042$. При числе наблюдений $N = 1009$ и количестве разрядов $r = 5$ получим значение статистики хи-квадрат, равное 2,9234. Это значение меньше 5% порогового значения хи-квадрат распределения с одной степенью свободы, равного 3,841. Таким образом, гипотеза о распределении вида (5) для количества требований в группе не отвергается. Используя соотношения (5) и оценки α^* , β^* и γ^* , получим распределение для количества пакетов в группе следующего вида: $Q(1) = 0,1238$, $Q(2) = 0,107$, $Q(k) = 0,0736 \times (0,9042)^{k-3}$, $k \geq 3$.

5. Получение дополнительных реализаций по одной выборке

При получении экспериментальных данных возможны ошибки или погрешности в полученных результатах. Это может быть связано с неточностью измерительных приборов (систематическая ошибка) или с ошибками наблюдателя (случайная ошибка). Необходимо проверить, могли ли ошибки получения данных значительно повлиять на результат анализа полученной выборки. Предлагается алгоритм получения дополнительных реализаций, близких к исходной. Если анализ измененных данных даст результат, близкий результату анализа исходных данных, то можно считать, что возможные неточности в данных не могли повлиять на выводы, сделанные по исходной выборке.

Предположим, что наблюдатель получает данные с относительной погрешностью, не превышающей величины δ . Обычно считают, что ошибка имеет нормальное распределение. Тогда полученное измерение также имеет нормальное распределение со средним, которое совпадает с реальным значением измеряемой величины. Для нормального распределения известно правило

Таблица 3. Модифицированные данные $\theta_{i+1} - \theta_i$, $i = 1, 2, \dots, 80$

0,000167	0,002651	0,003939	0,002877	0,004010	0,002802	0,002695	0,001419
0,002253	0,000449	0,002587	0,001327	0,002134	0,000763	0,004209	0,002607
0,004030	0,001510	0,001272	0,001959	0,001939	0,001105	0,001812	0,001625
0,002520	0,002671	0,003958	0,002854	0,004105	0,002710	0,003942	0,002869
0,004090	0,002726	0,003982	0,002830	0,004133	0,004312	0,003894	0,004551
0,003982	0,004463	0,003894	0,002921	0,004054	0,002762	0,003935	0,002877
0,001097	0,002818	0,000707	0,002194	0,000835	0,003152	0,000087	0,002738
0,003907	0,002909	0,004101	0,002714	0,004030	0,002782	0,003990	0,002825
0,003302	0,000616	0,002893	0,000950	0,003664	0,000358	0,003474	0,001427
0,002575	0,002814	0,001272	0,002671	0,002873	0,001423	0,001943	0,000572

Таблица 4. Значения (z_i, y_i) вектора $(\chi_i; \tau_{i+1} - \tau_i)$, $i = 0, 1, \dots, 49$

(2; 0,002818)	(1; 0,003939)	(1; 0,002877)	(1; 0,00401)	(10; 0,020638)
(2; 0,006637)	(10; 0,020372)	(10; 0,034242)	(10; 0,038769)	(12; 0,027423)
(10; 0,027768)	(25; 0,038499)	(1; 0,003974)	(2; 0,006796)	(15; 0,025495)
(6; 0,014506)	(1; 0,01209)	(9; 0,027653)	(4; 0,039791)	(6; 0,03439)
(1; 0,022912)	(4; 0,039338)	(11; 0,071287)	(7; 0,0804)	(9; 0,056117)
(50; 0,11004)	(6; 0,013767)	(11; 0,029895)	(10; 0,030968)	(9; 0,027701)
(16; 0,042084)	(4; 0,01364)	(16; 0,034405)	(4; 0,01329)	(10; 0,022129)
(11; 0,034048)	(9; 0,02042)	(5; 0,02166)	(2; 0,025845)	(13; 0,034223)
(2; 0,014423)	(2; 0,026389)	(8; 0,083412)	(4; 0,057564)	(21; 0,125866)
(34; 0,075817)	(21; 0,024585)	(13; 0,015015)	(6; 0,010588)	(3; 0,006601)

“трех сигма” — почти все значения случайной величины находятся на расстоянии не более величины 3σ от математического ожидания. Положим, что число 3σ равно абсолютной погрешности δX , где X — полученное измерение. Получаем среднеквадратическое отклонение $\sigma = \delta X/3$. Таким образом, с помощью исходной выборки $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ можно получить семейство выборок $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$, где Y_i — реализация случайной величины с нормальным распределением $N(X_i, (\delta X_i/3)^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Применим описанный алгоритм получения дополнительных выборок к данным, проанализированным в разделе 4. Пусть погрешность измерений не превышает $\delta = 0,05$. В табл. 3 приведена часть модифицированных данных.

Применяя фазово-частотный критерий Валлиса–Мура к статистическим данным табл. 3, получаем значение статистики $Z(10000, x_1, x_2, \dots, x_{10000}) = 9,6221$. Значение статистики для данного потока превышает пороговое значение 1,96. Тогда согласно фазово-частотному критерию выдвинутую гипотезу о независимости и одинаковом распределении интервалов между пакетами следует отклонить.

Применим к модифицированным данным первый алгоритм с теми же самыми параметрами $h_0 = 0,001$, $a = 0,96$ и $b = 1,44$. Получим такое же число $N = 1009$ групп, но объединены другие пакеты. Часть обработанных данных приведена в табл. 4.

Статистика Валлиса–Мура $Z(1009, y_0, y_1, \dots, y_{1008}) = 0,323$ для временных интервалов между первыми пакетами в группах не превышает критического

Таблица 5. Модифицированные данные $\theta_{i+1} - \theta_i$, $i = 1, 2, \dots, 80$

0,000166	0,002640	0,003860	0,002907	0,004025	0,002755	0,002736	0,001445
0,002261	0,000461	0,002654	0,001366	0,002158	0,000761	0,004396	0,002666
0,004114	0,001551	0,001272	0,001915	0,001956	0,001099	0,001836	0,001592
0,002563	0,002676	0,003965	0,002880	0,004134	0,002743	0,004014	0,002914
0,004083	0,002679	0,004020	0,002826	0,004167	0,004390	0,003877	0,004458
0,004023	0,004402	0,003939	0,002845	0,004101	0,002749	0,004068	0,002869
0,001082	0,002811	0,000730	0,002202	0,000851	0,003130	0,000087	0,002800
0,003907	0,002911	0,004188	0,002751	0,004113	0,002819	0,003987	0,002797
0,003299	0,000619	0,002894	0,000955	0,003637	0,000355	0,003541	0,001436
0,002686	0,002906	0,001271	0,002718	0,002960	0,001462	0,001970	0,000575

уровня 1,96. Поэтому гипотеза о независимости и одинаковом распределении интервалов между группами пакетов не отклоняется. Аналогичным способом получены оценки для параметров смещенного экспоненциального распределения h и σ : $h^* = 0,0041$ и $\sigma^* = 0,0197$. Значение статистики хи-квадрат для распределения интервалов равно 5,8864. Это значение не превышает 5-процентное пороговое значение распределения хи-квадрат, равное 5,991. Отсюда следует, что гипотеза о смещенном экспоненциальном распределении интервалов между группами пакетов не отвергается.

Статистика Валлиса–Мура $Z(1009, z_0, z_1, \dots, z_{1008})$ для количества пакетов в группе равна 1,684 и удовлетворяет условию $|Z(1009, z_0, z_1, \dots, z_{1008})| < 1,96$. Значит, гипотеза о независимости и одинаковом распределении размеров групп не отклоняется. Аналогично с помощью формулы (10) получены оценки для α , β и γ : $\alpha^* = 0,9024$, $\beta^* = 0,6675$, $\gamma^* = 0,9043$. Значение статистики хи-квадрат, равное 3,293, меньше 5 % порогового значения хи-квадрат распределения с одной степенью свободы, равного 3,841. Таким образом, распределение вида (5) для количества требований в пачке хорошо описывает данные. Получено распределение для количества пакетов в группе следующего вида: $Q(1) = 0,1219$, $Q(2) = 0,11$, $Q(k) = 0,0734 \times (0,9043)^{k-3}$, $k \geq 3$.

Приведем также еще одну модифицированную выборку при случайном колебании, не превышающем относительной погрешности $\delta = 0,05$. В табл. 5 приведена часть модифицированных данных.

Применяя критерий Валлиса–Мура к модифицированным данным, получаем значение статистики $Z(10000, x_1, x_2, \dots, x_{10000}) = 9,343 > 1,96$. Согласно фазово-частотному критерию выдвинутую гипотезу о независимости и одинаковом распределении интервалов между пакетами следует отклонить. Обработаем модифицированные данные первым алгоритмом с параметрами $h_0 = 0,001$, $a = 0,96$ и $b = 1,44$. Часть обработанных данных приведена в табл. 6.

Гипотеза о независимости и одинаковом распределении интервалов между группами пакетов не отклоняется, так как статистика $Z(1009, y_0, y_1, \dots, y_{1008}) = 0,274$ для временных интервалов между первыми пакетами в группах не превышает критического уровня 1,96. Оценки для параметров смещенного экспоненциального распределения равны $h^* = 0,0043$ и $\sigma^* = 0,0194$. Значение 5,647 статистики хи-квадрат для распределения ин-

Таблица 6. Значения (z_i, y_i) вектора $(\chi_i; \tau_{i+1} - \tau_i)$, $i = 0, 1, \dots, 49$

(2; 0,002806)	(1; 0,00386)	(1; 0,002907)	(1; 0,004025)	(10; 0,020992)
(2; 0,00678)	(10; 0,020427)	(10; 0,03446)	(10; 0,038859)	(12; 0,027569)
(10; 0,027871)	(25; 0,039184)	(1; 0,004018)	(2; 0,006844)	(15; 0,02585)
(6; 0,014664)	(1; 0,012114)	(9; 0,027843)	(4; 0,039897)	(6; 0,03436)
(1; 0,023018)	(4; 0,040091)	(11; 0,071316)	(7; 0,080915)	(9; 0,056205)
(50; 0,110372)	(6; 0,013994)	(11; 0,030369)	(10; 0,031335)	(9; 0,027789)
(8; 0,022248)	(10; 0,027432)	(18; 0,04113)	(4; 0,013428)	(10; 0,022303)
(11; 0,034471)	(9; 0,020528)	(5; 0,021935)	(2; 0,026031)	(13; 0,034193)
(2; 0,014612)	(2; 0,026430)	(8; 0,083282)	(4; 0,05783)	(21; 0,126454)
(34; 0,07632)	(21; 0,024614)	(13; 0,015086)	(6; 0,010784)	(3; 0,006716)

тервалов не превышает 5-процентное пороговое значение распределения хи-квадрат. Поэтому гипотеза о смещенном экспоненциальном распределении интервалов между группами пакетов не отвергается.

Статистика $Z(1009, z_0, z_1, \dots, z_{1008}) = 0,7971$ для количества пакетов в группе не превышает критического уровня 1,96. Таким образом, гипотеза о независимости и одинаковом распределении размеров групп не отклоняется. Получены следующие оценки параметров распределения: $\alpha^* = 0,8281$, $\beta^* = 0,6985$, $\gamma^* = 0,9044$. Значение статистики хи-квадрат равно 3,124 и оно меньше 5-процентного порогового значения, равного 3,841. Таким образом, можно считать, что количество требований в пачке имеет распределение вида (5). Итак, получаем распределение следующего вида: $Q(1) = 0,1268$, $Q(2) = 0,105$, $Q(k) = 0,0733 \times (0,9044)^{k-3}$, $k \geq 3$.

6. Заключение

В статье описана модель неоднородного потока транспорта. Неоднородность порождает зависимость и разное распределение интервалов между соседними требованиями. Таким образом, транспортный поток имеет сложную вероятностную структуры. Предложено транспортный поток рассматривать как поток групп (пачек) требований с определенным распределением размера группы. Представить исходный поток в виде потока групп можно с помощью одного из предложенных алгоритмов. Данный подход можно использовать для изучения любого реального потока неоднородных требований.

При изучении реальных потоков часто для исследования доступна только одна реализация данных. В статье предложен алгоритм получения дополнительных реализаций аналогичной вероятностной структуры. При этом использование распределения Гаусса позволяет получить любое количество дополнительных реализаций. Новые реализации можно исследовать теми же методами, что и исходную. Полученные результаты оказались близкими к результатам анализа исходных данных.

Итак, проведено численное исследование как исходных реальных данных, так и модифицированных. Предложенные алгоритмы определения вероятностной структуры потоков неоднородных требований показали свою эффективность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.
2. Неймарк Ю.И., Федоткин М.А. О работе автомата, регулирующего уличное движение на перекрестке // *АиТ*. 1966. № 3. Т. 27. С. 78–87.
3. Неймарк Ю.И., Федоткин М.А., Преображенская А.М. Работа автомата с обратной связью, управляющего уличным движением на перекрестке // *Изв. АН СССР. Технич. кибернетика*. 1968. № 5. С. 129–141.
4. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
5. Дрю Д. Теория транспортных потоков и управление ими. М.: Транспорт, 1972.
6. Федоткин М.А. Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов / Сб. научн. работ “Математические вопросы кибернетики”. М.: Физматлит, 1998. № 7. С. 333–344.
7. Федоткин М.А., Федоткин А.М. Анализ и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными транспортными потоками Гнеденко–Коваленко // *АиТ*. 2009. № 12. С. 92–108.
Fedotkin M.A., Fedotkin A.M. Analysis and Optimization of Output Processes of Conflicting Gnedenko-Kovalenko Traffic Streams under Cyclic Control // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. P. 2024–2038.
<https://doi.org/10.1134/S0005117909120108>.
8. Haight F.A. Mathematical theories of traffic flow. N.Y.–London: Acad. press, 1963.
9. Федоткин М.А. Нетрадиционные проблемы математического моделирования экспериментов. М.: Физматлит, 2018.
10. Fedotkin M.A., Fedotkin A.M., Kudryavtsev E.V. Construction and Analysis of a Mathematical Model of Spatial and Temporal Characteristics of Traffic Flows // *Autom. Control Comput. Sci*. 2014. V. 48. No. 6. P. 358–367.
11. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.
12. Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. М.: Физматлит, 2012.
13. Fedotkin M.A., Rachinskaya M.A. Parameters Estimator of the Probabilistic Model of Moving Batches Traffic Flow // *Distributed Computer and Communication Networks. Ser. Communications in Computer and Inform. Sci*. 2014. V. 279. P. 154–169.
14. Федоткин М.А. Основы прикладной теории вероятностей и статистики. М.: Высш. шк., 2006.
15. Федоткин М.А. Лекции по анализу случайных явлений. М.: Физматлит, 2016.
16. Fedotkin M.A., Fedotkin A.M., Kudryavtsev E.V. Nonlocal Description of the Time Characteristic for Input Flows by Means of Observations // *Autom. Control Comput. Sci*. 2015. V. 49. No. 1. P. 29–36.
17. Fowler H.J., Leland W.E. Network Traffic Characteristics with Implications for Broadband Network Congestion Management // *IEEE J. Sel. Area. Comm*. 1991. No. 9(7). P. 1139–1149.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 23.07.2019

После доработки 26.10.2019

Принята к публикации 30.01.2020