

© 2020 г. С.П. ГОРБИКОВ, д-р физ.-мат. наук(gorby50@yandex.ru)  
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

## ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СКОЛЬЗЯЩИЕ ДВИЖЕНИЯ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ

В системах управления движением известны режимы с учащающимися переключениями. Для систем с ударами (своеобразного класса импульсных систем) аналогом этих режимов являются движения с бесконечным числом ударных взаимодействий за конечное время. Для таких движений предлагается описание с помощью гладких дифференциальных уравнений. Приводятся примеры применения подобного описания.

*Ключевые слова:* ударное взаимодействие, локальная особенность, бесконечноударные движения, вспомогательные скользящие движения, точечное отображение.

DOI: 10.31857/S0005231020080061

### 1. Введение

Ю.И. Неймарк еще в 1953 г. провел уникальное исследование [1], на которое авторы прикладных работ до сих пор ссылаются. Он выполнил характерное для него теоретическое исследование, которое имело сугубо практическое значение.

В [1] изучается процесс вибропогружения в случае упругого грунта; открыт новый эффект вибраций: они способны снижать сопротивление при внедрении в грунт. Результаты действия вибраций на технические системы описаны в монографии [2]. При изучении виброударных систем (когда к действию вибраций добавляются удары) исследователи занимаются:

методами расчета виброударных систем (например, [3, 4 и др.]);

разработкой моделей, методов синтеза и анализа динамики виброударных систем различного типа (например, [5–7 и др.]).

Более подробное представление о современном состоянии теории виброударных систем можно получить, например, из [8].

В то же время в теории виброударных систем известны движения, при которых за конечный промежуток времени траектория бесчисленное число раз попадает на многообразие разрыва. Это — *бесконечноударные движения* [9, с. 291; 10; 11], т.е. движения с бесконечным числом ударных взаимодействий за конечное время.

В [12] предлагается наиболее общая модель динамических систем с ударными взаимодействиями (виброударных систем), включающая в том числе и системы, используемые в [11]. Для введенных систем (в одном общем случае) в [12] дается описание бесконечноударных движений с помощью гладких дифференциальных уравнений. Интегральные кривые этих уравнений получили название *вспомогательные скользящие движения*. В [13] предлагаются гладкие дифференциальные уравнения, описывающие движения указанных систем на границе области существования бесконечноударных дви-

жений. В [14] описаны локальные особенности данных динамических систем. В [15, 16] устанавливается топологическая эквивалентность указанных локальных особенностей.

В настоящей работе предлагаются гладкие дифференциальные уравнения, описывающие движения динамических систем с ударными взаимодействиями в окрестности локальной особенности шестого типа [14], т.е. такой точки на гиперповерхности  $S = 0$  удара, в которой первая и вторая производная (в силу дифференциальных уравнений движения) от гиперповерхности удара равна нулю, а третья производная — отрицательна (движение системы происходит в области  $S \geq 0$ ). Приводятся примеры применения таких уравнений. Даны также примеры использования дифференциальных уравнений, которые были приведены в [12] и действуют в окрестности локальной особенности четвертого типа, т.е. такой точки на гиперповерхности  $S = 0$ , в которой первая производная (в силу дифференциальных уравнений движения) от гиперповерхности удара равна нулю, а вторая производная — отрицательна.

При выполнении работы [12] Ю.И. Неймарк предложил идею об описании бесконечноударных движений с помощью дифференциальных уравнений. Эта идея сразу решала проблему о единственности предельной точки бесконечноударного движения и кривой, в которой начинаются, продолжаются бесконечноударные движения, заканчивающиеся в выделенной точке. Оказывается, что эта же идея работает и для локальной особенности пятого и шестого типа. Идеи Ю.И. Неймарка всегда благотворны и имеют далекое идущее будущее.

## 2. Рассматриваемый класс динамических систем

Далее предполагается [12], что мгновенные ударные взаимодействия происходят на гиперповерхности  $x_n = 0$ , по достижении которой фазовые переменные  $x_1, \dots, x_{n-1}$  меняются скачкообразно (переменная  $x_n$  остается равной нулю) в соответствии с формулами

$$(1) \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= H_1(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-) = x_1^- H_{11}(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-), \\ \bar{x}_i &= H_i(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-) = x_i^- + x_1^- H_{1i}(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-), \quad i = \overline{2, n-1}, \end{aligned}$$

а при  $x_n > 0$  изменение фазовых переменных подчиняется дифференциальным уравнениям вида

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \dot{x}_i = \Phi_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \frac{dx_n}{dt} &= \dot{x}_n = \Phi_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \Phi_{n1}(x_1, \dots, x_n) + x_n \Phi_{nn}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Фазовое пространство системы составляют точки  $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \geq 0)$ .

При этом выполняются следующие условия:  $-1 < H_{11}(0, x_2^-, \dots, x_{n-1}^-) < 0$ ;  $H_{11}(x_1^-, x_2^-, \dots, x_{n-1}^-) < 0$ ;  $\Phi_{n1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) > 0$ ;  $t$  — время. Здесь функции  $H_{1j}$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ , определены и являются гладкими класса  $C^m$ ,  $m \geq 5$ , в малых окрестностях точек  $(x_1^- \leq 0, x_2^-, \dots, x_{n-1}^-)$  пространства  $R^{n-1}$ , а функции  $\Phi_j$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ ,  $\Phi_{n1}$ ,  $\Phi_{nn}$  определены и являются гладкими класса  $C^m$  в малых окрестностях точек  $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \geq 0)$  пространства  $R^n$ .

Следует отметить, что специфический вид уравнений (2) и условие типа неравенства на функцию  $\Phi_{n1}$  означает лишь, что на гиперповерхности  $x_n = 0$  согласно (2),  $\dot{x}_n = x_1 \Phi_{n1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ . Поэтому фазовые траектории системы (2) при  $x_1 = 0$  касаются гиперповерхности  $x_n = 0$ , при возрастании времени  $t$  они выходят из точек  $(x_1 > 0, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = 0)$ , а при уменьшении  $t$  — из точек  $(x_1 < 0, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$ .

Указанный вид (1) ударных взаимодействий подразумевает лишь, что при достижении гиперповерхности  $x_n = 0$  фазовой траекторией со скоростью изменения последней переменной, равной  $\dot{x}_n = 0$ , ударные взаимодействия не меняют (так как в этот момент  $x_1 = 0$ ) значений фазовых переменных, а условия в виде неравенств на функцию  $H_{11}$  означают потерю абсолютной величины скорости изменения переменной  $x_n$  после ударных взаимодействий. Переменная  $x_n$  соответствует расстоянию (по нормали) между соударяющимися телами.

Если какая-то переменная  $x_j$  не изменяется при ударе, то соответствующая функция  $H_{1j}$  в формулах (1) равна нулю.

Далее на двух задачах показывается, как можно виброударные системы привести к виду (1)–(2).

*Пример 1* (виброударный механизм [17, с. 263]). При изучении движения простейшего виброударного механизма уравнение движения (под действием синусоидальной  $F \sin \omega t$  и постоянной  $P$  сил) ударной массы  $M$ , подвешенной на пружине (коэффициент ее упругости равен  $k$ ), в промежутках между ударами (при  $x < x_0$ ) имеет вид

$$Md^2x/dt^2 + kx = P + F \sin \omega t.$$

При  $x = x_0$  происходит мгновенный удар массы  $M$  о неподвижный ограничитель, в результате чего меняется только скорость движения массы

$$dx/dt_+ = -Rdx/dt_-, \quad 0 \leq R \leq 1,$$

где  $dx/dt_-$  и  $dx/dt_+$  — соответственно доударные и послеударные значения скорости.

*Осциллятор с предварительным натягом.* При  $kx_0 - P < 0$  указанную выше систему заменой переменных и параметров

$$t = \omega\tau - \pi, \quad \lambda^2 = \frac{k}{M\omega^2}, \quad W = \frac{F}{P - kx_0}, \quad q = \frac{M\omega^2(x - x_0)}{kx_0 - P}$$

можно привести к следующему виду.

В трехмерном фазовом пространстве переменных  $q$ ,  $\dot{q} = dq/dt$ ,  $t$  при  $q > 0$  уравнение движения имеет вид

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = W \sin t - 1, \quad \ddot{q} = d^2q/dt^2, \quad W > 0, \quad 0 < \lambda.$$

Если при достижении поверхности  $q = 0$  значение  $dq/dt = \dot{q} = \dot{q}_- < 0$ , то в системе происходит мгновенное ударное взаимодействие по формуле

$$\dot{q}_+ = -R\dot{q}_-,$$

где  $\dot{q}_-$  и  $\dot{q}_+$  — соответственно доударные и послеударные значения скорости.

Поэтому при  $x_1 = \dot{q}$ ,  $x_2 = t$ ,  $x_3 = q$  эта система принимает вид (1)–(2), где уравнения (1) имеют вид

$$\begin{aligned}(\dot{q}_+) &= \bar{x}_1 = -R\dot{x}_1^- = (-R\dot{q}_-), \\(t_+) &= \bar{x}_2 = x_2^- = (t_-),\end{aligned}$$

а уравнения (2) – вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\lambda^2 x_3 + W \sin x_2 - 1, \\ \dot{x}_2 &= 1, \\ \dot{x}_3 &= x_1.\end{aligned}$$

*Осциллятор с зазором.* При  $kx_0 - P > 0$  заменой переменных и параметров

$$t = \omega\tau - \pi, \quad \lambda^2 = \frac{k}{M\omega^2}, \quad V = \frac{F}{kx_0 - P}, \quad q = \frac{M\omega^2(x_0 - x)}{kx_0 - P}$$

уравнение виброударного механизма можно привести к виду

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = V \sin t + 1, \quad \dot{q} = d^2 q / dt^2, \quad V > 0, \quad 0 < \lambda,$$

который справедлив при  $q > 0$ . Условия удара в этом случае остаются прежними.

Поэтому при той же самой замене  $x_1 = \dot{q}$ ,  $x_2 = t$ ,  $x_3 = q$  система принимает вид (1)–(2), где уравнения удара (1) остаются прежними, а уравнения (2) принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\lambda^2 x_3 + V \sin x_2 + 1, \\ \dot{x}_2 &= 1, \\ \dot{x}_3 &= x_1.\end{aligned}$$

Далее для описания поведения фазовых траекторий вводится точечное отображение  $T = T_2 T_1$  части многообразия  $x_n = 0$ ,  $x_1 \geq 0$  в себя. Отображение  $T_1$  переводит точку  $(x_1 \geq 0, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$  в точку  $(x_1 \leq 0, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$  по траекториям системы (2);  $T_2$  – отображение, задаваемое формулами (1) ударных взаимодействий.

В то же время для любой функции  $Z$  используются обозначения

$$Z = Z(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad Z(M_1) = Z(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}),$$

где  $M_1 = T(M) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$ ,  $M = (x_1 \geq 0, x_2, \dots, x_{n-1})$ .

### 3. Особенности четвертого типа

Здесь рассматривается четвертый тип [14] локальных особенностей, т.е. такая точка  $M^*$  на гиперповерхности  $S = 0$  удара, в которой первая производная (в силу дифференциальных уравнений движения) от гиперповерхности удара равна нулю, а вторая производная отрицательна (движение системы происходит в области  $S > 0$ ).

Тогда в точке  $M^*$  выполняются условия

$$(3) \quad x_n = 0, \quad \dot{x}_n = \Phi_n(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \ddot{x}_n = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_k} \Phi_k < 0.$$

Прежде всего в [12] доказывается следующая лемма.

*Лемма 3.1. Для любой точки  $M^*$  можно указать при  $R = -H_{11}(0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*) \neq 0$  такую малую окрестность на многообразии  $x_n = 0$ , из каждой точки которой при  $x_1 > 0$  выходит фазовая траектория, соответствующая бесконечноударному движению. Это движение оканчивается в некоторой точке многообразия  $x_1 = 0, x_n = 0$ .*

Затем доказано следующее утверждение.

*Теорема 3.1. Для любой такой точки  $M^*$  существует окрестность на многообразии  $x_n = 0$ , из каждой точки  $M$  которой при  $x_1 > 0$  выходит фазовая траектория, соответствующая бесконечноударному движению. Это движение оканчивается в некоторой точке многообразия  $x_n = 0, x_1 = 0$ . При этом все точки  $M_j = T^j(M)$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , лежат на одной и той же проходящей через  $M$  интегральной кривой (“вспомогательные скользящие движения”) системы дифференциальных уравнений*

$$(4) \quad \frac{dx_i}{dx_1} = f_i(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad i = \overline{2, n-1},$$

где функции  $f_i \in C^{m-2}$ .

Для доказательства теоремы находится вид отображения  $T$

$$(5) \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= Rx_1 + x_1\varphi_1 = g_1, \\ \bar{x}_i &= x_i + x_1(c_i + \varphi_i) = g_i, \quad i = \overline{2, n-1}, \end{aligned}$$

где

$$R = -H_{11}(0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*) \quad (0 < R < 1), \quad c_i = -b_i - 2a_i a_1^{-1},$$

$$b_i = H_{1i}(0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*), \quad \varphi_j(0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*) = 0, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad \varphi_j \in C^{m-1},$$

$$a_j = \Phi_j(0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*, 0), \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Функции  $f_i$  из (4) находятся из тождеств

$$(6) \quad \frac{\partial g_i}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} f_j = f_i(M_1) \left[ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\partial g_1}{\partial x_j} f_j \right], \quad i = \overline{2, n-1},$$

где  $f_i = c_i/(R-1) + \tilde{f}_i$  и  $\tilde{f}_i = 0$  при  $M = M^*$ .

Функциональные уравнения (6) составляются аналогично тому, как и соответствующие уравнения, используемые при доказательстве теоремы в [13].

Для нахождения при достаточно малых  $x_1, x_i - x_i^*$ ,  $i = \overline{2, n-1}$ , решения уравнения (6) можно указать, используя (5), следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned} f_i^{s+1} &= -c_i - \varphi_i - x_1 \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} f_j^s \right) + \\ &+ f_i^s(M_1) \left[ R + \varphi_1 + x_1 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} f_j^s \right) \right], \quad i = \overline{2, n-1}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3.1 опирается на доказательство сходимости этого процесса и гладкости его решения.

Далее приводятся примеры применения полученного описания бесконечноударных движений.

### 3.1. Нахождение предельных значений бесконечноударных движений

Пусть траектория системы (1)–(2), выходящая из точки  $M(x_1 > 0, x_2, \dots, x_{n-1})$  многообразия  $x_n = 0$ , представляет собой бесконечноударное движение, оканчивающееся в точке  $M^*(0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*)$  многообразия (3). Тогда координаты точки  $M^*$  можно найти следующим образом.

Если  $x_1$  достаточно мало, то в качестве точки  $M^*$  можно взять точку  $(0, x_2, \dots, x_{n-1})$ , и уравнение (4) в силу (6) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dx_1} &= f_i(0, x_2, \dots, x_{n-1}) + x_1 \frac{\partial f_i(0, x_2, \dots, x_{n-1})}{\partial x_1} + \dots = \\ &= \frac{c_i(x_2, \dots, x_{n-1})}{R-1} + \dots, \quad i = \overline{2, n-1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_i &= -H_{1i}(0, x_2, \dots, x_{n-1}) - 2\Phi_i(0, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)[\Phi_1(0, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)]^{-1}, \\ R &= -H_{11}(0, x_2, \dots, x_{n-1}), \end{aligned}$$

многоточие в формулах означает наличие членов более высокого порядка малости по  $x_1$  относительно рядом стоящих. Отсюда

$$(7) \quad x_i^* = x_i + \int_{x_1}^0 f_i(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_1 = x_i + \frac{c_i}{1-R} x_1 + \dots, \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Если  $t$  не входит в список переменных  $x_i$ , то для нахождения времени  $t^*$  окончания бесконечноударного движения достаточно, полагая  $y_i = x_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $y_{n+1} = x_n$ ,  $y_n = t$ , рассмотреть относительно переменных  $y_1, \dots, y_{n+1}$  новую систему с ударными взаимодействиями, которая имеет вид (1)–(2). В новой системе уравнения (1) примут вид

$$\begin{aligned} \bar{y}_i &= H_i(y_1^-, \dots, y_{n-1}^-, y_{n+1}^-), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \bar{y}_n &= y_n^-, \quad y_{n+1} = H_n(y_1^-, \dots, y_{n-1}^-, y_{n+1}^-), \end{aligned}$$

уравнения (2), определенные в области  $y_{n+1} > 0$ , – вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \Phi_i(y_1, \dots, y_{n-1}, y_{n+1}), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \dot{y}_n &= 1, \quad \dot{y}_{n+1} = \Phi_n(y_1, \dots, y_{n-1}, y_{n+1}), \end{aligned}$$

а ударное взаимодействие происходит на гиперплоскости  $y_{n+1} = 0$ . В новой системе формула (7) применима для переменной  $y_n$ , откуда

$$t^* = t + \frac{2}{(R-1)\Phi_1(0, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)} x_1 + \dots,$$

где  $t$  – время, соответствующее выходу фазовой траектории из точки  $M$ , многоточие означает наличие членов не ниже 2-го порядка по  $x_1$ .

### 3.2. Численное исследование бесконечноударных движений

На многообразии  $x_n = 0$  могут существовать вспомогательные скользящие движения — гладкие кривые, проходящие через каждую точку  $M^*$  многообразия  $x_1 = 0, x_n = 0, \ddot{x}_n < 0$ . Из любой точки такой кривой выходят фазовые траектории бесконечноударных движений, оканчивающихся в одной и той же точке  $M^*$ . Чтобы приближенно отыскать эту кривую, достаточно найти при действии обратных отображений  $T^{-1}, T^{-2}, T^{-3}, \dots$  образы точки  $M$ , лежащей вблизи  $M^*$ , и ряда точек, лежащих на прямой, проходящей через точки  $M$  и  $T^{-1}(M)$ .

Например, при соответствующих предположениях в случае перемещения с подбрасыванием движение частицы по нормали к плоскости вибротранспортирования описывается, если только  $q > 0$ , в виде [18, с. 23]

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = \ddot{q} = W \sin t - 1, \quad W > 0.$$

Если при достижении многообразия  $q = 0$  значение нормальной составляющей скорости равно  $\dot{q} = \dot{q}^- < 0$ , то в системе происходят мгновенные ударные взаимодействия по формулам [18, с. 24]

$$\dot{q}^+ = -R\dot{q}^-, \quad 0 < R < 1.$$

По аналогии с примером 1 при замене переменных  $x_1 = \dot{q}, x_2 = t, x_3 = q$  данная система примет вид (1)–(2), где  $\Phi_1 = W \sin x_2 - 1, \Phi_2 = 1, \Phi_3 = x_1, H_{11} = -R, H_{12} = 0, n = 3$ . При значениях параметров  $R = 0,5, W = 0,5$  все точки многообразия  $x_1 = 0, x_n = x_3 = 0$  являются локальными особенностями, в силу (3), четвертого типа (так как в этом случае  $x_n = q = 0, \dot{x}_n = \dot{q} = 0, \ddot{x}_n = \ddot{q} = W \sin t - 1 < 0$ ).

Часть фазовых кривых вспомогательных скользящих движений была получена в этом случае указанным выше способом. Две из них представлены на рис. 1, где точки  $(\dot{q}, t = 0)$  и  $(\dot{q}, t = 2\pi)$  предполагаются отождествленными. Все фазовые траектории, начинающиеся в точках одной кривой вспо-

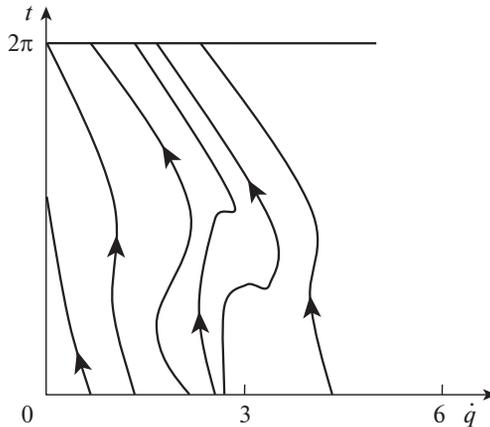


Рис. 1. Вид двух траекторий вспомогательных скользящих движений одной системы виброперемещения при  $R = 0,5, W = 0,5$ .

могательных скользящих движений, представляют собой бесконечноударные движения, оканчивающиеся в точке пересечения этой кривой с осью  $t$ . Стрелками (на кривой) указано направление движения (вдоль кривой) точек пересечения этой кривой с бесконечноударными движениями (при увеличении времени).

#### 4. Особенности качественной структуры фазового пространства в малой окрестности локальной особенности шестого типа

В малой окрестности рассматриваемой локальной особенности  $M^*$  шестого типа общие уравнения движения виброударных систем могут быть заменой переменных приведены к следующему виду. Мгновенное ударное взаимодействие происходит на гиперповерхности  $x_n = 0$ , по достижении которой фазовые переменные  $x_1, \dots, x_{n-1}$  меняются скачкообразно (переменная  $x_n$  остается равной нулю) согласно (1), а при  $x_n > 0$  изменение фазовых переменных подчиняется дифференциальным уравнениям

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= dx_1/dt = x_1\Phi_{11}(x_1, \dots, x_n) + x_2\Phi_{12}(x_1, \dots, x_n) + \\ &\quad + x_n\Phi_{1n}(x_1, \dots, x_n) = \Phi_1, \\ \dot{x}_i &= dx_i/dt = \Phi_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= dx_n/dt = x_1\Phi_{n1}(x_1, \dots, x_n) + x_n\Phi_{nn}(x_1, \dots, x_n) = \Phi_n. \end{aligned}$$

Здесь:  $\Phi_{n1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) > 0$ ,  $\Phi_{12}(0, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) > 0$ ,  $\Phi_2(0, \dots, 0) < 0$ ,  $t$  – время. Функции  $\Phi_i$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ ,  $\Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{1n}, \Phi_{n1}, \Phi_{nn}$  принадлежат классу  $C^m(\bar{\Omega})$ ,  $m \geq 5$ , где  $\Omega$  – некоторая малая окрестность точки  $(x_1 = 0, \dots, x_n = 0)$  в  $R^n$ , а функции  $H_{1j} \in C^m(\bar{\Omega}_0)$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , где  $\Omega_0$  – некоторая малая окрестность точки  $(x_1^- = 0, \dots, x_{n-1}^- = 0)$  на многообразии  $x_n = 0$ ,  $x_1 \leq 0$ . Точка  $M^* = (0, \dots, 0)$  является рассматриваемой здесь локальной особенностью.

В силу (8) в точках многообразия  $x_1 = 0$ ,  $x_n = 0$  при  $x_2 > 0$  выполняются соотношения  $\dot{x}_n = 0$ ,  $\ddot{x}_n = x_2\Phi_{12}(0, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)\Phi_{n1}(0, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) > 0$ , при  $x_2 < 0$  – соотношения  $\dot{x}_n = 0$ ,  $\ddot{x}_n < 0$ . В точке  $M^* = (0, \dots, 0)$  имеют место соотношения

$$(9) \quad \dot{x}_n = 0, \quad \ddot{x}_n = 0, \quad x_n''' = \Phi_2(0, \dots, 0)\Phi_{12}(0, \dots, 0)\Phi_{n1}(0, \dots, 0) < 0.$$

Поведение фазовых траекторий системы (1), (8) в окрестности точки  $M^*$  показано на рис. 2.

В малой окрестности точки  $M^*$ , рассматриваемой локальной особенностью шестого типа, фазовые кривые системы (8) определяют точечное отображение  $T_1$  многообразия  $x_n = 0$ ,  $x_1 \geq 0$  в многообразии  $x_n = 0$ ,  $x_1 \leq 0$ . Это происходит в силу теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий и в силу (9). Поэтому для точек  $(x_1 \geq 0, x_2, \dots, x_{n-1})$  из малой окрестности начала координат определено отображение  $T = T_2T_1$  многообразия  $x_n = 0$ ,  $x_1 \geq 0$  в себя.

Используя формулу Тейлора для разложения по степеням  $t$  функций  $x_i(t) = \varphi_i(t, x_1, \dots, x_{n-1})$ ,  $i = \bar{1}, n$ , представляющих решение системы (8), про-

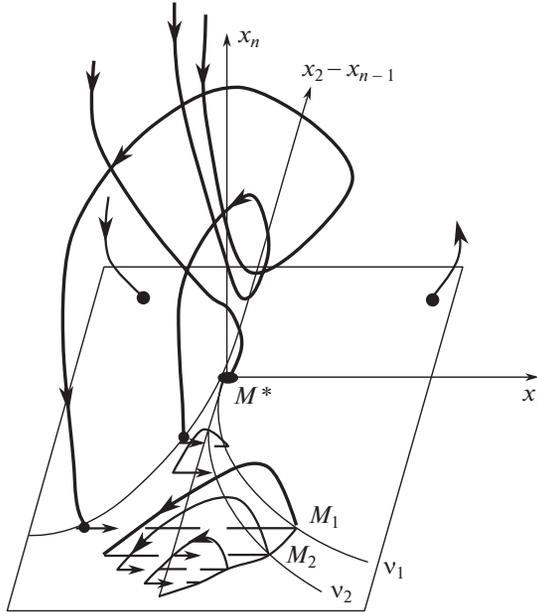


Рис. 2. Здесь сплошными линиями обозначены траектории системы (8), а штриховыми — соединены образы и прообразы фазовых точек при отображении (1).

ходящее при  $t = 0$  через точку  $(x_1 > 0, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$ , можно найти вид отображения  $T$ :

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_1 &= \left[ x_1 + t \left( x_2(a_{12} + \dots) + x_1(a_{11} + \dots) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + t^2 \left( \frac{a_2 a_{12}}{2} + \dots \right) + t^3 A_1 \right] (-R + \dots) = g_1(x_1, \dots, x_{n-1}, t), \\
 \bar{x}_i &= x_i + t(a_i + \dots) + A_i t^2 + \left[ x_1 + t \left( x_2(a_{12} + \dots) + x_1(a_{11} + \dots) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + t^2 \left( \frac{a_2 a_{12}}{2} + \dots \right) + A_1 t^3 \right] (b_i + \dots) = g_i(x_1, \dots, x_{n-1}, t), \quad i = \overline{2, n-1},
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

где

$$b_i = H_{1i}(0, \dots, 0), \quad 0 < R = -H_{11}(0, \dots, 0) < 1,$$

а величина  $t > 0$  находится из уравнения

$$\begin{aligned}
 g_n(x_1, \dots, x_{n-1}, t) &= x_1(1 + \dots) + t \left[ x_1(\tilde{a} + \dots) + x_2 \left( \frac{a_{12}}{2} + \dots \right) \right] + \\
 &\quad + t^2 \left( \frac{a_{12} a_2}{6} + \dots \right) + t^3 A_n(x_1, \dots, x_{n-1}, t) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Здесь:  $a_i = \Phi_i(0, \dots, 0)$ ,  $a_{ij} = \Phi_{ij}(0, \dots, 0)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $a_2 < 0$ ,  $a_{12} > 0$ ;  $\tilde{a}$  – некоторое число;  $0 < \theta_i < t$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $A_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) – некоторые функции, ограниченные на множестве  $\sum_{i=1}^{n-1} |x_i| \leq r$ ,  $|t| \leq r_1$  (числа  $r, r_1 > 0$ );  $g_i \in C^m$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ .

Теперь можно найти уравнение для множества  $\nu_1$  (образ множества  $x_n = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 \geq 0$  при отображении  $T$ ):

$$(12) \quad \bar{x}_1 = \bar{x}_2^2 \left( -\frac{3a_{12}}{8a_2} R + \dots \right) = \bar{x}_2^2 \tilde{\nu}_1(\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}) = \nu_1,$$

$$\tilde{\nu}_1 \in C^{m-2}, \quad 0 < R = -H_{11}(0, \dots, 0) < 1,$$

где  $\bar{x}_2 = x_2(-2 + \dots) \leq 0$  при  $\sum_{i=2}^{n-1} |x_i| \leq r_1$  и  $r_1$  – достаточно мало.

Рассматривая множества

$$\sum_{i=2}^{n-1} |x_i| \leq r, \quad 0 < x_1 \leq x_2^2 \tilde{\nu}_N(x_2, \dots, x_{n-1}) = \nu_N, \quad x_2 < 0,$$

где  $x_1 = \nu_N$  – образ многообразия  $x_1 = 0$ ,  $x_n = 0$ ,  $x_2 \geq 0$  при действии отображения  $T^N$ , можно легко доказать следующее утверждение.

*Лемма 4.1. Существуют такие достаточно малые числа  $r$  и  $r^0$  ( $r, r^0 > 0$ ), что из каждой точки множества  $G_r$*

$$(13) \quad \sum_{i=1}^{n-1} |x_i| \leq r; \quad x_n = 0; \quad x_1 > 0 \quad \text{или} \quad x_1 = 0, \quad x_2 > 0,$$

*выходит фазовая траектория системы (1), (8), представляющая собой бесконечноударное движение, которое оканчивается в точках многообразия*

$$x_n = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 < 0, \quad \sum_{i=2}^{n-1} |x_i| \leq r^0.$$

## 5. Описание бесконечноударных движений в случае локальной особенности шестого типа

Бесконечноударные движения, о которых говорится в теореме 4.1, допускают описание с помощью гладких дифференциальных уравнений. Их интегральные кривые – *вспомогательные скользящие движения*. (На рис. 1 кривая, проходящая через точки  $M_1$  и  $M_2$ , изображает траекторию таких движений).

Для этого можно произвести замену координат

$$(14) \quad x_1 = y_1 y_2^2, \quad x_i = y_i, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Для любого  $y_1^0 > 0$  существуют такие величины  $r^* = r^*(y_1^0) > 0$  и  $\delta^* = \delta^*(y_1^0) > 0$ , что при условиях

$$(15) \quad y_1^0 - \delta^* \leq y_1 \leq y_1^0 + \delta^*, \quad \sum_{i=2}^{n-1} |y_i| \leq r^*, \quad y_2 < 0$$

отображение  $T$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 \bar{y}_1 &= [G_1(y_1, \tilde{t}) + \tilde{q}_1(y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{t})] [G_2(\tilde{t}) + \tilde{q}_2(y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{t})]^{-2} = \\
 &= y_1 \tilde{g}_1(y_1, \dots, y_{n-1}) = q_1(y_1, \dots, y_{n-1}), \\
 \bar{y}_2 &= y_2 (G_2(\tilde{t}) + \tilde{q}_2(y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{t})) = \\
 (16) \quad &= y_2 + y_2 y_1 \tilde{g}_i(y_1, \dots, y_{n-1}) = q_2(y_1, \dots, y_{n-1}), \\
 \bar{y}_i &= y_i + y_2 \tilde{q}_i(y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{t}) = \\
 &= y_i + y_2 y_1 \tilde{g}_i(y_1, \dots, y_{n-1}) = q_i(y_1, \dots, y_{n-1}), \quad i = 3, \dots, n-1,
 \end{aligned}$$

где  $\tilde{t}$  находится из уравнения

$$(17) \quad G_n(y_1, \tilde{t}) + \tilde{q}_n(y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{t}) = q_n(y_1, \dots, y_{n-1}) = 0,$$

$\tilde{t} \in C^{m-2}$  и имеет в силу (17) вид

$$\begin{aligned}
 (18) \quad \tilde{t} &= \tilde{t}(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}), \quad \tilde{t}(y_1^0, 0, \dots, 0) = 3(y^0 - 1)(2a_2)^{-1}, \\
 y^0 &= \sqrt{1 - 8a_2 y_1^0 (3a_{12})^{-1}}.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \tilde{q}_j &\in C^{m-2}, \quad j = 1, \dots, n; \quad \tilde{q}_k(y_1, 0, \dots, 0, \tilde{t}) \equiv 0, \quad k = 1, 2, n; \\
 \tilde{q}_i &(y_1, 0, \dots, 0, \tilde{t}) \equiv a_i \tilde{t}, \quad i = 3, \dots, n-1; \\
 G_1 &= -R (y_1 + a_{12} \tilde{t} + a_2 a_{12} \tilde{t}^2 / 2), \quad G_2 = 1 + a_2 \tilde{t}, \\
 G_n &= y_1 + a_{12} \tilde{t} / 2 + a_2 a_{12} \tilde{t}^2 / 6, \\
 \tilde{g}_1(0, \dots, 0) &= R, \quad \tilde{g}_2(0, \dots, 0) = -2a_2 a_{12}^{-1}, \quad \tilde{g}_i(0, \dots, 0) = -2a_i a_{12}^{-1}.
 \end{aligned}$$

*Теорема 5.1. Существуют и единственны такие функции  $f_i$  и существует такая величина  $r_1^* > 0$ , что при всех  $0 < r \leq r_1^*$  для любой точки  $M$  множества  $D^r$ , задаваемого условиями*

$$(19) \quad 0 < x_1, \quad x_1 = ax_2^2, \quad x_2 < 0, \quad \sum_{i=2}^{n-1} |x_i| \leq r - a, \quad 0 < a \leq r, \quad x_n = 0,$$

*справедливо следующее:*

*все точки  $M_j = T^j(M)$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , лежат на проходящей через  $M$  интегральной кривой системы дифференциальных уравнений*

$$(20) \quad \frac{dy_i}{dy_1} = f_i(y_1, \dots, y_{n-1}), \quad i = 2, \dots, n-1,$$

где

$$f_i = y_2 \tilde{f}_i \in C^{m-4}(\bar{D}_1^r),$$

$D_1^r$  – множество, задаваемое неравенствами

$$(21) \quad \sum_{i=1}^{n-1} |y_i| \leq r, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \leq 0.$$

Пусть  $E^r$  обозначает множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям

$$(22) \quad \sum_{i=2}^{n-1} |x_i| \leq r, \quad x_n = 0, \quad 0 < x_1 \leq \nu_1(x_2, \dots, x_{n-1}), \quad x_2 < 0,$$

где функция  $\nu_1$  определяется в (12).

**Теорема 5.2.** *Существуют и единственны такие функции  $f_i$  и существует такая величина  $r_2^* > 0$ , что для любой точки  $M$  множества  $E^{r_2^*}$ , задаваемого условиями (22) при  $r = r_2^*$ , справедливо следующее:*

*все точки  $M_j = T^j(M)$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , лежат на проходящей через  $M$  интегральной кривой системы дифференциальных уравнений (20), где  $f_i \in C^{m-4}$ ,  $f_i = y_2 \tilde{f}_i$ ,  $\tilde{f}_i \in C^{m-5}$ .*

Доказательство теорем см. в Приложении.

## 6. Применение полученного описания локальной особенности шестого типа

### 6.1. Нахождение предельных значений бесконечноударных движений

В силу (П.10) система (20) дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dy_1} &= f_i(y_1, \dots, y_{n-1}) = \\ &= y_2 \left( -2a_i / [a_{12}(1-R)] + \dots \right), \quad i = 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Поэтому предельные значения бесконечноударных движений, начинающихся в точке  $(y_1, \dots, y_{n-1})$ , равны

$$\begin{aligned} y_i^* &= y_i + \int_{y_1}^0 f_i(y_1, \dots, y_{n-1}) dy_1 = \\ &= y_i + y_1 y_2 \left( \frac{2a_i}{a_{12}(1-R)} + \dots \right), \quad i = \overline{2, n-1}, \end{aligned}$$

многоточие в формулах означает наличие членов более высокого порядка малости по  $y_2, \dots, y_{n-1}$  относительно рядом стоящих.

Время  $t^*$  окончания бесконечноударного движения, в силу рассуждений раздела 3.1, имеет вид

$$t^* = t + y_1 y_2 \left( \frac{2}{a_{12}(1-R)} + \dots \right).$$

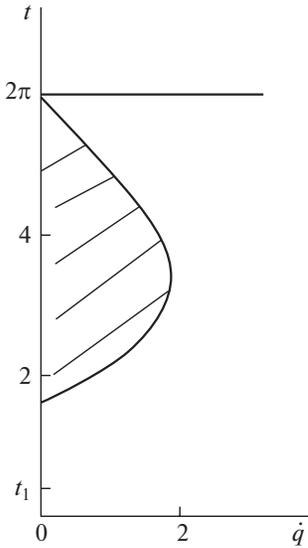


Рис. 3. Область бесконечноударных движений (заштрихована) одной системы виброперемещения.

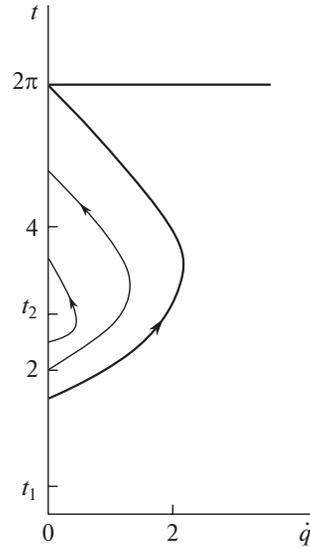


Рис. 4. Вид трех траекторий вспомогательных скользящих движений одной системы виброперемещения.

### 6.2. Численное исследование бесконечноударных движений

Здесь на примере конкретной задачи из раздела 3.2 показаны при  $R = 0,5$ ,  $W = 3$ :

область бесконечноударных движений [14] (рис. 3), в которой реализуются указанные ниже траектории;

вспомогательные скользящие движения (рис. 4), включая траекторию, проходящую через точку  $(\dot{q} = 0, t_1 = \arcsin(W^{-1}))$  – локальную особенность 5-го типа.

Стрелки на рис. 4 имеют тот же самый смысл, что и на рис. 1. Точка  $(\dot{q} = 0, t_2), t_2 = \pi - t_1$ , представляет собой локальную особенность 6-го типа, точки  $(\dot{q} = 0, t_2 < t \leq 2\pi)$  – локальные особенности 4-го типа.

## 7. Заключение

В результате проведенного исследования предлагается описание движений виброударной системы наиболее общего вида, состоящих из ударных движений (разностные уравнения) и безударных движений (дифференциальные уравнения). Такой синтез движений разных типов представляет основную трудность для описания движений виброударных систем. Эти разнотипные движения чередуются бесчисленное число раз, а описанный здесь результат таких чередований — гладкие дифференциальные уравнения (хотя даже простейшие виброударные системы до сих пор не имеют полного описания).

Такое описание необходимо для *правильного и грамотного* вычисления протекающих процессов в виброударных системах, в частности бесконечноударных движений, для подсчета всевозможных характеристик движений в

указанных системах (например, как это было сделано в [20] при расчете средней скорости виброперемещения, включая режимы, имеющие участки бесконечноударных движений). А для этого требуется знание момента (и времени) окончания бесконечноударных движений.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 5.1.* Далее для любой функции  $\varphi(y_1, \dots, y_{n-1})$  используются обозначения

$$\varphi = \varphi(y_1, \dots, y_{n-1}), \quad \varphi(M_1) = \varphi(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}),$$

где

$$M_1 = T(M) = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}), \quad M = (y_1 \geq 0, y_2, \dots, y_{n-1}).$$

Для нахождения  $f_i$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ , составляются функциональные уравнения точно так же, как и при доказательстве теоремы в [13]. В данном случае соответствующие функциональные уравнения имеют вид

$$(П.1) \quad \frac{\partial q_i}{\partial y_1} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\partial q_i}{\partial y_j} f_j = f_i(M_1) \left[ \frac{\partial q_1}{\partial y_1} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\partial q_1}{\partial y_j} f_j \right], \quad i = 2, \dots, n-1,$$

а отображение  $T$  задается формулами (15). Уравнения (П.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \tilde{q}_2 y_2 + y_2 y_1 \frac{\partial \tilde{q}_2}{\partial y_1} + \sum_{j=3}^{n-1} y_2 y_1 \frac{\partial \tilde{q}_2}{\partial y_j} f_j + \left( 1 + y_1 \tilde{q}_2 + y_1 y_2 \frac{\partial \tilde{q}_2}{\partial y_2} \right) f_2 = \\ & = f_2(M_1) \left[ \tilde{q}_1 + y_1 \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial y_1} + \sum_{j=2}^{n-1} y_1 \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial y_j} f_j \right], \\ (П.2) \quad & \tilde{q}_i y_2 + y_1 y_2 \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial y_1} + \sum_{j=3, j \neq i}^{n-1} y_2 y_1 \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial y_j} f_j + \\ & + \left( y_1 \tilde{q}_i + y_1 y_2 \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial y_2} \right) f_2 + \left( 1 + y_2 y_1 \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial y_i} \right) f_i = \\ & = f_i(M_1) \left[ \tilde{q}_1 + y_1 \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial y_1} + \sum_{j=2}^{n-1} y_1 \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial y_j} f_j \right], \quad i = 3, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Решение уравнений (П.2) можно искать в такой форме:

$$(П.3) \quad f_i = y_2 \tilde{f}_i, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Тогда (П.2) примут вид

$$\begin{aligned}
 & \tilde{q}_2 + y_1 \frac{\partial \tilde{q}_2}{\partial y_1} + \sum_{j=3}^{n-1} y_1 y_2 \frac{\partial \tilde{q}_2}{\partial y_j} \tilde{f}_j + \left( 1 + y_1 \tilde{q}_2 + y_1 y_2 \frac{\partial \tilde{q}_2}{\partial y_2} \right) \tilde{f}_2 = \\
 & = \tilde{f}_2(M_1)(1 + y_1 \tilde{q}_2) \left[ \tilde{q}_1 + y_1 \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial y_1} + \sum_{j=2}^{n-1} y_1 y_2 \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial y_j} \tilde{f}_j \right], \\
 (П.4) \quad & \tilde{q}_i + y_1 \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial y_1} + \sum_{j=3, j \neq i}^{n-1} y_1 y_2 \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial y_j} \tilde{f}_j + \\
 & + \left( y_1 \tilde{q}_i + y_1 y_2 \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial y_2} \right) \tilde{f}_2 + \left( 1 + y_2 y_1 \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial y_i} \right) \tilde{f}_i = \\
 & = \tilde{f}_i(M_1)(1 + y_1 \tilde{q}_2) \left[ \tilde{q}_1 + y_1 \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial y_1} + \sum_{j=2}^{n-1} y_1 y_2 \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial y_j} \tilde{f}_j \right], \quad i = 3, \dots, n-1.
 \end{aligned}$$

Уравнения (П.4) удобнее записать в виде

$$(П.5) \quad \psi_{i0} + \tilde{f}_i + \sum_{j=2}^{n-1} \psi_{ij} \tilde{f}_j = \tilde{f}_i(M_1) \left[ \psi_{10} + \sum_{j=2}^{n-1} \psi_{1j} \tilde{f}_j \right], \quad i = 2, \dots, n-1,$$

где

$$\begin{aligned}
 \psi_{10}(y_1 = 0, \dots, y_{n-1} = 0) &= R, \quad \psi_{k0}(0, \dots, 0) = -2a_k a_{12}^{-1}, \quad k = 2, \dots, n-1; \\
 \psi_{ij}(0, \dots, 0) &= 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad j = 2, \dots, n-1; \\
 \psi_{ij} &\in C^{m-4}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad j = 0, 2, 3, \dots, n-1.
 \end{aligned}$$

Теперь для нахождения при достаточно малых  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , решения уравнений (П.5) можно указать следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned}
 (П.6) \quad \tilde{f}_i^{s+1} &= -\psi_{i0} - \sum_{j=2}^{n-1} \psi_{ij} \tilde{f}_j^s + \tilde{f}_i^s(M_1) \left[ \psi_{10} + \sum_{j=2}^{n-1} \psi_{1j} \tilde{f}_j^s \right], \\
 & i = 2, \dots, n-1, \quad s = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

а) Сходимость процесса (П.6). Пусть норма непрерывных в  $D_1^r$  векторных функций  $\tilde{f}^s = (\tilde{f}_2^s, \dots, \tilde{f}_{n-1}^s)$  равна

$$(П.7) \quad \|\tilde{f}^s\| = \max_{M \in D_1^r} \left\{ \sum_{i=2}^{n-1} |\tilde{f}_i^s| \right\},$$

где  $D_1^r$  – множество, задаваемое неравенствами (21);  $r$  – некоторая величина, подлежащая определению;  $r \leq r^0$ ;  $r^0$  – величина, определяемая в лемме 4.1.

Тогда для двух серий непрерывных векторных функций  $\tilde{f}^s = (\tilde{f}_2^s, \dots, \tilde{f}_{n-1}^s)$  и  $\tilde{h}^s = (\tilde{h}_2^s, \dots, \tilde{h}_{n-1}^s)$ , получаемых из (П.6), имеет место

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i^{s+1} - \tilde{h}_i^{s+1} &= - \sum_{j=2}^{n-1} \psi_{ij} (\tilde{f}_j^s - \tilde{h}_j^s) + \psi_{10} \left[ \tilde{f}_i^s(M_1) - \tilde{h}_i^s(M_1) \right] + \\ &+ \sum_{j=2}^{n-1} \psi_{1j} \left[ \tilde{f}_i^s(M_1) \tilde{f}_j^s - \tilde{h}_i^s(M_1) \tilde{h}_j^s + \tilde{h}_i^s(M_1) \tilde{f}_j^s - \tilde{h}_i^s(M_1) \tilde{f}_j^s \right] = \\ &= \sum_{j=2}^{n-1} \left( -\psi_{ij} + \tilde{h}_i^s(M_1) \psi_{1j} \right) (\tilde{f}_j^s - \tilde{h}_j^s) + \\ &+ \left[ \psi_{10} + \sum_{j=2}^{n-1} \psi_{1j} \tilde{f}_j^s \right] \left( \tilde{f}_i^s(M_1) - \tilde{h}_i^s(M_1) \right). \end{aligned}$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n-1} \left| \tilde{f}_i^{s+1} - \tilde{h}_i^{s+1} \right| &\leq \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{i=2}^{n-1} \left| -\psi_{ij} + \tilde{h}_i^s(M_1) \psi_{1j} \right| \left| \tilde{f}_j^s - \tilde{h}_j^s \right| + \\ &+ \left| \psi_{10} + \sum_{j=2}^{n-1} \psi_{1j} \tilde{f}_j^s \right| \sum_{i=2}^{n-1} \left| \tilde{f}_i^s(M_1) - \tilde{h}_i^s(M_1) \right|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \text{(П.8)} \quad \left\| \tilde{f}^{s+1} - \tilde{h}^{s+1} \right\| &\leq \max_{M \in D_1^r} \left\{ \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=2}^{n-1} \left| \psi_{ji} - \tilde{h}_j^s(M_1) \psi_{1i} \right| \left| \tilde{f}_i^s - \tilde{h}_i^s \right| + \right. \\ &\left. + \left| \psi_{10} + \sum_{j=2}^{n-1} \psi_{1j} \tilde{f}_j^s \right| \sum_{i=2}^{n-1} \left| \tilde{f}_i^s(M_1) - \tilde{h}_i^s(M_1) \right| \right\}. \end{aligned}$$

Используя (16), можно установить, что  $M_1 = T(M) \in D_1^r$ , если  $M \in D_1^r$ . Поэтому для любой непрерывной функции  $\varphi(y_1, \dots, y_{n-1})$

$$\text{(П.9)} \quad \max_{M \in D_1^r} |\varphi(M_1)| \leq \max_{M \in D_1^r} |\varphi(M)|.$$

Если  $\tilde{f}_i, \tilde{f}_i \in C^0(\bar{D}_1^r)$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ , удовлетворяют уравнениям (П.6), то справедливо

$$\tilde{f}_i = -2a_i [a_{12}(R-1)]^{-1} + \hat{f}_i,$$

где

$$\hat{f}_i(y_1 = 0, \dots, y_{n-1} = 0) = 0.$$

Поэтому можно считать, что

$$(П.10) \quad \begin{aligned} \tilde{f}_i^s &= 2a_i[a_{12}(1-R)]^{-1} + \hat{f}_i^s, & \tilde{h}_i^s &= 2a_i[a_{12}(1-R)]^{-1} + \hat{h}_i^s, \\ i &= 2, \dots, n-1, & s &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где  $\hat{f}_i^s, \hat{h}_i^s$  – непрерывные функции и  $\hat{f}_i^s(y_1 = 0, \dots, y_{n-1} = 0) = \hat{h}_i^s(y_1 = 0, \dots, y_{n-1} = 0) = 0$ .

Пусть при  $M \in D_1^r$  имеют место неравенства

$$(П.11) \quad |\hat{f}_i^s| < K, \quad |\hat{h}_i^s| < K, \quad i = 2, \dots, n-1,$$

где  $K$  – некоторая положительная величина,  $s = 0$ . Тогда, используя вытекающие из (П.6) равенства

$$\begin{aligned} \hat{f}_i^{s+1} &= -\psi_{i0} + \psi_{i0} \left|_{y_j=0, j=1, \dots, n-1} - \sum_{j=2}^{n-1} \psi_{ij} \left( 2a_j[a_{12}(1-R)]^{-1} + \hat{f}_j^s \right) + \right. \\ &+ \left( 2a_i[a_{12}(1-R)]^{-1} + \hat{f}_i^s(M_1) \right) \left[ \psi_{i0} - \psi_{i0} \right|_{y_j=0, j=1, \dots, n-1} + \\ &+ \sum_{j=2}^{n-1} \psi_{ij} \left( 2a_j[a_{12}(1-R)]^{-1} + \hat{f}_j^s \right) \left. \right] + R\hat{f}_i^s(M_1), \\ i &= 2, \dots, n-1, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

и уменьшая (при необходимости) в (21) величину  $r$ , можно добиться выполнения (П.11) во всем множестве  $D_1^r$  при любых  $s$ .

Возвращаясь теперь к (П.8), можно с помощью (П.9)–(П.11) так подобрать множество  $D_1^{r**} = D_1^{r**}(\tilde{f}^0, \tilde{h}^0)$  (за счет уменьшения в (21) величины  $r$ ), что в норме (П.7)

$$(П.12) \quad \left\| \tilde{f}^{s+1} - \tilde{h}^{s+1} \right\| \leq 0,5(1+R) \left\| \tilde{f}^s - \tilde{h}^s \right\|, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Неравенство (П.12) гарантирует существование (в силу [19, с. 103] полноты пространства непрерывных в  $\bar{D}_1^r$  функций) решения  $\tilde{f}_i, i = 2, \dots, n-1$ , уравнений (П.4) в классе  $C^0$  (непрерывных функций) в замкнутом множестве  $D_1^r(\tilde{f}^0, \tilde{h}^0)$ .

б) Гладкость решения. Поскольку отображение (16) имеет вид (П.1) из [13], а роль множества  $D_r$  в формулировке и доказательстве теоремы в [13] может играть множество  $D_1^r$ , задаваемое неравенствами (21) данной работы и обладающее аналогичным свойством ( $T(D_1^r) \subset D_1^r$ ), то имеют место установленные при доказательстве теоремы [13] единственность решения уравнений (П.1) данной работы и следующее свойство

$$f_i \in C^{m-4}(\bar{D}_1^{r*}), \quad i = 2, \dots, n-1,$$

при соответствующем значении  $r_*$ , где в силу единственности и (П.3)  $f_i = y_2 \tilde{f}_i$ .

Поэтому значение  $r_1^* = \min\{r^*, r^{**}, r_*\}$  удовлетворяет заключению теоремы.

Теорема 5.1 доказана.

*Доказательство теоремы 5.2.* Как было сказано ранее, для любого  $y_1^0 > 0$  существуют такие величины  $r^* = r^*(y_1^0)$ ,  $\delta^* = \delta^*(y_1^0)$ , что при условиях (15) отображение  $T$  принимает вид (16), (17). Составляя, как и ранее [13], функциональные уравнения для нахождения правых частей дифференциальных уравнений (20), можно прийти к (П.1). По теореме 5.1 решение этих уравнений при  $(y_1, \dots, y_{n-1}) \in D_1^{r^*}$  существует и имеет вид  $f_i = y_2 \tilde{f}_i \in C^{m-4}$ ,  $\tilde{f}_i \in C^{m-5}$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ , причем отображение  $T$  принимает вид (16).

Из (П.1) при  $f_i = y_2 \tilde{f}_i$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ , следует

$$(П.13) \quad \sum_{j=2}^{n-1} \left( \frac{\partial q_i}{\partial y_j} - \bar{y}_2 \tilde{f}_i(M_1) \frac{\partial q_1}{\partial y_j} \right) \tilde{f}_j = y_2^{-1} \bar{y}_2 \tilde{f}_i(M_1) \frac{\partial q_1}{\partial y_1} - y_2^{-1} \frac{\partial q_i}{\partial y_1},$$

$$i = 2, \dots, n-1.$$

Отсюда, используя (16), можно получить

$$(П.14) \quad \sum_{j=2}^{n-1} \left[ \frac{\partial q_2}{\partial y_j} - y_2 \left( G_2(\tilde{t}) + \tilde{q}_2(y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{t}) \right) \tilde{f}_2(M_1) \frac{\partial q_1}{\partial y_j} \right] \tilde{f}_j =$$

$$= \left( G_2(\tilde{t}) + \tilde{q}_2(y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{t}) \right) \tilde{f}_2(M_1) \frac{\partial q_1}{\partial y_1} -$$

$$- \left( \frac{\partial G_2(\tilde{t})}{\partial \tilde{t}} \tilde{t}'_{y_1} + \frac{\partial \tilde{q}_2(y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{t})}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{q}_2(y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} \tilde{t}'_{y_1} \right),$$

$$\sum_{j=2}^{n-1} \left[ \frac{\partial q_i}{\partial y_j} - y_2 \left( G_2(\tilde{t}) + \tilde{q}_2(y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{t}) \right) \tilde{f}_i(M_1) \frac{\partial q_1}{\partial y_j} \right] \tilde{f}_j =$$

$$= \left( G_2(\tilde{t}) + \tilde{q}_2(y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{t}) \right) \tilde{f}_i(M_1) \frac{\partial q_1}{\partial y_1} -$$

$$- \left( \frac{\partial \tilde{q}_i(y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{t})}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{q}_i(y_1, \dots, y_{n-1}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} \tilde{t}'_{y_1} \right), \quad i = 3, \dots, n-1.$$

На (П.14), т.е. и на (П.13), можно смотреть как на линейную систему относительно неизвестных  $\tilde{f}_i$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ , при условии, что величины  $\tilde{f}_i(M_1)$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ , известны.

В силу (16)–(18) в точке  $M^0 = (y_1 = y_1^0, y_2 = 0, \dots, y_{n-1} = 0)$  соответствующие производные имеют значения

$$\left. \frac{\partial q_2}{\partial y_2} \right|_{M^0} = 1 + a_2 \tilde{t} \Big|_{M^0} = (3y^0 - 1)/2, \quad \left. \frac{\partial q_2}{\partial y_j} \right|_{M^0} = 0, \quad j = 3, \dots, n-1,$$

$$\left. \frac{\partial q_i}{\partial y_i} \right|_{M^0} = 1, \quad \left. \frac{\partial q_i}{\partial y_j} \right|_{M^0} = 0, \quad j = 3, 4, \dots, i-1, \quad i+1, i+2, \dots, n-1,$$

$$\left. \frac{\partial q_i}{\partial y_2} \right|_{M^0} = a_i \tilde{t} \Big|_{M^0} = 3a_i(y^0 - 1)(2a_2)^{-1}, \quad i = 3, \dots, n-1,$$

где

$$y^0 = \sqrt{1 - 8a_2y_1^0(3a_{12})^{-1}} > 1.$$

Отсюда, главный определитель  $\Delta$  системы (П.13), который является непрерывной функцией переменных  $y_1, \dots, y_{n-1}$ , в точке  $M^0$  имеет значение

$$\Delta \Big|_{M^0} = (3y^0 - 1)/2 \neq 0.$$

Поэтому при достаточно малых  $r^*$  и  $\delta^*$  для всех значений переменных  $y_1, \dots, y_{n-1}$ , удовлетворяющих неравенствам (15), имеет место неравенство

$$(П.15) \quad \Delta \neq 0,$$

т.е. из системы (П.13) можно однозначно найти  $\tilde{f}_i \in C^{m-5}$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ , зная  $\tilde{f}_i(M_1) \in C^{m-5}$ .

С другой стороны, согласно сказанному в разделе 4, существует такое малое  $\tilde{r}^* > 0$ , что при

$$0 < x_1 \leq \tilde{r}^* x_2^2, \quad x_2 < 0, \quad \sum_{i=2}^{n-1} |x_i| \leq \tilde{r}^*$$

отображение  $T$  в координатах (14) имеет вид (16). Отсюда главный определитель  $\Delta$  системы (П.13) в точке  $M_0^0 = (y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_{n-1} = 0)$  равен  $\Delta \Big|_{M_0^0} = 1 \neq 0$ .

Поэтому при достаточно малых  $\tilde{r}^{**}$  и  $\tilde{\delta}^*$  для всех значений переменных  $y_1, \dots, y_{n-1}$ , удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leq y_1 \leq \tilde{\delta}^*, \quad \sum_{i=2}^{n-1} |y_i| \leq \tilde{r}^{**}, \quad y_2 \leq 0,$$

имеет место неравенство (П.15).

В силу компактности отрезка  $A = [\tilde{\delta}^*, -3a_{12}R(4a_2)^{-1}]$  найдется конечное число точек  $y_1^0$  этого отрезка таких, что совокупность интервалов  $(y_1^0 - \delta^*(y_1^0), y_1^0 + \delta^*(y_1^0))$ , определяемых условиями (П.15) и (15), образует конечное подпокрытие отрезка  $A$ . Поэтому существуют такое малое значение  $r_1^{**} > 0$ , минимальное из значений  $r^* = r^*(y_1^0)$  из (15) и значения  $\tilde{r}^{**}$ , что при выполнении условий

$$(П.16) \quad 0 \leq y_1 \leq -3a_{12}R(4a_2)^{-1}, \quad y_2 \leq 0, \quad \sum_{i=2}^{n-1} |y_i| \leq r_1^{**}$$

имеет место неравенство (П.15).

Имеет место следующее.

*Утверждение П.1.* Существует такое целое  $P > 0$  и такое малое  $r_2^* > 0$ , что образ  $T^P(E^{r_2^*})$  множества  $E^{r_2^*}$ , задаваемого неравенствами (22) при  $r = r_2^*$ , лежит внутри множества  $D_1^{r_1^*}$ .

Здесь величина  $r_1^*$  определяется в теореме 5.1, множество  $D_1^{r_1^*}$  задается условиями (21),  $r_2^* \leq r_1^{**}$ , причем при  $\sum_{i=2}^{n-1} |y_i| \leq r_2^*$ ,  $y_2 \leq 0$  имеет место

$$\check{y}_1(y_2, \dots, y_{n-1}) \leq -3a_{12}R(4a_2)^{-1}.$$

При этом, все образы  $T(E^{r_2^*})$ ,  $T^2(E^{r_2^*}), \dots, T^P(E^{r_2^*})$  множества  $E^{r_2^*}$  и само множество  $D_1^{r_1^*}$  лежат внутри множества (П.16).

Тогда в силу справедливости (П.15) и теоремы 5.1 в любой точке множества  $E^{r_2^*}$  можно найти из системы (П.13) значения функций  $\tilde{f}_i \in C^{m-5}$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ .

Теперь можно доказать, что функции  $f_i = y_2 \tilde{f}_i$ , единственное решение уравнений (П.1), являются более гладкими (единственность функций  $f_i$  устанавливается от противного с использованием утверждения П.1 и теоремы 5.1). Точнее, используя соотношения  $f_i = y_2 \tilde{f}_i$ , можно повторить проведенные выше рассуждения (но уже относительно функций  $f_i$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ ) и получить, что при достаточно малом  $r = r_2^*$  в любой точке множества  $E^{r_2^*}$  можно найти из системы (П.1) значения функций  $f_i \in C^{m-4}$ .

Теорема 5.2 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неймарк Ю.И.* Теория вибрационного погружения и вибровыдергивания. Инженерн. сб. М.: АН СССР, 1953. Т. 16. С. 13–48.
2. *Блехман И.И.* Вибрационная механика и вибрационная реология (теория и приложения). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018.
3. *Асташев В.К., Крупенин В.Л.* Нелинейная динамика ультразвуковых технологических процессов: учебник / В.К. Асташев, В.Л. Крупенин; Моск. гос. ун-т печати им. Ивана Федорова. М.: МГУП им. Ивана Федорова, 2016.
4. *Бурд И.Ш., Крупенин В.Л.* Усреднение в квазиконсервативных системах: маятниковые и виброударные системы. Библиотека ВНТР. М.: Белый ветер, 2016.
5. *Блехман И.И., Блехман Л.И., Васильков В.Б. и др.* Об износе оборудования в условиях вибрации и ударных нагрузок // Вестн. научн.-техн. развития. 2018. № 11 (135). С. 3–14.
6. *Вульфсон И.И.* Устранение возникающих из-за зазоров виброударных режимов при учете характеристик электродвигателя // Вестн. научн.-техн. развития. 2019. № 2 (138). С. 9–14.
7. *Маркеев А.П., Сухоручкин Д.А.* Об устойчивости поступательного движения твердого тела с ударами о горизонтальную плоскость // ДАН. 2016. Т. 466. № 5. С. 550–554.
8. Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем. XVIII Междунар. симпоз. посв. 100-летию со дня рождения д-ра техн. наук А.Е. Кобринского / Под ред. В.К. Асташева, В.Л. Крупенина, Г.Я. Пановко, К.Б. Саламандра. М. 2015. Ин-т машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. 332 с.

9. *Мак-Миллан В.А.* Динамика твердого тела: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1951.
10. *Фейгин М.И.* Скользящий режим в динамических системах с ударными взаимодействиями // Прикл. математика и механика. 1967. Вып. 3. С. 533–536.
11. *Нагаев Р.Ф.* Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1985.
12. *Горбиков С.П., Неймарк Ю.И.* Вспомогательные скользящие движения динамических систем с ударными взаимодействиями / Дифференциальные и интегральные уравнения: Межвуз. сб. Горький, 1981. С. 59–64.
13. *Горбиков С.П.* Дифференциальные уравнения, определяемые динамическими системами с ударными взаимодействиями на границе области существования бесконечноударных движений // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 1. С. 18–23.
14. *Горбиков С.П.* Особенности строения фазового пространства динамических систем с ударными взаимодействиями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1987. № 3. С. 23–26.
15. *Горбиков С.П.* Локальные особенности динамических систем с ударными взаимодействиями // Мат. заметки. 1998. Т. 64. Вып. 4. С. 531–542.
16. *Горбиков С.П.* Топологическая эквивалентность одного типа локальных особенностей динамических систем с ударными взаимодействиями // Мат. заметки. 2001. Т. 70. Вып. 2. С. 181–194.
17. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.
18. *Нагаев Р.Ф.* Периодические режимы вибрационного перемещения. М.: Наука, 1978.
19. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
20. *Горбиков С.П., Неймарк Ю.И.* Результаты расчета средней скорости вибро-транспортирования // Машиноведение АН СССР. 1987. № 4. С. 39–42.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.*

Поступила в редакцию 23.07.2019

После доработки 10.10.2019

Принята к публикации 30.01.2020