

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2020 г. А.А. ГАЛЯЕВ, чл.-корр. РАН (galaev@ipu.ru),
П.В. ЛЫСЕНКО (pashlys@yandex.ru),
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СИНХРОНИЗАЦИЯ И КОЛЛЕКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГРУППЫ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ИДЕНТИЧНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ¹

Изучаются явления синхронизации большого количества слабо связанных осцилляторов при наличии диссипативных связей. Эти связи учитываются в уравнениях динамики системы в форме диффузионных матриц и обеспечивают асимптотически устойчивые колебания ансамбля как единого целого. В качестве примеров рассмотрены три типа взаимодействия осцилляторов: “каждый с каждым”, “с ближайшими соседями” и “кольцевое с ближайшими соседями”.

Ключевые слова: линейные системы, синхронизация, слабо связанные осцилляторы, мультиагентные системы.

DOI: 10.31857/S0005231020060050

1. Введение

Синхронизация процессов — приведение двух или нескольких процессов к такому их протеканию, когда определенные стадии разных процессов совершаются в определенном порядке или одновременно. Синхронизация возникает в тех случаях, когда параллельно протекающим процессам необходимо взаимодействовать. Синхронизация колебательных систем — давно известный человечеству феномен, широко распространенный в биологии, технике и обществе. Механические часы и метрономы, лазеры, стрекожущие сверчки, клетки сердца, аплодирующие зрители — лишь некоторые примеры систем, проявляющих тенденцию к синхронному поведению. Оказалось, что эти и многие другие случаи могут быть объединены и объяснены в рамках единой теории.

Христиан Гюйгенс был первым исследователем, описавшим явление синхронизации еще в XVII в. Во время морских испытаний механических маятниковых часов он заметил, что, будучи подвешенными на общей опоре, часы рано или поздно начинают двигаться так, что их фазы становятся строго противоположны друг другу: в тот момент, когда один маятник отклонен максимально влево, другой отклонен строго вправо. К такому движению маятники приходили вне зависимости от разницы их начальных фаз. Назвав

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы Президиума РАН № 7.

открытое явление “симпатией часов”, Гюйгенс дал ему качественное объяснение, правильно указав на причину такого поведения — связь двух часов через общую опору, балку.

С тех пор это явление, получив название синхронизации, было открыто во всех областях науки и техники — от акустики до биологии. Ярким примером являются колебания свечения светлячков на берегах реки Амазонки. Изначально “переключаясь” хаотически, светлячки каким-то образом чувствуют друг друга, начиная, подобно хлопающим в унисон аплодирующим зрителям после концерта, зажигаться и гаснуть синфазно, производя впечатление единого живого организма. Другие примеры синхронизации в биологических системах могут быть найдены, например, в [1]. Будем понимать синхронизацию как подстройку ритмов осциллирующих объектов за счет слабого взаимодействия между ними [2]. При этом важно, чтобы осцилляции каждого объекта были самоподдерживающимися, т.е. происходили бы без внешнего источника. Взаимодействие осцилляторов определяется степенью связи между ними. Уже приведенный случай взаимодействия механических часов посредством опоры обусловлен слабой связью. В публикациях синхронизацией в общем случае называется совпадение частот осцилляторов. Установившиеся фазы при этом ведут себя двояко, в системе наблюдается либо синфазное, либо противофазное движение. В первом случае фазы объектов совпадают (или почти совпадают), а во втором — отличаются на π . Первой моделью синхронизации следует считать модель Артура Уинфри, датированную 60-ми годами XX в. Он стремился описать коллективную синхронизацию в больших группах осциллирующих объектов, исходя из того, что все объекты почти идентичны и связь между ними является слабой. В его модели фаза каждого осциллятора зависит от суммарного воздействия остальных объектов группы:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \left(\sum_{j=1, j \neq i}^N X(\theta_j) \right) Z(\theta_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

где θ_i — фаза i -го осциллятора, ω_i — собственная частота i -го осциллятора, N — количество осцилляторов. Чувствительность осциллятора к коллективному движению характеризуется функцией Z , а его собственный вклад в общее движение — функцией X .

Уинфри исследовал эту модель с помощью компьютерного моделирования и аналитических приближений. Он сделал ряд качественных выводов о возможностях синхронизации в зависимости от силы связи между объектами и распределения частот объектов. В дальнейшем Йошики Курамото заинтересовался результатами Уинфри и начал работать над коллективной синхронизацией начиная с 1975 г. Исходя из тех же положений, что и его предшественник, он упростил модель и показал, что поведение систем может быть описано моделью

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

где функция Γ_{ij} определяет связь между осцилляторами i и j .

Впоследствии это выражение приобрело вид

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

где коэффициент K характеризует силу связи между осцилляторами, став общеизвестной моделью Курамото, которая заняла доминирующее положение в области работ по синхронизации. Несмотря на кажущуюся простоту идеи, стоящей за этой моделью, она представляет большой интерес и ее исследованию и численным экспериментам посвящено множество публикаций (см. [2, 3]). Как видим, связь осцилляторов в данной модели является нелинейной, тогда как линейным моделям в контексте синхронизации в публикациях уделялось меньшее внимание. Они упоминаются, например, в [2, 4]. В [5–7] рассмотрены колебания в системе осцилляторов под действием упругих сил связи и описан известный эффект перекачки энергии между осцилляторами, а также гашение колебаний в случае наличия диссипативной вязкоупругой связи между осцилляторами и при взаимодействии с жестко закрепленной средой.

В последние годы данное направление науки активно развивается как теория мультиагентных систем. Синхронизация линейных систем второго порядка рассматривается в [8, 9] с приложением к механическим системам и энергетическим сетям, в которых также известны явления синхронизации фазы и уход основной частоты под нагрузкой. Общий критерий устойчивости для систем такого рода указан в [10]. В рамках сложившейся терминологии синхронное движение связанных объектов системы называется консенсусом, а алгоритмы управления, приводящие систему к такому движению, — алгоритмами консенсуса. В [8] рассматриваются системы с диффузионно-связанными объектами. Используя язык матриц Лапласа, лапласовских потоков в графе и произведение матриц Кронекера, авторы [8] приводят и доказывают теорему о синхронизации, которая говорит о собственных числах матриц, описывающих динамическую систему. Однако в [8] не приводятся качественных оценок параметров движения объектов, соответствующих разным собственным числам. Кроме того, основной упор делается на внешнее управление системами и алгоритмы консенсуса.

В настоящей статье предлагается подход к описанию явления синхронизации в системе линейно связанных идентичных осцилляторов с упругими и вязкоупругими связями при наличии и отсутствии массивной среды передачи взаимодействия. Будут рассмотрены взаимодействия осцилляторов “каждый с каждым”, “с ближайшими соседями” и “кольцевое взаимодействие с ближайшими соседями”. Эти взаимодействия будут описаны при помощи диффузионных матриц, и будет исследована скорость установления консенсуса в зависимости от устройства этих матриц и, как следствие, их собственных чисел. Для обсуждаемых матриц будут получены результаты, которые расширяют и дополняют результаты, известные для классических матриц Тёплица, представленных, например, в [11].

2. Слабое вязкоупругое взаимодействие осцилляторов друг с другом

2.1. Уравнения движения группы синхронных осцилляторов при наличии слабого вязкоупругого взаимодействия

Рассмотрим систему синхронных осцилляторов, состоящую из N осцилляторов одной основной единичной частоты, связанных между собой слабыми вязкоупругими связями. Пронумеруем все осцилляторы по порядковому номеру i , так что $i = 1, \dots, N$. Пусть x_i является координатой i -го осциллятора, тогда вязкоупругая сила, действующая со стороны всех осцилляторов на i -й, равна

$$F_i = - \sum_{j=1}^N k_{ij}(x_i - x_j) - 2 \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(\dot{x}_i - \dot{x}_j),$$

$i, j = 1, \dots, N$, а $k_{ij}, \alpha_{ij} \geq 0$.

Движение группы осцилляторов описывается системой линейных дифференциальных уравнений (ЛДУ) следующего вида

$$(2.1) \quad \ddot{x}_i = -x_i - \sum_{j=1}^N k_{ij}(x_i - x_j) - 2 \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(\dot{x}_i - \dot{x}_j), \quad i = 1, \dots, N.$$

Слабость связи определяется условиями $\sum_{j=1}^N k_{ij} \ll 1$, $\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \ll 1$ для всех $i = 1, \dots, N$, взаимность связи — условиями $k_{ij} = k_{ji}$, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для всех $i, j = 1, \dots, N$.

Через H обозначим сумму энергий осцилляторов без учета энергии взаимодействия их друг с другом, т.е.

$$(2.2) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\dot{x}_i^2 + x_i^2).$$

Потенциальная энергия слабого вязкоупругого взаимодействия определяется выражением

$$(2.3) \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i>j}^N k_{ij} (x_i - x_j)^2.$$

Полная энергия системы равна $H + U$.

2.2. Преобразование уравнений движения

В тензорных обозначениях, где ведется суммирование по повторяющимся индексам, система уравнений движения принимает вид

$$(2.4) \quad \ddot{x}_i(t) = -E_{ij}x_j(t) - K_{ij}x_j(t) - 2\Phi_{ij}\dot{x}_j(t),$$

где E — единичная матрица. Матрицы K , Φ являются симметрическими, причем

$$\Phi_{ij} = \alpha_{ij}, \quad K_{ij} = k_{ij} \quad \text{при} \quad i \neq j$$

и

$$\Phi_{ii} = - \sum_{j=1, i \neq j}^N \alpha_{ij}, \quad K_{ii} = - \sum_{j=1, i \neq j}^N k_{ij}.$$

В дальнейшем будем исследовать случай, когда $\Phi = \alpha A$, $K = \beta A$, где α , β — константы. Тогда уравнение (2.4) примет вид

$$(2.5) \quad \ddot{x}_i(t) = -E_{ij}x_j(t) - \beta A_{ij}x_j(t) - 2\alpha A_{ij}\dot{x}_j(t).$$

3. Основные положения

3.1. Собственные числа системы (2.5)

Справедлива лемма 1.

Лемма 1. Характеристическое уравнение, порожденное системой (2.5),

$$(3.1) \quad \det(\sigma^2 E_{ij} + 2\sigma\alpha A_{ij} + E_{ij} + \beta A_{ij}) = 0,$$

имеет решения вида

$$(3.2) \quad \sigma_i = -\alpha\lambda_i \pm i\sqrt{1 + \beta\lambda_i - \alpha^2\lambda_i^2}, \quad i = 1, \dots, N,$$

где λ_i — собственные числа матрицы A .

Далее, чтобы определить динамику системы (2.5), нужно найти собственные числа матрицы A .

Лемма 2. Хотя бы одно из собственных чисел матрицы A равно нулю.

3.2. Динамика систем (2.4)–(2.5)

Лемма 3. Для системы ЛДУ вида (2.4) с любыми отличными от тривиальных начальными условиями существует решение, соответствующее коллективному периодическому движению центра масс с периодом 2π .

Лемма 4. Если $\lambda_i > 0$ для $\forall i = 2, \dots, N$, а $\lambda_1 = 0$, то для любого начального положения системы (2.5) при $t \rightarrow \infty$ остается только синхронизованное коллективное движение.

Леммы 1–4 известны как теорема о синхронизации [8].

Пусть начальное состояние системы (2.5) задается векторами $x_i(0) = x_i^0$, $\dot{x}_i(0) = \dot{x}_i^0$. Тогда начальное состояние для коллективного движения задается векторами $X(0) = \sum_{i=1}^N x_i(0) = X^0$, $\dot{X}(0) = \sum_{i=1}^N \dot{x}_i(0) = \dot{X}^0$.

Энергия системы осцилляторов в начальный момент времени была равна

$$(3.3) \quad H(0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (x_i^2(0) + \dot{x}_i^2(0)).$$

На бесконечном горизонте времени все осцилляторы движутся синхронно и в системе осцилляторов остается энергия, равная начальной энергии коллективного движения, а именно

$$(3.4) \quad H^* = \frac{1}{2N^2} \sum_{i=1}^N (X^2(0) + \dot{X}^2(0)) = \frac{1}{2N} (X^2(0) + \dot{X}^2(0)).$$

Соотношение (3.4) может быть переписано в виде

$$(3.5) \quad H^* = \frac{1}{2N} \left(\left(\sum_{i=1}^N x_i(0) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N \dot{x}_i(0) \right)^2 \right).$$

Следствие 1. Из сравнения (3.3) и (3.5) следует, что

$$H(0) \geq H^*,$$

причем знак равенства возможен, только если $x_i(0) = x_j(0)$, $\dot{x}_i(0) = \dot{x}_j(0)$ для любых $i, j = 1, \dots, N$.

Действительно,

$$H(0) - H^* = \frac{1}{2N} \left(\sum_{i,j=1, i>j}^N (x_i(0) - x_j(0))^2 + \sum_{i,j=1, i>j}^N (\dot{x}_i(0) - \dot{x}_j(0))^2 \right) \geq 0.$$

4. Примеры матриц взаимодействия

4.1. Идентичное взаимодействие осцилляторов каждый с каждым

Предположим, что каждый из осцилляторов взаимодействует с каждым одинаково, тогда матрица A имеет вид

$$(4.1) \quad A = \begin{pmatrix} N-1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ -1 & N-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & N-1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & N-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & N-1 \end{pmatrix}.$$

Такая матрица A описана в монографии [12] как матрица простой симметричной системы. В [12] исследованы ее собственные числа и указан исследуемый в данной статье случай $a = (n-1)b$, перекрестные связи между осцилляторами в этом случае называются синхронизирующими.

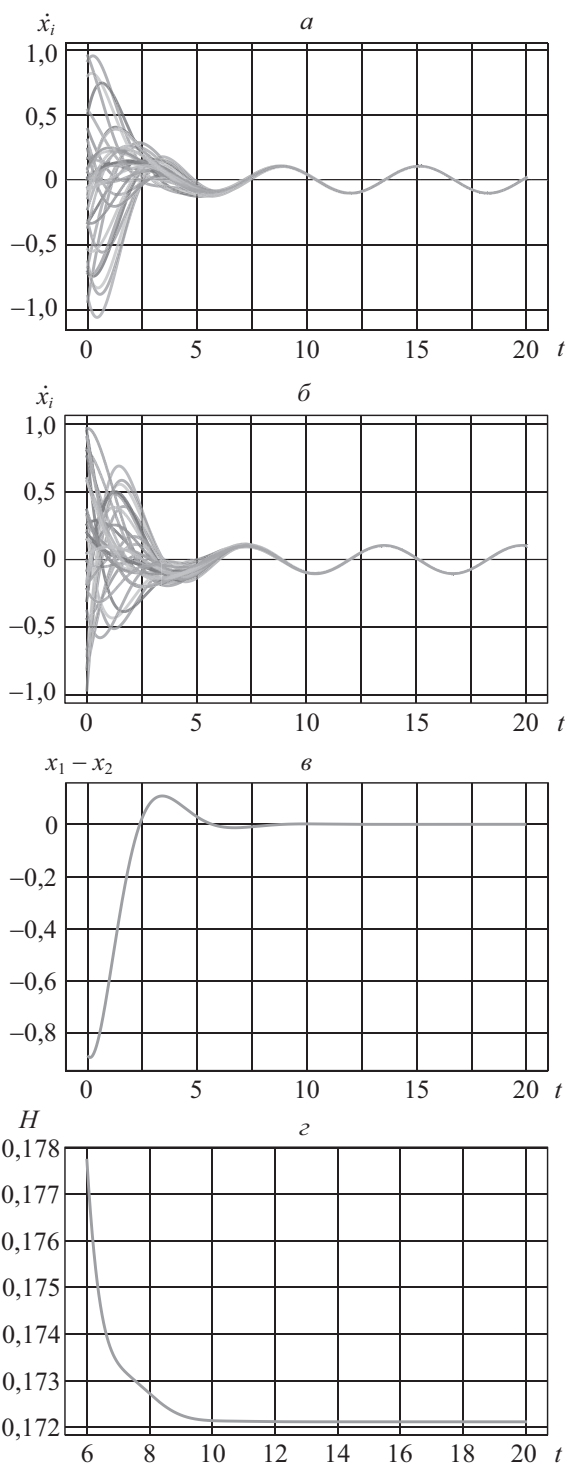


Рис. 1. Поведение системы осцилляторов.

Лемма 5. Матрица A имеет два собственных значения, а именно: $\lambda^A = 0$ кратности единица и $\lambda^A = N$ кратности $N - 1$.

Согласно леммам 1 и 5 динамика системы (2.5) обуславливается собственными числами $\sigma_{1,2} = \pm i$ кратности единица и $\sigma_{3,4} = -\alpha N \pm i\sqrt{1 + \beta N - \alpha^2 N^2}$ кратности $N - 1$.

Результат моделирования динамики системы осцилляторов в случае $N = 32$ показан на рис. 1.

4.2. Идентичное взаимодействие осцилляторов с ближайшими соседями

Пусть матрица A имеет вид

$$(4.2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вместо матрицы A подвергнем исследованию матрицу $B = 2E - A$, которую выпишем в явном виде

$$(4.3) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы B находятся по свойству собственных значений матриц, приведенному в доказательстве леммы 5, а именно $\lambda_i^B = 2 - \lambda_i$. Пусть N — размер квадратной матрицы B . Обозначим через

$$G_N(\lambda) = \det(B - \lambda E)$$

характеристические полиномы матрицы B .

Теорема 1. Функции $G_N(\lambda)$ при различных фиксированных $N \geq 3$ удовлетворяют рекуррентной формуле

$$(4.4) \quad \begin{cases} G_{N+1}(\lambda) = -\lambda G_N(\lambda) - G_{N-1}(\lambda), \\ G_3(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda - 2)(1 + \lambda), \\ G_2(\lambda) = \lambda(\lambda - 2). \end{cases}$$

Лемма 6. Члены последовательности (4.4) имеют формулу общего члена вида

$$(4.5) \quad G_N(\lambda) = \frac{2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \left(\left(\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^N - \left(\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^N \right).$$

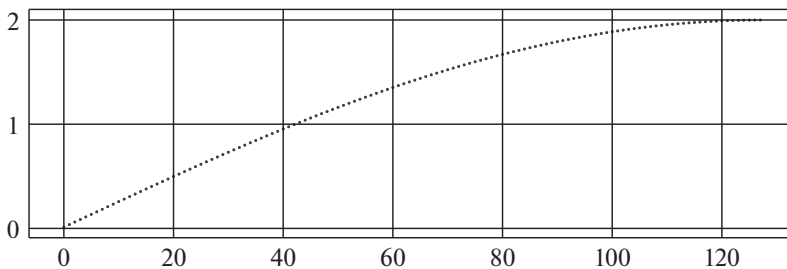


Рис. 2. Распределение собственных чисел матрицы A для $N = 8$.

Проведем сравнение полученного результата с результатом в [11, с. 219]. Матрица $B - \lambda E$ похожа на матрицу Тёплица A из [11], за исключением первого и последнего диагональных элементов. В терминах [11] $b = -\lambda$, $a = c = 1$, а первый и последний диагональные элементы равны $1 - \lambda$. Нетрудно видеть, что формула (4.5) аналогична формуле из факта 3.20.7 монографии [11] в случае $b^2 \neq 4ac$ за исключением степени, равной N вместо $N + 1$ и дополнительного коэффициента $2 - \lambda$.

Пример расположения на числовой оси собственных чисел, которые являются решением уравнения $G_N(\lambda) = 0$, приведен на рис. 2.

Лемма 7. Пусть матрицы A и B имеют размеры $N \times N$, где $N = 2^n$, $n \geq 2$ и $G_{2^n}(\lambda) = \det(B - \lambda E)$. Тогда

$$(4.6) \quad G_{2^n}(\lambda) = G_{2^{n-1}}(\lambda) \cdot \left(\frac{G_{2^{n-1}}^2(\lambda)}{G_{2^{n-2}}^2(\lambda)} - 2 \right),$$

где $G_{2^1}(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)$, $G_{2^0}(\lambda) \triangleq \lambda$,

или, что то же самое,

$$G_{2^n}(\lambda) = G_{2^1}(\lambda) \cdot \prod_{k=2}^n \left(\frac{G_{2^{k-1}}^2(\lambda)}{G_{2^{k-2}}^2(\lambda)} - 2 \right),$$

при этом вычисленное по матрице $B - \lambda E$ значение $G_{2^0}(\lambda) = 1 - \lambda$ и отличается от допущения в формуле (4.6).

Лемма 8. Если λ_k^B — собственные числа матрицы B размера 2^{n-1} , то $\pm \sqrt{2 + \lambda_k^B}$ — собственные числа матрицы B размера 2^n .

Следствие 2. Если λ_k^B — собственные числа матрицы B размера N , то $\pm \sqrt{2 + \lambda_k^B}$ — собственные числа матрицы B размера $2N$.

Доказательство следствия аналогично доказательству леммы 8.

Рассмотрим свойства собственных чисел матрицы B размера 2^n .

Свойство 1. Числа 0 и 2 являются собственными числами матрицы B размера 2^n для всех $n \geq 1$.

Свойство 2. $|\lambda_k^B| \leq 2$ для всех $n \geq 1$ и $k = 1, \dots, 2^n$.

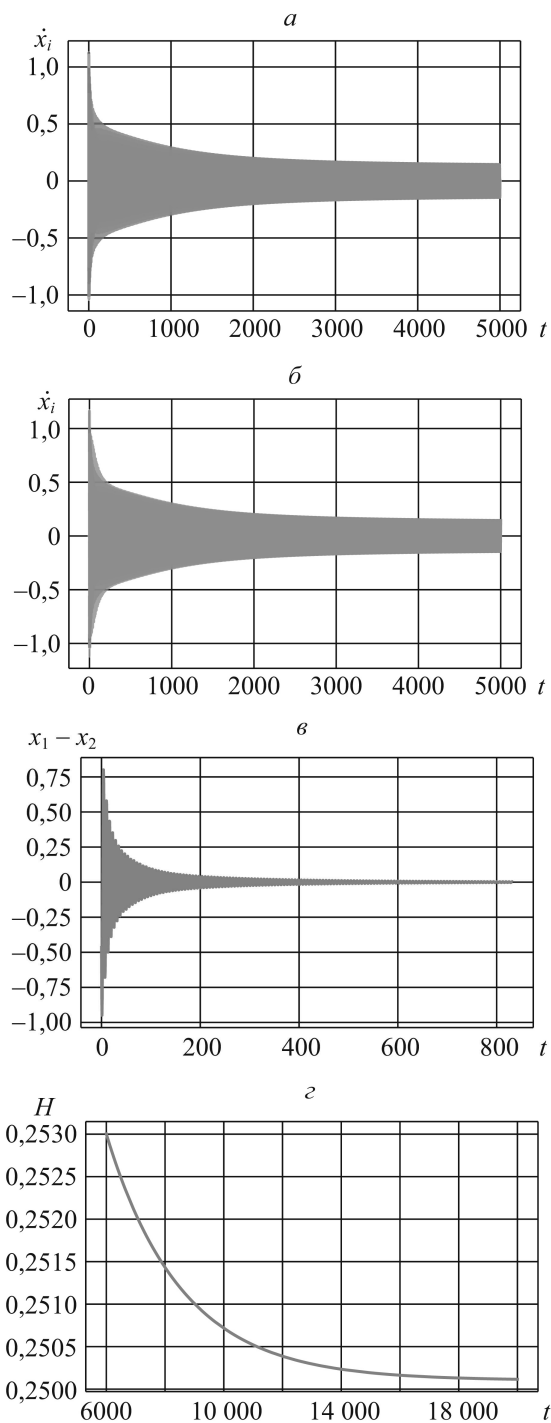


Рис. 3. Поведение системы осцилляторов при взаимодействии с “ближайшими соседями”.

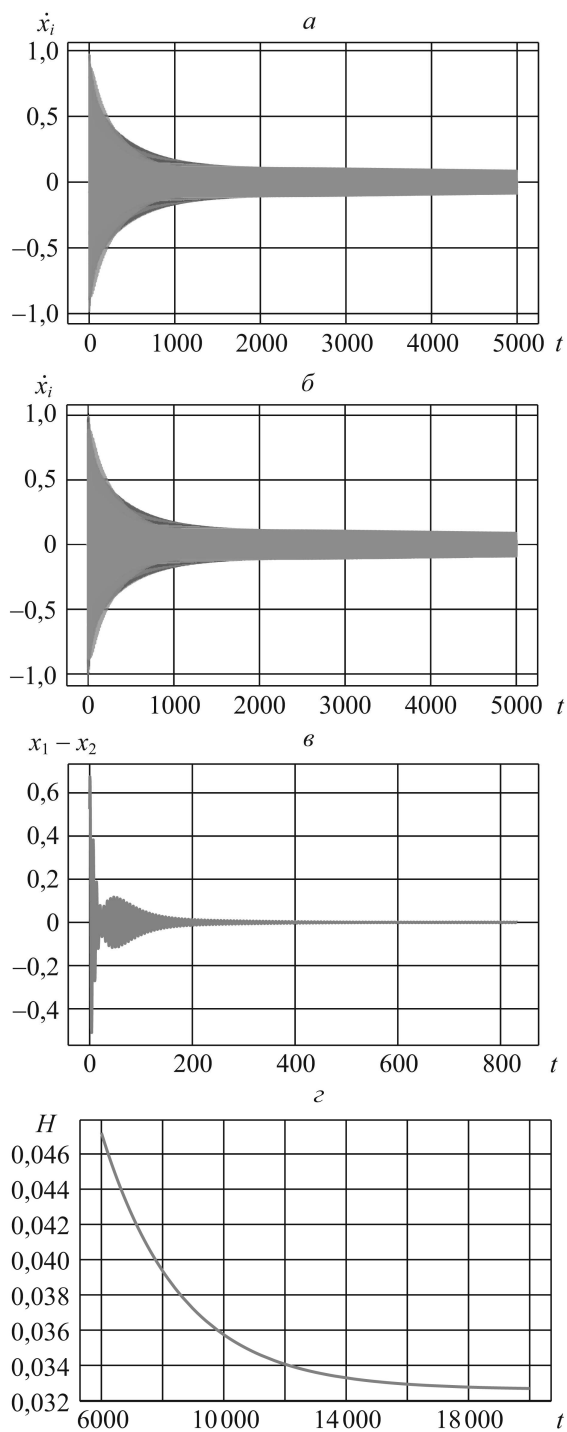


Рис. 4. Поведение системы осцилляторов при взаимодействии с “ближайшими соседями”.

Свойство 3. Среди λ_k^B присутствует собственное значение

$$(4.7) \quad \lambda^B = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-1}.$$

Свойство 1 следует из леммы 7, так как корни уравнения $G_{2^1}(\lambda) = 0$ являются общими для всех многочленов $G_{2^n}(\lambda)$ и всех $n \geq 1$.

Свойство 2 следует из вида собственных чисел, представленных в лемме 8, и свойства функции квадратного корня.

Свойство 3 справедливо, если в лемме 8 выбирать только знак “плюс” при вычислении собственных чисел начиная с $\lambda_1^B = 0$.

Свойство 2 означает, что у исходной матрицы A все $\lambda_i > 0$ кроме единственного собственного значения, отвечающего за коллективное движение системы как единого целого. Выбрав собственное число матрицы B из свойства 3, получим, что у матрицы A размера 2^n есть собственное число, равное

$$(4.8) \quad \lambda^A(n) = 2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-1}.$$

Поскольку λ^A близко к нулю, то в системе, помимо коллективного движения с единичной частотой, будет присутствовать слабо затухающее движение с частотой примерно $1 + \frac{\beta \lambda^A}{2}$.

Следствие 3. Для $\lambda^A(n)$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^A(n)}{\lambda^A(n+1)} = 4.$$

Следствие 3 означает, что для больших n скорость затухания осцилляций моды колебаний, наиболее близкой к основной частоте равной единице, или скорость установления консенсуса, при увеличении размерности системы в 2 раза уменьшается в 4 раза.

Результат моделирования в случае $N = 32$ для двух наборов начальных условий показан на рис. 3 и 4.

4.3. Идентичное кольцевое взаимодействие осцилляторов с ближайшими соседями

Матрица A имеет вид

$$(4.9) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Как и в подразделе 4.2, вместо матрицы A будем исследовать матрицу $B = 2E - A$, которая имеет вид

$$(4.10) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стоит отметить, что исследуемая матрица A по сути является матрицей Лапласа в терминах теории мультиагентных систем и теории сетей [8, 11], так как матрица $2E$ — это степенная матрица D для графа с матрицей смежности B , соответствующего исследуемой системе.

Собственные значения матрицы B находятся по свойству собственных значений матриц, приведенному в доказательстве леммы 5, а именно $\lambda_i^B = 2 - \lambda_i$. Для характеристических полиномов матрицы B справедлива теорема 2.

Теорема 2. Функции $G_N(\lambda)$ при различных фиксированных $N \geq 5$ удовлетворяют рекуррентной формуле

$$(4.11) \quad \begin{cases} G_{N+1}(\lambda) = -(1 + \lambda)G_N(\lambda) - (1 + \lambda)G_{N-1}(\lambda) - G_{N-2}(\lambda), \\ G_5(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 5\lambda + 2, \\ G_4(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2, \\ G_3(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2. \end{cases}$$

Выведем формулу общего члена последовательности (4.11).

Лемма 9. Члены последовательности (4.11) имеют формулу общего члена вида

$$(4.12) \quad G_N(\lambda) = \left(\left(\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^N + \left(\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^N + 2 \cdot (-1)^{N+1} \right).$$

Лемма 10. Если λ_k^B — собственные числа матрицы B размера 2^{n-1} , то $\pm \sqrt{2 + \lambda_k^B}$ — собственные числа матрицы B размера 2^n .

Следствие 4. Если λ_k^B — собственные числа матрицы B размера N , то $\pm \sqrt{2 + \lambda_k^B}$ — собственные числа матрицы B размера $2N$.

Доказательство следствия аналогично доказательству леммы 10.

Лемма 11. Если λ_k^B — собственные числа матрицы B размера N вида (4.3) (отсутствие кольцевого взаимодействия между ближайшими соседями), являющиеся нулями $G_N(\lambda)$ вида (4.5), то λ_k^B — собственные числа кратности два матрицы B размерности $2N$ вида (4.10) (наличие кольцевого взаимодействия между ближайшими соседями), являющиеся нулями

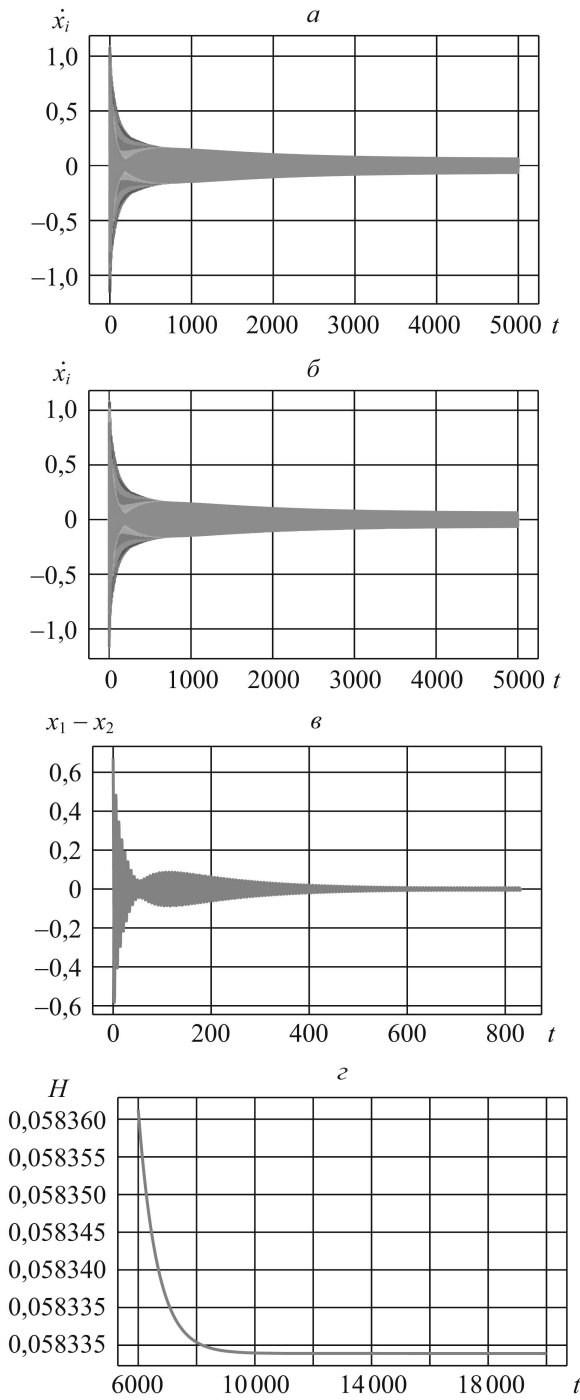


Рис. 5. Поведение системы осцилляторов при кольцевом взаимодействии с “ближайшими соседями”.

$G_{2N}(\lambda)$ вида (4.12), кроме $\lambda^B = \pm 2$ кратности единица, т.е.

$$(4.13) \quad \underbrace{G_{2N}(\lambda)}_{(4.12)} = \frac{\lambda + 2}{2 - \lambda} \underbrace{G_N^2(\lambda)}_{(4.5)}.$$

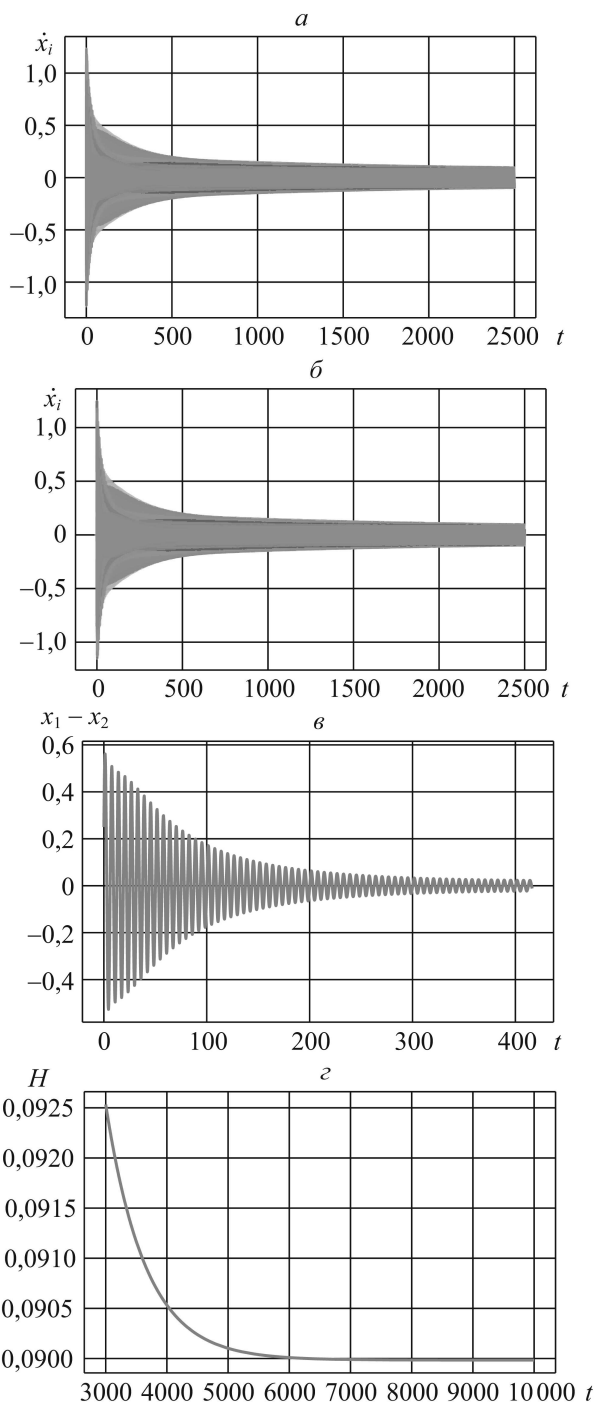


Рис. 6. Поведение системы осцилляторов при кольцевом взаимодействии с “ближайшими соседями”.

Результат моделирования в случае $N = 32$ для двух наборов начальных условий показан на рис. 5 и 6.

5. Взаимодействие осцилляторов друг с другом и со средой

Добавим в рассматриваемую систему осцилляторов среду и предположим, что у каждого из осцилляторов есть возможность воздействовать на среду посредством только упругой связи. Пусть координаты среды имеют индекс 0, а взаимодействие осуществляется посредством силы $F_{i0} = -k_{i0}(x_i - x_0)$.

Движение группы осцилляторов и среды описывается системой ЛДУ вида:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} M\ddot{x}_0 &= -\sum_{j=1}^N k_{0j}(x_0 - x_j), \\ \ddot{x}_i &= -x_i - \sum_{j=0}^N k_{ij}(x_i - x_j) - 2\sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(\dot{x}_i - \dot{x}_j), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Здесь M — безразмерная константа, пропорциональная массе среды. Дополнительное условие взаимности связи со средой определяется соотношением $k_{0j} = k_{j0} = k$ для всех $j = 1, \dots, N$, остальные условия такие же, как в случае отсутствия среды.

Лемма 12. В системе “осцилляторы–среда”, описываемой системой (5.1), для любых начальных условий существует периодическое коллективное движение двух типов с частотами

$$(5.2) \quad \omega_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{kM + Nk + M \pm \sqrt{M^2k^2 + 2MNk^2 + N^2k^2 + 2M^2k - 2MNk + M^2}}}{\sqrt{M}}.$$

В случае когда $k \ll 1$, $\frac{Nk}{M} \ll 1$, эти частоты становятся приблизительно равными

$$(5.3) \quad \omega_1 \approx 1 + \frac{k}{2}, \quad \omega_2 \approx \sqrt{\frac{Nk}{M}}.$$

Это означает, что в системе присутствуют колебания осцилляторов как единого целого с незначительно измененной основной частотой ω_1 ($\omega_1 - 1 = \frac{k}{2} \ll 1$)

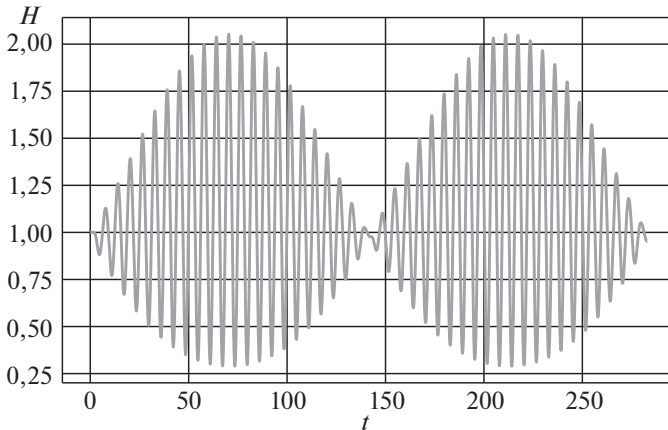


Рис. 7. Энергия системы осцилляторов.

и низкочастотные колебания системы с частотой ω_2 , связанные с массивной средой. Интересен случай $N = M$. Оказывается, что при малых k сохраняется неравенство $\omega_2 \ll \omega_1$. Пример зависимости $H(t)$ приведен на рис. 7.

6. Обсуждение результатов

На рис. 1, 3, 4, 5 и 6 представлены динамика каждого осциллятора в отдельности, динамика разности координат первого и второго осцилляторов, а также поведение энергии системы (без учета взаимодействия) как функции времени для трех типов взаимодействия между осцилляторами. Средствами языка Python моделируется движение каждого из осцилляторов. Начальные значения скоростей и координат выбраны произвольным образом в диапазоне $[0, 1]$, $\alpha = 0,02$, $\beta = 0,01$. На рис. 5 и 6 темпы установления коллективного движения соответствуют отличному от нулевого минимальному по модулю собственному значению матрицы A , $\lambda = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ и равны $2\alpha\lambda = 0,001536$. На рис. 3 и 4 темпы установления коллективного движения в четыре раза меньше и равны 0,000384, что согласуется со следствием 3. На рис. 1, 3, 4, 5 и 6 отличаются установившиеся уровни кинетической энергии системы осцилляторов, которые могут быть найдены по формуле (3.5) по известным начальным условиям. Из сравнения динамики разности $x_1 - x_2$ на рис. 3 и 4, а также на рис. 5 и 6 видно, что амплитуда этой разности изменяется во времени по-разному. На рис. 3 и 6 амплитуда уменьшается монотонно, а на рис. 4 и 5 монотонность отсутствует, имеется во времени ярко выраженный максимум, после которого появляется монотонность убывания. Со временем в системе осцилляторов остается только их коллективное движение как единого целого, а именно незатухающие колебания на их основной частоте.

Когда появляется массивная среда, то в системе со временем остаются колебания двух типов: низкочастотные, соответствующие взаимодействию системы со средой, и собственные колебания осцилляторов как единого целого. Как видно из рис. 7, при наличии среды происходит перераспределение энергии между осцилляторами и средой, амплитуда колебаний осцилляторов то увеличивается, то уменьшается.

7. Заключение

Скорость установления консенсуса в динамических и мультиагентных системах является определяющей для их возможности проявлять на конечном горизонте времени коллективное поведение. Оказывается, что с возрастанием размерности системы в два раза эта скорость линейно возрастает с установленным в статье коэффициентом, равным четырем. С другой стороны, когда в системе присутствуют различные типы агентов, ее коллективная динамика становится более разнообразной, зависящей от свойств подсистем. Используемая модель позволяет в любой момент времени изменить количественный состав осцилляторов добавлением или удалением из нее любого их числа. Поэтому будущая статья будет посвящена исследованию явления синхронизации в переменной по количественному составу системе идентичных осцилляторов.

Доказательство леммы 1. Поскольку собственные значения симметрической матрицы A вещественные, то существует ортогональная замена переменных $\xi_i = Q_{ij}x_j$, где $Q_{ik}Q_{kj}^{-1} = E_{ij}$, которая приводит систему уравнений (2.5) к виду (здесь суммирование по индексу i отсутствует)

$$(П.1) \quad \ddot{\xi}_i(t) + 2\alpha(\text{diag } \lambda_i)\dot{\xi}_i(t) + (1 + \beta \text{diag } \lambda_i)\xi_i(t) = 0.$$

Характеристическое уравнение для системы (П.1) принимает вид

$$(П.2) \quad \prod_{i=1}^N (\sigma^2 + 2\alpha\lambda_i\sigma + 1 + \beta\lambda_i) = 0.$$

Все решения уравнения (П.2) задаются выражением (3.2). Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Строки матрицы A являются линейно зависимыми. Действительно, из вида матрицы A следует, что $\sum_{i=1}^N A_{ij} = 0$ для $\forall j$. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. При доказательстве леммы 3 зависимость от t опускаем. Обозначим $X = \sum_{i=1}^N x_i$. Просуммируем все уравнения системы (2.4). Получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= \sum_{i=1}^N \ddot{x}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (-E_{ij}x_j - K_{ij}x_j - 2\Phi_{ij}\dot{x}_j) = \\ &= -\sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N K_{ii}x_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N K_{ij}x_j - 2\sum_{i=1}^N \Phi_{ii}\dot{x}_i - 2\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \Phi_{ij}\dot{x}_j = \\ &= -X + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N K_{ij}x_j - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N K_{ij}x_j + \\ &+ 2\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \Phi_{ij}\dot{x}_j - 2\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \Phi_{ij}\dot{x}_j = -X. \end{aligned}$$

Получили ЛДУ второго порядка

$$(П.3) \quad \ddot{X} = -X,$$

которому соответствует периодическое движение с периодом 2π для любых отличных от тривиальных начальных условий. Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Утверждение леммы следует из леммы 1, так как $\text{Re } \sigma_i = -\alpha\lambda_i < 0$ при $\lambda_i > 0$. Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 5. Воспользуемся свойством для собственных чисел матрицы $\tilde{A} = A - NE$. Если $\tilde{\lambda}_i$ — собственное число матрицы $\tilde{A}$,

то $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i - N$. Матрица $\tilde{A}$ имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Все строки матрицы $\tilde{A}$ одинаковы, поэтому $\tilde{\lambda} = 0$ — собственное число этой матрицы кратности $N - 1$, т.е. $\tilde{\lambda}_i = 0$ для $i = 1, \dots, N - 1$. Далее заметим, что $\text{Sp} \tilde{A} = -N = \tilde{\lambda}_N$. Такой же вывод последовал бы, если сравнить $\lambda_N = 0$, полученное в лемме 2, и оставшееся последним найденным $\tilde{\lambda}_N$. Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 1. Вычислим сначала $G_N(\lambda)$ через $J_i(\lambda)$, где $J_i(\lambda)$ — детерминанты матрицы, полученной из матрицы $B - \lambda E$ вычеркиванием последних $N - i$ строк и столбцов при $i = 2, \dots, N - 1$. Далее доказательство аналогично теореме 1 из [6].

Справедливы следующие рекуррентные формулы, если начать вычислять детерминант со строки с номером N , в которых опускаем зависимость от λ ,

$$(П.4) \quad \begin{cases} G_N = (1 - \lambda)J_{N-1} - J_{N-2}, \\ J_{N-1} = -\lambda J_{N-2} - J_{N-3}, \\ J_{n+1} = -\lambda J_n - J_{n-1}, \\ J_2 = -\lambda(1 - \lambda) - 1. \end{cases}$$

Применим формулы (П.4) для систем, состоящих из N и $N + 1$ тел, и составим разность $G_{N+1} - G_N$. Она равна

$$\begin{aligned} G_{N+1} - G_N &= (1 - \lambda)J_N - J_{N-1} - (1 - \lambda)J_{N-1} + J_{N-2} = \\ &= (1 - \lambda)J_N - (2 - \lambda)J_{N-1} + J_{N-2}. \end{aligned}$$

Заменим J_{N-2} его выражением из (П.4) на $(-\lambda J_{N-1} - J_N)$. Тогда эта разность равна

$$(П.5) \quad G_{N+1} - G_N = (1 - \lambda)J_N - (2 - \lambda)J_{N-1} - \lambda J_{N-1} - J_N = -\lambda J_N - 2J_{N-1}.$$

Из первой формулы (П.4) и (П.5) получаем еще одно равенство

$$G_N = J_N + J_{N-1}.$$

Из двух последних формул получаем

$$G_{N+1} - G_N = -\lambda G_N + (\lambda - 2)J_{N-1}.$$

Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} G_{N+1} &= -\lambda G_N + (\lambda - 2)J_{N-1} + G_N = -\lambda G_N + (\lambda - 1)J_{N-1} + J_N = \\ &= -\lambda G_N - J_{N-1} - J_{N-2} = -\lambda G_N - G_{N-1}. \end{aligned}$$

Получили первое уравнение рекуррентной формулы (4.4). Функции $G_2(\lambda)$, $G_3(\lambda)$ появляются в результате прямого вычисления детерминантов при $N = 2, 3$ соответственно. Доказательство теоремы 1 завершено.

Доказательство леммы 6. Запишем характеристическое уравнение для последовательности (4.4):

$$\gamma^{N+1} = -\lambda\gamma^N - \gamma^{N-1}.$$

Получаем квадратное уравнение для γ

$$\gamma^2 + \lambda\gamma + 1 = 0,$$

корни которого равны

$$\gamma_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}.$$

Таким образом, для общего члена последовательности $G_N(\lambda)$ можно записать

$$(П.6) \quad G_N(\lambda) = C_1(\lambda)\gamma_1^N + C_2(\lambda)\gamma_2^N.$$

$C_1(\lambda), C_2(\lambda)$ можно найти, используя первые члены последовательности $G_N(\lambda)$:

$$\begin{aligned} G_2(\lambda) &= \lambda(\lambda - 2), \\ G_3(\lambda) &= (1 - \lambda)(\lambda - 2)(1 + \lambda). \end{aligned}$$

Подставив функции $G_2(\lambda)$, $G_3(\lambda)$ в (П.6), получаем систему уравнений относительно $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$:

$$\begin{cases} C_1(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^2 + C_2(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^2 = \lambda(\lambda - 2), \\ C_1(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^3 + C_2(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^3 = (1 - \lambda)(\lambda - 2)(1 + \lambda). \end{cases}$$

Из этой системы находим функции

$$\begin{aligned} C_1(\lambda) &= \frac{2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}}, \\ C_2(\lambda) &= -\frac{2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}}. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$, γ_1 и γ_2 в (П.6), получаем утверждение леммы 6.

Доказательство леммы 7. Для доказательства воспользуемся утверждением леммы 6. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2 - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}}, \\ a &= \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}, \\ b &= \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}. \end{aligned}$$

Формула общего члена последовательности G_N примет вид (зависимость от λ опускаем)

$$G_N = C_1(a^N - b^N).$$

Подставим G_N в таком виде в правую часть (4.6) и получим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} G_{2^n} &= C_1(a^{2^{n-1}} - b^{2^{n-1}}) \left(\left(\frac{a^{2^{n-1}} - b^{2^{n-1}}}{a^{2^{n-2}} - b^{2^{n-2}}} \right)^2 - 2 \right) = \\ &= C_1(a^{2^{n-1}} - b^{2^{n-1}}) \left(\left(\frac{(a^{2^{n-2}} - b^{2^{n-2}})(a^{2^{n-2}} + b^{2^{n-2}})}{a^{2^{n-2}} - b^{2^{n-2}}} \right)^2 - 2 \right) = \\ &= C_1(a^{2^{n-1}} - b^{2^{n-1}}) \left((a^{2^{n-2}} + b^{2^{n-2}})^2 - 2 \right) = \\ (\text{П.7}) \quad &= C_1(a^{2^{n-1}} - b^{2^{n-1}}) (a^{2^{n-1}} + b^{2^{n-1}} + 2(ab)^{2^{n-2}} - 2). \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что

$$ab = \frac{1}{4}(\lambda^2 - \lambda^2 + 4) = 1.$$

Поэтому выражение (П.7) принимает вид

$$(\text{П.8}) \quad G_{2^n} = C_1(a^{2^{n-1}} - b^{2^{n-1}})(a^{2^{n-1}} + b^{2^{n-1}}),$$

что является полным квадратом и приводится к виду

$$G_{2^n} = C_1(a^{2^n} - b^{2^n}) = G_{2^n}.$$

Лемма 7 доказана.

Доказательство леммы 8. Воспользуемся обозначениями леммы 7. Предположим, что $\lambda = \pm\sqrt{2 + \lambda_k^B}$, где λ_k^B — собственные числа матрицы B размера 2^{n-1} , и вычислим $G_{2^n}(\pm\sqrt{2 + \lambda_k^B})$. Справедлива цепочка равенств:

$$G_{2^n}(\pm\sqrt{2 + \lambda_k^B}) = C_1(a^{2^n} - b^{2^n}) = C_1((a^2)^{2^{n-1}} - (b^2)^{2^{n-1}}) =$$

$$\begin{aligned}
&= C_1 \left(\left(\frac{2 + \lambda_k^B - 2 + \lambda_k^B - 2\sqrt{(\lambda_k^B)^2 - 4}}{4} \right)^{2^{n-1}} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{2 + \lambda_k^B - 2 + \lambda_k^B + 2\sqrt{(\lambda_k^B)^2 - 4}}{4} \right)^{2^{n-1}} \right) = \\
&= C_1 \left(\left(\frac{\lambda_k^B - \sqrt{(\lambda_k^B)^2 - 4}}{2} \right)^{2^{n-1}} - \left(\frac{\lambda_k^B + \sqrt{(\lambda_k^B)^2 - 4}}{2} \right)^{2^{n-1}} \right) = \\
&= C_1 \left(\left(\frac{-\lambda_k^B + \sqrt{(\lambda_k^B)^2 - 4}}{2} \right)^{2^{n-1}} - \left(\frac{-\lambda_k^B - \sqrt{(\lambda_k^B)^2 - 4}}{2} \right)^{2^{n-1}} \right) = \\
&\quad G_{2^{n-1}}(\lambda_k^B) = 0.
\end{aligned}$$

Лемма 8 доказана.

Доказательство следствия 2. Выпишем отношение указанных собственных значений в явном виде и получим

$$\frac{\lambda^A(n)}{\lambda^A(n+1)} = \frac{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-1}}{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_n} = 2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_n.$$

Осуществим предельный переход в последнем выражении при $n \rightarrow \infty$. Следствие 2 доказано.

Доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы 2 проведем аналогично доказательству теоремы 1. Вычислим сначала $G_{N+1}(\lambda)$ через $J_i(\lambda)$, которые являются детерминантами матрицы

$$(II.9) \quad D = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

размера i .

Справедливы следующие рекуррентные формулы, если начать вычислять детерминант матрицы D со строки с номером 1, а затем со столбца с номером 1, в которых опускаем зависимость от λ ,

$$(II.10) \quad G_{N+1} = -\lambda J_N - 2J_{N-1} + 2(-1)^N.$$

Для J_{N+1} справедлива рекуррентная формула

$$(П.11) \quad J_{N+1} = -\lambda J_N - J_{N-1}.$$

Покажем справедливость первой формулы в (4.11), вычислив разность ее левой и правой частей и несколько раз воспользовавшись соотношениями (П.10) и (П.11):

$$\begin{aligned} & G_{N+1} + (1 + \lambda)G_N + (1 + \lambda)G_{N-1} + G_{N-2} = \\ & = -\lambda J_N - 2J_{N-1} + 2(-1)^N - (1 + \lambda)(\lambda J_{N-1} + 2J_{N-2} + 2(-1)^N) - \\ & - (1 + \lambda)(\lambda J_{N-2} + 2J_{N-3} - 2(-1)^N) - \lambda J_{N-3} - 2J_{N-4} - 2(-1)^N = \\ & = -\lambda J_N - 2J_{N-1} - (1 + \lambda)(-J_N + J_{N-2}) - \\ & - (1 + \lambda)(-J_{N-1} + J_{N-3}) - \lambda J_{N-3} - 2J_{N-4} = \\ & = J_N - J_{N-1} + \lambda J_{N-1} - J_{N-2} - \lambda J_{N-2} - J_{N-3} - \lambda J_{N-3} + J_{N-2} - J_{N-4} = \\ & = -J_{N-2} - \lambda J_{N-3} - J_{N-4} = 0. \end{aligned}$$

Значения $G_3(\lambda)$, $G_4(\lambda)$, $G_5(\lambda)$ вычисляются непосредственно. Теорема 2 доказана.

Доказательство леммы 9. Запишем характеристическое уравнение для последовательности (4.11):

$$\gamma^{N+1} = -(1 + \lambda)\gamma^N - (1 + \lambda)\gamma^{N-1} - \gamma^{N-2}.$$

Получаем кубическое уравнение для γ :

$$\gamma^3 + (1 + \lambda)\gamma^2 + (1 + \lambda)\gamma + 1 = 0,$$

корни которого равны

$$\gamma_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}, \quad \gamma_3 = -1.$$

Таким образом, для общего члена последовательности $G_N(\lambda)$ справедливо

$$(П.12) \quad G_N(\lambda) = C_1(\lambda)\gamma_1^N + C_2(\lambda)\gamma_2^N + C_3(-1)^N.$$

$C_{1,2,3}(\lambda)$ можно найти, используя первые члены последовательности $G_N(\lambda)$ при $N = 3, 4, 5$:

$$\begin{aligned} G_3(\lambda) &= -\lambda^3 + 3\lambda + 2, \\ G_4(\lambda) &= \lambda^4 - 4\lambda^2, \\ G_5(\lambda) &= -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 5\lambda + 2. \end{aligned}$$

Подставив функции $G_3(\lambda)$, $G_4(\lambda)$ и $G_5(\lambda)$ в (П.12), получаем систему уравнений относительно $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$ и $C_3(\lambda)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^3 + C_2(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^3 - C_3(\lambda) = \\ = -\lambda^3 + 3\lambda + 2, \\ C_1(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^4 + C_2(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^4 + C_3(\lambda) = \\ = \lambda^4 - 4\lambda^2, \\ C_1(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^5 + C_2(\lambda) \cdot \left(\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^5 + C_3(\lambda) = \\ = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 5\lambda + 2. \end{array} \right.$$

Из этой системы находим функции

$$\begin{aligned} C_1(\lambda) &= 1, \\ C_2(\lambda) &= 1, \\ C_3(\lambda) &= -2. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для $C_{1,2,3}(\lambda)$ и $\gamma_{1,2,3}$ в (П.12), получаем утверждение леммы 9.

Доказательство леммы 10. Воспользуемся обозначениями леммы 7. Предположим, что $\lambda = \pm\sqrt{2 + \lambda_k^B}$, где λ_k^B — собственные числа матрицы B размера 2^{n-1} , и вычислим $G_{2^n}(\pm\sqrt{2 + \lambda_k^B})$. Справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned} G_{2^n}(\pm\sqrt{2 + \lambda_k^B}) &= (a^{2^n} + b^{2^n} - 2) = ((a^2)^{2^{n-1}} + (b^2)^{2^{n-1}} - 2) = \\ &= \left(\left(\frac{2 + \lambda_k^B - 2 + \lambda_k^B - 2\sqrt{(\lambda_k^B)^2 - 4}}{4} \right)^{2^{n-1}} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2 + \lambda_k^B - 2 + \lambda_k^B + 2\sqrt{(\lambda_k^B)^2 - 4}}{4} \right)^{2^{n-1}} - 2 \right) = \\ &= \left(\left(\frac{\lambda_k^B - \sqrt{(\lambda_k^B)^2 - 4}}{2} \right)^{2^{n-1}} + \left(\frac{\lambda_k^B + \sqrt{(\lambda_k^B)^2 - 4}}{2} \right)^{2^{n-1}} - 2 \right) = \\ &= \left(\left(\frac{-\lambda_k^B + \sqrt{(\lambda_k^B)^2 - 4}}{2} \right)^{2^{n-1}} + \left(\frac{-\lambda_k^B - \sqrt{(\lambda_k^B)^2 - 4}}{2} \right)^{2^{n-1}} - 2 \right) = \\ &= G_{2^{n-1}}(\lambda_k^B) = 0. \end{aligned}$$

Лемма 10 доказана.

Доказательство леммы 11. В лемме 7 было получено выражение

$$\underbrace{G_N(\lambda)}_{(4.5)} = \sqrt{\frac{2-\lambda}{\lambda+2}}(a^N - b^N),$$

которое возведем в квадрат. Получим

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{2-\lambda}{\lambda+2}}(a^N - b^N) \right)^2 &= \frac{2-\lambda}{\lambda+2} (a^{2N} + b^{2N} - 2(ab)^N) = \\ &= \frac{2-\lambda}{\lambda+2} (a^{2N} + b^{2N} - 2). \end{aligned}$$

Умножим последнее выражение на $\frac{\lambda+2}{2-\lambda}$ и получим (4.12), а значит, справедливо (4.13).

Поскольку среди нулей $\underbrace{G_N(\lambda)}_{(4.5)}$ присутствует $\lambda^B = 2$ кратности единица,

то после возведения в квадрат и умножения кратность единица у $\lambda^B = 2$ остается, а появляется $\lambda^B = -2$ тоже кратности единица. Лемма 11 доказана.

Доказательство леммы 12. Первое уравнение в системе (5.1) в обозначениях леммы 3 имеет вид

$$(П.13) \quad M\ddot{x}_0 = -Nkx_0 + kX.$$

Система уравнений движения осцилляторов в системе (5.1), как и в доказательстве леммы 3, переписывается так:

$$(П.14) \quad \ddot{X} = -X - kX + Nkx_0.$$

В системе уравнений (П.13) и (П.14) присутствуют две моды колебаний с частотами

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{kM + Nk + M \pm \sqrt{M^2k^2 + 2MNk^2 + N^2k^2 + 2M^2k - 2MNk + M^2}}}{\sqrt{M}}.$$

Лемма 12 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Strogatz Steven H.* From Kuramoto to Crawford: Exploring the Onset of Synchronization in Populations of Coupled Oscillators // *Physica D.* 2000. No. 143. P. 1–20.
2. *Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Мир физики и техники, 2003.
3. *Strogatz Steven H., Stewart Ian.* Coupled Oscillators and Biological Synchronization // *Sci. Amer.* 1993. No. 12. P. 68–75.

4. *Shyam Krishan Joshi, Shaunak Sen, Indra Narayan Kar.* Synchronization of Coupled Oscillator Dynamics // IFAC-PapersOnLine. 2016. V. 49. No. 1. P. 320–325.
5. *Трубецков Д.И., Рожнёв А.Г.* Линейные колебания и волны. М.: Физматлит, 2001.
6. *Галляев А.А.* О математической модели импульсного воздействия, вызванного ударом системы материальных точек об абсолютно жесткое препятствие // *АиТ*. 2006. № 6. С. 27–40.
Galyaev A.A. Impact of a System of Material Points Against an Absolutely Rigid Obstacle: a Model for its Impulsive Action // *Autom. Remote Control*. 2006. V. 67. No. 6. P. 856–867.
7. *Галляев А.А.* О математической модели одномерного удара цепочки тел, обладающей вязкоупругими свойствами // *АиТ*. 2015. № 10. С. 40–49.
Galyaev A.A. On the Mathematical Model of One-Dimensional Impact of a Chain of Viscoelastic Bodies // *Autom. Remote Control*. 2015. V. 76. No. 10. P. 1743–1750.
8. *Bullo F.* Lectures on Network Systems. Ed. 1.3. Kindle Direct Publishing, 2019.
9. *Ren Wei Wu, Yongcan Cao.* Distributed Coordination of Multi-agent Networks: Emergent Problems, Models, and Issues. London: Springer-Verlag, 2010.
10. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Устойчивость и робастная устойчивость однотипных систем // *АиТ*. 1996. № 11. С. 91–104.
Polyak B.T., Tsyupkin Y.Z. Stability and Robust Stability of Uniform System // *Autom. Remote Control*. 1996. V. 57. No. 11. P. 1606–1617.
11. *Bernstein, Dennis S.* Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas. Princeton University Press, 2011.
12. *Соболев О.* Однотипные связанные системы регулирования. М.: Энергия, 1973.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 12.08.2019

После доработки 18.09.2019

Принята к публикации 28.11.2019