

© 2020 г. П.В. ПАКШИН, д-р физ.-мат. наук (pakshinpv@gmail.com),
Ю.П. ЕМЕЛЬЯНОВА, канд. физ.-мат. наук (emelianovajulia@gmail.com)
(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического
университета им. Р.Е. Алексеева)

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ ДЛЯ СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ¹

В статье рассматриваются дискретные линейные системы с переключением параметров в повторяющемся режиме. Предлагается новый метод синтеза управления с итеративным обучением. Метод основан на построении вспомогательной 2D-модели в форме дискретного повторяющегося процесса, устойчивость которой гарантирует сходимость процесса обучения. Для получения условий устойчивости используется дивергентный метод векторных функций Ляпунова. Вводится понятие среднего времени ожидания относительно повторений. Приводится пример, демонстрирующий возможности и особенности нового метода.

Ключевые слова: управление с итеративным обучением, дискретные системы, системы с переключениями, повторяющиеся процессы, 2D-системы, устойчивость, диссипативность, векторная функция Ляпунова.

DOI: 10.31857/S0005231020080097

1. Введение

В современной теории управления под системами с переключениями обычно понимают класс моделей динамических систем, состоящих из конечного числа подсистем, из которых в текущий момент времени функционирует лишь одна, называемая активной подсистемой, при этом выбор активной подсистемы определяется некоторым логическим правилом. Простейшим примером может служить многорежимная система, в которой подсистемы интерпретируются как отдельные режимы этой системы. Обычно подсистемы описываются индексированным множеством дифференциальных или разностных уравнений. Класс систем с переключениями интенсивно изучался в последние десятилетия и продолжает активно изучаться, что мотивировано, как многочисленными приложениями в технике, физике, биологии, экономике и других областях, так и открытыми в этом направлении теоретическими задачами. Как и для других классов систем управления первоочередной интерес здесь представляет развитие теории устойчивости и стабилизации, где получен целый ряд интересных и важных результатов. Для первоначального знакомства с этими результатами можно, в первую очередь, рекомендовать монографию [1], обзорные статьи [2, 3] и недавние монографии [4, 5].

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00528 _а).

Начиная с 60-х годов прошлого века начала активно развиваться теория 2D систем. Ее появление мотивировали задачи обработки изображений и многомерных электрических цепей, где появились ставшие в настоящее время классическими 2D модели Роессера и Форназини-Маркезини [6] и список литературы в [6]. Существенный всплеск развития теории 2D систем стимулировали работы Аримото [7], в которых впервые было представлено теоретическое обоснование алгоритмов управления с итеративным обучением (УИО) для роботов, выполняющих повторяющиеся операции и выявлен естественный 2D характер процесса управления (он включает динамический процесс на отдельном повторении и динамический процесс перехода от повторения к повторению). Естественным описанием процессов УИО служат 2D модели в виде повторяющихся процессов [6, 8]. Теория повторяющихся процессов успешно применялась к синтезу УИО в [9, 10], где были получены результаты, подтвержденные экспериментально. В настоящее время теория и приложения УИО продолжают интенсивно развиваться, им посвящены многочисленные публикации. Для первоначального знакомства можно рекомендовать обзорные статьи [11, 12]. Из недавних работ отметим [13], где УИО применяется для высокоточного лазерного напыления металла и приводятся результаты экспериментального подтверждения. Очень важным представляется применение УИО в медицинских роботах для реабилитации больных перенесших инсульт. Известные разработки в этом направлении прошли клинические испытания [14, 15].

Повторяющиеся процессы с переключениями рассматривались в [16, 17]. Эти работы мотивированы задачей проката металла, где металлическая полоска конечной длины приобретает желаемую форму проходя через систему валков, так что выходная форма предыдущей группы валков является входной для следующей группы. В [16] такие системы моделировались линейными повторяющимися процессами с переключаемой динамикой. В обеих цитированных статьях рассматриваются специальные правила переключения. Конечными результатами этих исследований являются алгоритмы синтеза закона управления, которые могут быть реализованы с использованием вычислений на основе линейных матричных неравенств.

Отметим ряд совсем недавних работ [18–21]. В статье [18] рассматривается класс дискретных систем с переключениями, состоящих из линейной части и статической нелинейности, удовлетворяющей ограничениям специального вида. Вводятся определения экспоненциальной устойчивости и среднего времени ожидания и устанавливаются достаточные условия экспоненциальной устойчивости с использованием методов общей и множественной 2D функции Ляпунова соответственно. Полученные результаты далее применяются для синтеза управления с итеративным обучением. В [19] предлагается управление с итеративным обучением высокого порядка для линейных дискретных систем с переключениями при различных начальных условиях на повторениях и воздействии ограниченных по норме возмущений. Дискретные линейные системы с переключениями рассматривались также в [20] где начальные условия на повторениях предполагались одинаковыми. Полученный здесь закон управления с итеративным обучением предполагает доступность полного вектора состояния и обеспечивает монотонную сходимость ошибки обучения.

В [21] рассматриваются системы состоящие из переключаемой непрерывной линейной части и липшицевой нелинейности. Предложен адаптивный закон управления с итеративным обучением, предполагающий доступность полного вектора состояния. Во всех перечисленных работах эффективно используется техника линейных матричных неравенств.

В данной работе рассматриваются линейные дискретные системы с переключениями. В отличие от цитированных и других известных работ доступным для измерения является только вектор выхода и закон управления с итеративным обучением формируется на основе ошибки и оценки вектора состояния. Предлагаемый подход развивает результаты авторов [22–25] для систем с переключениями и его отличие от известных состоит в том, что он эффективно использует оценки переменных состояния для улучшения характеристик процесса обучения и открывает возможность синтеза нелинейных законов управления, переключаемых в зависимости от достигнутой точности. Дается пример, в котором рассматривается динамическая модель гибкого поворотного звена в повторяющемся режиме [26]. Получены переключаемые и неперекрывающиеся законы управления с итеративным обучением и приводится их сравнение.

2. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную систему в повторяющемся режиме, описываемую линейной моделью с переключениями

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_k(p+1) &= A(k)x_k(p) + B(k)u_k(p), \quad (A(k), B(k)) \in \mathcal{F}, \\ y_k(p) &= Cx_k(p), \quad p \in [0, T-1], \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где T — число шагов на каждом повторении, $x_k(p) \in \mathbb{R}^{n_x}$ — вектор состояния, $y_k(p) \in \mathbb{R}^{n_y}$ — вектор выходных переменных, $u_k(p) \in \mathbb{R}^{n_u}$ — вектор управления, $\mathcal{F} = \{(A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_N, B_N)\}$ — множество пар матриц согласованных размеров.

Следуя понятиям, принятым в теории систем с переключениями [1], рассмотрим кусочно постоянное отображение множества неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathcal{F}$. Такое отображение задается кусочно постоянной функцией $\sigma: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ так, что $A(k) = A_{\sigma(k)}$ и $B(k) = B_{\sigma(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Функцию σ можно рассматривать как *сигнал переключения относительно повторений*. Предположим, что переключения происходят в начале каждого повторения и определим моменты переключения $k_1, k_2, \dots$ как номера повторений, на которых в системе (2.1) происходят переключения. Таким образом, сигнал переключения определяет на каждом повторении k индекс $\sigma(k) = i \in \mathcal{N}$ активной подсистемы, динамика которой описывается уравнениями

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x_k(p+1) &= A_i x_k(p) + B_i u_k(p), \quad i \in \mathcal{N}, \\ y_k(p) &= Cx_k(p), \quad p \in [0, T-1], \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Будем предполагать, что моменты переключений наблюдаемы и импульсные эффекты отсутствуют, т.е. значение вектора состояния в момент переключения не меняется скачком, и остается неизменным.

Выходная переменная системы (2.1) на каждом повторении должна воспроизводить желаемую траекторию $y_{ref}(p)$, $0 \leq p \leq T - 1$. Для достижения этой цели можно использовать управление с обратной связью. Обозначим через $e_k(p)$ ошибку воспроизведения желаемой траектории на k -м повторении

$$(2.3) \quad e_k(p) = y_{ref}(p) - y_k(p), \quad 0 \leq p \leq T - 1.$$

Если начальные условия на каждом повторении одинаковы управление с обратной связью будет обеспечивать одинаковую ошибку воспроизведения желаемой траектории на всех шагах, причем может оказаться, что величина этой ошибки не соответствует требованиям по точности. Поставим задачу найти такую последовательность входных переменных $u_k(p)$, $k = 0, 1, \dots$, которая обеспечивает достижение заданной точности воспроизведения профиля за конечное число повторений k_{fin} и сохранение этой точности при дальнейших повторениях, т.е.

$$(2.4) \quad |e_k(p)| \leq e^*, \quad k \geq k_{fin}, \quad 0 \leq p \leq T - 1.$$

Для решения используем подход на основе управления с итеративным обучением, при котором на очередном повторении входная переменная определяется соотношением

$$(2.5) \quad u_{k+1}(p) = u_k(p) + \Delta u_{k+1}(p),$$

где $\Delta u_{k+1}(t)$ — корректирующая поправка. Поставленная задача будет решена, если эта поправка обеспечит выполнение условий,

$$(2.6) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |e_k(p)| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |u_k(p) - u_\infty(p)| = 0, \quad 0 \leq p \leq T - 1$$

где $u_\infty(p)$ — ограниченная переменная, обычно называемая обученным управлением.

3. Дискретная 2D модель

Для формирования корректирующей поправки, следуя [25], будем использовать ошибку обучения и оценку вектора состояния $\hat{x}_k(p)$, которая получается с помощью наблюдателя полного порядка.

$$(3.1) \quad \hat{x}_k(p+1) = A_i \hat{x}_k(p) + B_i u_k(p) + F_i (y_k(p) - C \hat{x}_k(p)), \quad i \in \mathcal{N}.$$

Введем в рассмотрение ошибку оценивания и приращения оценки и ошибки оценивания

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \tilde{x}_k(p) &= x_k(p) - \hat{x}_k(p), \\ \hat{\xi}_{k+1}(p+1) &= \hat{x}_{k+1}(p) - \hat{x}_k(p), \\ \tilde{\xi}_{k+1}(p+1) &= \tilde{x}_{k+1}(p) - \tilde{x}_k(p), \end{aligned}$$

тогда динамику системы с наблюдателем относительно приращений можно описать уравнениями:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\xi}_{k+1}(p+1) &= (A_i - F_i C) \tilde{\xi}_{k+1}(p), \\
 (3.3) \quad \hat{\xi}_{k+1}(p+1) &= F_i C \tilde{\xi}_{k+1}(p) + A_i \hat{\xi}_{k+1}(p) + B_i v_{k+1}(p), \\
 e_{k+1}(p) &= -C A_i \tilde{\xi}_{k+1}(p) - C A_i \hat{\xi}_{k+1}(p) + e_k(p) - C B_i v_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N},
 \end{aligned}$$

где

$$v_{k+1}(p) = \Delta u_{k+1}(p-1).$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
 \eta_k(p) &= [\tilde{\xi}_k(p)^T \quad \hat{\xi}_k(p)^T]^T, \quad A_{i11} = \begin{bmatrix} A_i - F_i C & 0 \\ F_i C & A_i \end{bmatrix}, \quad B_{i1} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_i \end{bmatrix}, \\
 A_{i12} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_{i21} = [-C A_i \quad -C A_i], \quad A_{22} = I, \quad B_{i2} = -C_i B
 \end{aligned}$$

и запишем (3.3) в виде стандартной модели дискретного повторяющегося процесса [6]:

$$\begin{aligned}
 \eta_{k+1}(p+1) &= A_{i11} \eta_{k+1}(p) + A_{i12} e_k(p) + B_{i1} v_{k+1}(p), \\
 (3.4) \quad e_{k+1}(p) &= A_{i21} \eta_{k+1}(p) + A_{i22} e_k(p) + B_{i2} v_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N}.
 \end{aligned}$$

Корректирующую поправку будем искать в виде закона обратной связи по приращениям

$$(3.5) \quad \Delta u_{k+1}(p-1) = v_{k+1}(p) = \varphi(\eta_{k+1}(p), e_k(p)), \quad \varphi(0, 0) = 0.$$

Если для всех $0 \leq p \leq T-1$ $|e_k(p)| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то существует k_{fin} , при котором выполняются условия (2.4). Таким образом, поставленная задача будет решена, если найдется последовательность $v_k(p)$, такая что

$$(3.6) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |e_k(p)| = 0, \quad |u_\infty(p)| < \infty, \quad 0 \leq p \leq T-1,$$

при условии, что норма ошибки ограничена сверху монотонно убывающей функцией, где $u_\infty(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(p)$. Ясно, что в этом случае существует k_{fin} , начиная с которого будет выполнено условие (2.4).

4. Основные результаты

4.1. Условия устойчивости

Обозначим число переключений сигнала σ на интервале (k_s, k_f) через $N_\sigma(k_f, k_s)$ и введем в рассмотрение *среднее время ожидания* в соответствии со следующим определением

Определение 1. Положительное число $\kappa_a \in \mathbb{Z}^+$ называется средним временем ожидания для сигнала переключения относительно повторений σ , если для некоторого $N_0 \geq 0$

$$(4.1) \quad N_\sigma(k_f, k_s) \leq N_0 + \frac{k_f - k_s}{\kappa_a}, \quad k_f \geq k_s \geq 0.$$

Неравенство (4.1) означает, что в среднем число шагов между любыми двумя последовательными переключениями на рассматриваемом интервале не меньше чем κ_a .

Решение будем искать на основе развития теории устойчивости и диссипативности повторяющихся процессов [22].

Определение 2 [22]. Система (3.4), (3.5) называется экспоненциально устойчивой, если существуют числа $\kappa > 0$ и $0 < \rho < 1$, такие что

$$(4.2) \quad |\eta_k(p)|^2 + |e_k(p)|^2 \leq \kappa \rho^{k+p},$$

где ρ не зависит от T .

Заметим, в случае выполнения (4.2) гарантируется указанная в предыдущем разделе ограниченность нормы ошибки монотонно убывающей функцией, что, в свою очередь, обеспечивает достижение заданной точности.

Система (3.4), (3.5) в общем случае нелинейна. Универсальным методом анализа устойчивости нелинейных систем является второй метод Ляпунова. Однако уравнения рассматриваемой системы не разрешены относительно полных приращений переменных состояния, и применить этот метод непосредственно невозможно. Для преодоления этой трудности авторами разработан так называемый дивергентный метод векторных функций Ляпунова, в котором, в отличие от классической версии, устойчивость устанавливается на основе свойств дивергенции (дискретного аналога дивергенции) указанных векторных функций. В рассматриваемом случае введем векторную функцию Ляпунова так:

$$(4.3) \quad V_i(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) = \begin{bmatrix} V_1(\eta_{k+1}(p)) \\ V_{2i}(e_k(p)) \end{bmatrix}, \quad i \in \mathcal{N},$$

где $V_1(x_{k+1}(p)) > 0$, $x_{k+1}(t) \neq 0$, $V_{2i}(e_k(p)) > 0$, $y_k(p) \neq 0$, $V_1(0) = 0$, $V_{2i}(0) = 0$, $i \in \mathcal{N}$. Аналог дивергенции этой функции определим как

$$(4.4) \quad \mathcal{D}V(\eta_{k+1}(p), y_k(p)) = \Delta_p V_1(\eta_{k+1}(p)) + \Delta_k V_2(e_k(p)),$$

где $\Delta_p V_1(\eta_{k+1}(p)) = V_1(\eta_{k+1}(p+1)) - V_1(\eta_{k+1}(p))$, $\Delta_k V_2(e_k(p)) = V_2(e_{k+1}(p)) - V_2(e_k(p))$.

Теорема 1. Дискретный повторяющийся процесс (3.4), (3.5) является экспоненциально устойчивым для любого сигнала переключения относительно повторений σ со средним временем ожидания

$$(4.5) \quad \kappa_a > \ln \left(\frac{c_1}{c_2} \right) \left(\ln \left(1 - \frac{c_3}{c_1} \right) \right)^{-1}$$

и произвольным N_0 , если существует векторная функция (4.3) и положительные скаляры c_1 , c_2 и c_3 , такие что

$$(4.6) \quad c_1|\eta|^2 \leq V_1(\eta) \leq c_2|\eta|^2,$$

$$(4.7) \quad c_1|e|^2 \leq V_{2i}(e) \leq c_2|e|^2,$$

$$(4.8) \quad \mathcal{D}V_i(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) \leq -c_3 (|\eta_{k+1}(p)|^2 + |e_k(p)|^2).$$

Доказательство. Рассмотрим интервал $(0, k_f)$ и обозначим через $N_\sigma = N_\sigma(k_f, 0)$ число переключений на этом интервале. Из неравенства (4.8) следует

$$(4.9) \quad \mathcal{D}V_{\sigma(k)}(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) \leq -c_3 (|\eta_{k+1}(p)|^2 + |e_k(p)|^2).$$

Используя (4.6), (4.7) и (4.8), неравенство (4.9) можно переписать как

$$(4.10) \quad \begin{aligned} & V_1(\eta_{k+1}(p+1)) - V_1(\eta_{k+1}(p)) + V_{2\sigma(k+1)}(e_{k+1}(p)) - V_{2\sigma(k)}(e_k(p)) \leq \\ & \leq -c_3 (|\eta_{k+1}(p)|^2 + |e_k(p)|^2) \leq -\frac{c_3}{c_2} (V_1(\eta_{k+1}(p)) + V_{2\sigma(k)}(e_k(p))), \end{aligned}$$

или

$$(4.11) \quad \begin{aligned} & V_1(\eta_{k+1}(p+1)) + V_{2\sigma(k+1)}(e_{k+1}(p)) \leq \\ & \leq \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right) (V_1(\eta_{k+1}(p)) + V_{2\sigma(k)}(e_k(p))). \end{aligned}$$

Левая часть (4.11) является положительно определенной, следовательно $0 < 1 - \frac{c_3}{c_2} < 1$. Обозначим $\lambda = 1 - \frac{c_3}{c_2}$ и перепишем (4.11) в виде

$$(4.12) \quad V_1(\eta_{k+1}(p+1)) \leq \lambda V_1(\eta_{k+1}(p)) + \lambda V_{2\sigma(k)}(e_k(p)) - V_{2\sigma(k+1)}(e_{k+1}(p)).$$

Решая неравенство (4.12) относительно $V_1(\eta_{k+1}(p))$ получим

$$(4.13) \quad \begin{aligned} & V_1(\eta_{k+1}(p)) \leq V_1(\eta_{k+1}(0))\lambda^p + \\ & + \sum_{h=0}^{p-1} \left[\lambda V_{2\sigma(k)}(e_k(h)) - V_{2\sigma(k+1)}(e_{k+1}(h)) \right] \lambda^{p-1-h}. \end{aligned}$$

Обозначим $H_{k,\sigma(k)}(p) = \sum_{h=0}^{p-1} V_{2,\sigma(k)}(e_k(h))\lambda^{p-1-h}$, тогда из (4.13) следует что

$$(4.14) \quad H_{k+1,\sigma(k+1)}(p) \leq \lambda H_{k,\sigma(k)}(p) + \lambda^p V_1(\eta_{k+1}(0)) - V_1(\eta_{k+1}(p)).$$

Пусть на некотором повторении k_n активный режим i переключается на режим j . Из условия (4.7) следует, что

$$(4.15) \quad V_{2j}(e) \leq \mu V_{2i}(e), \quad i, j \in \mathcal{N},$$

где $\mu = \frac{c_2}{c_1} \geq 1$. Решая неравенство (4.14) с учетом (4.15) получим

$$(4.16) \quad \begin{aligned} & H_{k,\sigma(k)}(p) \leq \mu^{N_\sigma} \lambda^k H_{0,\sigma(0)}(p) + \\ & + \mu^{N_\sigma} \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{k-1-n} \left(\lambda^p V_1(\eta_{n+1}(0)) - V_1(\eta_{n+1}(p)) \right), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{k-1-n} V_1(\eta_{n+1}(p)) + \sum_{h=0}^{p-1} \lambda^{p-1-h} V_{2\sigma(k)}(e_k(h)) \leq \\
 (4.17) \quad & \leq \mu^{N_\sigma} \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{k-1-n} V_1(\eta_{n+1}(p)) + \sum_{h=0}^{p-1} \lambda^{p-1-h} V_{2\sigma(k)}(e_k(h)) \leq \\
 & \leq \mu^{N_\sigma} \left(\lambda^p \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{k-1-n} V_1(\eta_{n+1}(0)) + \lambda^k \sum_{h=0}^{p-1} \lambda^{p-1-h} V_{2,\sigma(0)}(e_0(h)) \right).
 \end{aligned}$$

Из неравенства (4.17) следует, что

$$\begin{aligned}
 (4.18) \quad & \lambda^{-(p-1)} \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{-n} V_1(\eta_{n+1}(p)) + \lambda^{-(k-1)} \sum_{h=0}^{p-1} \lambda^{-h} V_{2\sigma(k)}(e_k(h)) \leq \\
 & \leq \mu^{N_\sigma} \left(\lambda^{-(k-1)} \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{k-1-n} V_1(\eta_{n+1}(0)) + \right. \\
 & \quad \left. + \lambda^{-(p-1)} \sum_{h=0}^{p-1} \lambda^{p-1-h} V_{2,\sigma(0)}(e_0(h)) \right).
 \end{aligned}$$

По условию все повторения начинаются с одними и теми же начальными условиями, следовательно $V_1(\eta_{n+1}(0)) = 0$. Кроме того, поскольку $y_{ref}(p)$ ограничена для всех p , то $|e_o(p)|^2 = f(p) \leq M_f$. Тогда левую часть (4.18) можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (4.19) \quad & \mu^{N_\sigma} \left(\lambda^{-(k-1)} \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{k-1-n} V_1(\eta_{n+1}(0)) + \right. \\
 & \quad \left. + \lambda^{-(p-1)} \sum_{h=0}^{p-1} \lambda^{p-1-h} V_{2,\sigma(0)}(e_0(h)) \right) \leq \\
 & \leq \mu^{N_\sigma} c_2 M_f \sum_{h=0}^T \lambda^{-h} \leq \mu^{N_\sigma} \frac{c_2 M_f (\lambda^{-T} - 1)}{\lambda^{-1} - 1} = C_f \mu^{N_\sigma}
 \end{aligned}$$

для всех $k \leq k_f$ и $p \in [0, T]$. С учетом (4.19) из (4.18) следует

$$(4.20) \quad C_f \mu^{N_\sigma} \geq \lambda^{-(p-1)} \sum_{h=0}^{p-1} \lambda^{p-1-h} V_2(y_0(p)) \geq c_1 \lambda^{-(k-1)} \lambda^{-(p-1)} |\eta_k(p)|^2,$$

$$(4.21) \quad C_f \mu^{N_\sigma} \geq \lambda^{-(p-1)} \sum_{h=0}^{p-1} \lambda^{p-1-h} V_2(y_0(h)) \geq c_1 \lambda^{-(k-1)} \lambda^{-(p-1)} |e_k(p-1)|^2$$

для всех $k \leq k_f$ и $p \in [0, T]$. Полагая $k = k_f$ с учетом (4.5) из (4.18)–(4.21) получим

$$|\eta_{k_f}(p)|^2 + |e_{k_f}(p)|^2 \leq \frac{C\mu^{N_0}}{c_1\lambda} \lambda_0^{k_f+p}$$

для любых k_f и $p \in [0, T]$, где $\lambda_0 = \mu^{\kappa_a^{-1}} = (c_2/c_1)^{\kappa_a^{-1}} < 1$. Это доказывает справедливость утверждения теоремы.

Из доказательства теоремы вытекает следующий результат.

Следствие 1. Дискретный повторяющийся процесс (3.4), (3.5) является экспоненциально устойчивым для произвольного сигнала переключения относительно повторений σ , если существует векторная функция

$$(4.22) \quad V(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) = [V_1(\eta_{k+1}(p)) \ V_2(e_k(p))]^T$$

и положительные скаляры c_1, c_2, c_3 , такие что

$$(4.23) \quad \begin{aligned} c_1|\eta|^2 &\leq V_1(\eta) \leq c_2|\eta|^2, \\ c_1|e|^2 &\leq V_2(e) \leq c_2|e|^2, \\ DV(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) &\leq -c_3 (|\eta_{k+1}(p)|^2 + |e_k(p)|^2). \end{aligned}$$

4.2. Синтез на основе теории диссипативности

Введем в рассмотрение вспомогательный вектор

$$(4.24) \quad z_{k+1}(p) = C_1\eta_{k+1}(p) + C_2e_k(p) + Dv_{k+1}(p),$$

где C_1, C_2 и D — постоянные матрицы согласованных размеров. Следуя [22] введем следующее определение.

Определение 3. Дискретный повторяющийся процесс (3.4) называется экспоненциально диссипативным относительно входной переменной $v_{k+1}(t)$ и выходной переменной $z_{k+1}(t)$, определенной в (4.24), если существуют векторная функция (4.3) и положительные скаляры c_1, c_2 и c_3 такие, что

$$\begin{aligned} c_1|\eta_{k+1}(p)|^2 &\leq V_1(\eta_{k+1}(p)) \leq c_2|\eta_{k+1}(p)|^2, \\ c_1|e_k(p)|^2 &\leq V_2(e_k(p)) \leq c_2|e_k(p)|^2, \end{aligned}$$

$$DV_i(\eta_{k+1}(t), e_k(t)) \leq S_i(z_{k+1}(p), v_{k+1}(p)) - c_3 (|\eta_{k+1}(t)|^2 + |e_k(t)|^2), \quad i \in \mathcal{N},$$

где S_i — скалярная функция, такая что $S_i(0, 0) = 0$.

В теории диссипативности по Виллемсу функции S_i и V_i называются функцией запаса и функцией накопления. Нетрудно видеть, что если при некотором выборе z последовательность (3.5) удовлетворяет условию $S_i(z_{k+1}(p), v_{k+1}(p)) \leq 0$, $i \in \mathcal{N}$, то система (3.4), (3.5) в соответствии с теоремой 1 будет экспоненциально устойчива для любого сигнала переключения

относительно повторений σ со средним временем ожидания (4.5). Таким образом, задача сводится к нахождению *стабилизирующей тройки* $\{V, z, v\}$. Обозначим

$$\zeta_{k+1}(p) = \begin{bmatrix} \eta_{k+1}(p) \\ e_k(p) \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_{i11} & A_{i12} \\ A_{i21} & A_{i22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \end{bmatrix}, \quad i \in \mathcal{N}.$$

Определим блочно-диагональную матрицу $P_i = \text{diag}[P_1 \ P_{2i}] \succ 0$ как решение неравенства Риккати

$$(4.25) \quad \bar{A}_i^T P_i \bar{A} - (1 - \sigma) P_i - \bar{A}_i^T P_i \bar{B}_i [\bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i + R]^{-1} \bar{B}_i^T P_i \bar{A}_i + Q \preccurlyeq 0, \quad i \in \mathcal{N},$$

где $0 < \sigma < 1$ — положительный скаляр, $Q \succ 0$ и $R \succ 0$ — весовые матрицы. Нетрудно видеть, что если система линейных матричных неравенств

$$(4.26) \quad \begin{bmatrix} (1 - \sigma) X_i & X_i \bar{A}^T & X_i \\ \bar{A}_i X_i & X_i + \bar{B}_i R^{-1} \bar{B}_i^T & 0 \\ X_i & 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad X_i \succ 0, \quad i \in \mathcal{N}$$

разрешима относительно $X_i = \text{diag}[X_1 \ X_{2i}] \succ 0$, то $P_i = X_i^{-1}$, $i \in \mathcal{N}$.

Следующая теорема предлагает одно из возможных множеств стабилизирующих троек.

Теорема 2. Дискретный повторяющийся процесс (3.4) является экспоненциально диссипативным с функцией запаса

$$(4.27) \quad \begin{aligned} S_i(v_{k+1}(p), z_{k+1}(p)) &= z_{k+1}^T(p) (\bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i + R)^{-1} z_{k+1}(p) + \\ &+ 2z_{k+1}(p)^T v_{k+1}(p) + v_{k+1}(p)^T [\bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i + R] v_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N} \end{aligned}$$

относительно входной переменной $v_{k+1}(p)$ и выходной переменной

$$(4.28) \quad z_{k+1}(p) = \bar{B}_i^T P_i \bar{A}_i \zeta_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N},$$

где $P_i = X_i^{-1}$, $X_i = \text{diag}[X_1 \ X_{2i}] \succ 0$ $i \in \mathcal{N}$, — решение (4.25). Множество последовательностей корректирующих поправок (3.5), обеспечивающих экспоненциальную устойчивость системы (3.4), (3.5) определяется соотношением

$$(4.29) \quad v_{k+1}(p) = - [\bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i + R]^{-1} \bar{B}_i^T P_i \bar{A}_i \Theta_i(\zeta_{k+1}(p)) \zeta_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N},$$

где $\Theta(\zeta)$ — симметричная матричная функция, удовлетворяющая соотношению

$$(4.30) \quad M_i - M_i \Theta_i(\zeta) - \Theta_i(\zeta) M_i + \Theta_i(\zeta) M_i \Theta_i(\zeta) - Q - (\sigma - \mu) P_i \prec 0, \quad i \in \mathcal{N}$$

для всех $\zeta \in \mathbb{R}^{2n_x + n_y}$, где $M_i = \bar{A}_i^T P_i \bar{B}_i [\bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i + R]^{-1} \bar{B}_i^T P_i \bar{A}_i$, $0 < \mu < \sigma$, $i \in \mathcal{N}$.

Доказательство. Выберем компоненты векторной функции накопления (4.3) в виде квадратичных форм:

$$V_1(\eta_{k+1}(p)) = \eta_{k+1}(p)^T P_1 \eta_{k+1}(p), \quad V_{2i}(e_k(p)) = e_k(p)^T P_2 e_k(p), \quad i \in \mathcal{N},$$

где $P_1 \succ 0$ и $P_2 \succ 0$ — диагональные блоки матрицы P , представляющей собой решение (4.25). Вычисляя аналог дивергенции (4.3) вдоль траекторий (3.4), получим, что

$$\begin{aligned} (4.31) \quad & \mathcal{D}V_i(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) = \\ & = \zeta_{k+1}(p)^T \left(\bar{A}_i^T P \bar{A}_i - (1 - \sigma) P_i - \bar{A}_i^T P_i \bar{B} [\bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i + R]^{-1} \bar{B}_i^T P_i \bar{A}_i + Q \right) \zeta_{k+1}(p) + \\ & + \zeta_{k+1}(p)^T \bar{A}_i^T P_i \bar{B} [\bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i + R]^{-1} \bar{B}_i^T P_i \bar{A}_i \zeta_{k+1}(p) - \zeta_{k+1}(p)^T (Q + \sigma P_i) \zeta_{k+1}(p) + \\ & + 2\zeta_{k+1}(p)^T \bar{A}_i^T P_i \bar{B}_i v_{k+1}(p) + v_{k+1}(p)^T \bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i v_{k+1}(p) \leq \\ & \leq \zeta_{k+1}(p)^T \bar{A}_i^T P_i \bar{B}_i [\bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i + R]^{-1} \bar{B}_i^T P_i \bar{A}_i \zeta_{k+1}(p) + 2\zeta_{k+1}(p)^T \bar{A}_i^T P_i \bar{B}_i v_{k+1}(p) + \\ & + v_{k+1}(p)^T [\bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i + R] v_{k+1}(p) - \zeta_{k+1}(p)^T (Q + \sigma P_i) \zeta_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Из (4.31) следует, что (3.4) экспоненциально диссипативна относительно входной переменной $v_{k+1}(p)$ и выходной переменной (4.28) с функцией запаса (4.27). Из (4.31) также следует, что если последовательность (3.5) определяется соотношением (4.29), то

$$\mathcal{D}V_i(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) \leq -\mu \lambda_{\min}(P_i) (|\eta_{k+1}(p)|^2 + |e_k(p)|^2)$$

и в соответствии с теоремой 1 система (4.29), (3.4) является экспоненциально устойчивой для любого сигнала переключения относительно повторений σ со средним временем ожидания (4.5). Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Поскольку приращение ошибки оценивания $\tilde{\xi}_{k+1}(p)$ недоступно для формирования корректирующей поправки, матрица Θ_i всегда должна иметь вид $\Theta_i(\zeta) = \text{diag}[0_{n_x} \quad \Theta_{i1}(\zeta)]$. В простейшем случае матрица Θ_{i1} может быть выбрана не зависящей от ζ и тогда, после того, как матрица P_i найдена, условие (4.30) сводится к системе линейных матричных неравенств, при этом теорема 2 дает линейную последовательность корректирующих поправок. В общем случае $\Theta_i(\zeta)$ зависит от изменения ошибки относительно повторений и можно пытаться уменьшать значения коэффициентов корректирующих поправок после достижения требуемой точности и, наоборот, увеличивать эти коэффициенты, когда ошибка велика, другими словами, вводить адаптацию к величине ошибки. Такой подход позволит найти разумный компромисс между скоростью обучения и энергозатратами на управление. Наиболее просто это можно сделать за счет кусочно-постоянного изменения Θ , в зависимости от достигнутой точности. Такое решение для систем без переключений рассмотрено в [24].

4.3. Альтернативный подход

В ряде случаев представляет интерес построить управление без переключений. Здесь более эффективным представляется другой подход к решению.

Рассмотрим функцию Ляпунова (4.22) с компонентами

$$V_1(\xi_{k+1}(p)) = \xi_{k+1}^T(p) P_1 \xi_{k+1}(p), \quad V_2(e_k) = e_k^T(p) P_2 e_k(p),$$

где $P_1 \succ 0$ и $P_2 \succ 0$. Закон коррекции будем искать в виде линейной обратной связи по приращениям доступных для измерения переменных и по ошибке

$$(4.32) \quad v_{k+1}(p) = K_1 \hat{\xi}_{k+1}(p) + K_2 e_k(p) = KH \zeta_{k+1}(p),$$

где $K = [K_1 \ K_2]$, $H = [0 \ I_{n_x+n_y}]$. Вычисляя дивергенцию (4.22) вдоль траекторий (3.4), (4.32) получим

$$(4.33) \quad \mathcal{D}V = \bar{x}^T (\bar{A}_{ci}^T P_i \bar{A}_{ci} - P) \bar{x}, \quad i \in \mathcal{N},$$

где

$$P_i = \text{diag}[P_1 \ P_2], \quad \bar{A}_{ci} = \begin{bmatrix} A_i - F_i C & 0 & 0 \\ F_i C & A_i + B_i K_1 & B_i K_2 \\ -C A_i & -C(A_i + B_i K_1) & I - C B_i K_2 \end{bmatrix}, \quad i \in \mathcal{N}.$$

Предположим, что матрицы $P \succ 0$ и K удовлетворяют системе неравенств

$$(4.34) \quad (\bar{A}_i + \bar{B}_i K H)^T P (\bar{A}_i + \bar{B}_i K H) - P_i + Q + H^T K^T R K H \preceq 0, \quad i \in \mathcal{N},$$

где $Q \succ 0$ и $R \succ 0$ — матрицы аналогичные весовым матрицам в теории линейно-квадратичного регулятора. Поскольку выполняется (4.33) то согласно следствию теоремы 1 система (3.4), (4.32) является экспоненциально устойчивой для произвольного сигнала переключения относительно повторений σ . Неравенства (4.34) с помощью известной леммы о дополнении Шура сводятся к линейным матричным неравенствам и уравнению относительно переменных $X = \text{diag}[P_1^{-1} \ P_2^{-1}]$, Y , Z

$$(4.35) \quad \begin{bmatrix} X & (\bar{A}_i X + \bar{B}_i Y H)^T & X & (Y H)^T \\ \bar{A}_i X + \bar{B}_i Y H & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ Y H & 0 & 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$X \succ 0, \quad H X = Z H, \quad i \in \mathcal{N}.$$

Если неравенства и уравнение (4.35) совместны, то $K = [K_1 \ K_2] = Y Z^{-1}$, поскольку, в силу структуры матрицы H , матрица Z является невырожденной.

5. Пример

Рассмотрим модель манипулятора с одним гибким звеном [26], функционирующего в повторяющемся режиме с постоянным периодом повторения. Динамика движения манипулятора в пространстве состояний описывается уравнениями

$$(5.1) \quad \dot{x}_k(t) = A_0 x_k(t) + B_0 u_k(t), \quad y_k(t) = C x_k(t), \quad 0 \leq t \leq T_f, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

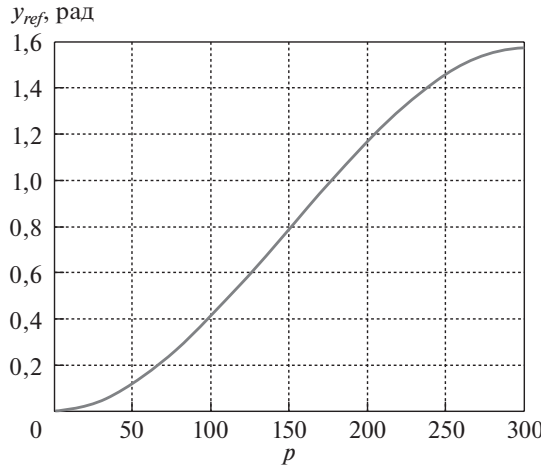


Рис. 1. Желаемая траектория изменения угла поворота вала сервомотора.

где $x(t) = [\theta(t) \ \alpha(t) \ \dot{\theta}(t) \ \dot{\alpha}(t)]^T$, $\theta(t)$ — угол поворота сервопривода, $\alpha(t)$ — угол отклонения гибкого звена,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_s}{J_{eq}} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\frac{K_s(J_l + J_{eq})}{J_l J_{eq}} & \frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \\ -\frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ 0],$$

B_{eq} — коэффициент вязкого трения сервопривода, K_s — жесткость гибкого звена, J_l — момент инерции гибкого звена относительно центра масс, J_{eq} — момент инерции сервопривода. Движение гибкого звена происходит в горизонтальной плоскости.

Задача состоит в том, чтобы найти алгоритм управления с итеративным обучением, при котором выходная переменная $y(t) = \theta(t)$ воспроизводила бы желаемую траекторию $y_{ref}(t)$ с заданной точностью e^* . Непосредственному измерению доступен только угол θ .

Для расчетов и моделирования были приняты следующие номинальные значения параметров из [26]: $B_{eq} = 0,004$ Н·м/(рад/с), $K_s = 1,3$ Н·м/рад, $J_l = 0,0038$ кг·м², $J_{eq} = 2,08 \cdot 10^{-3}$ кг·м². Продолжительность цикла повторения T_f составляет 3 с, требуемая точность $e^* = 0,5$ град. = $0,00873$ рад.

Желаемая траектория изменения выходной переменной описывается уравнением и представлена на рис. 1

$$y_{ref}(t) = \frac{\pi t^2}{6} - \frac{\pi t^3}{27}, \quad t \in [0; T_f].$$

Предположим, что алгоритм управления реализуется на компьютере с периодом дискретности $T_s = 0,01$ с. Эквивалентная дискретная модель (5.1),

связывающая значения переменных в моменты $0, T_s, 2T_s, \dots$ запишется в виде

$$(5.2) \quad x_k(p+1) = Ax_k(p) + Bu_k(p), \quad p = 0, 1, \dots, N_{T_f}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $A = \exp(A_0 T_s)$, $B = \left(\int_0^{T_s} \exp(A_0 \tau) d\tau \right) B_0$, N_{T_f} — число периодов дискретности на отрезке $[0, T_f]$.

При начале работы манипулятора несколько первых повторений проходят без нагрузки для предварительной настройки, при этом значения параметров соответствуют номинальным. После трех повторений манипулятор нагружается, при этом $J_l = 0,0076 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_{eq} = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Исходя из физического смысла переменных состояния зададим весовые матрицы $Q = \text{diag}[10^{-3} I_8 \ 10^6]$, $R = 0,01$. Рассматривая скачкообразное изменение нагрузки на манипулятор как переключение, воспользуемся результатами раздела 4.3, которые удобны для сравнительного анализа. Обозначим матрицы ненагруженного манипулятора через A_1 , B_1 и матрицы нагруженного манипулятора A_2 , B_2 . Переключаемый алгоритм управления с итеративным обучением имеет вид

$$\hat{x}_k(p) = A_i \hat{x}_k(p-1) + B_i u_k(p-1) + F_i (y_k(p-1) - C \hat{x}_k(p-1)),$$

$$i = \begin{cases} 1 & \text{если } k < 3, \\ 2 & \text{если } k \geq 3, \end{cases}$$

$$F_i = \begin{cases} F_1 = [1,9199 & -1,8415 & 91,1151 & -84,9936]^T & \text{если } k < 3, \\ F_2 = [1,7575 & -1,7001 & 81,2812 & -78,3325]^T & \text{если } k \geq 3, \end{cases}$$

$$u_k(p) = u_{k-1}(p) + K_1 (\hat{x}_k(p) - \hat{x}_{k-1}(p)) + K_{2i} (y_{ref}(p) - y_{k-1}(p+1)),$$

$$K_1 = [-31,0300 \quad -0,3018 \quad -0,4530 \quad -0,0444], \quad K_{2i} = \begin{cases} 9,5140 & \text{если } k < 3, \\ 27,1609 & \text{если } k \geq 3. \end{cases}$$

При использовании алгоритма без переключений

$$u_k(p) = u_{k-1}(p) + K_1 (\hat{x}_k(p) - \hat{x}_{k-1}(p)) + K_2 (y_{ref}(p) - y_{k-1}(p+1)),$$

$$K_1 = [-28,1965 \quad -0,2408 \quad -0,4345 \quad -0,0395], \quad K_2 = 12,8135.$$

В качестве меры точности воспроизведения желаемой траектории удобно выбрать среднеквадратическую ошибку обучения

$$(5.3) \quad E(k) = \sqrt{\frac{1}{N_{T_f}} \sum_{p=0}^{N_{T_f}} |e_k(p)|^2}.$$

На рис. 2, 3 показано изменение среднеквадратической ошибки в зависимости от числа повторений для управления с переключением и без переключения соответственно.

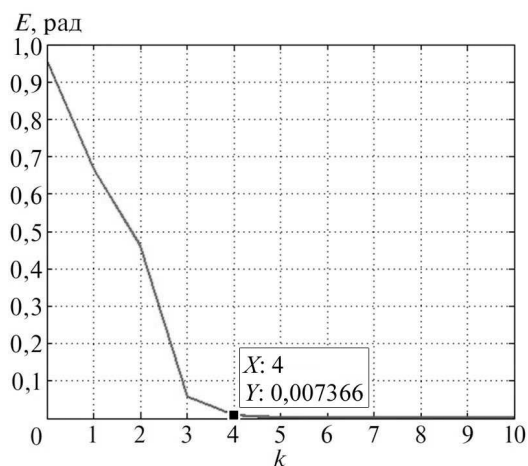


Рис. 2. Изменение среднеквадратической ошибки в зависимости от числа повторений для управления с переключением.

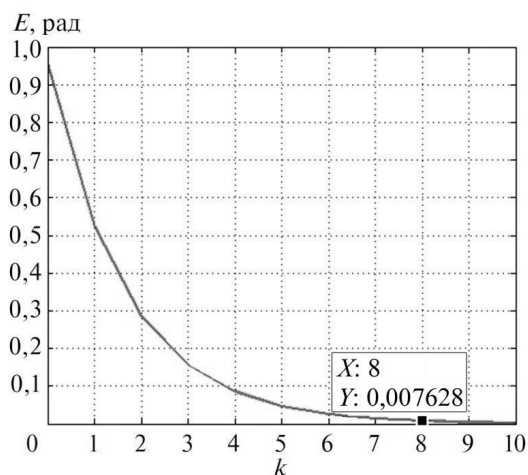


Рис. 3. Изменение среднеквадратической ошибки в зависимости от числа повторений для управления без переключения.

Анализ полученных зависимостей показывает, что в случае управления с переключением требуемая точность достигается сразу же после настроечных повторений, в то время как в случае управления без переключений для достижения нужной точности требуются дополнительные шаги в рабочем режиме, что, очевидно, нежелательно.

6. Заключение

В данной работе предложен метод синтеза управления с итеративным обучением с использованием наблюдателя состояния для систем с переключениями на основе теории 2D-систем в форме дискретных повторяющихся процессов. Приведенный пример показывает, что в случае, когда переключения

наблюдаемы, управление с переключением позволяет ускорить сходимость процесса обучения. Дальнейшее развитие исследований в данном направлении авторы связывают с развитием теории для дифференциальных повторяющихся процессов с переключениями и ее последующим применением к задачам синтеза управления с итеративным обучением. Дальнейшего исследования требует вопрос выбора нелинейной функции $\Theta_i(\zeta)$ в методе синтеза на основе диссипативности (теорема 2 и замечание 1 к ней). Значительный интерес представляют сетевые задачи управления с итеративным обучением, где переключения являются естественной моделью изменений информационной структуры сети. Комбинация управления с итеративным обучением и управления с обратной связью также представляет интересную задачу для дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston, MA: Birkhäuser, 2003.
2. *Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulff K., King C.* Stability criteria for switched and hybrid systems // *SIAM Review* 2007. V. 49. P. 545–592.
3. *Lin H., Antsaklis P.J.* Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2009. V. 54. P. 308–321.
4. *Sun Z., Ge S.S.* Stability Theory of Switched Dynamical Systems. London: Springer-Verlag, 2011.
5. *Alwan M.S., Liu X.* Theory of Hybrid Systems: Deterministic and Stochastic. Beijing: Springer Nature Singapore Pte Ltd. and Higher Education Press, 2018.
6. *Rogers E., Galkowski K., Owens D.H.* Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences. V. 349. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
7. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering operation of robots by learning // *J. Robotic Systems*. 1984. V. 1. No. 2. P. 123–140.
8. *Bolder J., Oomen T.* Iterative learning control: A 2D system approach // *Automatica*. 2016. V. 71. P. 247–253.
9. *Hladowski L., Galkowski K., Cai Z., Rogers E., Freeman C.T., Lewin P.L.* Experimentally supported 2D systems based iterative learning control law design for error convergence and performance // *Control Engineering Practice*. 2010. V. 18. P. 339–348.
10. *Paszke W., Rogers E., Galkowski K., Cai Z.* Robust finite frequency range iterative learning control design with experimental verification // *Control Engineering Practice*. 2013. V. 23. P. 1310–1320.
11. *Bristow D.A., Tharayil M., Alleyne A.* A survey of iterative learning control // *IEEE Control Systems Magazine*. 2006. V. 26. No. 3. P. 96–114.
12. *Ahn H.-S., Chen Y.-Q., Moore K.L.* Iterative learning control: Brief survey and categorization // *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*. 2007. V. 37. No. 6. P. 1099–1121.
13. *Sammons P.M., Gegel M.L., Bristow D.A., Landers R.G.* Repetitive process control of additive manufacturing with application to laser metal deposition // *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 2019. V. 27. No. 2. P. 566–575.

14. *Freeman C.T., Rogers E., Hughes A.-M., Burridge J.H., Meadmore K.L.* Iterative learning control in health care: electrical stimulation and robotic-assisted upper-limb stroke rehabilitation // *IEEE Control Systems Magazine*. 2012. V. 32. No. 1. P. 18–43.
15. *Meadmore K.L., Exell T.A., Hallowell E., Hughes A.-M., Freeman C.T., Kutlu M., Benson V., Rogers E., Burridge J.H.* The application of precisely controlled functional electrical stimulation to the shoulder, elbow and wrist for upper limb stroke rehabilitation: a feasibility study // *J. Neuro Engineering Rehabil.* 2014. V. 11. No. 105. <https://doi.org/10.1186/1743-0003-11-105>.
16. *Bochniak J., Galkowski K., Rogers E.* Multi-machine operations modelled and controlled as switched linear repetitive processes // *Int. J. Control.* 2008. V. 81. P. 1549–1567.
17. *Bochniak J., Galkowski K., Rogers E., Mehdi D., Bachelier O., Kummert A.* Stabilization of discrete linear repetitive processes with switched dynamics // *Multidim. Syst. Sign. Process.* 2006. V. 17. P. 271–295.
18. *Shao Z., Xiang Z.* Iterative learning control for non-linear switched discrete-time systems // *IET Control Theory Appl.* 2017. V. 11. No. 6. P. 883–889.
19. *Shao Z., Duan Z.* A High-order Iterative Learning Control for Discrete-time Linear Switched Systems // *Proc. 57th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE)*. Nara, Japan. 2018. P. 354–361.
20. *Ouerfelli H., Ben Attia S., Salhi S.* Switching-iterative learning control method for discrete-time switching system // *Int. J. Dynamics Control.* 2018. V. 6. P. 1755–1766.
21. *Shao Z., Xiang Z.* Adaptive iterative learning control for switched nonlinear continuous-time systems // *Int. J. Syst. Sci.* 2019. V. 50. No. 5. P. 1028–1038.
22. *Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Galkowski K., Rogers E.* Dissipativity and stabilization of nonlinear repetitive processes // *Systems & Control Letters*. 2016. V. 91. P. 14–20.
23. *Pakshin P., Emelianova J., Galkowski K., Rogers E.* Stabilization of two-dimensional nonlinear systems described by Fornasini-Marchesini and Roesser models // *SIAM J. Control Optim.* 2018. V. 56. P. 3848–3866.
24. *Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Galkowski K., Rogers E.* Passivity based stabilization of repetitive processes and iterative learning control design // *Systems & Control Letters*. 2018. V. 122. P. 101–108.
25. *Емельянова Ю.П., Пахшин П.В.* Синтез управления с итеративным обучением на основе наблюдателя состояния // *АиТ*. 2019. № 9. С. 9–24.
Emelianova J.P., Pakshin P.V. Iterative Learning Control Design Based on State Observer // *Autom. Remote Control*. 2019. V. 80. No. 9. P. 1561–1573.
26. *Apkarian J., Karam P., Levis M.* Workbook on Flexible Link Experiment for Matlab/Simulink Users. Quanser, 2011.

Стаття представлена к публікації членом редколегії Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцію 23.07.2019

Після доробки 21.10.2019

Прийнята к публікації 30.01.2020