

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2020 г. Ю.С. ПОПКОВ, д-р техн. наук (popkov@isa.ru)
(Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, Москва;
Институт проблем управления, Москва),
А.Ю. ПОПКОВ, канд. техн. наук (apopkov@isa.ru)
(Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, Москва),
Ю.А. ДУБНОВ (yury.dubnov@phystech.edu)
(Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, Москва;
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, Москва)

ЭЛЕМЕНТЫ РАНДОМИЗИРОВАННОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ПРЕДСКАЗАНИЯ СУТОЧНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ¹

Развит метод рандомизированного прогнозирования, основанный на генерации ансамблей энтропийно-оптимальных прогнозных траекторий. Последние генерируются рандомизированными моделями динамической регрессии, содержащими случайные параметры, измерительные шумы и случайный вход. Функции плотности распределения вероятностей случайных параметров и измерительных шумов оцениваются с использованием реальных данных в рамках процедуры рандомизированного машинного обучения. Генерация ансамблей прогнозных траекторий осуществляется путем сэмплирования энтропийно-оптимальных распределений вероятностей. Предлагаемая процедура применяется для рандомизированного прогнозирования суточной нагрузки региональной энергетической системы. Синтезирована стохастическая модель колебательной динамической регрессии. Построены одно- двух- и трехсуточные прогнозы и исследованы их погрешности.

Ключевые слова: прогнозирование, иерархическая рандомизация, колебательная динамическая регрессия, энтропийный функционал, эмпирический баланс, суточная нагрузка энергетической системы, сэмплирование функций ПРВ.

DOI: 10.31857/S0005231020070107

1. Введение

Традиционный путь решения задач прогнозирования состоит в моделировании исследуемого процесса, “обучении” его параметризованной модели на

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 19-07-00282, 20-07-00223).

ретроспективной информации и затем использовании “обученной” модели как предсказывающей. Отсюда следуют два этапа в прогнозировании развивающихся процессов: этап машинного обучения модели процесса и собственно этап прогнозирования.

Современная концепция машинного обучения базируется на детерминированной параметризации моделей и оценках параметров, использующих пакеты данных с постулируемыми свойствами. Качество оценивания характеризуется функциями эмпирического риска, минимизация которого дает оптимальные оценки [1, 2].

Наиболее распространенными являются параметрические модели динамической регрессии (ПМДР), в которых текущее состояние модели определяется ее состояниями на некотором временном отрезке в прошлом [3, 4]. Формальный образ ПМДР — это разностные уравнения, в общем случае p -го порядка [5]. Наиболее распространены в прикладных задачах линейные ПМДР. В частности, они являются базовыми во многих проблемах макроэкономического моделирования и прогнозирования, таких как моделирование временных рядов экономических индикаторов [6], определении адекватности ПМДР [7], прогнозирование обменных курсов [8]. Линейные ПМДР оказываются достаточно эффективными для краткосрочного прогнозирования. Но для больших горизонтов прогноза они приводят к значительным погрешностям. Поэтому естественными являются попытки улучшения прогнозов путем введения в ПМДР различных нелинейностей. Общему подходу к формированию и использованию нелинейных ПМДР посвящена монография [9]. Однако прикладные задачи требуют более адекватного подхода к выбору наиболее полезной и эффективной нелинейности. На этом пути кажется полезным, например, для прогнозирования обменных курсов применение логистической и экспоненциальной нелинейностей [10], периодических авторегрессионных моделей [11] или многомерных временных рядов [12] для прогнозирования суточной электрической нагрузки энергетической системы.

При переходе к этапу прогнозирования необходимо быть уверенным, что состояние и свойства исследуемого процесса сохраняются на интервале прогноза, что надежно утверждать сложно. Поэтому возникают погрешности прогноза как следствие воздействия каких-то неучтенных факторов. Одним из подходов к уменьшению таких погрешностей является придание прогнозу некоторых вероятностных характеристик [13, 14]. Наиболее распространенным на этом пути является использование формулы Байеса об апостериорной вероятности. Если задать некоторую структуру параметризованной условной плотности распределения вероятностей (ПРВ) данных и априорную плотность распределения параметров, то их произведение после нормировки определяет апостериорную плотность параметров при фиксированных данных. Принципиальные проблемы в этом подходе связаны с выбором структуры условной ПРВ и априорной ПРВ. Обычно выбираются нормальные ПРВ или их смесь, причем веса смеси оцениваются по ретроспективным данным [15–17]. Аналогичный подход используется в прикладных исследованиях: в популяционной генетике [18], где развивается метод численной аппроксимации апостериорных ПРВ, во взаимодействии финансового сектора экономики и трудового ранка [19], где для оценивания параметров указанных

выше ПРВ используется алгоритм Метрополиса–Гастингса, в прогнозировании динамики населения [20], где использовалась иерархия байесовских моделей для факторов рождаемости, смертности и миграционной активности. Вероятностные прогнозы формируются и другими методами с учетом специфики прикладных задач. В частности, в метеорологии путем накопления ретроспективных прогнозов погоды определяются оценки функций ПРВ, которые затем используются для кратковременного прогнозирования [21–24]. Довольно любопытным является формирование вероятностного прогноза путем смешивания прогнозов, полученных разными методами [25].

Из далеко не полного обзора и анализа указанных работ можно сделать вывод, что основная проблема прикладного прогнозирования — это неопределенность, заложенная в исследуемом процессе. Флуктуация наших знаний о природе процессов и, следовательно, неадекватность их математических моделей; достаточность, достоверность и точность ретроспективных данных о процессе; и, главное, сохранение основных свойств процессов в будущем, чтобы накопленные знания и модели сохраняли свою полезность при прогнозировании — все эти факторы являются следствием неопределенности.

Как повысить надежность прогноза? Один из рецептов связан с концепцией *рандомизации*, т.е. искусственной генерации искусственной случайности. Этот подход использовался в самых разных задачах, не связанных с прогнозированием. Существует много примеров в самых разных областях науки, управлении, экономики, таких как, например, рандомизированные численные методы оптимизации [26–28], смешанные (случайные) стратегии в биржевой торговле [29], рандомизированное прогнозирование динамики населения [30], вибрационное управление технологическими процессами [31]. При этом рандомизация предполагает придание неслучайным объектам искусственных стохастических свойств с оптимальными, в выбранном смысле, вероятностными характеристиками.

В большинстве работ, которые можно было бы отнести к использованию в той или иной форме рандомизации, искусственная случайность вводилась произвольно, в том смысле, что ее вероятностные характеристики — функции ПРВ — выбирались из известных: равномерных, нормальных, экспоненциальных и др.

Хотелось бы эти характеристики формировать с точки зрения предсказуемого качества рандомизации и ее ожидаемых свойств. Поскольку причиной для привлечения этого подхода является неопределенность, то полезность рандомизации целесообразно характеризовать информационной энтропией, которая является мерой неопределенности [32–34]. Максимизация информационной энтропии соответствует максимальной неопределенности.

В данной статье предлагается принципиально иной метод формирования прогнозов, названный энтропийно-рандомизированным прогнозированием (ЭРП). Он основан на генерации ансамбля случайных прогнозов моделью динамической регрессии со случайными оптимизированным входом и параметрами. Соответствующие вероятностные характеристики, а именно функции ПРВ, определяются с помощью процедуры энтропийно-рандомизированного

машинного обучения [35]. Ансамбли прогнозных траекторий строятся путем сэмпирования энтропийно-оптимальных ПРВ.

Предлагаемый метод применяется для рандомизированного прогнозирования суточной электрической нагрузки энергетической системы. Построена иерархическая рандомизированная модель динамической регрессии, описывающая зависимость нагрузки от температуры окружающего воздуха. Временная эволюция температуры моделируется колебательной моделью динамической регрессии второго порядка со случайным параметром и случайным входом. Приводятся результаты рандомизированного обучения указанной модели на реальных данных GEFCom2014 [36]. Предлагается технология рандомизированного прогнозирования и исследуется ее адекватность в зависимости от длины горизонта прогноза.

2. Рандомизированные модели динамической регрессии со случайным входом и параметрами

Структура, предлагаемой рандомизированной модели динамической регрессии (РМДР) изображена на рис. 1. Она состоит из модели основного объекта РМДР-О со случайными параметрами $\mathbf{a} \in R^p$ и модели внешних факторов РМДР-Ф со случайными параметрами $\mathbf{b} \in R^s$ и случайным входом $\zeta \in R^q$. Состояния объекта и его модели принадлежат векторному пространству R^m , в котором $\hat{\mathbf{x}}[n]$ — векторы состояний объекта, $\mathbf{x}[n] \in R^m$ — векторы состояний РМДР-О. Внешние факторы характеризуются вектором $\hat{\mathbf{y}}[n] \in R^q$, а изменение во времени состояния РМДР-Ф — вектором $\mathbf{y}[n] \in R^q$. Переменная n целочисленная, обозначает дискретное время в интервале $\mathcal{L} = [n^-, n^+]$.

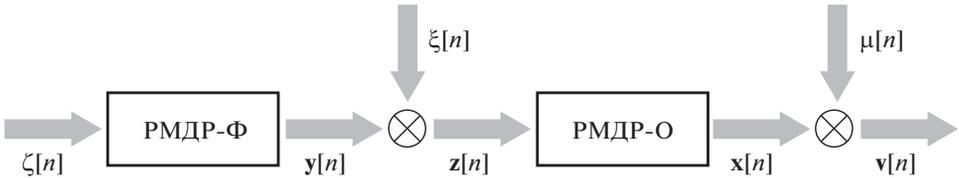


Рис. 1.

Рассмотрим линейную версию РМДР-О. Состояние модели $\mathbf{x}[n]$ в момент времени n меняется под влиянием p ретроспективных состояний $\mathbf{x}[n-1], \dots, \mathbf{x}[n-p]$ и измеряемых в каждый момент времени внешних факторов $\mathbf{z}[n] \in R^q$. Соответствующее уравнение имеет вид

$$(2.1) \quad \mathbf{x}[n] = \mathbf{X}^{(n,p)} \mathbf{A}^{(p)} + A_{(p+1)} \mathbf{z}[n],$$

где:

- блочный вектор-столбец параметров —

$$(2.2) \quad \mathbf{A}^{(p)} = [A_1, \dots, A_p]^T,$$

A_i — $(m \times m)$ -матрица со случайными элементами интервального типа

$$(2.3) \quad A_i \in \mathcal{A}_i = [A^-_i, A^+_i], \quad i = \overline{1, p};$$

- $A_{(p+1)}$ — $(m \times q)$ -матрица со случайными элементами интервального типа

$$(2.4) \quad A_{(p+1)} \in \mathcal{A}_{(p+1)} = [A^-_{(p+1)}, A^+_{(p+1)}];$$

- блочный вектор-строка p ретроспективных состояний —

$$(2.5) \quad \mathbf{X}^{(n,p)} = [\mathbf{x}[n-1], \dots, \mathbf{x}[n-p]].$$

Здесь $[\bullet]$ обозначает блочный вектор-строку.

Вероятностные свойства блочного вектора $\mathbf{A}^{(p)}$ характеризуются функцией совместной ПРВ $P(\mathbf{A}^{(p)})$, а матрицы $A_{(p+1)}$ — функцией ПРВ $F(A_{(p+1)})$.

Предполагается, что измеряемое в каждый момент времени n состояние РМДР-О содержит аддитивный шум $\mu[n]$:

$$(2.6) \quad \mathbf{v}[n] = \mathbf{x}[n] + \mu[n].$$

Случайные векторы $\mu[n]$ — интервального типа:

$$(2.7) \quad \mu[n] \in \mathcal{M}_n = [\mu^-_n, \mu^+_n]$$

с функцией ПРВ $M_n(\mu[n])$. Случайные векторы, измеряемые в разные моменты времени, предполагаются статистически независимыми.

Рассмотрим линейную версию РМДР-Ф, которая имеет аналогичную РМДР-О структуру. Будем иметь:

$$(2.8) \quad \mathbf{y}[n] = \mathbf{Y}^{(n,s)} \mathbf{B}^{(s)} + \zeta[n],$$

где

- блочный вектор-столбец —

$$(2.9) \quad \mathbf{B}^{(s)} = [B_1, \dots, B_s]^\top,$$

- B_i — $(q \times q)$ -матрица со случайными элементами интервального типа

$$(2.10) \quad B_i \in \mathcal{B}_i = [B^-_i, B^+_i], \quad i = \overline{1, s},$$

- блочная вектор-строка

$$(2.11) \quad \mathbf{Y}^{(n,p)} = [\mathbf{y}[n-1], \dots, \mathbf{y}[n-s]].$$

Вероятностные свойства параметров характеризуются непрерывно-дифференцируемой функцией ПРВ $W(\mathbf{B}^{(s)})$.

Случайный вектор $\zeta[n]$ — интервального типа:

$$(2.12) \quad \zeta[n] \in \mathcal{E}_n = [\zeta^-_n, \zeta^+_n]$$

с функцией ПРВ $Q_n(\zeta[n])$, также непрерывно-дифференцируемой. Векторы $\zeta[n]$ для разных моментов времени статистически независимы.

По аналогии с РМДР-О измеряемое в каждый момент времени n состояние РМДР-Ф $\mathbf{z}[n]$ содержит аддитивный шум $\xi[n]$:

$$(2.13) \quad \mathbf{z}[n] = \mathbf{y}[n] + \xi[n].$$

Случайный вектор $\xi[n]$ — интервального типа:

$$(2.14) \quad \xi[n] \in \Xi_n = [\xi^-_n, \xi^+_n],$$

с непрерывно-дифференцируемой функцией ПРВ $G_n(\xi[n])$. Случайные векторы, измеряемые в разные моменты времени, предполагаются статистически независимыми.

Итак, в общей РМДР (РМДР-О и РМДР-Ф) неизвестными являются функции ПРВ параметров $P(\mathbf{A}^{(p)})$, $F(A_{(p+1)})$, $W(\mathbf{B}^{(s)})$ и шумов $M_n(\mu[n])$, $Q_n(\zeta[n])$, $G_n(\xi[n])$, $n \in \mathcal{L}$.

3. Модели данных из обучающей коллекции

Оценивание указанных в предыдущем параграфе ПРВ производится с использованием обучающих коллекций данных, полученных на интервале обучения $n \in \mathcal{L} = [n^-, n^+]$ и согласованных с РМДР.

Рассмотрим РМДР-О. На интервале обучения будем иметь:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}[n^-] &= \mathbf{X}^{(n^-, p)} \mathbf{A}^{(p)} + A_{(p+1)} \mathbf{z}[n^-], \\ \mathbf{x}[n^- + 1] &= \mathbf{X}^{(n^-+1, p)} \mathbf{A}^{(p)} + A_{(p+1)} \mathbf{z}[n^- + 1], \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{x}[n^+] &= \mathbf{X}^{(n^+, p)} \mathbf{A}^{(p)} + A_{(p+1)} \mathbf{z}[n^+]. \end{aligned}$$

Тогда наблюдаемые состояния РМДР-О на интервале обучения \mathcal{L} представляют собой набор векторов

$$(3.2) \quad \mathbf{v}[n] = \mathbf{x}[n] + \mu[n], \quad n = \overline{n^-, n^+}.$$

Отсюда следует, что коллекция обучающих данных состоит из данных о ретроспективных состояниях объекта

$$(3.3) \quad \hat{\mathbf{X}}^{(n^-, p)}, \hat{\mathbf{X}}^{(n^-+1, p)}, \dots, \hat{\mathbf{X}}^{(n^+, p)}$$

и данных о наблюдаемых текущих состояниях

$$(3.4) \quad \hat{\mathbf{v}}[n^-], \dots, \hat{\mathbf{v}}[n^+], \quad \hat{\mathbf{z}}[n^-], \dots, \hat{\mathbf{z}}[n^+].$$

Рассмотрим РМДР-Ф. На интервале обучения будем иметь:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{y}[n^-] &= \mathbf{Y}^{(n^-, s)} \mathbf{B}^{(s)} + \zeta[n^-], \\ \mathbf{y}[n^- + 1] &= \mathbf{Y}^{(n^-+1, s)} \mathbf{B}^{(s)} + \zeta[n^- + 1], \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{y}[n^+] &= \mathbf{Y}^{(n^+, s)} \mathbf{B}^{(s)} + \zeta[n^+]. \end{aligned}$$

Наблюдаемые состояния РМДР-Ф на интервале обучения \mathcal{L} представляют собой набор векторов

$$(3.6) \quad \mathbf{z}[n] = \mathbf{y}[n] + \xi[n], \quad n = \overline{n^-, n^+}.$$

Отсюда следует, что коллекция обучающих данных состоит из данных о ретроспективных состояниях объекта

$$(3.7) \quad \hat{\mathbf{Y}}^{(n^-, s)}, \hat{\mathbf{Y}}^{(n^-+1, s)}, \dots, \hat{\mathbf{Y}}^{(n^+, s)}$$

и данных о наблюдаемых текущих состояниях

$$(3.8) \quad \hat{\mathbf{z}}[n^-], \dots, \hat{\mathbf{z}}[n^+].$$

Итак, в процедуре обучения РМДР участвуют коллекции данных (3.4), (3.7), (3.8).

4. Алгоритм рандомизированного машинного обучения (РМО)

Энтропийная версия [35] алгоритмов РМО используется для оценивания функций ПРВ параметров и шумов для РМДР-О и РМДР-Ф. Применительно к РМДР-О соответствующий алгоритм имеет вид

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_O = & - \int_{\mathcal{A}} P(\mathbf{A}^{(p)}) \ln P(\mathbf{A}^{(p)}) d\mathbf{A}^{(p)} - \int_{\mathcal{A}_{(p+1)}} F(A_{(p+1)}) \ln F(A_{(p+1)}) dA_{(p+1)} - \\ & - \sum_{n=n^-}^{n^+} \int_{\mathcal{M}_n} M_n(\mu[n]) \ln M_n(\mu[n]) dM_n(\mu[n]) \Rightarrow \max_{P, F, M} \end{aligned}$$

при ограничениях:

— нормировки ПРВ

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} P(\mathbf{A}^{(p)}) d\mathbf{A}^{(p)} = 1, \quad \int_{\mathcal{A}_{(p+1)}} F(A_{(p+1)}) dA_{(p+1)} = 1, \\ \int_{\mathcal{M}_n} M_n(\mu[n]) dM_n(\mu[n]) = 1, \quad n = \overline{n^-, n^+}, \end{aligned}$$

— эмпирических балансов

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} P(\mathbf{A}^{(p)}) \hat{\mathbf{X}}^{(n, p)} \mathbf{A}^{(p)} d\mathbf{A}^{(p)} + \int_{\mathcal{A}_{(p+1)}} F(A_{(p+1)}) A_{(p+1)} \hat{\mathbf{z}}[n] dA_{(p+1)} + \\ + \int_{\mathcal{M}_n} M_n(\mu[n]) \mu[n] d\mu[n] = \hat{\mathbf{v}}[n], \quad n = \overline{n^-, n^+}. \end{aligned}$$

Заметим, что эмпирические балансы представляют собой систему $(n^+ - n^-)$ блоков из m уравнений. Каждому такому блоку соответствует вектор множителей Лагранжа $\theta^{(n)}$ размерности m . Эта задача относится к классу функциональных задач энтропийно-линейного программирования ляпуновского типа, см. [37, 38], с. 354, теорема (принцип Лагранжа для ляпуновской задачи). Она имеет аналитическое решение, параметризованное множителями Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 P^*(\mathbf{A}^{(p)}) &= \frac{\exp\left(-\sum_{n=n^-}^{n^+} \langle \theta^{(n)}, \hat{\mathbf{X}}^{(n,p)} \mathbf{A}^{(p)} \rangle\right)}{\mathcal{P}(\theta)}, \\
 F^*(A_{(p+1)}) &= \frac{\exp\left(-\sum_{n=n^-}^{n^+} \langle \theta^{(n)}, A_{(p+1)} \hat{\mathbf{z}}[n] \rangle\right)}{\mathcal{F}(\theta)}, \\
 (4.3) \quad M_n^*(\mu[n]) &= \frac{\exp(-\langle \theta^{(n)}, \mu[n] \rangle)}{\mathcal{M}_n(\theta^{(n)})}, \quad n = \overline{n^-, n^+}.
 \end{aligned}$$

В этих равенствах

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(\theta) &= \int_{\mathcal{A}} \exp\left(-\sum_{n=n^-}^{n^+} \langle \theta^{(n)}, \hat{\mathbf{X}}^{(n,p)} \mathbf{A}^{(p)} \rangle\right) d\mathbf{A}^{(p)}, \\
 \mathcal{F}(\theta) &= \int_{\mathcal{A}_{(p+1)}} \exp\left(-\sum_{n=n^-}^{n^+} \langle \theta^{(n)}, A_{(p+1)} \hat{\mathbf{z}}[n] \rangle\right) dA_{(p+1)}, \\
 (4.4) \quad \mathcal{M}_n(\theta^{(n)}) &= \int_{\mathcal{M}_n} \exp(-\langle \theta^{(n)}, \mu[n] \rangle) d\mu[n], \quad n = \overline{n^-, n^+}.
 \end{aligned}$$

Матрица множителей Лагранжа $\theta = [\theta^{(n^-)}, \dots, \theta^{(n^+)}]$ определяется решением следующих балансовых уравнений:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\mathcal{P}(\theta)} \int_{\mathcal{A}} \exp\left(-\sum_{n=n^-}^{n^+} \langle \theta^{(n)}, \hat{\mathbf{X}}^{(n,p)} \mathbf{A}^{(p)} \rangle\right) \hat{\mathbf{X}}^{(n,p)} \mathbf{A}^{(p)} d\mathbf{A}^{(p)} + \\
 &+ \frac{1}{\mathcal{F}(\theta)} \int_{\mathcal{A}_{(p+1)}} \exp\left(-\sum_{n=n^-}^{n^+} \langle \theta^{(n)}, A_{(p+1)} \hat{\mathbf{z}}[n] \rangle\right) A_{(p+1)} \hat{\mathbf{z}}[n] dA_{(p+1)} + \\
 (4.5) \quad &+ \frac{1}{\mathcal{M}_n(\theta^{(n)})} \int_{\mathcal{M}_n} \exp(-\langle \theta^{(n)}, \mu[n] \rangle) \mu[n] d\mu[n] = \hat{\mathbf{x}}[n], \quad n = \overline{n^-, n^+}.
 \end{aligned}$$

Из выражений (4.3)–(4.5) следует, что функции ПРВ $P^*(\mathbf{A}^{(p)})$, $F^*(A_{(p+1)})$ параметров РМДР-О и измерительных шумов $M_n^*(\mu[n])$, $n = \overline{n^-, n^+}$ определяются по обучающим коллекциям ретроспективных данных $\hat{\mathbf{X}}^{(n^-, p)}$,

$\hat{\mathbf{X}}(n^- + 1, p), \dots, \hat{\mathbf{X}}(n^+, p)$, данных о текущих состояниях $\hat{\mathbf{x}}[n^-], \dots, \hat{\mathbf{x}}[n^+]$ и данных $\hat{\mathbf{z}}[n^-], \dots, \hat{\mathbf{z}}[n^+]$, которые генерируются РМДР-Ф.

Для получения последних применим алгоритм РМО к оцениванию функций ПРВ параметров и шумов для РМДР-Ф. Согласно [35] будем иметь:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_F = & - \int_{\mathcal{B}} W(\mathbf{B}) \ln W(\mathbf{B}) d\mathbf{B} - \\ & - \sum_{n=n^-}^{n^+} \int_{\mathcal{E}_n} Q_n(\zeta[n]) \ln Q_n(\zeta[n]) dQ_n(\zeta[n]) - \\ & - \sum_{n=n^-}^{n^+} \int_{\Xi_n} G_n(\xi[n]) \ln G_n(\xi[n]) dG_n(\xi[n]) \Rightarrow \max_{W, Q, G} \end{aligned}$$

при ограничениях:

— нормировки ПРВ

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} W(\mathbf{B}) d\mathbf{B} &= 1, \\ \int_{\mathcal{E}_n} Q_n(\zeta[n]) dQ_n(\zeta[n]) &= 1, \quad \int_{\Xi_n} G_n(\xi[n]) dG_n(\xi[n]) = 1, \quad n = \overline{n^-, n^+}; \end{aligned}$$

— эмпирических балансов

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} W(\mathbf{B}^{(s)}) \hat{\mathbf{Y}}^{(n,s)} \mathbf{B}^{(s)} d\mathbf{B}^{(s)} + \int_{\mathcal{E}_n} Q_n(\zeta[n]) \zeta[n] d\zeta[n] + \\ + \int_{\Xi_n} G_n(\xi[n]) \xi[n] d\xi[n] = \hat{\mathbf{z}}[n], \quad n = \overline{n^-, n^+}. \end{aligned}$$

Эта задача того же класса, что и (4.3)–(4.5). Она имеет аналитическое решение в терминах множителей Лагранжа:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} W^*(\mathbf{B}^{(s)}) &= \frac{\exp\left(-\sum_{n=n^-}^{n^+} \langle \eta^{(n)}, \hat{\mathbf{Y}}^{(n,s)} \mathbf{B}^{(s)} \rangle\right)}{\mathcal{W}(\eta)}, \\ Q_n^*(\zeta[n]) &= \frac{\exp(-\langle \zeta[n], \eta^{(n)} \rangle)}{\mathcal{Q}_n(\eta^{(n)})}, \\ G_n^*(\xi[n]) &= \frac{\exp(-\langle \xi[n], \eta^{(n)} \rangle)}{\mathcal{G}_n(\eta^{(n)})}, \quad n = \overline{n^-, n^+}, \\ \eta &= [\eta^{(n^-)}, \dots, \eta^{(n^+)}]. \end{aligned}$$

В этих равенствах

$$\begin{aligned}
 (4.9) \quad \mathcal{W}(\eta) &= \int_{\mathcal{B}} \exp \left(- \sum_{n=n^-}^{n^+} \langle \eta^{(n)}, \hat{\mathbf{Y}}^{(n,s)} \mathbf{B}^{(s)} \rangle \right) d\mathbf{B}^{(s)}, \\
 \mathcal{Q}_n(\eta^{(n)}) &= \int_{\mathcal{E}_n} \exp \left(- \langle \zeta[n], \eta^{(n)} \rangle \right) d\zeta[n], \\
 \mathcal{G}_n(\eta^{(n)}) &= \int_{\mathcal{E}_n} \exp \left(- \langle \xi[n], \eta^{(n)} \rangle \right) d\xi[n], \\
 & \quad n = \overline{n^-, n^+}.
 \end{aligned}$$

Матрица множителей Лагранжа η определяется решением следующих балансовых уравнений:

$$\begin{aligned}
 (4.10) \quad & \frac{1}{\mathcal{W}(\eta)} \int_{\mathcal{B}} \exp \left(- \sum_{n=n^-}^{n^+} \langle \eta^{(n)}, \hat{\mathbf{Y}}^{(n,s)} \mathbf{B}^{(s)} \rangle \right) \hat{\mathbf{Y}}^{(n,s)} \mathbf{B}^{(s)} d\mathbf{B}^{(s)} + \\
 & + \frac{1}{\mathcal{Q}_n(\eta^{(n)})} \int_{\mathcal{E}_n} \exp \left(- \langle \zeta[n], \eta^{(n)} \rangle \right) \zeta[n] d\zeta[n] + \\
 & + \frac{1}{\mathcal{G}_n(\eta^{(n)})} \int_{\mathcal{E}_n} \exp \left(- \langle \xi[n], \eta^{(n)} \rangle \right) \xi[n] d\xi[n] = \hat{\mathbf{z}}[n], \\
 & \quad n = \overline{n^-, n^+}.
 \end{aligned}$$

5. Рандомизированное прогнозирование суточной электрической нагрузки энергетической системы

5.1. Модель динамической регрессии

Суточная электрическая нагрузка L энергосистемы зависит от многих и разнообразных факторов. Здесь ограничимся одним наиболее существенным внешним фактором, а именно температурой T окружающего воздуха. Суточное изменение температуры носит колебательный характер. Эти колебания отражаются на нагрузке, но с некоторым временным сдвигом. Причиной этого сдвига является инерция электрической сети, по которой передается электрическая энергия от генератора к потребителям.

Следуя общей структуре РМДР, изложенной в разделе 2, модель нагрузки (LT -модель) описывает динамическую связь нагрузки и температуры окружающего воздуха, а модель температуры ($T\xi$ -модель) описывает динамику суточной температуры. Что касается LT -модели, то существует довольно много ее версий, но все они статические, т.е. описывающие связь нагрузки и температуры в текущие моменты времени [39]. Температурная суточная

динамика имеет колебательный характер, который, в частности, описывается периодической авторегрессионной моделью [40].

Следует отметить, что влияние температуры на нагрузку динамическое, т.е. изменение нагрузки под влиянием температуры в данный момент времени зависит от ее значения в предыдущий момент времени. Аналогичным свойством обладает температурная колебательная динамика.

Поэтому в рамках общего рандомизированного подхода предлагается LT -модель описывать моделью динамической регрессии первого порядка со случайными параметрами, $T\xi$ -модель формировать в виде динамической регрессии второго порядка со случайным параметром и случайным входом ξ . Тогда $LT\xi$ -модель будет композицией двух предыдущих.

Ограничиваясь линейным классом моделей, рандомизированную динамическую регрессионную модель “нагрузка-температура” (LT -модель) первого порядка можно представить в следующем виде:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} L[n] &= aL[n-1] + bT[n], \\ v[n] &= L[n] + \mu[n], \quad n = \overline{1, 24}, \end{aligned}$$

где случайные независимые параметры a, b принимают значения в интервалах:

$$(5.2) \quad a \in \mathcal{A} = [a^-, a^+], \quad b \in \mathcal{B} = [b^-, b^+].$$

Их вероятностные свойства характеризуются функциями ПРВ $P(a)$, $F(b)$, определенными на множествах \mathcal{A} и \mathcal{B} соответственно. Случайный шум $\mu[n]$, имитирующий ошибки в измерениях нагрузки, также интервального типа. В общем случае для каждого момента времени размеры интервалов могут быть различными, т.е.

$$(5.3) \quad \mu[n] \in \mathcal{M}_n = [\mu^-[n], \mu^+[n]],$$

с функциями ПРВ $M_n(\mu[n])$, $n = \overline{1, 24}$.

Рассмотрим $T\xi$ -модель. Для имитации колебательного характера суточного изменения температуры воспользуемся рандомизированной моделью динамической регрессии второго порядка

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \tau[n] &= c(2, 1\tau[n-1] - 1, 1\tau[n-2]), \quad c = \frac{1}{1 + \omega^2}, \\ T[n] &= t + \tau[n] + \xi[n], \end{aligned}$$

где ω — частота колебаний температуры, t — среднесуточная температура. Эти параметры случайные, интервального типа, т.е.

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \omega &\in \Omega = [\omega^-, \omega^+], \quad c \in \mathcal{C} = [c^-, c^+], \\ c^- &= \frac{1}{1 + (\omega^+)^2} > 0, \quad c^+ = \frac{1}{1 + (\omega^-)^2} > c^- > 0. \end{aligned}$$

Вероятностные свойства параметров характеризуются функциями ПРВ $W(c)$, определенными на соответствующих интервалах.

В уравнение (5.4) входит случайный шум, имитируемый независимыми случайными величинами $\xi[n]$, значения которых в каждом измерении n могут принадлежать различным интервалам, т.е.

$$(5.6) \quad \xi[n] \in \Xi_n = [\xi^-_n, \xi^+_n].$$

Вероятностные свойства случайной величины $\xi[n]$ характеризуются функцией ПРВ $Q_n(\xi[n])$, $n = \overline{1, 24}$.

Таким образом, уравнения (5.1), (5.4), моделирующие динамику нагрузки в энергосистеме, характеризуются следующими функциями ПРВ:

- LT -модель: параметры $P(a), F(b)$, шум $M_n(\mu[n])$, $n = \overline{n^-, n^+}$;
- $T\xi$ -модель: параметры $W(c)$, шум $Q_n(\xi[n])$, $n = \overline{n^-, n^+}$.

5.2. Обучающая коллекция данных

Для оценивания функций ПРВ будут использоваться приведенные к единичному интервалу реальные данные из датасета GEFCom2014 (см. [36]) по изменению суточной нагрузки $0 \leq L_r^{(i)}[n] \leq 1$, среднесуточной температуры $0 \leq t_r^{(i)} \leq 1$ и отклонения температуры $0 \leq \tau_r^{(i)}[n] \leq 1$ от среднесуточного значения.

Нормировка осуществлялась следующим образом:

$$(5.7) \quad \begin{aligned} L_r^{(i)}[n] &= \frac{\hat{L}_r^{(i)}[n] - \hat{L}_{\min}^{(i)}}{\hat{L}_{\max}^{(i)} - \hat{L}_{\min}^{(i)}}, \\ \tau_r^{(i)}[n] &= \frac{\hat{\tau}_r^{(i)}[n] - \hat{\tau}_{\min}^{(i)}}{\hat{\tau}_{\max}^{(i)} - \hat{\tau}_{\min}^{(i)}}, \\ t_r^{(i)} &= \frac{1}{n^+ - n^-} \sum_{n=n^-}^{n^+} \tau_r^{(i)}[n], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\min}^{(i)} &= \min_n \hat{L}^{(i)}[n], & \hat{L}_{\max}^{(i)} &= \max_n \hat{L}^{(i)}[n], \\ \hat{\tau}_{\min}^{(i)} &= \min_n \hat{\tau}^{(i)}[n], & \hat{\tau}_{\max}^{(i)} &= \max_n \hat{\tau}^{(i)}[n]. \end{aligned}$$

На рис. 2 показаны графики нагрузки $L_r^{(i)}[n]$, отклонения температуры $\tau_r^{(i)}[n]$ и данные по среднесуточной температуре $t_r^{(i)}$ для 03.07.2016 ($i = 1$), 04.07.2016 ($i = 2$), 05.07.2016 ($i = 3$) в качестве обучающей коллекции. Обозначим интервал обучения как $\mathcal{T}_l = [n^-, n^+] = [1, 24]$, т.е. обучение будет производиться по данным за 24 ч.

Согласно (5.1), (5.4) сформируем векторы переменных модели на интервале обучения $n \in \mathcal{T}_l$ и соответствующих им реальных данных:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{(i)}(\mathcal{T}_l) &= \{L^{(i)}[1], \dots, L^{(i)}[24]\}, & \mathbf{L}_r^{(i)}(\mathcal{T}_l) &= \{L_r^{(i)}[1], \dots, L_r^{(i)}[24]\}, \\ \mathbf{L}^{(i)}(\mathcal{T}_l - 1) &= \{L^{(i)}[0], \dots, L^{(i)}[23]\}, & \mathbf{L}_r^{(i)}(\mathcal{T}_l - 1) &= \{L_r^{(i)}[0], \dots, L_r^{(i)}[23]\}, \end{aligned}$$

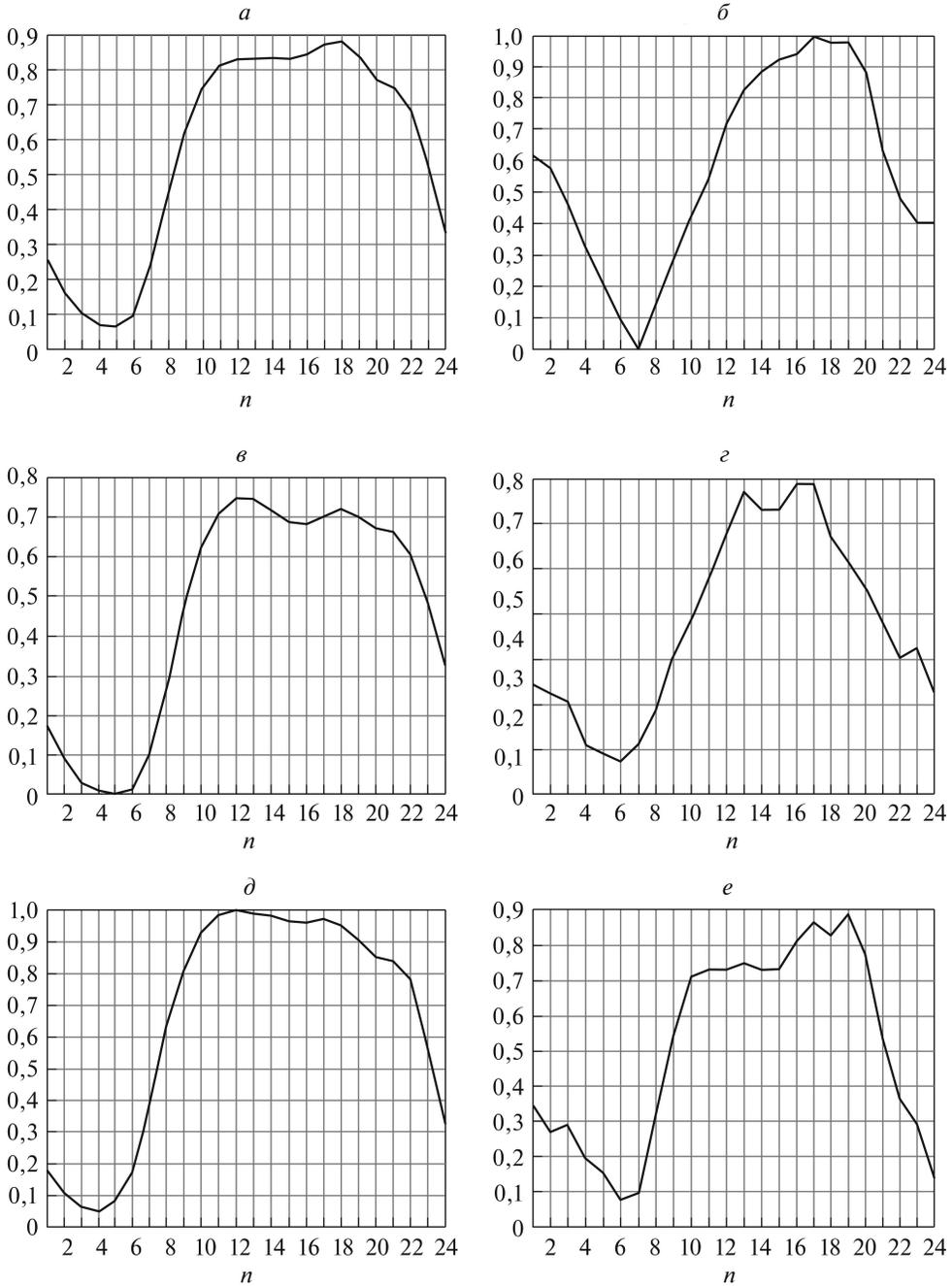


Рис. 2. Нагрузка $L_r^{(i)}[n]$ и отклонение температуры $\tau_r^{(i)}[n]$ для $i = \overline{1,3}$. *a* — $L_r^{(1)}[n]$, *б* — $\tau_r^{(1)}[n]$, $t_r^{(1)} = 0,5721$, *в* — $L_r^{(3)}[n]$, *г* — $\tau_r^{(3)}[n]$, $t_r^{(3)} = 0,5056$, *д* — $L_r^{(2)}[n]$, *е* — $\tau_r^{(2)}[n]$, $t_r^{(2)} = 0,4784$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^{(i)}(\mathcal{T}_l) &= \left\{ v^{(i)}[1], \dots, v^{(i)}[24] \right\}, & \mathbf{V}_r^{(i)}(\mathcal{T}_l) &= \left\{ v_r^{(i)}[1], \dots, v_r^{(i)}[24] \right\}, \\
\mathbf{T}^{(i)}(\mathcal{T}_l) &= \left\{ \tau^{(i)}[1], \dots, \tau^{(i)}[24] \right\}, & \mathbf{T}_r^{(i)}(\mathcal{T}_l) &= \left\{ \tau_r^{(i)}[1], \dots, \tau_r^{(i)}[24] \right\}, \\
\tilde{\mathbf{T}}^{(i)}(\mathcal{T}_l - 1, \mathcal{T}_l - 2) &= \left\{ 2, 1\tau^{(i)}[0] - 1, 1\tau^{(i)}[-1], \dots, 2, 1\tau^{(i)}[23] - 1, 1\tau^{(i)}[22] \right\}, \\
\tilde{\mathbf{T}}_r^{(i)}(\mathcal{T}_l - 1, \mathcal{T}_l - 2) &= \left\{ 2, 1\tau_r^{(i)}[0] - 1, 1\tau_r^{(i)}[-1], \dots, 2, 1\tau_r^{(i)}[23] - 1, 1\tau_r^{(i)}[22] \right\}, \\
\boldsymbol{\mu}^{(i)}(\mathcal{T}_l) &= \left\{ \mu^{(i)}[1], \dots, \mu^{(i)}[24] \right\}, & \boldsymbol{\xi}^{(i)}(\mathcal{T}_l) &= \left\{ \xi^{(i)}[1], \dots, \xi^{(i)}[24] \right\}.
\end{aligned}$$

В терминах (5.2) LT - и $T\xi$ -модели на интервале обучения \mathcal{T}_l имеют вид

$$\begin{aligned}
(5.8) \quad \mathbf{L}^{(i)}(\mathcal{T}_l) &= a\mathbf{L}^{(i)}(\mathcal{T}_l - 1) + b\mathbf{T}^{(i)}(\mathcal{T}_l), \\
\mathbf{V}^{(i)}(\mathcal{T}_l) &= \mathbf{L}^{(i)}(\mathcal{T}_l) + \boldsymbol{\mu}^{(i)}(\mathcal{T}_l), \\
\mathbf{T}^{(i)}(\mathcal{T}_l) &= c\tilde{\mathbf{T}}^{(i)}(\mathcal{T}_l - 1, \mathcal{T}_l - 2), \\
\mathbf{T}^{(i)}(\mathcal{T}_l) &= t + \tilde{\mathbf{T}}^{(i)}(\mathcal{T}_l) + \boldsymbol{\xi}^{(i)}(\mathcal{T}_l).
\end{aligned}$$

Значения случайных параметров лежат в следующих интервалах:

$$(5.9) \quad \mathcal{A} = [0,05; 0,15], \quad \mathcal{B} = [0,5; 1,0], \quad \mathcal{C} = [0,75; 0,85].$$

Шумы принимают значения в следующих интервалах:

$$(5.10) \quad \mathcal{M}_n = [-0,1; 0,1], \quad \Xi_n = [-0,1; 0,1].$$

5.3. Энтروпийно-оптимальные функции ПРВ параметров и шумов

Применяя технику из раздела 3, получим следующие выражения для функций ПРВ, параметризованных множителями Лагранжа $\theta^{(i)} = \{\theta_1^{(i)}, \dots, \theta_{24}^{(i)}\}$ для LT -модели (5.1)–(5.3):

$$\begin{aligned}
(5.11) \quad P_i^* \left(a, \theta^{(i)} \right) &= \frac{l_r^{(i)}(\theta) \exp \left(-al_r^{(i)}(\theta) \right)}{\exp \left(-a-l_r^{(i)}(\theta) \right) - \exp \left(-a+l_r^{(i)}(\theta) \right)}, \\
F_i^* \left(b, \theta^{(i)} \right) &= \frac{h_r^{(i)}(\theta) \exp \left(-bh_r^{(i)}(\theta) \right)}{\exp \left(-b-h_r^{(i)}(\theta) \right) - \exp \left(-b+h_r^{(i)}(\theta) \right)}, \\
M_{i,n}^* \left(\mu[n] \right) &= \frac{\theta_n^{(i)} \exp \left(-\theta_n^{(i)} \mu[n] \right)}{\exp \left(-\mu^-[n]\theta_n^{(i)} \right) - \exp \left(-\mu^+[n]\theta_n^{(i)} \right)}, \quad n = \overline{1, 24}.
\end{aligned}$$

В этих равенствах

$$(5.12) \quad l_r^{(i)}(\theta) = \sum_{n=1}^{24} \theta_n L_r^{(i)}[n-1], \quad h_r^{(i)}(\theta) = \sum_{n=1}^{24} \theta_n T_r^{(i)}[n].$$

Множители Лагранжа $\theta^{(i)}$ определяются решением следующей системы балансовых уравнений:

$$(5.13) \quad L^{(i)}(\theta^{(i)}) + T^{(i)}(\theta^{(i)}) + M_n^{(i)}(\theta_n^{(i)}) = L_r^{(i)}[n], \quad n = \overline{1, 24},$$

где

$$(5.14) \quad \begin{aligned} L^{(i)}(\theta^{(i)}) &= \\ &= \frac{\exp(-a^- l_r^{(i)}(\theta^{(i)})) (a^- l^{(i)}(\theta^{(i)}) + 1) - \exp(-a^+ l_r^{(i)}(\theta^{(i)})) (a^+ l^{(i)}(\theta^{(i)}) + 1)}{\exp(-a^- l^{(i)}(\theta^{(i)})) - \exp(-a^+ l^{(i)}(\theta^{(i)}))}, \\ T^{(i)}(\theta^{(i)}) &= \\ &= \frac{\exp(-b^- h_r^{(i)}(\theta^{(i)})) (b^- h^{(i)}(\theta^{(i)}) + 1) - \exp(-b^+ h_r^{(i)}(\theta^{(i)})) (b^+ h^{(i)}(\theta^{(i)}) + 1)}{\exp(-b^- h^{(i)}(\theta^{(i)})) - \exp(-b^+ h^{(i)}(\theta^{(i)}))}, \\ M_n^{(i)}(\theta_n^{(i)}) &= \\ &= \frac{\exp(-\mu^- [n] \theta_n^{(i)}) (\mu^- [n] \theta_n^{(i)} + 1) - \exp(-\mu^+ [n] \theta_n^{(i)}) (\mu^+ [n] \theta_n^{(i)} + 1)}{\theta_n^{(i)} (\exp(-\mu^- [n] \theta_n^{(i)}) - \exp(-\mu^+ [n] \theta_n^{(i)}))}. \end{aligned}$$

Рассмотрим $T\xi$ -модель. Энтропийно-оптимальные ПРВ, параметризованные множителями Лагранжа, имеют вид

$$\begin{aligned} W_i^*(c, \eta^{(i)}) &= \frac{\tilde{h}_r^{(i)}(\eta) \exp(-c \tilde{h}_r^{(i)}(\eta))}{\exp(-a^- \tilde{h}_r^{(i)}(\eta)) - \exp(-a^+ \tilde{h}_r^{(i)}(\eta))}, \\ Q_{i,n}^*(\xi[n]) &= \frac{\eta_n^{(i)} \exp(-\eta_n^{(i)} \xi[n])}{\exp(-\xi^- [n] \eta_n^{(i)}) - \exp(-\xi^+ [n] \eta_n^{(i)})}, \quad n = \overline{1, 24}. \end{aligned}$$

В этих равенствах

$$(5.15) \quad \tilde{h}_r^{(i)}(\eta) = \sum_{n=1}^{24} \eta_n (2, 1T_r^{(i)}[n-1] - 1, 1T_r^{(i)}[n-2]), \quad q^{(i)}(\eta^{(i)}) = \sum_{n=1}^{24} \eta_n^{(i)}.$$

Множители Лагранжа $\eta^{(i)}$ определяются решением следующей системы балансовых уравнений:

$$(5.16) \quad D^{(i)}(\eta^{(i)}) + N^{(i)}(\eta^{(i)}) + K_n^{(i)}(\eta_n^{(i)}) = T_r^{(i)}[n], \quad n = \overline{1, 24},$$

где

$$\begin{aligned} D^{(i)}(\eta^{(i)}) &= \\ &= \frac{\exp(-t^- q^{(i)}(\eta^{(i)})) (t^- q^{(i)}(\eta^{(i)}) + 1) - \exp(-t^+ q^{(i)}(\eta^{(i)})) (t^+ q^{(i)}(\eta^{(i)}) + 1)}{\exp(-t^- q^{(i)}(\eta^{(i)})) - \exp(-t^+ q^{(i)}(\eta^{(i)}))}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& N^{(i)} \left(\eta^{(i)} \right) = \\
& = \frac{\exp \left(-c^- \tilde{h}_r^{(i)} \left(\eta^{(i)} \right) \right) \left(c^- \tilde{h}^{(i)} \left(\eta^{(i)} \right) + 1 \right) - \exp \left(-c^+ \tilde{h}_r^{(i)} \left(\eta^{(i)} \right) \right) \left(c^+ \tilde{h}^{(i)} \left(\eta^{(i)} \right) + 1 \right)}{\exp \left(-c^- \tilde{h}^{(i)} \left(\eta^{(i)} \right) \right) - \exp \left(-c^+ \tilde{h}^{(i)} \left(\eta^{(i)} \right) \right)}, \\
& K_n^{(i)} \left(\eta_n^{(i)} \right) = \\
(5.17) \quad & = \frac{\exp \left(-\xi^- [n] \eta_n^{(i)} \right) \left(\xi^- [n] \eta_n^{(i)} + 1 \right) - \exp \left(-\xi^+ [n] \eta_n^{(i)} \right) \left(\xi^+ [n] \eta_n^{(i)} + 1 \right)}{\eta_n^{(i)} \left(\exp \left(-\xi^- [n] \eta_n^{(i)} \right) - \exp \left(-\xi^+ [n] \eta_n^{(i)} \right) \right)}.
\end{aligned}$$

5.4. Обучение модели

Использованием данных по суточным изменениям нагрузки и температуры (см. рис. 2) для трех указанных выше суток были сформированы балансовые уравнения (5.13), (5.14), (5.16), (5.17). Решение этих уравнений определялось путем минимизации квадратичной невязки между левой и правой частями этих уравнений. Поскольку уравнения существенно нелинейные, найденные значения множителей Лагранжа, приведенные в табл. 1, соответствуют

Таблица 1. Множители Лагранжа θ, η

Время	$\theta^{(1)}$	$\theta^{(2)}$	$\theta^{(3)}$	$\eta^{(1)}$	$\eta^{(2)}$	$\eta^{(3)}$
1	-29,72	7009,28	1038,07	14,63	21,22	17,34
2	1,58	230,89	35,35	19,52	26,71	28,32
3	-4,09	369,96	26,23	35,91	31,60	26,33
4	-4,68	29,93	11,96	55,83	127,82	52,08
5	-7,21	24,25	1,03	96,85	642,35	110,94
6	-9,26	13,72	-15,76	592,99	7009,28	4729,52
7	-59,09	-5,96	-7009,28	7009,28	183,92	7009,28
8	-7009,28	-33,99	-767,99	48,21	39,94	23,16
9	-766,00	-1409,28	-22,91	66,58	12,28	-1,26
10	-50,90	-4229,90	-4,27	37,38	2,35	-19,78
11	-18,97	-45,22	3,72	22,51	-8,82	-22,73
12	-11,42	-15,07	9,17	7,16	-27,06	-23,06
13	-13,94	2,59	17,38	5,72	-172,25	-27,06
14	-17,62	5,82	14,94	2,83	-65,29	-23,02
15	-18,18	9,33	17,74	-0,30	-57,45	-23,15
16	-27,28	11,35	21,85	-1,24	-482,69	-47,78
17	-49,55	4,50	22,68	-5,49	-889,02	-130,49
18	-25,41	-7,09	29,39	-0,89	-28,12	-60,71
19	-8,20	-4,66	98,03	-4,23	-14,20	-270,17
20	0,95	-4,89	52,27	3,70	-6,41	-31,47
21	1,01	-16,37	8,15	21,16	2,48	-1,23
22	22,00	-8,24	7,45	17,85	12,15	14,86
23	2881,43	17,00	902,73	26,78	9,98	26,39
24	512,14	36,30	355,47	27,32	24,65	121,44
$l_r^{(i)}(\theta^*)$	9,71	6,04	6,09			
$h_r^{(i)}(\theta^*)$	0,06	0,58	0,81			
$\tilde{h}_r^{(i)}(\eta^*)$				0,41	0,05	0,19

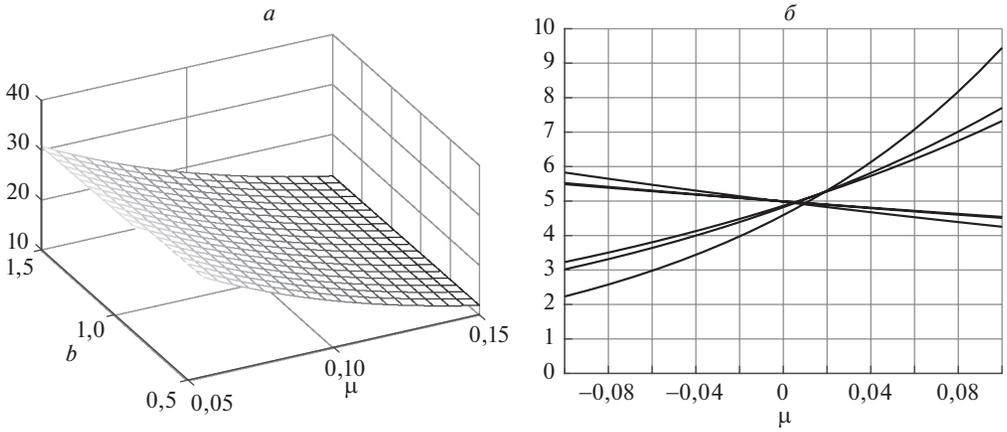


Рис. 3. $a - U_1^*(a, b)$, $b - M_{1,n}^*(\mu)$.

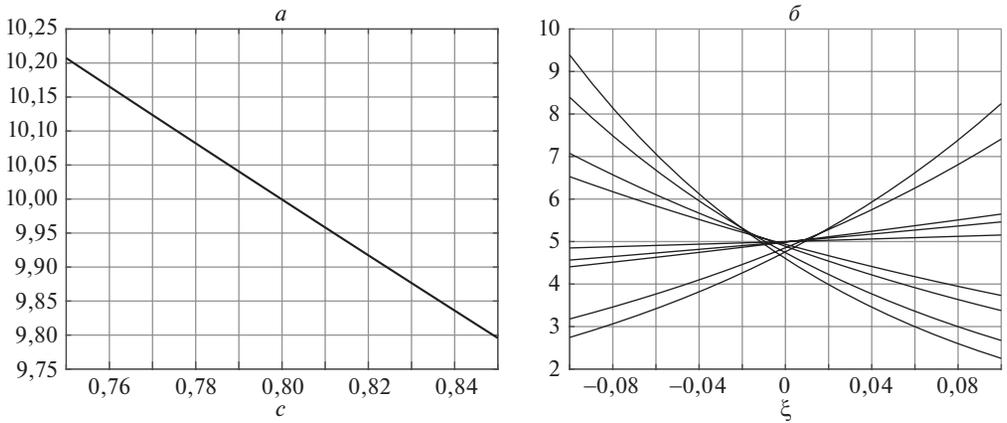


Рис. 4. $a - W_1^*(c)$, $b - Q_{1,n}^*(\xi)$.

одному из локальных минимумов невязки. Все вычисления были реализованы в среде MATLAB, оптимизация проводилась с помощью функции `fsolve`.

Поскольку в LT -модели параметры независимые, функции совместной ПРВ параметров $U_i^*(a, b) = P_i^*(a)F_i^*(b)$ и шумов имеют вид

$$\begin{aligned}
 (5.18) \quad & U_1^*(a, b) = 53,09 \exp(-9,72a) \exp(0,06b), \\
 & U_2^*(a, b) = 55,49 \exp(-6,04a) \exp(0,58b), \\
 & U_3^*(a, b) = 65,81 \exp(-6,09a) \exp(-0,81b),
 \end{aligned}$$

$$(a, b) \in [0,05; 0,15] \bigcup [0,5; 1,0], \quad \mu \in [-0,1, 0,1], \quad i = \overline{1, 24}.$$

Функции ПРВ — экспоненциального типа. Графики для $i = 1$ показаны на рис. 3.

Функции ПРВ параметров и шумов для $T\xi$ -модели имеют вид

$$\begin{aligned} W_1^*(c) &= 13,90 \exp(-0,41c), \\ W_2^*(c) &= 10,43 \exp(-0,05c), \\ W_3^*(c) &= 11,65 \exp(-0,19c), \end{aligned}$$

$$c \in [0,75; 0,85], \quad \xi \in [-0,1; 0,1], \quad i = \overline{1, 24}.$$

Графики для $i = 1$ показаны на рис. 4.

Таким образом, рандомизированная $LT\xi$ -модель представляет собой генератор случайных траекторий с энтропийно-оптимальными функциями ПРВ параметров и шумов,

$$(5.19) \quad \begin{aligned} L[n] &= aL[n-1] + bT[n], \quad (P^*(a), F^*(b)), \\ v[n] &= L[n] + \mu[n], \quad M_n^*(\mu[n]), \\ \tau[n] &= c(2\tau[n-1] - \tau[n-2]), \quad W^*(c), \quad i = \overline{1, 3}, \\ T[n] &= t + \tau[n] + \xi[n], \quad Q_n^*(\xi[n]). \end{aligned}$$

Генерация соответствующих ансамблей происходит путем сэмплирования найденных ПРВ параметров и шумов методом исключений (Acceptance-Rejection (AR), Rejection Sampling (RS)) [41]. При реализации расчетов было использовано 100 сэмплов по каждому параметру и 100 сэмплов по шуму, таким образом, ансамбль состоял из 10^4 траекторий.

5.5. Тестирование модели

Исследование адекватности модели осуществляется путем собственного и перекрестного тестирования LT -модели и $T\xi$ -модели на реальных данных по нагрузке и температуре соответственно за 03.07.2016 ($i = 1$), 04.07.2016 ($i = 2$), 05.07.2016 ($i = 3$). Под собственным тестированием понимается генерирование ансамбля траекторий с энтропийно-оптимальными параметрами и шумами для дня i , вычисления средней (mean) и медианной (med) траекторий и дисперсионной трубки ($\text{std}\pm$) ансамбля и сравнения средней траектории с реальными траекториями по нагрузке и температуре для этого же дня i . Качество приближения характеризуется относительными ошибками по нагрузке

$$(5.20) \quad \delta_L^{(i)} = \frac{\sum_{n=1}^{24} \left(L_{\text{mean}}^{(i)}[n] - L_r^{(i)}[n] \right)^2}{\sum_{n=1}^{24} \left(L_{\text{mean}}^{(i)}[n] \right)^2 + \sum_{n=1}^{24} \left(L_r^{(i)}[n] \right)^2}, \quad i = \overline{1, 3},$$

и по температуре

$$(5.21) \quad \delta_T^{(i)} = \frac{\sum_{n=1}^{24} \left(T_{\text{mean}}^{(i)}[n] - T_r^{(i)}[n] \right)^2}{\sum_{n=1}^{24} \left(T_{\text{mean}}^{(i)}[n] \right)^2 + \sum_{n=1}^{24} \left(T_r^{(i)}[n] \right)^2}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

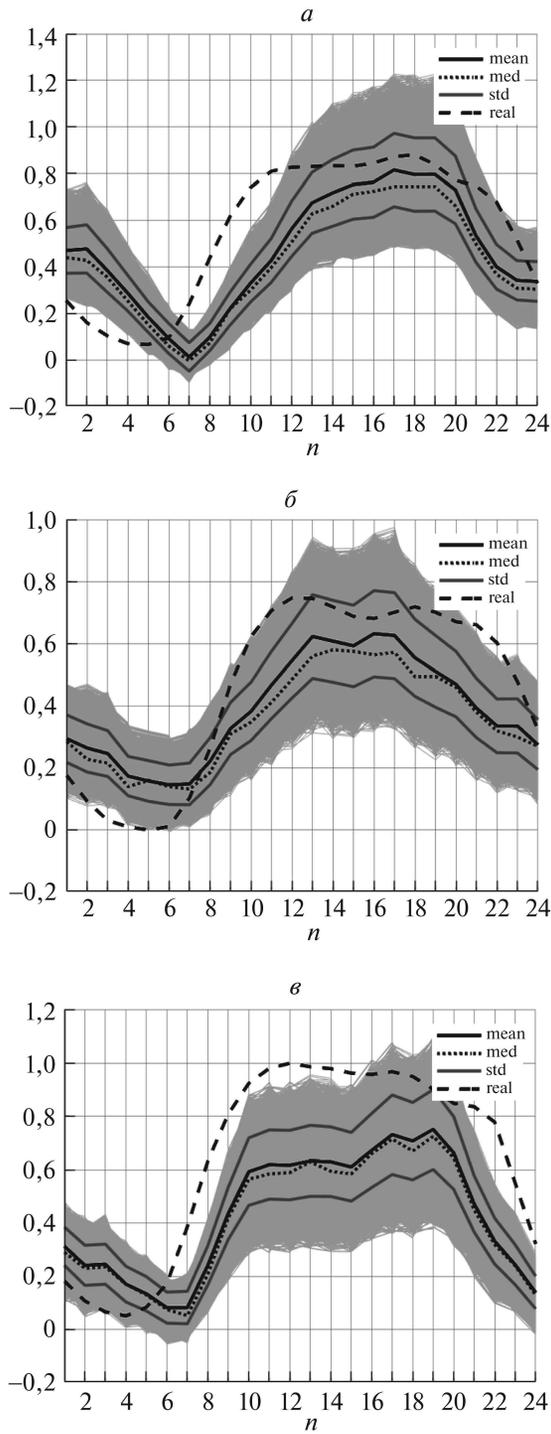


Рис. 5. Ансамбли LT -модели. $a - \delta_L^{(1)} = 0,0703$, $б - \delta_L^{(2)} = 0,0523$, $в - \delta_L^{(3)} = 0,1038$.

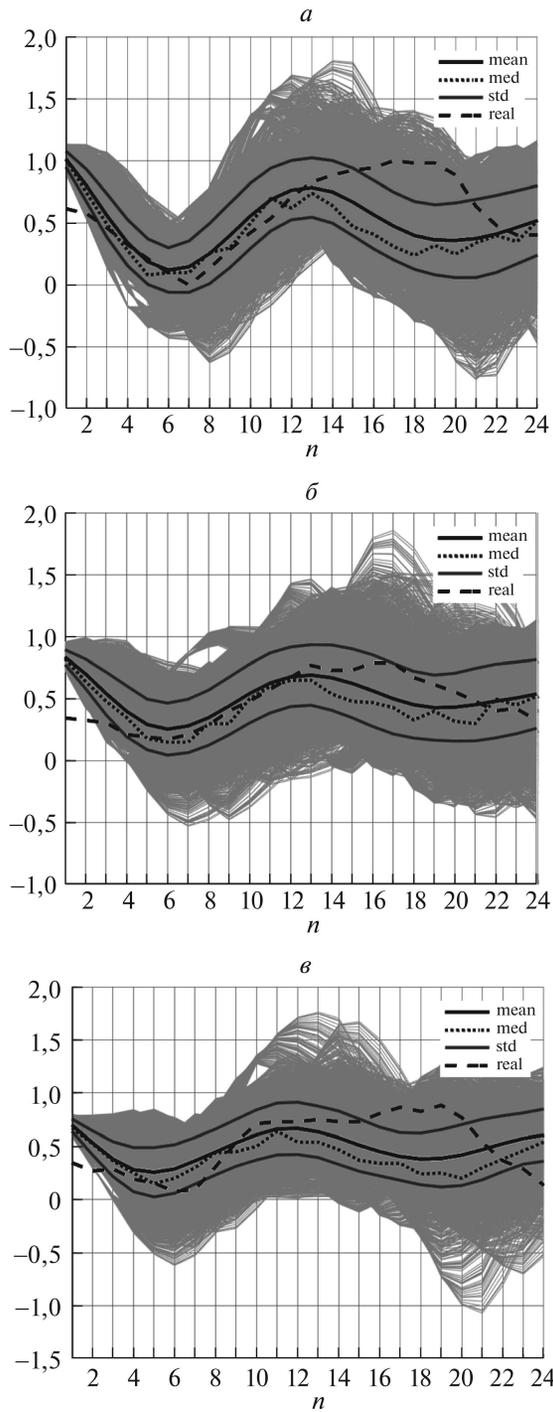


Рис. 6. *a* — Ансамбли $T\xi$ -модели, *б* — $\delta_T^{(1)} = 0,1004$, *в* — $\delta_T^{(2)} = 0,0582$, $\delta_T^{(3)} = 0,0942$.

Таблица 2. Значения δ_L на перекрестном тестировании LT -модели. Среднее значение $\delta_L = 0,0530$

i/j	1	2	3
1		0,0495	0,1052
2	0,0858		0,1428
3	0,0569	0,0364	

Таблица 3. Значения δ_T на перекрестном тестировании $T\xi$ -модели. Среднее значение $\delta_L = 0,0757$

i/j	1	2	3
1		0,1051	0,1079
2	0,1506		0,1185
3	0,1315	0,0676	

Таблица 4. Значения δ_T на перекрестном тестировании $LT\xi$ -модели. Среднее значение $\delta_L = 0,1478$

i/j	1	2	3
1		0,1437	0,2659
2	0,1756		0,2322
3	0,3475	0,1655	

Под перекрестным тестированием понимается та же процедура, но сравнения средних траекторий с реальными по нагрузке и температуре производится для дней $j \neq i$. Качество приближения характеризуется относительными ошибками по нагрузке

$$(5.22) \quad \delta_L^{(i,j)} = \frac{\sum_{n=1}^{24} \left(L_{\text{mean}}^{(i)}[n] - L_r^{(j)}[n] \right)^2}{\sum_{n=1}^{24} \left(L_{\text{mean}}^{(i)}[n] \right)^2 + \sum_{n=1}^{24} \left(L_r^{(j)}[n] \right)^2}, \quad i = \overline{1,3}, \quad i \neq j,$$

и по температуре

$$(5.23) \quad \delta_T^{(i,j)} = \frac{\sum_{n=1}^{24} \left(T_{\text{mean}}^{(i)}[n] - T_r^{(j)}[n] \right)^2}{\sum_{n=1}^{24} \left(T_{\text{mean}}^{(i)}[n] \right)^2 + \sum_{n=1}^{24} \left(T_r^{(j)}[n] \right)^2}, \quad i = \overline{1,3}, \quad i \neq j.$$

Собственное тестирование. Для LT -модели используются реальные данные по температуре $T_r^{(i)}[n]$ и энтропийно-оптимальные ПРВ $P_i^*(a)$, $F_i^*(b)$ параметров (a, b) и $M_1^* \mu[1], \dots, M_{24}^* \mu[24]$ шумов $\mu[n]$. Генерируются ансамбли $\mathbb{L}^{(i)}$ с помощью *сэмплирования* указанных ПРВ. Вычисляются средняя траектория $L_{\text{mean}}^{(i)}[n]$, медианная траектория $L_{\text{med}}^{(i)}[n]$ и траектории $L_{\text{std}\pm}^{(i)}[n]$, соответствующие границам дисперсионной трубки. Вычисляются ошибки $\delta_L(i)$. На рис. 5 показаны ансамбли и относительные ошибки $\delta_L^{(i)}$ для трех указанных дней.

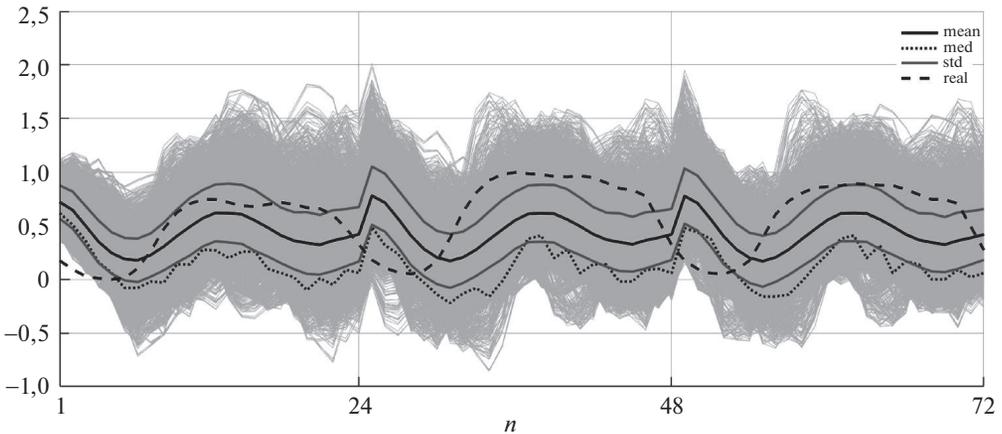


Рис. 7. Прогноз на 3 дня с помощью $LT\xi$ -модели.

Тестирование $T\xi$ -модели осуществляется путем генерации ансамбля $\mathbb{T}^{(i)}$ случайных траекторий $T^{(i)}[n]$, $n = \overline{1, 24}$ с энтропийно-оптимальными ПРВ $W^{(i)}(c)$ и $Q_1^*(\xi[1]), \dots, Q_{24}^*(\xi[24])$ путем их сэмплирования. Вычисляются средняя траектория $T_{\text{mean}}^{(i)}[n]$, медианная траектория $T_{\text{med}}^{(i)}[n]$ и траектории $T_{\text{std}\pm}^{(i)}[n]$, соответствующие границам дисперсионной трубки. На рис. 6 показаны ансамбли и относительные ошибки $\delta_T^{(i)}$ для трех контрольных дней.

Перекрестное тестирование. При перекрестном тестировании используются модели LT и $LT\xi$, обученные по данным для дня i , а их средняя траектория сравнивается с данными дней $j \neq i$. В табл. 2–4 указаны полученные значения ошибок.

5.6. Рандомизированное прогнозирование N -суточной нагрузки

При рандомизированном прогнозировании N -суточной нагрузки используется $LT\xi$ -модель, обученная на интервале \mathcal{T}_1 . Для характеристики качества прогноза будем использовать $LT\xi$ -модель с энтропийно-оптимальными ПРВ, полученными по данным первого ($i = 1$) дня.

Сэмплируя указанные ПРВ, построим односуточный ($n \in [1, 24]$), двухсуточный ($n \in [1, 48]$) и трехсуточный ($n \in [1, 72]$) ансамбли. Для этих ансамблей определим средние траектории $L_{\text{mean}}[n]$, медианные траектории $L_{\text{med}}[n]$, граничные дисперсионные траектории $L_{\text{std}\pm}[n]$. Результаты прогнозов сравниваются с реальными данными с 03.07.2006 по 06.07.2006 ($i = \overline{1, 4}$). Качество прогнозирования характеризуется относительными ошибками, вычисляемыми аналогично (5.22)–(5.23).

На рис. 7 показаны результаты 24, 48 и 72 часовых рандомизированных прогнозов нагрузки, их вероятностные характеристики: средние и медианные траектории, граничные траектории дисперсионных трубок. Ошибки между модельным прогнозом и реальными данными показаны в табл. 5.

Таблица 5. Точность трехдневного прогноза с помощью $LT\xi$ -модели

$\delta_L^{(2)}$	$\delta_L^{(3)}$	$\delta_L^{(4)}$
0,1509	0,2515	0,2133

6. Заключение

Предлагается новый метод прогнозирования — рандомизированное прогнозирование, ориентированное на осуществление предсказательных состояний в условиях неопределенности. Метод базируется на моделях динамической регрессии со случайными параметрами. Предложен алгоритм рандомизированного обучения модели. Реализация рандомизированного прогноза осуществляется путем сэмплирования энтропийно-оптимальных ПРВ параметров модели и измерительных шумов. Предлагаемый метод применен для рандомизированного прогнозирования суточной электрической нагрузки энергетической системы с использованием реальных данных, заимствованных из GEFCom2014.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vapnik V.N.* Statistical Learning Theory. N.Y.: John Wiley& Sons Inc., 1998.
2. *Bishop C.M.* Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, Series: Information Theory and Statistics, 2006.
3. *Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.* The Elements of Statistical Learning. Springer, 2001. <http://www-stat.stanford.edu/~tibs/ElemStatLearn>.
4. *Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Прикладная статистика: Исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика, 1985.
5. *Tarasov A.* Forecasting US money growth using economic uncertainty measures and regularization techniques // Int. J. Forecast. 2019. V. 35. P. 443–457.
6. *Marcellino M., Stock J.H., Watson M.* A comparison of direct and iterated multi-steps AR methods for forecasting macroeconomic time series // J. Economet. 2006. V. 135(1–2). P. 499–526.
7. *Eitrheim O., Terasirta T.* Testing the adequacy of smooth transition autoregressive models // J. Economet. 1996. v.74(1), P. 59–75.
8. *Molodtsova T., Papell D.* Out-of-sample exchange rate predictability with TR fundamentals // J. Int. Econom. 2009. V. 77. P. 167–180.
9. *Granger C.W. Terasirta T.* Modelling Nonlinear Economic Relationship. Oxford: Oxford Univer. Press, 1993.
10. *Wang R., Motley B., Stamatogiannis M.* Forecasting the exchange rate using nonlinear Taylor rule based model // Int. J. Forecast. 2019. V. 35. P. 429–442.
11. *Bessec M., Fuaguau J.* Short-run electricity load forecasting with combinations of stationary wavelet transforms // EJOR. 2018. V. 264. P. 149–163.
12. *Clements A.E., Hurn A.S., Li Z.* Forecasting day-ahead electricity load using a multiple equation time series approach // EJOR. 2016. V. 251. P. 522–530.
13. *Hong T., Fan S.* Probabilistic electric load forecasting: a tutorial review // Int. J. Forecast. 2016. V. 32. P. 914–938.
14. *Wheatcroft E.* Interpreting the skill score from of forecast performance metrics // Int. J. Forecast. 2019. V. 35. P. 573–579.
15. *Canale A., Ruggiero M.* Bayesian nonparametric forecasting of nonmonotonic functional time series // Electron. J. Statist. 2016. V. 10(2). P. 3265–3288.
16. *Дубнов Ю.А., Бульчев А.В.* Байесовская идентификация параметров смеси нормальных распределений // Информ. технологии и вычислит. системы. 2017. № 1. С. 101–114.

17. *Frazier D.T., Maneesoonthern W., Martin G.M., McCabe B.P.M.* Approximate Bayesian forecasting // *Int. J. Forecast.* 2019. V. 35. P. 521–539.
18. *Beaumont M.A., Zhang W., Baldung D.J.* Approximate Bayesian computation in population genetics // *Genetics.* 2001. V. 162(4). P. 2025–2035.
19. *McAdam P., Warne A.* Eure-area real time density forecasting with financial or labour market friction // *Int. J. Forecast.* 2019. V. 35. P. 580–600.
20. *Alkema L., Gerland P., Raftery A., Wilmoth T.* The UN probabilistic population projection: an introduction to demographic forecasting with uncertainty // *Forsight.* 2015. V. 37. P. 19–24.
21. *Brier C.W.* Verification of forecast expressed in term probability // *Monthly Weather Rev.* 1950. V. 78. P. 1–3.
22. *Brocker J., Smith L.A.* From ensembles forecasts to predictive distribution functions // *Tellus A.* 2008. V. 60(4). P. 663–678.
23. *Christensen H.M., Moroz I.M., Palmer T.N.* Evaluation of ensemble forecast uncertainty using a new proper score: application to medium-range and seasonal forecast // *Quart. J. Royal Meteorol. Sci.* 2015. V. 141(687). P. 538–549.
24. *Gneiting T., Katzfuss M.* Probabilistic Forecasting // *Ann. Rev. Statist. Its Appl.* 2014. V. 1. P. 125–151.
25. *Lahiri K., Wang J.C.* Evaluating probability forecasts for GDP declines using alternative methodological // *Int. J. Forecast.* 2013. V. 29(1). P. 175–190.
26. *Vidyasagar M.* Statistical Learning Theory and Randomized Algorithms for Control // *IEEE Control Syst. Magazin.* 1998. V. 1/17. P. 69–88.
27. *Граничнин О.Н., Поляк Б.Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2002.
28. *Назин А.В.* Алгоритмы инерционного зеркального спуска в выпуклых задачах стохастической оптимизации // *АиТ.* 2018. № 1. С. 100–112.
Nazin A. V. Algorithms of inertial mirror descent in convex problems of stochastic optimization // *Autom. Remote Control,* 2018. V. 79. No. 1. P. 78–88.
29. *Biondo A.E., Pluchino A., Rapisarda A., Helbing D.* Are random trading strategies more successful than technical ones? // *PLoS ONE.* 2013. V. 6(7). P. 68344.
30. *Lutz W., Sandersen S., Scherbov S.* The end of world population growth // *Nature.* 2001. V. 412(6846). P. 543–545.
31. *Цирлин А.М.* Методы усредненной оптимизации и их применение. М.: Физматлит, 1997.
32. *Shannon C.* Communication Theory of Secrecy Systems // *Bell Syst. Technic. J.* 1949. V. 28(4). P. 656–715.
33. *Jaynes E.T.* Information Theory and Statistical Mechanics // *Physics Rev.* 1957. V. 106. P. 620–630.
34. *Jaynes E.T.* Papers on probability, statistics and statistical physics. Dordrecht, Kluwer Academ. Publisher, 1989.
35. *Попков Ю.С., Попков А.Ю., Дубнов Ю.А.* Рандомизированное машинное обучение. М.: ЛЕНАНД, 2018.
36. *Hong T., Prinson P., Fan S., Zareipour H., Triccoli A., Hyndman R.J.* Probabilistic energy forecasting: Global Energy Forecasting Competition 2014 and beyond // *Int. J. Forecast.* 2016. V. 32. P. 896–913.
37. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
38. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

39. *Fiedner G.* Hierarchical forecasting: issues and use guidelines // *Indust. Management Data Syst.* 2001. V. 101(1). P. 5–12.
40. *Amaral L.F., Castro S.R., Stevenson M.* A smooth transition periodic autoregressive (STAR) model for short-term load forecasting // *Int. J. Forecast.* 2008. V. 24. P. 603–615.
41. *J. von Neumann.* Various techniques in connection with random digits, in *Monte Carlo Methods* / A.S. Householder, G.E. Forsythe, H.H. Germond. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series (U.S. Government Printing Office, Washington, DC, 1951). P. 36–38.

Статъа представена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 14.10.2019

После доработки 11.12.2020

Принята к публикации 30.01.2020