

Управление в социально-экономических системах

© 2020 г. М.И. ГЕРАСЬКИН, д-р экон. наук (innovation@ssau.ru)
(Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева)

СВОЙСТВА ПРЕДПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ ШТАКЕЛЬБЕРГА

Рассматривается теоретико-игровая проблема выбора оптимальных стратегий агентов рынка олигополии при линейной функции спроса и нелинейных функциях издержек агентов. Исследуются предположительные вариации, т.е. предполагаемые агентом изменения действий контрагентов, оптимизирующие функции полезности последних. Доказаны формулы расчета предположительных вариаций каждого агента, суммы предположительных вариаций всех агентов окружения, исследованы знаки предположительных вариаций для произвольного уровня лидерства по Штакельбергу. Установлены следующие свойства предположительных вариаций: 1) вариации отрицательны, если для всех агентов окружения функции издержек либо выпуклы, либо вогнуты; 2) вариации положительны, если в окружении агенты с вогнутыми функциями издержек (т.е. с положительным эффектом расширения масштаба), превалируют над агентами с выпуклыми функциями издержек (т.е. с отрицательным эффектом). Сумма предположительных вариаций агента: 1) отрицательна и ограничена по модулю единицей, если агенты окружения преимущественно имеют выпуклые функции издержек; 2) положительна и не ограничена, если среди окружения преобладают агенты с вогнутыми функциями издержек.

Ключевые слова: олигополия, игра Штакельберга, степенная функция издержек, многоуровневое лидерство.

DOI: 10.31857/S0005231020060074

1. Введение

На рынке олигополии действия агентов, максимизирующие их полезности, приводят к равновесию Нэша [1, 2] как решению соответствующей игры. Несмотря на то, что функции полезности агентов считаются известными всем агентам, при моделировании олигополии имеет место фундаментальная проблема несовершенства информированности агента о действиях других агентов (окружения). Проблема заключается в априорной неосведомленности каждого агента о том, на основе какого предположения окружение выбирает действия: предположения о неизменности действий агента, предположения о наилучшем ответе агента на действия окружения, предположения о наилучшем ответе агента на наилучший ответ окружения и т.д.

В теоретико-игровой модели рынка олигополии предположительные вариации являются классическим инструментом [3] описания информированности агента о стратегиях других агентов (окружения). Предположительная вариация характеризует предполагаемое агентом ответное изменение действия (объема выпуска) контрагента, оптимизирующее функцию полезности последнего при выбранном действии первого.

В линейной модели выбора оптимальных действий агентов рынка олигополии [4–10], в которой обратная функция спроса и функции издержек агентов являются линейными, вычисление предположительных вариаций не вызывает затруднений. В нелинейной модели [11–14], в которой обратная функция спроса линейная, а функции издержек агентов нелинейные, предположительные вариации в аналитическом виде получены только в играх с лидером (лидерами) по Штакельбергу [15] первого уровня. В случае лидерства более высоких уровней предположительные вариации находятся из систем нелинейных уравнений [16] на каждом уровне и для каждого агента.

В данной статье ставится задача вычисления предположительных вариаций в аналитическом виде для произвольного уровня лидерства по Штакельбергу, что позволяет исследовать влияние уровня лидерства на характер поведения игроков.

2. Методология

Рассматривается задача оптимального стратегического выбора олигополистов, относящаяся к классу агрегативных игр [17, 18], в которых функция полезности игрока зависит не только от его собственной стратегии, но и от стратегий, выбранных окружением. В этом случае нелинейная модель выбора оптимальных действий агента рынка олигополии имеет вид

$$(1) \quad Q_i^* = \arg \max_{Q_i \geq 0} \Pi_i(Q, Q_i) = \arg \max_{Q_i \geq 0} \left\{ (a - bQ) Q_i - C_{Fi} - B_i Q_i^{\beta_i} \right\},$$

$$i \in N, \quad Q = \sum_{i \in N} Q_i,$$

где Q_i, Π_i — действие (объем выпуска) и функция полезности (прибыль) i -го агента; N — множество агентов рынка; n — количество агентов; Q — суммарный объем рынка; $C_{Fi} > 0$, $B_i > 0$, $\beta_i \in (0, 2)$ — коэффициенты функций издержек вида $C_i(Q_i) = C_{Fi} + B_i Q_i^{\beta_i}$, C_{Fi} интерпретируется как постоянные издержки; $a > 0$, $b > 0$ — коэффициенты обратной функции спроса; символом «*» обозначены оптимальные значения. В общем случае функции издержек агентов могут быть как вогнутыми при $0 < \beta_i < 1$, так и выпуклыми при $1 < \beta_i < 2$; первый случай соответствует положительному эффекту расширения масштаба и наблюдается на стадии становления фирмы, второй случай, присущий зрелым фирмам, характеризует отрицательный эффект расширения масштаба [19].

Равновесие Нэша в модели (1) определяется из необходимых условий экстремума:

$$(2) \quad \frac{\partial \Pi_i(Q_i, x_{ij})}{\partial Q_i} = 0, \quad i, j \in N,$$

где $x_{ij} = Q'_{jQ_i}$ — предположительная вариация в уравнении реакции i -го агента, т.е. предполагаемое изменение выпуска j -го агента в ответ на единичный прирост выпуска i -го агента.

Уровень лидерства агента по Штакельбергу определяются следующим образом. Нулевой уровень, соответствующий ведомому η_0 -му агенту, имеет место, если в η_0 -м уравнении системы (2) полагается $x_{\eta_0 j}^0 = 0 \quad \forall j \in N \setminus \eta_0$, где верхний индекс предположительной вариации обозначает уровень лидерства r . Первый уровень лидерства η_1 -го агента возникает, если в η_1 -м уравнении системы (2) вариации $x_{\eta_1 j}^1$ вычисляются дифференцированием по Q_{η_1} остальных $(N - 1)$ уравнений (2), в которых полагается $x_{ij}^0 = 0 \quad \forall j \in N \setminus i$. Произвольный r -й уровень лидерства η_r -го агента возникает, если в η_r -м уравнении системы (2) вариации $x_{\eta_r j}^r$ вычисляются дифференцированием по Q_{η_r} остальных $(N - 1)$ уравнений (2), в которых полагается $x_{ij} = x_{ij}^{r-1} \quad \forall j \in N \setminus i$.

Подмножество агентов окружения i -го агента, имеющих один и тот же уровень лидерства, обозначено символом $M = \{l \in N \setminus i\}$, число элементов этого множества обозначено символом $m = n - 1$.

Для модели выбора действий (1) i -го агента на r -м уровне лидерства решения системы (2) удовлетворяют [16] системе уравнений

$$(3) \quad F_i^r = a - bQ - bQ_i \left(1 + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^r \right) - B_i \beta_i Q_i^{\beta_i - 1} = 0, \\ Q_i > 0, \quad i \in N,$$

при условии

$$(4) \quad g_i^r = u_i - S_i^r < 0, \quad i \in N,$$

с учетом следующих обозначений

$$(4a) \quad u_i = -2 - \frac{B_i \beta_i (\beta_i - 1) Q_i^{\beta_i - 2}}{b} < 0, \quad S_i^r = \sum_{l \in N \setminus i} x_{il}^r, \quad i \in N,$$

где $g_i^r(\bullet)$, $i \in N$ — непрерывные и дифференцируемые по Q_i функции, характеризующие выполнение достаточного условия максимума (условия унимодальности) функции (1) i -го агента; $u_i(\bullet)$, $i \in N$ — функции, характеризующие влияние нелинейности функций издержек агентов на унимодальность функции полезности i -го агента (при $u_i = -2$ система (3) является линейной); S_i^r — величина суммы предположительных вариаций i -го агента относительно действий окружения на r -м уровне лидерства; $F_i^r(\bullet)$, $i \in N$ — непрерывные и дифференцируемые по Q_i функции. Для последующих содержательных интерпретаций введем следующую трактовку¹ условий (4): если функция F_i^r характеризует темп (или «скорость») изменения функции полезности

¹ Здесь используется аналогия с терминологией, принятой в механике при решении задачи о вертикальном равноускоренном движении тела, которое достигает максимальной высоты подъема в случае, если ускорение гравитации g направлено противоположно начальной скорости, т.е. отрицательно.

i -го агента на r -м уровне лидерства, то функцию g_i^r можно назвать «ускорением» функции полезности агента. Поэтому согласно условию (4) функция полезности агента является унимодальной в окрестности стационарной точки, определяемой уравнением (3), если «ускорение» функции полезности отрицательно.

По сравнению с линейной моделью, для которой условие (4) имеет вид $g_i^r = -2 - S_i^r < 0$, $i \in N$, в нелинейной модели (1) функция полезности агента может быть неунимодальной не только вследствие влияния действий окружения, т.е. ситуаций, когда $S_i^r < -2$, но и в результате положительного эффекта расширения масштаба функции издержек агента. Поэтому введем предположение о том, что темп снижения предельных издержек при возрастающей отдаче от масштаба (т.е., $\beta_i < 1$) меньше, чем темп снижения цены при увеличении объема предложения

$$(5) \quad |MC'_{iQ_i}| = B_i \beta_i |\beta_i - 1| Q_i^{\beta_i - 2} < b \quad \forall \beta_i < 1,$$

где $MC_i = C'_{iQ_i} = B_i \beta_i Q_i^{\beta_i - 1}$ — предельные издержки i -го агента. Предположение (5) гарантирует выполнение условия (4), если не выполнено условие $|S_i^r| < 1$.

Поставим задачу нахождения вектора предположительных вариаций i -го агента $\mathbf{x}_i^r = \{x_{ij}^r, j \in N\}$ в аналитическом виде при произвольном значении r .

3. Результаты

Способ вычисления предположительных вариаций для различных уровней лидерства сформулирован в виде утверждения, доказательство которого приведено в Приложении.

Утверждение 1. В системе уравнений (3), соответствующей модели выбора действий агентов (1) при линейной функции спроса и нелинейных функциях издержек, предположительные вариации выпуска l -го агента в уравнении i -го агента

а) на первом уровне лидерства ($r = 1$) вычисляются по формуле

$$(6a) \quad x_{il}^r = \frac{\Delta_{il}^r}{\Delta_i^r}, \quad l \in M, \quad m = n - 1, \quad \text{если} \quad \sum_{j \in M} \frac{1}{z_j^r} \neq 1 \quad \text{и} \quad z_j^r \neq 0 \quad \forall j \in M,$$

где

$$\Delta_i^r = \prod_{j=1 \setminus i}^m z_j^r - \sum_{\gamma=1 \setminus i}^m \prod_{j=1 \setminus (\gamma, i)}^m z_j^r,$$

$$\Delta_{il}^r = \prod_{j=1 \setminus (l, i)}^m z_j^r, \quad z_j^r = \psi^r \left(u_j - S_j^{r-1} \right) + 1, \quad \psi^1 = 1, \quad S_j^0 = 0;$$

б) на втором уровне лидерства ($r = 2$) вычисляются как вектор $\mathbf{x}_i^2 = \{x_{i1}^2, x_{i2}^2, \dots, x_{im}^2\}$, полученный в результате решения следующего матричного уравнения

$$(6b) \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_i^2 = \mathbf{B},$$

где матрица системы $\mathbf{A} = \{a_{lj}, l, j \in M\}$ и вектор свободных членов $\mathbf{B} = \{b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im}\}$ состоят из элементов

$$a_{lj} = u_j - S_j^1 \forall l = j,$$

$$a_{lj} = -1 - \frac{Q_l}{Q_j} \frac{u_j + 2}{u_j + 1} \frac{\beta_j - 2}{(\Delta_l^1)^2} \Delta_{lj}^1 \left[\Delta_l^1 + \sum_{k \in M} \Delta_{lk}^1 \right] \quad \forall l \neq j,$$

$$b_{il} = 1 - \frac{Q_l}{Q_i} \frac{u_i + 2}{u_i + 1} \frac{\beta_i - 2}{(\Delta_l^1)^2} \Delta_{li}^1 \left[\Delta_l^1 + \sum_{k \in M} \Delta_{lk}^1 \right], \quad l, j \in M;$$

в) на r -м уровне лидерства приближенно вычисляются по формуле (6а), в которой следует положить

$$\psi^r = \frac{1}{1 + \varphi^{r-1}}, \quad \varphi^r = \psi^r \frac{(\tilde{u} + 2)(2 - \tilde{\beta})}{(\psi^r \tilde{u} + 1 - m)^2}, \quad \psi^r > 0,$$

$$\tilde{u} = -2 - \frac{\tilde{B}\tilde{\beta}(\tilde{\beta} - 1)\tilde{Q}^{\tilde{\beta}-2}}{b},$$

если производные предположительных вариаций $\frac{\partial x_{i\eta}^{r-1}}{\partial Q_\zeta}$, $i, \eta, \zeta \in N$ вычислены при фиксированном значении $Q_i = \tilde{Q}$, $i \in N$ и при таких параметрах функций издержек, что в ε -окрестности ($\varepsilon = o(\tilde{\beta}, \tilde{B})$) чисел $\tilde{\beta} > 0$, $\tilde{B} > 0$ выполняется условие

$$(6c) \quad \left| F_i^r(\tilde{Q}, \tilde{B}, \tilde{\beta}) - F_i^r(Q_i, B_i, \beta_i) \right| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad i \in N,$$

г) на любом уровне лидерства не зависят от действия i -го агента, и зависимость этих вариаций от действий других агентов ослабляется с ростом их действий

$$(6d) \quad \frac{\partial x_{i\eta}^r}{\partial Q_i} = 0, \quad \lim_{Q_\zeta \rightarrow \infty} \frac{\partial x_{i\eta}^r}{\partial Q_\zeta} = 0 \quad \forall i, \eta, \zeta \in N.$$

д) погрешность $\delta \mathbf{x}_i^r = \mathbf{x}_i^r - \mathbf{X}_i^r$ вычисления предположительных вариаций по формулам (6а) при $r > 2$ по сравнению с точным решением $\mathbf{X}_i^r = \{X_{ij}^r, j \in N\}$ системы $\mathbf{A}\mathbf{x}_i^r = \mathbf{B}$ при $Q_i \geq \tilde{Q}_i \quad \forall i \in N$, рассчитанная с применением нормы $\|\mathbf{A}\| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$, ограничена относительной величиной

$$(6e) \quad \frac{\|\delta \mathbf{x}_i^r\|}{\|\mathbf{x}_i^r\|} \leq \frac{\mu}{1 - \mu\bar{\mu}} \left(\frac{|\varphi^{r-1} + \bar{\varepsilon}|}{1 - \bar{\varepsilon}} + \bar{\mu} \right) \quad \text{при} \quad \mu\bar{\mu} < 1,$$

$$\bar{\varepsilon} = \max_{i,l \in M} \left| \psi^r \frac{Q_l}{Q_i} \frac{\varepsilon}{(\psi^r (\varepsilon - 2) + 1)} \frac{\beta_i - 2}{(\Delta_l^{r-1})^2} \Delta_{li}^{r-1} \left[\Delta_l^{r-1} + \sum_{k \in M} \Delta_{lk}^{r-1} \right] \right|,$$

$$\bar{\mu} = \frac{(m-1) |\varphi^{r-1} - \bar{\varepsilon}|}{\min_{1 \leq j \leq m} |u_j - S_j^{r-1}| + (m-1)(1 - \bar{\varepsilon})}, \quad \bar{Q}_i = \left(\frac{B_i \beta_i |\beta_i - 1|}{\varepsilon b} \right)^{\frac{1}{2-\beta_i}},$$

$\Delta_l^{r-1}, \Delta_{li}^{r-1}$ вычислены при $u_j = \varepsilon - 2$,

$$\mu = \frac{\max_{1 \leq j \leq m} |u_j - S_j^{r-1}| + (m-1)(1 + \bar{\varepsilon})}{\min_{1 \leq j \leq m} |u_j - S_j^{r-1}| - (m-1)(1 + \bar{\varepsilon})} - \text{число обусловленности матрицы } \mathbf{A}.$$

Формулы (6a) точно определяют в явном виде предположительные вариации агентов на первом уровне лидерства, решение системы (6b) позволяет точно определить эти величины на втором уровне лидерства. На третьем и последующих уровнях лидерства формулы (6a) позволяют приближенно вычислить предположительные вариации в явном виде. В этом случае точность расчета предположительных вариаций базируется на выполнении условия (6c), а также на свойстве (6d) слабого влияния действий других агентов на предположительные вариации данного агента. Относительная погрешность приближенного расчета предположительных вариаций при $r > 2$ оценивается условием (6e).

В (6a) введено обозначение параметра типа i -го агента на r -м уровне лидерства:

$$z_i^r = \psi^r (u_i - S_i^{r-1}) + 1 = \psi^r g_i^{r-1} + 1 = \frac{g_i^{r-1}}{1 + \varphi^{r-1}} + 1.$$

Поскольку величина φ^r приближенно выражает сумму производных предположительных вариаций (как показано в доказательстве утверждения 1), то содержательное значение параметра типа следующее: если $z_i^r < 0$, то $g_i^{r-1} < -(1 + \varphi^{r-1})$, т.е. на $(r-1)$ -м уровне лидерства «ускорение» функции полезности агента меньше суммы темпов изменения предположительных вариаций действий агентов окружения, в противном случае $z_i^r > 0$. Поскольку при прочих равных условиях (т.е. одинаковых значениях B_i , Q_i и S_i^{r-1}) значение функции g_i^{r-1} определяется согласно (4) вогнутостью (выпуклостью) функции издержек агента, то g_i^{r-1} больше в случае $0 < \beta_i < 1$, чем в случае $1 < \beta_i < 2$. Следовательно, тип агента $z_i^r > 0$ соответствует положительному эффекту расширения масштаба, а тип агента $z_i^r < 0$ присущ отрицательному эффекту.

Согласно (6a), предположительные вариации зависят от значений функции u_i . Кроме того, формулы (6a) представляют собой рекуррентные соотношения, поскольку предположительные вариации i -го агента на r -м уровне

лидерства зависят от сумм предположительных вариаций остальных агентов на предыдущем $(r-1)$ -м уровне лидерства, т.е. от величины $S_j^{r-1} = \sum_{l \in N \setminus j} x_{jl}^{r-1}$. Поскольку сумма предположительных вариаций S_i^r фигурирует в уравнении i -го агента системы уравнений (3) и влияет на результирующее равновесие Нэша, то эта величина имеет важное практическое и теоретическое значение. Поэтому определим в виде следующего утверждения способ нахождения суммы предположительных вариаций в уравнении каждого агента.

Утверждение 2. Сумма предположительных вариаций действий агентов окружения, принадлежащих подмножеству M , в уравнении реакции i -го агента системы уравнений (3) на уровне лидерства r

а) вычисляется по формуле

$$(7a) \quad S_i^r = \sum_{l \in M} x_{il}^r = \frac{1}{s_i^r - 1}, \quad s_i^r = \frac{1}{\sum_{j \in M} \frac{1}{z_j^r}}, \quad S_i^0 = 0, \quad i \in N,$$

б) имеет следующие знаки:

$$(7b) \quad \begin{aligned} & S_i^1 < 0 \quad \forall m \geq 1, \\ & S_i^r \begin{cases} < 0 \quad \forall z_j^r < 0, \quad i, j = 1, 2, \\ < 0 \quad \forall \left(z_j^r > 0 \wedge |S_i^{r-1}| < |u_j| \right), \\ > 0 \quad \forall \left(z_j^r > 0 \wedge |S_i^{r-1}| > |u_j| \right) \end{cases} \quad \text{при } m = 1, \\ & S_i^r \begin{cases} < 0 \quad \forall s_i^r < 0, \\ < 0 \quad \forall (s_i^r > 0 \wedge v^r < v_{\max}), \\ > 0 \quad \forall (s_i^r > 0 \wedge v^r > v_{\max}) \end{cases} \quad \text{при } m > 1; \end{aligned}$$

в) ограничена

$$(7c) \quad \begin{aligned} & |S_i^1| < 1 \quad \forall m \geq 1, \\ & |S_i^r| < \begin{cases} 1 \quad \forall z_j^r < 0, \\ S_{\max i} \quad \forall \left(z_j^r > 0 \wedge |S_i^{r_{\max i}-1}| < |u_j| \right) \end{cases} \quad \text{при } m = 1, \\ & |S_i^r| < \begin{cases} 1 \quad \forall s_i^r < 0, \\ \frac{m}{m-1-v^r} \quad \forall s_i^r > 0 \end{cases} \quad \text{при } m > 1; \end{aligned}$$

причем при $m > 1$, $r > 1$, если $S_i^r < 0$, то

$$(7d) \quad v^r \in (0, v_{\max}), \quad |S_i^r| < \frac{m}{m-1-v_{\max}};$$

г) не зависит от действия i -го агента, и зависимость S_i^r от действий других агентов ослабляется с увеличением их действий:

$$(7e) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial S_i^r}{\partial Q_i} = 0, \quad \frac{\partial S_i^r}{\partial Q_j} = \frac{(s_i^r)^2}{(s_i^r - 1)^2} \frac{\psi^r}{b(z_j^r)^2} \beta_j (\beta_j - 1) (\beta_j - 2) Q_j^{\beta_j - 3}, \\ & \lim_{Q_j \rightarrow \infty} \frac{\partial S_i^r}{\partial Q_j} = 0, \quad i, j \in N, \end{aligned}$$

$$v^r = \frac{\psi^r}{\frac{m}{1+v^{r-1}} - 1}, \quad v^2 = 0, \quad v_{\max} = \frac{\psi_{\max} (1 + \sqrt{\psi_{\max}})^2}{m\sqrt{\psi_{\max}}},$$

$$\psi_{\max} = \arg \max_{r>1} \psi^r, \quad r_{\max i} = \arg \max_{|S_i^{r-1}| < |u_j|} r,$$

$$S_{\max i} = \frac{1}{\psi^{r_{\max i}} |u_j - S_j^{r_{\max i}-1}|}.$$

Из утверждения 2 следует, что сумма предположительных вариаций в уравнении реакции агента отрицательна за исключением случаев $z_j^r > 0 \wedge |S_i^{r-1}| > |u_j|$ при $m = 1$, а также $s_i^r > 0 \wedge v^r > v_{\max}$ при $m > 1$, возникающих на высоких уровнях лидерства агента (при $r > r_{\max i}$ или $v^r > v_{\max}$ соответственно) и при положительных эффектах расширения масштаба у агента (агентов) окружения. Кроме того, из утверждения 2 вытекают следующие выводы о величине суммы предположительных вариаций: 1) величина S_i^r по модулю не превышает единицы при $r = 1$, а также если $s_i^r < 0$, что выполняется, когда значения всех (или большинства, если эти значения незначительно отличаются) параметров z_j^r отрицательны; 2) если $s_i^r > 0$, то при $r > 1$ величина S_i^r по модулю может превышать единицу; 3) если $s_i^r > 0$, то с увеличением m верхняя граница модуля величины S_i^r уменьшается. Таким образом, в дуополии ($m = 1$) и триполии ($m = 2$) при положительном для всех фирм эффекте расширения масштаба, т.е. $|u_j| < 2$, возможны случаи, когда на высоких уровнях лидерства модуль величины S_i^r больше единицы.

Сумма предположительных вариаций i -го агента согласно (7а) зависит от знака параметра s_i^r , который есть функция параметров типа агентов z_j^r , зависящих, в свою очередь, от суммы предположительных вариаций в уравнении реакции агента на предыдущем уровне лидерства. Сумма предположительных вариаций i -го агента согласно (7б), как правило, отрицательна, а ее наибольшее абсолютное значение по (7с) также зависит от знака параметра s_i^r и от параметра нелинейности ψ^r через v^r согласно (7д), что будет исследовано ниже при моделировании. Согласно (7е) изменение суммы предположительных вариаций с увеличением действия агента окружения зависит от типа эффекта расширения масштаба последнего, т.е.

$$\frac{\partial S_i^r}{\partial Q_j} \begin{cases} < 0, & \text{если } \beta_j > 1, \\ > 0, & \text{если } \beta_j < 1. \end{cases}$$

Положительность (отрицательность) предположительной вариации выпуска агента окружения в уравнении (3) i -го агента означает, что окружение увеличивает (уменьшает) свое действие в ответ на прирост действия данного агента. Поэтому знак предположительной вариации определяет тип агента окружения, который, как вытекает из следующего утверждения, может быть различным.

Утверждение 3. Предположительные вариации выпуска l -го агента в уравнении (3) i -го агента имеют следующие знаки:

$$(8a) \quad x_{il}^1 < 0, \quad l \in M,$$

$$(8b) \quad x_{il}^r < 0, \text{ если } (z_j^r < 0 \forall j \in M) \vee (z_j^r > 0 \forall j \in M) \vee \\ \vee \left(z_\theta^r|_{\theta \in \Theta} > 0 \wedge z_\theta^r|_{\theta \in \bar{\Theta}} < 0 \wedge \left(\frac{1}{s_\Theta^r} > 1 + \frac{1}{|s_{\bar{\Theta}}^r|} \right) \right),$$

$$(8c) \quad x_{il}^r > 0, \text{ если } z_\theta^r|_{\theta \in \Theta} > 0 \wedge z_\theta^r|_{\theta \in \bar{\Theta}} < 0 \wedge \left(\frac{1}{s_\Theta^r} < 1 + \frac{1}{|s_{\bar{\Theta}}^r|} \right), \\ l \in M, \quad r > 1,$$

где

$$\Theta = \left\{ \theta \in M : z_\theta^r > 0 \right\}, \quad \bar{\Theta} = \left\{ \theta \in M : z_\theta^r < 0 \right\}$$

и введены обозначения

$$s_\Theta^r = \frac{1}{\sum_{\theta \in \Theta} \frac{1}{z_\theta^r}}, \quad s_{\bar{\Theta}}^r = \frac{1}{\sum_{\theta \in \bar{\Theta}} \frac{1}{z_\theta^r}}.$$

Согласно (8a), (8b) предположительные вариации, как правило, отрицательны, т.е. на увеличение действия окружения типичный агент реагирует уменьшением своего действия. Однако из условия (8c) следует, что могут существовать агенты противоположного типа, отвечающие на увеличение действия окружения симметрично, которых назовем атипичными. Атипичным согласно (8c) является агент, в окружении которого агенты, имеющие $z_j^r < 0$, преобладают над агентами, имеющими $z_j^r > 0$. Отметим, что в линейной модели олигополии, в которой $u_j = -2$ и все $z_j^r < 0$, атипичные агенты невозможны.

4. Моделирование

На выполнение достаточных условий оптимальности (4), а также на предположительные вариации согласно (6a) существенное влияние оказывает функция

$$u_i(Q_i) = -2 - \frac{B_i \beta_i (\beta_i - 1) Q_i^{\beta_i - 2}}{b}, \quad Q_i > 0,$$

зависящая от параметров функций издержек агентов $B_i > 0$, $\beta_i \in (0, 2)$ и от параметра функции рыночного спроса $b > 0$. Анализ [20] телекоммуникационных компаний РФ (табл. 1) показал, что коэффициент издержек $B_i \in (1, 3)$,

Таблица 1. Коэффициенты функции спроса на голосовой трафик и функций издержек телекоммуникационных компаний РФ, $C_{Fi} = 0$, $i = 1, 2, 3$

Статистическая модель	a	b	B_i	β_i
Функция спроса	1,77	0,0009		
Функция издержек ПАО «МТС»			2,41	0,76
Функция издержек ПАО «МегаФон»			1,36	0,85
Функция издержек ПАО «ВымпелКом»			2,46	0,81

если $Q_i \in (0, 500)$ млрд. мин., параметр $b = 0,0009$ руб./мин., т.е. имеет место соотношение $\sigma = \frac{B_i}{b} \approx 1000$.

Поэтому исследуем следующую двухпараметрическую функцию $u_i(Q_i) \approx -2 - \sigma\beta_i(\beta_i - 1)Q_i^{\beta_i-2}$ в диапазоне $Q_i \in (100, 500)$ млрд. мин. при различных значениях параметров σ, β_i . Из анализа графиков функции $u_i(Q_i)$, представленных на рис. 1, следует, во-первых, что условие (4) не выполняется при малых значениях Q_i в случае высоких значений коэффициента издержек (при $\sigma = 5000$), но даже в этом случае условие (4) выполняется при $Q_i \geq 150$. Во-вторых, условие (5) в виде $|u_j| \geq 1 \forall \beta_j \in (0, 2)$ может не выполняться также при малых значениях Q_i в случае высоких значений коэффициента издержек (при $\sigma = 5000$) и если $\beta_j < 1$, но выполняется при достаточно больших значениях $Q_i \geq 250$. В-третьих, в определенном диапазоне значений Q_i агенты в зависимости от значения параметра β_j делятся на два типа — агенты с положительным эффектом расширения масштаба при $\beta_j < 1$ и агенты с отрицательным эффектом расширения масштаба при $\beta_j > 1$:

$$|u_j| \begin{cases} \geq 2 \forall \beta_j \geq 1, \\ \in [1, 2) \forall \beta_j < 1. \end{cases}$$

В-четвертых, при достаточно высоких значениях выпусков, т.е. $Q_i \geq 250$, и если коэффициенты издержек близки к соотношению $\sigma = 1000$, функция $u_i(Q_i)$ принадлежит диапазону $-2,76 \leq u_i(Q_i) \leq -1,76$.

Исследуем характер функции

$$\psi^r(\tilde{u}, \beta, m) = \frac{1}{1 + \varphi^{r-1}} = \frac{1}{1 + \psi^{r-1} \frac{(\tilde{u}+2)(2-\beta)}{(\psi^{r-1}\tilde{u}+1-m)^2}}$$

в более широком по сравнению с вышеопределенным диапазоне значений $-5 \leq \tilde{u} \leq -1$. Значение r практически не влияет на величину ψ^r (отклонение ψ^r от ψ^{r-1} не превышает 1%), поэтому на рис. 2 показаны виды функции $\psi^r(\tilde{u}, \beta, m)$ при $r = 1$. Анализ рис. 2 показывает, что $\psi^r \approx 1$, т.е. $\varphi^r \approx 0$, что подтверждает незначительное влияние производных предположительных вариаций (6d) на точность формул (6a) в случаях $r > 2$, поскольку (как показано в доказательстве утверждения 1) параметр φ^r приближенно выражает сумму производных предположительных вариаций; причем чем больше m , тем меньше проявляется это влияние.

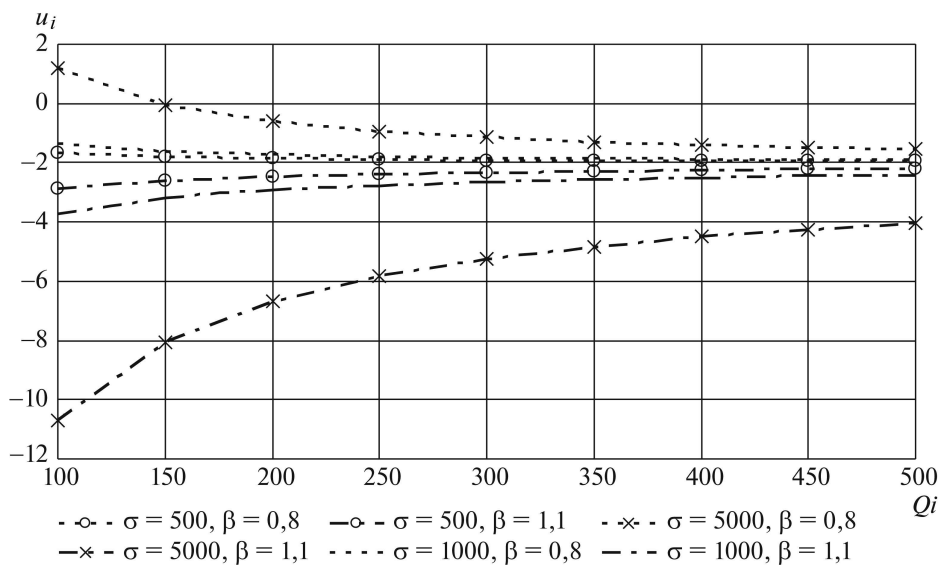


Рис. 1. Виды функции $u_i(Q_i)$.

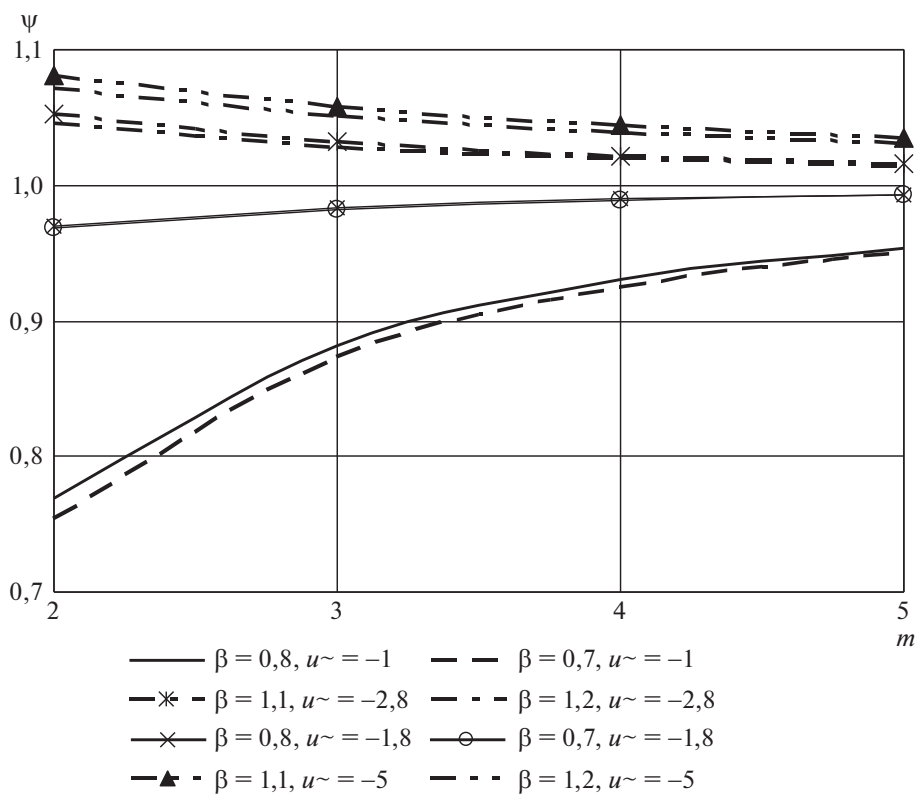


Рис. 2. Виды функции $\psi^r(\tilde{u}, \beta, m)$.

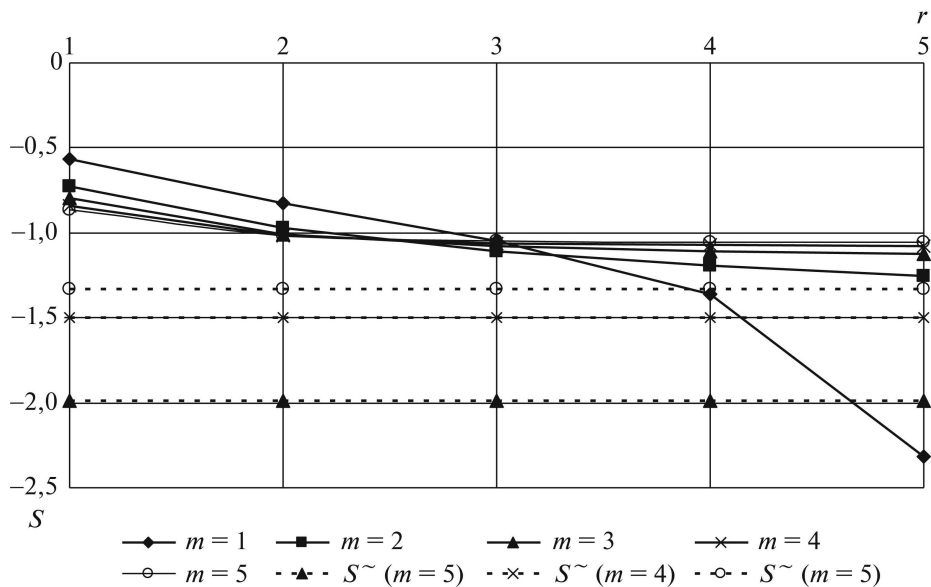


Рис. 3. Зависимость суммы предположительных вариаций от уровня лидерства и количества агентов при $u_j = -1,8$.

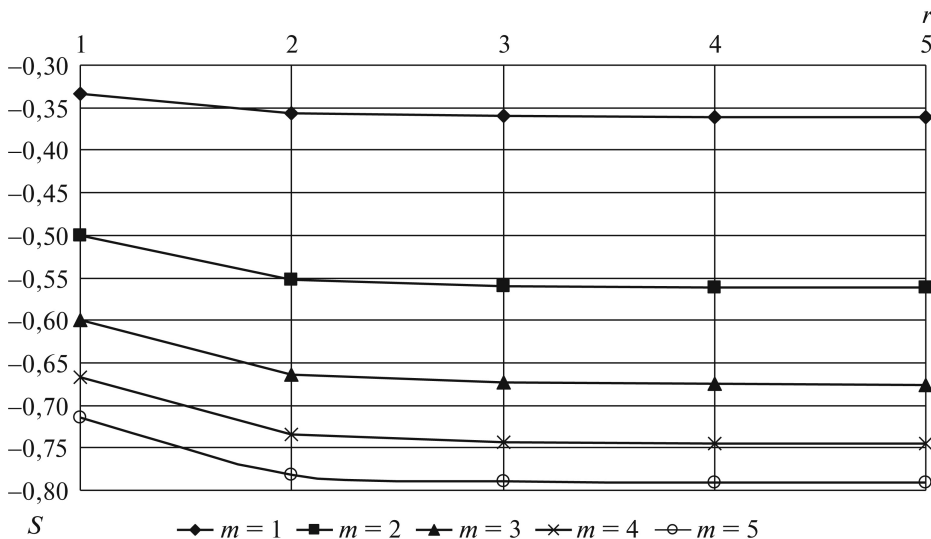


Рис. 4. Зависимость суммы предположительных вариаций от уровня лидерства и количества агентов при $u_j = -1,8$.

Также из рис. 2 следует, что $\psi^r \begin{cases} < 1 \forall \beta \in (0, 1), \\ > 1 \forall \beta \in (1, 2), \end{cases}$ т.е. тип эффекта расширения масштаба сказывается на знаках предположительных вариаций, зависящих от параметров z_j^r , не только через значение параметра u_i , но и в результате различных значений ψ^r .

Таблица 2. Анализ предположительных вариаций

Тип ситуации	Параметры окружения 4-го агента			x_{43}
	z_1	z_2	z_3	
1	0,8	0,6	0,5	-0,511
2	-0,8	-0,6	-0,5	-0,338
3	-0,8	0,6	0,5	-1,412
4	-0,8	-0,6	0,5	1,043
5	-1,8	-0,6	0,5	1,636

На рис. 3, 4 проведен анализ формулы (7а) суммы предположительных вариаций агента и ограничения (7с) в зависимости от уровня лидерства и количества агентов для двух характерных случаев: 1) случай $|u_j| \in [1, 2) \forall \beta_j < 1$ рассмотрен на рис. 3 на примере $u_j = -1,8 \forall j \in N$ при $\psi^r = 0,98$; 2) случай $|u_j| \geq 2 \forall \beta_j \geq 1$ показан на рис. 4 на примере $u_j = -3 \forall j \in N$, поскольку при $u_j < -3$ зависимость S_i^r от r не проявляется, при $\psi^r = 1,05$. Предельная величина суммы предположительных вариаций в (7с) обозначена символом $S^\sim$. Графики (рис. 3, 4) показывают, что с увеличением уровня лидерства r модуль суммы предположительных вариаций растет, а величина S_i^r имеет отрицательный знак согласно (7б), и подтверждают, что в случае $|u_j| \in [1, 2)$ ограничение $|S_i^r| < S^\sim = \frac{m}{m-1-v^r}$ выполняется при $m \geq 2$, а для случая $|u_j| \geq 2$ ограничение $|S_i^r| \leq 1 \forall r$ выполняется при $m \geq 1$.

Пример типичного и атипичного агентов представлен в табл. 2 для системы четырех агентов: в ситуациях 1–3 четвертый агент является типичным, т.е. $x_{43} < 0$, поскольку в ситуации 1 $z_j > 0, j = 1, 2, 3$, в ситуации 2 $z_j < 0, j = 1, 2, 3$, в ситуации 3 сумма положительных z_2, z_3 больше модуля z_1 ; в ситуациях 4, 5 четвертый агент является атипичным, т.е. $x_{43} > 0$, так как модуль суммы отрицательных z_1, z_2 больше z_3 , причем с ростом этого превышения значение x_{43} увеличивается.

Проанализируем погрешность вычислений предположительных вариаций по формулам (6а) при $r > 2$ на основе модели (6е). С целью анализа влияния на погрешность ключевых факторов рассмотрим упрощенную ситуацию при одинаковых значениях действий всех агентов $\bar{Q} \geq \bar{Q}_i \forall i \in N$, т.е. при равных значениях $u_i = u \forall i \in N$, при одинаковых значениях сумм предположительных вариаций, равных S , т.е. $S_i^{r-1} = S \forall i \in N$, а также при $\psi^r = 1$, т.е. $\varphi^{r-1} = 0$. Рассчитаем определители $\Delta_l^{r-1}, \Delta_{li}^{r-1}$ при $u_j = \varepsilon - 2$, в этом случае $z_j^r = \varepsilon - S - 1$, поэтому $\Delta_{il}^r = (\varepsilon - S - 1)^{m-1}$, $\Delta_i^r = (\varepsilon - S - 1)^{m-1} (\varepsilon - S - 1 - m)$, тогда $\bar{\varepsilon} = \max_{i \in M} \left| \frac{\varepsilon(\beta_i - 2)}{\varepsilon - 1} \frac{\varepsilon - S - 1}{(\varepsilon - S - 1 - m)^2} \right|$, где максимум имеет место при $\bar{\beta} = \min_{i \in N} \beta_i$. Число обусловленности матрицы $\mathbf{A}$ при одинаковых значениях u, S составляет $\mu = \frac{|u - S| + (m-1)(1+\bar{\varepsilon})}{|u - S| - (m-1)(1+\bar{\varepsilon})}$ соответственно, $\bar{\mu} = \frac{(m-1)\bar{\varepsilon}}{|u - S| + (m-1)(1-\bar{\varepsilon})}$. Норма относительной погрешности (6е) в этом случае ограничена величиной $\delta_{\max} = \frac{\mu}{1-\mu\bar{\mu}} \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{1-\bar{\varepsilon}} + \bar{\mu} \right)$. При $\bar{\beta} = 0,7$ и $\varepsilon = 0,01$ моделирование зависимости $\delta_{\max}$ от числа агентов окружения m , величины u и суммы предположительных вариаций S представлено на рис. 5.

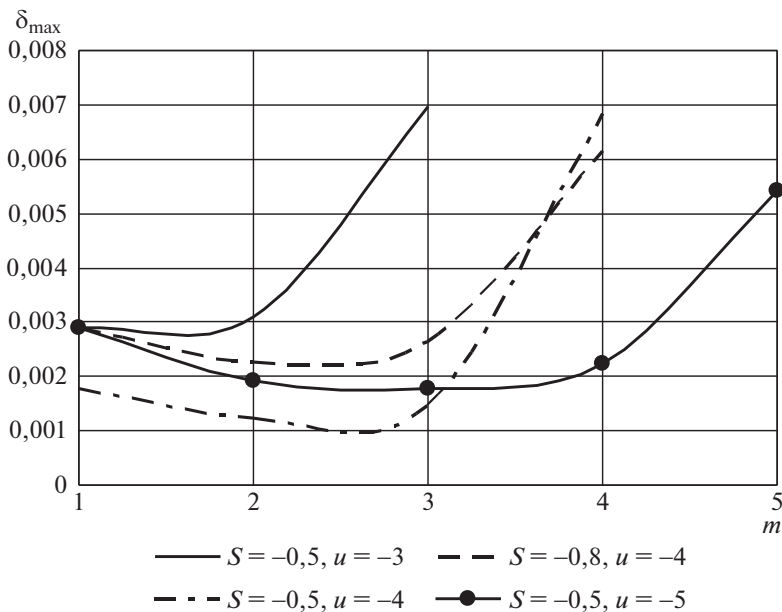


Рис. 5. Зависимость точности приближенного вычисления предположительных вариаций от числа агентов m , величины u и суммы предположительных вариаций S .

Анализ рис. 5 показывает, во-первых, удовлетворительную точность (погрешность менее 1%) приближенных вычислений предположительных вариаций по формулам (6а) при $r > 2$; во-вторых, рост погрешности начиная с некоторого значения m , снижение погрешности при увеличении модуля u и модуля S ; в-третьих, границы применимости формулы числа обусловленности в зависимости от модуля u (на рисунке линии прерваны начиная с такого значения m , при котором формула некорректна, так как матрица системы теряет свойство строгого диагонального преобладания [23]).

5. Заключение

В нелинейной модели олигополии нахождение предположительных вариаций представляет собой достаточно сложную вычислительную задачу, поэтому первым результатом статьи является устранение этой технической сложности. Наряду с этим получение явной формулы предположительных вариаций позволяет анализировать характер их изменения при вариациях действий агентов, что необходимо для вычисления равновесий при наличии лидеров по Штакельбергу второго и более высоких уровней.

Аналитическая формула суммы предположительных вариаций позволяет выявить синтетическое влияние действий окружения каждого агента на параметры возможного равновесия в игре при вариациях его действий. Кроме того, определено ограничение на модуль суммы предположительных вариаций, которое позволяет оценить диапазоны возможных равновесий.

Анализ знаков предположительных вариаций показал возможность существования в нелинейной игре олигополии агентов, проявляющих нетипичные свойства: на увеличение действия окружения такие агенты реагируют увеличением своего действия. Обобщая результаты статьи, отметим, что предположительные вариации широко используются [18, 24] в анализе агрегативных игр, однако отсутствие надежных методов вычисления этих величин и их производных в случае нелинейных функций полезности агентов препятствовало исследованию проблемы многоуровневого лидерства по Штакельбергу. По сравнению с известными результатами, проведенные исследования позволили сделать следующие выводы.

Предположительные вариации агента олигополии относительно действий окружения на некотором уровне лидерства зависят от предположительных вариаций остальных агентов на предыдущем уровне лидерства. Это означает, что повышение информированности агента является фундаментальной причиной роста его уровня лидерства.

Реакция агента на действия окружения выражается в увеличении или уменьшении своего действия (объема выпуска), что количественно характеризуется величиной и знаком суммы предположительных вариаций. Показано, что сумма предположительных вариаций агента олигополии при отрицательном эффекте расширения масштаба агентов окружения отрицательна, а абсолютная величина ограничена единицей; при положительном эффекте и высоких уровнях лидерства этот параметр может быть положительным и не ограниченным в дуополии и триполии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Вектор предположительных вариаций в уравнении реакции i -го агента (далее, i -й вектор вариаций) вычисляется из решения следующей системы [20], записанной по уравнениям (3) остальных $m = n - 1$ агентов:

$$(П.1) \quad \sum_{j \in N \setminus i} \frac{\partial F_k}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial F_k}{\partial Q_i} = 0, \quad i \in N \setminus k,$$

которая при $r = 1$ (т.е. если в уравнениях (3) положить $x_{ij}^0 = 0$) имеет вид

$$(П.2) \quad \begin{aligned} & u_1 x_{i1}^1 - x_{i2}^1 - \dots - x_{im}^1 = 1, \\ & -x_{i1}^1 + u_2 x_{i2}^1 - \dots - x_{im}^1 = 1, \\ & \dots \\ & -x_{i1}^1 - x_{i2}^1 - \dots + u_m x_{im}^1 = 1, \quad \text{или} \\ & \psi^1 (u_1 - S_1^0) x_{i1}^1 - x_{i2}^1 - \dots - x_{im}^1 = 1, \\ & -x_{i1}^1 + \psi^1 (u_2 - S_2^0) x_{i2}^1 - \dots - x_{im}^1 = 1, \\ & \dots \\ & -x_{i1}^1 - x_{i2}^1 - \dots + \psi^1 (u_m - S_m^0) x_{im}^1 = 1, \end{aligned}$$

где

$$\psi^1 = 1, \quad S_i^0 = \sum_{l \in M} x_{il}^0 = 0,$$

верхний индекс обозначает r .

Отметим следующее свойство функций $u_i(\bullet)$, $i \in N$: из (4) и (5) следует, что

$$(П.3) \quad u_j < 0, \quad |u_j| \begin{cases} \geq 2 \quad \forall \beta_j \geq 1, \\ \in [1, 2) \quad \forall \beta_j < 1 \end{cases} \Rightarrow |u_j| \geq 1 \quad \forall \beta_j \in (0, 2).$$

Доказательство формулы (6а) при $r = 1$ приводится аналогично доказательству формулы (11) в статье [16], но для системы вида (П.2), в которой знаки коэффициентов перед членами x_{ij}^1 , $i \neq j$, а также знаки свободных членов изменены на противоположные, поскольку в отличие от цитируемой статьи в формуле (1) параметр $b > 0$. Поэтому при $r = 1$ получим формулу

$$x_{il}^1 = \frac{\prod_{j=1 \setminus (l,i)}^m (u_j + 1)}{(u_{m-1}u_m - 1) \prod_{j=1 \setminus i}^{m-2} (u_j + 1) - \sum_{\gamma=1 \setminus i}^{m-2} \prod_{j=1 \setminus (\gamma,i)}^m (u_j + 1)},$$

в которой знаменатель (главный определитель системы (П.2) для i -го вектора вариаций) обозначим символом Δ_i^1 и представим в виде

$$\begin{aligned} \Delta_i^1 &= \prod_{j=1 \setminus i}^m (u_j + 1) - \sum_{\gamma=1 \setminus i}^m \prod_{j=1 \setminus (\gamma,i)}^m (u_j + 1) = \\ &= \prod_{j=1 \setminus i}^m (\psi^1(u_j - S_j^0) + 1) - \sum_{\gamma=1 \setminus i}^m \prod_{j=1 \setminus (\gamma,i)}^m (\psi^1(u_j - S_j^0) + 1), \end{aligned}$$

а числитель (l -й вспомогательный определитель) обозначим

$$\Delta_{il}^1 = \prod_{j=1 \setminus (i,l)}^m (u_j + 1) = \prod_{j=1 \setminus (i,l)}^m (\psi^1(u_j - S_j^0) + 1),$$

где верхний индекс r , т.е.

$$x_{il}^1 = \frac{\Delta_{il}^1}{\Delta_i^1}.$$

При $r = 2$ система (П.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \left[u_1 - S_1^1 - Q_1 \sum_{j \in N \setminus 1} \frac{\partial x_{1j}^1}{\partial Q_1} \right] x_{i1}^2 - \left[1 + Q_1 \sum_{j \in N \setminus 1} \frac{\partial x_{1j}^1}{\partial Q_2} \right] x_{i2}^2 - \dots \\
 & \dots - \left[1 + Q_1 \sum_{j \in N \setminus 1} \frac{\partial x_{1j}^1}{\partial Q_m} \right] x_{im}^2 = 1 + Q_1 \sum_{j \in N \setminus 1} \frac{\partial x_{1j}^1}{\partial Q_i}, \\
 & - \left[1 + Q_2 \sum_{j \in N \setminus 2} \frac{\partial x_{2j}^1}{\partial Q_1} \right] x_{i1}^2 + \left[u_2 - S_2^1 - Q_2 \sum_{j \in N \setminus 2} \frac{\partial x_{2j}^1}{\partial Q_2} \right] x_{i2}^2 - \dots \\
 & \dots - \left[1 + Q_2 \sum_{j \in N \setminus 2} \frac{\partial x_{2j}^1}{\partial Q_m} \right] x_{im}^2 = 1 + Q_2 \sum_{j \in N \setminus 2} \frac{\partial x_{2j}^1}{\partial Q_i}, \\
 & \dots \\
 & - \left[1 + Q_m \sum_{j \in N \setminus m} \frac{\partial x_{mj}^1}{\partial Q_1} \right] x_{i1}^2 - \left[1 + Q_m \sum_{j \in N \setminus m} \frac{\partial x_{mj}^1}{\partial Q_2} \right] x_{i2}^2 - \dots \\
 & \dots - \left[u_m - S_m^1 - Q_m \sum_{j \in N \setminus m} \frac{\partial x_{mj}^1}{\partial Q_m} \right] x_{im}^2 = 1 + Q_m \sum_{j \in N \setminus m} \frac{\partial x_{mj}^1}{\partial Q_i}.
 \end{aligned}
 \tag{П.4}$$

На главной диагонали матрицы системы (П.4) под знаком суммы стоят производные типа $\frac{\partial x_{il}^1}{\partial Q_i} = 0$, $i \neq l$, так как в этом случае $\Delta_{il}^1, \Delta_i^1$ не зависят от Q_i . Вне главной диагонали матрицы системы (П.4), а также в столбце свободных членов под знаком суммы стоят производные двух типов: а) $\frac{\partial x_{i\eta}^1}{\partial Q_\zeta}$, $\eta \neq \zeta$, б) $\frac{\partial x_{i\eta}^1}{\partial Q_\eta}$, вычисление которых с учетом (6а) дает:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_{i\eta}^1}{\partial Q_\zeta} &= - \frac{\Delta_{i\eta}^1 \Delta_{i\zeta}^1}{(u_\zeta + 1) (\Delta_i^1)^2} \frac{u_\zeta + 2}{Q_\zeta} (\beta_\zeta - 2), \\
 \frac{\partial x_{i\eta}^1}{\partial Q_\eta} &= - \frac{\Delta_{i\eta}^1 (\Delta_i^1 + \Delta_{i\eta}^1)}{(u_\eta + 1) (\Delta_i^1)^2} \frac{u_\eta + 2}{Q_\eta} (\beta_\eta - 2),
 \end{aligned}
 \tag{П.5}$$

так как

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Delta_{i\eta}^1}{\partial Q_\zeta} &= \frac{\Delta_{i\eta}^1}{u_\zeta + 1} u'_{\zeta Q_\zeta}, \quad \eta \neq \zeta, \quad \frac{\partial \Delta_i^1}{\partial Q_\zeta} = \frac{\Delta_i^1 + \Delta_{i\zeta}^1}{u_\zeta + 1} u'_{\zeta Q_\zeta}, \\
 u'_{\zeta Q_\zeta} &= \frac{B_\zeta \beta_\zeta (\beta_\zeta - 1) (\beta_\zeta - 2) Q_\zeta^{\beta_\zeta - 3}}{b} = \frac{u_\zeta + 2}{Q_\zeta} (\beta_\zeta - 2).
 \end{aligned}$$

Введем вектор-столбец переменных системы (П.4) $\mathbf{x}_i^r = \{x_{i1}^r, x_{i2}^r, \dots, x_{im}^r\}$, вектор-столбец свободных членов $\mathbf{B}^r = \{b_{i1}^r, b_{i2}^r, \dots, b_{im}^r\}$ и матрицу системы $\mathbf{A}^r = \{a_{lj}^r, l, j \in M\}$, где верхний индекс r обозначает уровень лидерства. Из (П.5) следует, что система (П.4) при $r = 2$ имеет вид матричного уравнения

$$(П.6) \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{x}_i^r = \mathbf{B}^2,$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$(П.7) \quad \begin{aligned} a_{lj}^2 &= u_j - S_j^1 \quad \forall l = j, \quad a_{lj}^2 = -(1 + \varphi_{lj}^1(Q)) \quad \forall l \neq j, \\ b_l^2 &= 1 + \varphi_{li}^1(Q), \quad l, j \in M, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{lj}^1(Q) &= -\frac{Q_l}{Q_j} \frac{u_j + 2}{u_j + 1} \frac{\beta_j - 2}{(\Delta_l^1)^2} \Delta_{lj}^1 \left[\Delta_l^1 + \sum_{k \in M} \Delta_{lk}^1 \right], \\ \varphi_{li}^1(Q) &= -\frac{Q_l}{Q_i} \frac{u_i + 2}{u_i + 1} \frac{\beta_i - 2}{(\Delta_l^1)^2} \Delta_{li}^1 \left[\Delta_l^1 + \sum_{k \in M} \Delta_{lk}^1 \right]. \end{aligned}$$

Например, при $m = 2$ эта система имеет вид

$$\begin{aligned} (u_1 - S_1^1) x_{i1}^2 - \left[1 - \frac{Q_1}{Q_2} \frac{u_2 + 2}{u_2 + 1} \frac{\beta_2 - 2}{(\Delta_1^1)^2} \Delta_{12}^1 (\Delta_1^1 + \Delta_{12}^1 + \Delta_{13}^1) \right] x_{i2}^2 &= \\ = 1 - \frac{Q_1}{Q_3} \frac{u_3 + 2}{u_3 + 1} \frac{\beta_3 - 2}{(\Delta_1^1)^2} \Delta_{13}^1 (\Delta_1^1 + \Delta_{12}^1 + \Delta_{13}^1), \\ - \left[1 - \frac{Q_2}{Q_1} \frac{u_1 + 2}{u_1 + 1} \frac{\beta_1 - 2}{(\Delta_2^1)^2} \Delta_{21}^1 (\Delta_2^1 + \Delta_{21}^1 + \Delta_{23}^1) \right] x_{i1}^2 + (u_2 - S_2^1) x_{i2}^2 &= \\ = 1 - \frac{Q_2}{Q_3} \frac{u_3 + 2}{u_3 + 1} \frac{\beta_3 - 2}{(\Delta_2^1)^2} \Delta_{23}^1 (\Delta_2^1 + \Delta_{21}^1 + \Delta_{23}^1). \end{aligned}$$

При условии (6с) в точке $Q_i = \tilde{Q}$, $i \in N$ можно записать $u_i = \tilde{u}$ (где $\tilde{u} = -2 - \frac{\tilde{B}\tilde{\beta}(\tilde{\beta}-1)\tilde{Q}^{\tilde{\beta}-2}}{\tilde{b}}$), значит, в коэффициентах (П.7) параметр $\varphi_{lj}^1(Q)$ одинаковый для всех уравнений системы (П.6) и равен

$$\varphi_{lj}^1(Q) = \varphi^1 = -\frac{(\tilde{u} + 2)(\tilde{\beta} - 2)}{(\tilde{u} + 1 - m)^2}, \quad l, j \in M,$$

поскольку в этом случае $\Delta_{il}^1 = (\tilde{u} + 1)^{m-1}$, $\Delta_i^1 = (\tilde{u} + 1)^{m-1}(\tilde{u} + 1 - m)$. Поэтому формулы коэффициентов (П.7) можно записать в виде

$$a_{lj}^2 = \psi^2 (u_j - S_j^1) \quad \forall l = j, \quad a_{lj}^2 = -1 \quad \forall l \neq j, \quad b_l^2 = 1, \quad l, j \in M, \quad \psi^2 = \frac{1}{1 + \varphi^1}.$$

Система (П.6) с этими коэффициентами аналогична (П.2), поэтому решение имеет вид

$$x_{il}^2 = \frac{\Delta_{il}^2}{\Delta_i^2}, \quad l, j \in M,$$

где

$$\Delta_i^2 = \prod_{j=1/i}^m (\psi^2(u_j - S_j^1) + 1) - \sum_{\gamma=1 \setminus i}^m \prod_{j=1 \setminus (\gamma, i)}^m (\psi^2(u_j - S_j^1) + 1),$$

$$\Delta_{il}^2 = \prod_{j=1 \setminus (i, l)}^m (\psi^2(u_j - S_j^1) + 1).$$

Применим формализм математической индукции. При $(r-1)$ производные вида (П.5), вычисленные от предположительных вариаций на $(r-2)$ -м уровне лидерства, имеют вид

$$\frac{\partial x_{i\eta}^{r-2}}{\partial Q_\zeta} = -\frac{\Delta_{i\eta}^{r-2} \Delta_{i\zeta}^{r-2}}{(\Delta_i^{r-2})^2} \left[\frac{\partial \psi^{r-2}(\tilde{Q})}{\partial Q_\zeta} (u_\zeta - S_\zeta^{r-3}) + \psi^{r-2} \left(\frac{\partial u_\zeta}{\partial Q_\zeta} - \frac{\partial S_\zeta^{r-3}}{\partial Q_\zeta} \right) \right],$$

$$\frac{\partial x_{i\eta}^{r-2}}{\partial Q_\eta} = -\frac{\Delta_{i\eta}^{r-2} (\Delta_i^{r-2} + \Delta_{i\eta}^{r-2})}{(\Delta_i^{r-2})^2} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial \psi^{r-2}(\tilde{Q})}{\partial Q_\eta} (u_\eta - S_\eta^{r-3}) + \psi^{r-2} \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial Q_\eta} - \frac{\partial S_\eta^{r-3}}{\partial Q_\eta} \right) \right].$$

Поскольку $\frac{\partial \psi^{r-2}(\tilde{Q})}{\partial Q_\zeta} = 0$, $\zeta \in M$, так как производные вычислены в точке $Q_i = \tilde{Q}$, $i \in N$, и $\frac{\partial S_\zeta^{r-3}}{\partial Q_\zeta} = 0$, так как при вычислении вариаций на $(r-2)$ -м уровне величина S_ζ^{r-3} является константой, из этих формул следует, что

$$\frac{\partial x_{i\eta}^{r-2}}{\partial Q_\zeta} = -\frac{\Delta_{i\eta}^{r-2} \Delta_{i\zeta}^{r-2}}{(\psi^{r-2} u_\zeta + 1) (\Delta_i^{r-2})^2} \frac{u_\zeta + 2}{Q_\zeta} (\beta_\zeta - 2) \psi^{r-2},$$

$$\frac{\partial x_{i\eta}^{r-2}}{\partial Q_\eta} = -\frac{\Delta_{i\eta}^{r-2} (\Delta_i^{r-2} + \Delta_{i\eta}^{r-2})}{(\psi^{r-2} u_\eta + 1) (\Delta_i^{r-2})^2} \frac{u_\eta + 2}{Q_\eta} (\beta_\eta - 2) \psi^{r-2}.$$

Следовательно, для матричного уравнения

$$(П.9) \quad \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{x}_i^{r-1} = \mathbf{B}^{r-1}$$

коэффициенты вычисляются по формулам, аналогичным формулам (П.7),

$$a_{lj}^{r-1} = u_j - S_j^{r-2} \quad \forall l = j, \quad a_{lj}^{r-1} = -\left(1 + \varphi_{lj}^{r-2}(Q)\right) \quad \forall l \neq j,$$

$$b_l^{r-1} = 1 + \varphi_{li}^{r-2}(Q), \quad l, j \in M,$$

и параметр $\varphi_{lj}^{r-2}(Q)$ равен

$$(П.10) \quad \varphi_{lj}^{r-2}(Q) = \varphi^{r-2} = -\psi^{r-2} \frac{(\tilde{u} + 2)(\tilde{\beta} - 2)}{(\psi^{r-2}\tilde{u} + 1 - m)^2}, \quad l, j \in M.$$

Поэтому коэффициенты системы (П.9) можно записать в виде

$$(П.11) \quad \begin{aligned} a_{lj}^{r-1} &= \psi^{r-1} (u_j - S_j^{r-2}) \quad \forall l = j, \quad a_{lj}^{r-1} = -1 \quad \forall l \neq j, \\ b_l^{r-1} &= 1, \quad l, j \in M, \quad \psi^{r-1} = \frac{1}{1 + \varphi^{r-2}}. \end{aligned}$$

По индукции из формул (П.9), (П.11) следует, что для произвольного значения r система (П.1) имеет вид $\mathbf{A}^r \mathbf{x}_i^r = \mathbf{B}^r$ с коэффициентами, аналогичными (П.11), т.е.

$$(П.11a) \quad \begin{aligned} a_{lj}^r &= \psi^r (u_j - S_j^{r-1}) \quad \forall l = j, \quad a_{lj}^r = -1 \quad \forall l \neq j, \\ b_l^r &= 1, \quad l, j \in M, \quad \psi^r = \frac{1}{1 + \varphi^{r-1}}. \end{aligned}$$

Поэтому решение этой системы имеет такую же форму, как решение системы (П.2), но параметр ψ^r по индукции из формул (П.10), (П.11), вычисляется по формуле

$$(П.12) \quad \psi^r = \frac{1}{1 + \varphi^{r-1}}, \quad \varphi^r = \psi^r \frac{(\tilde{u} + 2)(2 - \tilde{\beta})}{(\psi^r \tilde{u} + 1 - m)^2}.$$

Поскольку $(\tilde{u} + 2)(2 - \tilde{\beta}) \ll (\tilde{u} + 1 - m)^2 \quad \forall m \geq 2 \wedge |\tilde{u}| \geq 1$, то $\varphi^r \approx 0$, $\psi^r \approx 1$, что является основанием слабого влияния производных предположительных вариаций (6d) на точность формул (6a) при $r > 2$.

Существование решения системы $\mathbf{A}^r \mathbf{x}_i^r = \mathbf{B}^r$ не зависит от существования решения системы (3) и определяется по теореме Крамера [21]: система имеет единственное решение, если главный определитель $\Delta_i^r \neq 0$. Из формулы главного определителя следует, что

$$\frac{\Delta_i^r}{\sum_{j \in M} z_j^r} = 1 - \sum_{j \in M} \frac{1}{z_j^r} \quad \text{при} \quad z_j^r \neq 0 \quad \forall j \in M,$$

поэтому условие существования решения системы $\mathbf{A}^r \mathbf{x}_i^r = \mathbf{B}^r$ имеет вид

$$\sum_{j \in M} \frac{1}{z_j^r} \neq 1 \wedge z_j^r \neq 0 \quad \forall j \in M.$$

Докажем условие (6d): из формул (6a) следует, что $\frac{\partial x_{il}^r}{\partial Q_i} = 0$, $i \neq l$, так как в этом случае $\Delta_{il}^r, \Delta_i^r$ не зависят от Q_i . Вторая часть условия (6d) доказывается следующим образом. При больших значениях действий, т.е. при

$Q_\zeta \rightarrow \infty$, когда $\lim_{Q_\zeta \rightarrow \infty} u_\zeta = -2$, определители Δ_i^r , $\Delta_{i\zeta}^r$ суть конечные числа, вычисляемые по формулам $\Delta_i^r = (\lambda^r)^{m-1} (\lambda^r - m)$, $\Delta_{i\zeta}^r = (\lambda^r)^{m-1}$, где $\lambda^r = \psi^r \left(-2 - S_\zeta^{r-1} \right) + 1$, поскольку модуль величины S_ζ^{r-1} ограничен некоторым конечным числом, как будет показано в утверждении 2. В этом случае согласно формулам (П.8) производные предположительных вариаций по действиям других агентов $\frac{\partial x_{i\eta}^r}{\partial Q_\zeta} = -\frac{\psi^r \Delta_{i\eta}^r \Delta_{i\zeta}^r}{(\psi^r u_\zeta + 1)(\Delta_i^r)^2} \frac{u_\zeta + 2}{Q_\zeta} (\beta_\zeta - 2)$ имеют вид

$$\lim_{Q_\zeta \rightarrow \infty} \frac{\partial x_{i\eta}^r}{\partial Q_\zeta} = -\frac{\psi^r (\lambda^r)^{m-1} (\lambda^r)^{m-1}}{(\psi^r u_\zeta + 1) \left[(\lambda^r)^{m-1} (\lambda^r - m) \right]^2} \frac{u_\zeta + 2}{Q_\zeta} (\beta_\zeta - 2).$$

При конечных значениях ψ^r и $Q_\zeta \rightarrow \infty$ (т.е. $u_\zeta \rightarrow -2$) этот предел равен нулю.

Рассмотрим проблему оценки точности вычисления предположительных вариаций по формулам (6а) при $r > 2$. Пусть решение точной системы $\alpha^r \mathbf{X}_i^r = \beta^r$ обозначено вектором $\mathbf{X}_i^r = \left\{ X_{ij}^r, j \in N \right\}$, решение приближенной системы $(\alpha^r + \delta \alpha^r) \mathbf{x}_i^r = \beta^r + \delta \beta^r$ — вектором $\mathbf{x}_i^r = \left\{ x_{ij}^r, j \in N \right\}$, отклонение матрицы точной системы от матрицы приближенной системы — символом $\delta \alpha^r$, отклонение вектора свободных членов — символом $\delta \beta^r$. Например, при $m = 2, i = 3$ точная система (как следует из (П.4) с учетом $\frac{\partial x_{il}^1}{\partial Q_i} = 0, i \neq l$) и приближенная система имеют вид

$$\begin{aligned} & [u_1 - S_1^{r-1}] x_{i1}^r - \left[1 + Q_1 \sum_{j \in N \setminus 1} \frac{\partial x_{1j}^{r-1}}{\partial Q_2} \right] x_{i2}^r = 1 + Q_1 \sum_{j \in N \setminus 1} \frac{\partial x_{1j}^{r-1}}{\partial Q_3}, \\ & - \left[1 + Q_2 \sum_{j \in N \setminus 2} \frac{\partial x_{2j}^{r-1}}{\partial Q_1} \right] x_{i1}^r + [u_2 - S_2^{r-1}] x_{i2}^r = 1 + Q_2 \sum_{j \in N \setminus 2} \frac{\partial x_{2j}^{r-1}}{\partial Q_3}, \\ & (u_1 - S_1^{r-1}) x_{i1}^r - (1 + \varphi^{r-1}) x_{i2}^r = 1 + \varphi^{r-1}, \\ & - (1 + \varphi^{r-1}) x_{i1}^r + (u_2 - S_2^{r-1}) x_{i2}^r = 1 + \varphi^{r-1}. \end{aligned}$$

Поэтому матрица $\delta \alpha^r$ и вектор $\delta \beta^r$ в данном случае следующие:

$$\begin{aligned} \delta \alpha^r &= \begin{pmatrix} 0 & \varphi^{r-1} - Q_1 \sum_{j \in N \setminus 1} \frac{\partial x_{1j}^{r-1}}{\partial Q_2} \\ \varphi^{r-1} - Q_2 \sum_{j \in N \setminus 2} \frac{\partial x_{2j}^{r-1}}{\partial Q_1} & 0 \end{pmatrix}, \\ \delta \beta^r &= \begin{pmatrix} \varphi^{r-1} - Q_1 \sum_{j \in N \setminus 1} \frac{\partial x_{1j}^{r-1}}{\partial Q_3} \\ \varphi^{r-1} - Q_2 \sum_{j \in N \setminus 2} \frac{\partial x_{2j}^{r-1}}{\partial Q_3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Погрешность приближения $\delta \mathbf{x}_i^r = \mathbf{x}_i^r - \mathbf{X}_i^r$ оценивается по норме вектора, и относительная погрешность вычисляется по следующей формуле [22]:

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}_i^r\|}{\|\mathbf{x}_i^r\|} \leq \frac{\mu(\boldsymbol{\alpha}^r)}{1 - \mu(\boldsymbol{\alpha}^r) \frac{\|\delta \boldsymbol{\alpha}^r\|}{\|\boldsymbol{\alpha}^r\|}} \left(\frac{\|\delta \boldsymbol{\beta}^r\|}{\|\boldsymbol{\beta}^r\|} + \frac{\|\delta \boldsymbol{\alpha}^r\|}{\|\boldsymbol{\alpha}^r\|} \right)$$

при $\mu(\boldsymbol{\alpha}^r) \frac{\|\delta \boldsymbol{\alpha}^r\|}{\|\boldsymbol{\alpha}^r\|} < 1$ и $\|\boldsymbol{\alpha}^r\| \neq 0$,

где символом $\|\bullet\|$ обозначена норма, символом $\mu(\boldsymbol{\alpha}^r) = \|\boldsymbol{\alpha}^r\| \|(\boldsymbol{\alpha}^r)^{-1}\|$ обозначено число обусловленности матрицы $\boldsymbol{\alpha}^r$. Для вычисления нормы матрицы $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_{ij}, i, j = 1, \dots, m\}$ используем формулу $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |\alpha_{ij}|$. При больших действиях в силу свойства (6d) матрица $\boldsymbol{\alpha}^r$ имеет строгое диагональное преобладание, т.е. для каждой строки диагональный элемент $u_i - S_i^{r-1}$ по модулю больше суммы модулей остальных элементов, или $|\alpha_{ii}| > \sum_{j=1 \atop j \neq i}^m |\alpha_{ij}|$, $\forall i = 1, \dots, m$. В этом случае число обусловленности матрицы $\boldsymbol{\alpha}^r$ имеет [23] следующую оценку: $\mu(\boldsymbol{\alpha}^r) < \frac{\max_i |\alpha_{ii}| + \sum_{j=1 \atop j \neq i}^m |\alpha_{ij}|}{\min_i |\alpha_{ii}| - \sum_{j=1 \atop j \neq i}^m |\alpha_{ij}|}$.

Пусть при $Q_i \geq \bar{Q}_i$ в элементах вне главной диагонали матрицы $\boldsymbol{\alpha}^r$ и в элементах вектора $\boldsymbol{\beta}^r$ второе слагаемое не превышает по модулю малого числа $\bar{\varepsilon} \in (0, 1)$, т.е. эти элементы не превышают величины $1 + \bar{\varepsilon}$, где $\bar{Q}_i \geq \left(\frac{B_i \beta_i |\beta_i - 1|}{\varepsilon b} \right)^{\frac{1}{2-\beta_i}}$ определено из условия $|u_i + 2| \leq \varepsilon$, и на базе формулы $\varphi_{li}^r(Q)$ в (П.7) с учетом обобщения в (П.8) получим

$$\bar{\varepsilon} \geq \left| \psi^r \frac{Q_l}{Q_i} \frac{\varepsilon}{(\psi^r (\varepsilon - 2) + 1)} \frac{\beta_i - 2}{(\Delta_l^{r-1})^2} \Delta_{li}^{r-1} \left[\Delta_l^{r-1} + \sum_{k \in M} \Delta_{lk}^{r-1} \right] \right| \quad \forall i, l \in M.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \|\delta \boldsymbol{\beta}^r\| &\leq |\varphi^{r-1} + \bar{\varepsilon}|, \quad \mu(\boldsymbol{\alpha}^r) < \frac{\max_{1 \leq j \leq m} |u_j - S_j^{r-1}| + (m-1)(1 + \bar{\varepsilon})}{\min_{1 \leq j \leq m} |u_j - S_j^{r-1}| - (m-1)(1 + \bar{\varepsilon})}, \\ \|\boldsymbol{\beta}^r\| &\geq 1 - \bar{\varepsilon}, \quad \frac{\|\delta \boldsymbol{\beta}^r\|}{\|\boldsymbol{\beta}^r\|} \leq \frac{|\varphi^{r-1} + \bar{\varepsilon}|}{1 - \bar{\varepsilon}}, \quad \|\delta \boldsymbol{\alpha}^r\| \leq (m-1) |\varphi^{r-1} + \bar{\varepsilon}|, \\ \|\boldsymbol{\alpha}^r\| &\geq \min_{1 \leq j \leq m} |u_j - S_j^{r-1}| + (m-1)(1 - \bar{\varepsilon}), \\ \frac{\|\delta \boldsymbol{\alpha}^r\|}{\|\boldsymbol{\alpha}^r\|} &\leq \bar{\mu} = \frac{(m-1) |\varphi^{r-1} - \bar{\varepsilon}|}{\min_{1 \leq j \leq m} |u_j - S_j^{r-1}| + (m-1)(1 - \bar{\varepsilon})}. \end{aligned}$$

Тогда погрешность соответствует (6е). ■

Доказательство утверждения 2. Обозначим $z_j^r = \psi^r (u_j - S_j^{r-1}) + 1$. Вначале рассмотрим частный случай $m = 1$, когда, как следует из (П.2), $S_i^r =$

$= x_{ij}^r = \frac{1}{z_j^r - 1} = \frac{1}{\psi^r(u_j - S_j^{r-1})}$, $i, j = 1, 2$. При $r = 1$ по (6а) $\psi^1 = 1$, $S_j^0 = 0$, значит $z_j^1 = u_j + 1$, поэтому $S_i^1 = \frac{1}{u_j} < 0$, так как согласно (П.3) $u_j < -2$ при $\beta_j \geq 1$ и $-2 < u_j < -1$ при $\beta_j < 1$. Значит, $|S_i^1| < 1$. При $r > 1$ возможны два случая: 1) $z_j^r < 0$, тогда $S_i^r < 0$, $|S_i^r| < 1$; 2) $z_j^r > 0$, тогда из неравенства $z_j^r = \psi^r(u_j - S_j^{r-1}) + 1 > 0$ следует, что $\psi^r(u_j - S_j^{r-1}) > -1$, значит, $|S_i^r| > 1$; условие $S_i^r < 0$ выполняется в случае, если $|S_j^{r-1}| < |u_j|$, т.е. при таких $r < r_{\max i}$, что $|S_j^{\max i - 1}| < |u_j|$, при этом условии имеется ограничение $|S_i^r| < \frac{1}{\psi^{r_{\max i}} |u_j - S_j^{r_{\max i} - 1}|}$. Неравенства являются строгими, так как по условиям (6а) $z_j^r \neq 0$.

В общем случае суммирование формул (6а) по всем агентам окружения i -го агента приводит к формуле

$$S_i^r = \sum_{l \in M} x_{il}^r = \frac{\sum_{\gamma=1 \setminus i}^m \prod_{j=1 \setminus (\gamma, i)}^m z_j^r}{\prod_{j=1 \setminus i}^m z_j^r - \sum_{\gamma=1 \setminus i}^m \prod_{j=1 \setminus (\gamma, i)}^m z_j^r} = \frac{1}{s_i^r - 1},$$

где

$$s_i^r = \frac{1}{\sum_{j \in M} \frac{1}{z_j^r}}, \quad i \in N.$$

При $r = 1$ из (П.3) следует, что $z_j^1 = u_j + 1 < 0 \forall j \in M$, поэтому $s_i^1 < 0$, $i \in N$, значит, $S_i^1 < 0$, $|S_i^1| < 1$, $i \in N$.

При $r = 2$ возможны два случая:

1) все $z_j^2 < 0 \forall j \in M$, тогда, аналогично случаю $r = 1$, имеем: $s_i^2 < 0$, $S_i^2 < 0$, $|S_i^2| < 1$, $i \in N$;

2) существует несколько значений $z_j^2 > 0$, так что $s_i^2 > 0$; тогда $z_j^2 < 1$, поскольку $|u_i| \geq 1$, $|S_i^1| < 1$; следовательно, наибольшее значение $s_i^2 > 0$ ограничено величиной $s_i^2 < \frac{1}{m}$ (равенство имеет место, если все $z_j^2 = 1$, но по условиям (6а) $\sum_{j \in M} \frac{1}{z_j^2} \neq 1$), поэтому при $m > 1$, $S_i^2 < 0$, $|S_i^2| < \frac{m}{m-1}$, $i \in N$.

При $r = 3$ во втором случае, при аналогичных рассуждениях, имеет место ограничение $0 < z_j^3 < 1 + \psi^3 \left(-1 + \frac{m}{m-1} \right) = 1 + \frac{\psi^3}{m-1} = 1 + v^3$, $v^3 = \frac{\psi^3}{m-1}$, следовательно, наибольшее значение $s_i^3 > 0$ ограничено величиной $\frac{1+v^3}{m}$, поэтому $S_i^3 < 0$, $|S_i^3| < \frac{m}{m-1-v^3}$. При $r = 4$ во втором случае, имеет место ограничение $0 < z_j^4 < 1 + \psi^4 \left(-1 + \frac{m}{m-1-v^3} \right) = 1 + \frac{\psi^4}{\frac{m}{1+v^3}-1} = 1 + v^4$, $v^4 = \frac{\psi^4}{\frac{m}{1+v^3}-1}$, поэтому $s_i^4 > 0$ ограничено величиной $\frac{1+v^4}{m}$, значит, $S_i^4 < 0$, $|S_i^4| < \frac{m}{m-1-v^4}$. При произвольном r , аналогично рассуждая, получим наибольшее по модулю значение $S_{i \max}^r = \frac{1}{\frac{1+v^r}{m}-1} = \frac{m}{1+v^r-m}$ при $v^r = \frac{\psi^r}{\frac{m}{1+v^{r-1}}-1} > 0$, поэтому $|S_i^r| < \frac{m}{m-1-v^r}$.

Ограничение $S_i^r < 0$ выполняется в случае $m - 1 - v^r > 0$, откуда следует, что $m > 1 + \frac{\psi^r}{1+v^{r-1}-1}$, $(m-1) \left(\frac{m}{1+v^{r-1}} - 1 \right) > \psi^r$; так как $v^r > 0$, то последнее неравенство выполняется, если $\left(\frac{m}{1+v^{r-1}} - 1 \right)^2 > \psi^r$, откуда вытекает, что $v^{r-1} < \frac{m}{1+\sqrt{\psi^r}} - 1$; подставим это выражение в формулу v^r , получим максимальное значение $v_{\max}$, при котором $S_i^r < 0$: $v_{\max} = \frac{\psi_{\max}(1+\sqrt{\psi_{\max}})^2}{m\sqrt{\psi_{\max}}}$, где $\psi_{\max} = \arg \max_{r>1} \psi^r$. Следовательно, $|S_i^r| < \frac{m}{m-1-v_{\max}}$.

Условие (7е) следует из дифференцирования выражения (7а): поскольку $s_i^r = \frac{1}{\sum_{j \in M} \frac{1}{z_j^r}}$ не зависит от Q_i , то $\frac{\partial S_i^r}{\partial Q_i} = 0$; $\frac{\partial S_i^r}{\partial Q_j} = -\frac{1}{(s_i^r-1)^2} \frac{-1}{\left(\sum_{j \in M} \frac{1}{z_j^r}\right)^2} \frac{-1}{(z_j^r)^2} \frac{\partial z_j^r}{\partial Q_j}$, где производная $\frac{\partial z_j^r}{\partial Q_j} = \psi^r \frac{\partial u_j}{\partial Q_j}$; поскольку из (7с) следует, что s_i^r , а значит, и z_j^r , суть конечные величины, то $\lim_{Q_j \rightarrow \infty} \frac{(s_i^r)^2}{(s_i^r-1)^2} \frac{\psi^r}{b(z_j^r)^2} \beta_j (\beta_j - 1) (\beta_j - 2) Q_j^{\beta_j-3} = 0$.

Доказательство утверждения 3. Из формулы (6а) следует, что

$$(П.13) \quad x_{il}^r = \frac{\prod_{j=1 \setminus (l,i)}^m z_j^r}{\prod_{j=1 \setminus i}^m z_j^r - \sum_{\gamma=1 \setminus i}^m \prod_{j=1 \setminus (\gamma,i)}^m z_j^r} = \frac{1}{z_l^r - 1 - \sum_{j=1 \setminus (l,i)}^m \frac{z_l^r}{z_j^r}} = \frac{1}{z_l^r \left(1 - \sum_{j=1 \setminus (l,i)}^m \frac{1}{z_j^r} \right) - 1}.$$

Например, для случая $m = 3$, $i = 4$, $l = 3$ это выражение имеет вид $x_{43}^r = \frac{1}{z_3^r \left(1 - \frac{1}{z_1^r} - \frac{1}{z_2^r} \right) - 1}$. При $r = 1$ $z_j^r < 0 \forall j \in M$, тогда из (П.13) следует, что

$x_{il}^1 < 0$. При $r > 1$ возможны следующие случаи:

- 1) все $z_j^r < 0 \forall j \in M$, тогда из (П.13) следует, что $x_{il}^r < 0 \forall r \geq 1$;
- 2) все $z_j^r > 0 \forall j \in M$, $r > 1$, тогда из (П.13) следует, что $x_{il}^r < 0 \forall r > 1$, так как $z_l^r \left(1 - \sum_{j=1 \setminus (l,i)}^m \frac{1}{z_j^r} \right) - 1 < 0$, поскольку это равносильно следующему неравенству: $1 - \sum_{j=1 \setminus (l,i)}^m \frac{1}{z_j^r} < \frac{1}{z_l^r} \Rightarrow 1 < \sum_{j=1 \setminus i}^m \frac{1}{z_j^r} \Rightarrow \frac{1}{s_i^r} > 1$, а из доказательства 2 следует, что $s_i^r < 1$ при $m > 2$;

3) существуют $z_\theta^r|_{\theta \in \Theta} > 0 \wedge z_\theta^r|_{\theta \in \bar{\Theta}} < 0$, $\theta \in M$, $r > 1$, тогда из предыдущего рассуждения следует, что для выполнения $z_l^r \left(1 - \sum_{j=1 \setminus (l,i)}^m \frac{1}{z_j^r} \right) - 1 < 0$ необходимо, чтобы выполнялось $1 < \sum_{j \in \Theta} \frac{1}{z_j^r} + \sum_{j \in \bar{\Theta}} \frac{1}{z_j^r}$, т.е. $\frac{1}{s_\Theta^r} > 1 + \frac{1}{|s_\Theta^r|}$; в противном случае будет (8с). ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nash J.* Non-cooperative Games // *Ann. Math.* 1951. No. 54. P. 286–295.
2. *Cournot A.A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838).
3. *Bowley A.L.* The Mathematical Groundwork of Economics. Oxford: Oxford Univers. Press, 1924.
4. *Karmarkar U.S., Rajaram K.* Aggregate Production Planning for Process Industries under Oligopolistic Competition // *Eur. J. Oper. Res.* 2012. V. 223. No. (3). P. 680–689.
5. *Ledvina A., Sigar R.* Oligopoly Games under Asymmetric Costs and an Application to Energy Production // *Math. Financ. Econom.* 2012. V. 6 (4). P. 261–293.
6. *Currarini S., Marini M.A.* Sequential Play and Cartel Stability in Cournot Oligopoly // *Appl. Math. Scie.* 2013. No. 7 (1–4). P. 197–200.
7. *Vasin A.* Game-theoretic Study of Electricity Market Mechanisms // *Procedia Comput. Sci.* 2014. No. 31. P. 124–132.
8. *Sun F., Liu B., Hou F., Gui L., Chen J.* Cournot Equilibrium in the Mobile Virtual Network Operator Oriented Oligopoly Offloading Market // *IEEE Int. Conf. Commun., ICC* 2016. No. 7511340.
9. *Geraskin M.* Game-theoretic analysis of Stackelberg oligopoly with arbitrary rank reflexive behavior of agents // *Kybernetes.* 2017. V. 46(6). P. 1052–1067.
10. *Geraskin M.* Equilibria in the Stackelberg Oligopoly Reflexive Games with Different Marginal Costs of Agents // *Int. Game Theory Rev.* 2019. V. 21. No. 2. P. 1950002 (1–22).
11. *Naimzada A.K., Sbragia L.* Oligopoly Games with Nonlinear Demand and Cost Functions: Two Boundedly Rational Adjustment Processes // *Chaos, Solit. Fractal.* 2006. V. 29 (3). P. 707–722.
12. *Askar S., Alnowibet K.* Nonlinear Oligopolistic Game with Isoelastic Demand Function: Rationality and Local Monopolistic Approximation // *Chaos, Solit. Fractal.* 2016. No. 84. P. 15–22.
13. *Naimzada A., Tramontana F.* Two Different Routes to Complex Dynamics in an Heterogeneous Triopoly Game // *J. Differ. Equat. Appl.* 2015. V. 21. No. 7. P. 553–563.
14. *Cavalli F., Naimzada A., Tramontana F.* Nonlinear Dynamics and Global Analysis of a Heterogeneous Cournot Duopoly with a Local Monopolistic Approach Versus a Gradient Rule with Endogenous Reactivity // *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat.* 2015. No. 23 (1–3). P. 245–262.
15. *Stackelberg H.* Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Bazin, Urch & Hill, Springer, 2011. (Original 1934)
16. *Гераськин М.И., Чхартишвили А.Г.* Теоретико-игровые модели рынка олигополии с нелинейными функциями издержек агентов // *АиТ.* 2017. № 9. С. 106–130.
Geraskin M.I., Chkhartishvili A.G. Game-Theoretic Models of an Oligopoly Market with Nonlinear Agent Cost Functions // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. (9). P. 1631–1650.
17. *Corchyn L.C.* Comparative statics for aggregative games the strong concavity case // *Math. Social Sci.* 1994. V. 28 (3). P. 151–165.
18. *Possajennikov A.* Conjectural variations in aggregative games: An evolutionary perspective // *Math. Social Sci.* 2015. No. 77. P. 55–61.

19. *Walters A.A.* Production and cost functions: and econometric survey // *Econometrica*. 1963. V. 31. No. 1. P. 23–44.
20. *Гераськин М.И.* Моделирование рефлексии в нелинейной модели трехагентной олигополии Штакельберга для телекоммуникационного рынка России // *АиТ*. 2018. № 5. С. 83–106.
Geraskin M.I. Modeling Reflexion in the Non-Linear Model of the Stakelberg Three-Agent Oligopoly for the Russian Telecommunication Market // *Autom. Remote Control*. 2018. V. 79. No. 5. P. 841–859.
21. *Korn G., Korn T.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. N.Y.: McGraw-Hill Book Company, 1968.
22. *Петров И.Б., Лобанов А.И.* Лекции по вычислительной математике. М.: Интернет-университет Информационных Технологий: БИНОМ 2006. 523 с.
23. *Varah J.M.* A lower bound for the smallest singular value of a matrix // *Linear Algebra Its Appl.* 1975. V. 11(1). P. 3–5.
24. *Reddy Rachapalli S., Kulshreshtha P.* Evolutionarily stable conjectures and social optimality in oligopolies // *Theoret. Econ. Lett.* 2013. V. 3. No. 1. P. 12–18.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Губко.

Поступила в редакцию 23.09.2019

После доработки 25.12.2019

Принята к публикации 30.01.2020