

© 2020 г. А.И. КАЛИНИН, д-р физ.-мат. наук (kalininai@bsu.by),
Л.И. ЛАВРИНОВИЧ, канд. физ.-мат. наук (lavrinovich@bsu.by)
(Белорусский государственный университет, Минск)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ТРАЕКТОРИИ

Рассматривается задача об управлении с минимальными энергетическими затратами линейной сингулярно возмущенной системой, в которой на правый конец траекторий наложены линейные ограничения. Строятся асимптотические приближения в виде программы и обратной связи к оптимальному управлению в этой задаче. Основное достоинство предлагаемых алгоритмов состоит в том, что при их применении происходит декомпозиция исходной задачи на две невозмущенные задачи оптимального управления меньшей размерности.

Ключевые слова: оптимальное управление, линейная система, квадратичный функционал, сингулярные возмущения, асимптотические приближения, субоптимальный синтез.

DOI: 10.31857/S0005231020060037

1. Введение

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при части производных принято называть сингулярно возмущенными. В рамках математической теории оптимальных процессов задачам оптимизации таких систем уделяется значительное внимание (см. [1–4]). Интерес к таким задачам вызван эффективностью асимптотических методов их решения, при применении которых исходные задачи оптимального управления распадаются на задачи меньшей размерности. Кроме того, асимптотический подход позволяет избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими [5].

Настоящая статья посвящена построению асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решению сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с линейными терминальными ограничениями на траектории. Ее можно трактовать как задачу управления с минимальными энергетическими затратами. Суть предлагаемых алгоритмов состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра множителей Лагранжа, соответствующих в силу принципа максимума [6] оптимальному управлению. Предлагаемые вычислительные процедуры являются очередной реализацией методики исследования задач

оптимизации возмущенных динамических систем, в основу которой положена идея специальной конечномерной параметризации оптимальных управлений (см. [2]).

Следует отметить, что сингулярно возмущенным линейно-квадратичным задачам оптимального управления посвящено значительное число публикаций (см., например, [7–11]), однако в них, за исключением [11], ограничения на траектории не накладывались. Настоящая статья обобщает результаты, полученные в [11], где рассматривалась задача с фиксированным правым концом траекторий.

2. Постановка задачи

В классе r -мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in T = [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{y} &= A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, & y(t_*) &= y_*, \\ \mu \dot{z} &= A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, & z(t_*) &= z_*, \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad H_1 y(t^*) = g_1, \quad H_2 z(t^*) = g_2,$$

$$(2.3) \quad J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} u^T P(t) u dt \rightarrow \min,$$

где μ — малый положительный параметр, t_* , t^* — заданные моменты времени ($t_* < t^*$), y — n -вектор медленных переменных, z — m -вектор быстрых переменных, g_1 , g_2 — векторы размерностей n_1 , m_1 соответственно ($n_1 \leq n$, $m_1 \leq m$), H_1 и H_2 — матрицы полного ранга, $P(t)$ — положительно определенная симметрическая матрица для всех $t \in T$.

Предположение 1. Действительные части всех собственных значений матрицы $A_4(t)$, $t \in T$, отрицательны.

Предположение 2. Элементы всех матриц, формирующих задачу, бесконечно дифференцируемы.

Управление с кусочно-непрерывными компонентами принято называть допустимым, если для порожденной этим управлением траектории системы (2.1) выполнены терминальные ограничения (2.2). Допустимое управление, на котором критерий качества (2.3) принимает наименьшее значение, называют оптимальным. Наряду с этими общеупотребительными понятиями определим то, что будет пониматься под асимптотическими приближениями к решению рассматриваемой задачи.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in T$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N -го порядка ($N = 0, 1, 2, \dots$), в задаче (2.1)–(2.3), если оно отклоняется по критерию качества (2.3) от оптимального управления на величину $O(\mu^{N+1})$, а порожденная им траектория $y(t, \mu)$, $z(t, \mu)$, $t \in T$,

системы (2.1) удовлетворяет терминальным ограничениям (2.2) с точностью того же порядка малости.

Определение 2. Вектор-функцию $u^{(N)}(y, z, t, \mu)$ назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N -го порядка, если для любого начального состояния (y_*, z_*, t_*) , $t_* < t^*$, имеет место равенство

$$u^{(N)}(y_*, z_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu),$$

где $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in T$, – асимптотически субоптимальное управление N -го порядка в задаче (2.1)–(2.3).

В настоящей статье предлагается и обосновывается алгоритм, с помощью которого для заданного числа N можно построить асимптотически субоптимальное управление N -го порядка в рассматриваемой задаче. В статье также показывается, как можно построить асимптотически субоптимальную обратную связь нулевого порядка.

В дальнейшем для сокращения записи будем использовать обозначения:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} A(t, \mu) &= \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A_3(t)/\mu & A_4(t)/\mu \end{pmatrix}, \\ B(t, \mu) &= \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t)/\mu \end{pmatrix}, \quad x_* = \begin{pmatrix} y_* \\ z_* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Первая базовая задача

Вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений начинаются с решения вырожденной задачи

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{y} &= A_0(t)y + B_0(t)u, \quad y(t_*) = y_*, \quad H_1 y(t^*) = g_1, \\ J_1(u) &= \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} u^T P(t) u dt \rightarrow \min, \end{aligned}$$

где

$$(3.2) \quad A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \quad B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t).$$

В дальнейшем эту задачу будем называть первой базовой.

Предположение 3. Динамическая система в задаче (3.1) является управляемой на отрезке $[\tau, t^*]$ относительно подпространства $H_1 y = 0$ при любом $\tau \in [t_*, t^*)$ [12].

Это предположение выполняется тогда и только тогда (см., например, [13]), когда при любом $\tau \in [t_*, t^*)$ и любом ненулевом векторе l размерности n_1 имеет место соотношение

$$(3.3) \quad l^T H_1 F_0(t) B(t) \neq 0, \quad \tau \leq t \leq t^*,$$

где $F_0(t)$, $t \in T$, — $(n \times n)$ -матричная функция, являющаяся решением начальной задачи

$$(3.4) \quad \dot{F}_0 = -F_0 A_0(t), \quad F_0(t^*) = E_n$$

с единичной матрицей E_n . Заметим, что условие (3.3), которое называют неявным критерием управляемости на подпространстве, для стационарной динамической системы эквивалентно требованию [12]

$$(3.5) \quad \text{rank} (H_1 B_0, H_1 A_0 B_0, \dots, H_1 A_0^{n-1} B_0) = n_1.$$

При выполнении предположения 3 в первой базовой задаче существуют допустимые управления, а тогда эта задача имеет единственное решение [14], которое является нормальной экстремалью. Последнее означает, что принцип максимума [6, 15] в данном случае может быть сформулирован следующим образом: пусть $u^0(t)$, $y^0(t)$, $t \in T$, — оптимальные управление и траектория в задаче (3.1), тогда существует такой вектор множителей Лагранжа λ_0 размерности n_1 , что выполняется условие

$$\begin{aligned} & \psi^{0T}(t) B_0(t) u^0(t) - \frac{1}{2} u^{0T}(t) P(t) u^0(t) = \\ & = \max_{u \in \mathbb{R}^r} \left(\psi^{0T}(t) B_0(t) u - \frac{1}{2} u^T P(t) u \right), \quad t \in T, \end{aligned}$$

где $\psi^0(t)$, $t \in T$, — решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -A_0^T(t)\psi$, $\psi(t^*) = H_1^T \lambda_0$. Отсюда непосредственно следует, что

$$(3.6) \quad u^0(t) = P^{-1}(t) B_0^T(t) \psi^0(t), \quad t \in T.$$

Заметим, что

$$(3.7) \quad \psi^{0T}(t) = \lambda_0^T H_1 F_0(t), \quad \psi^{0T}(t) B_0(t) = \lambda_0^T H_1 \Phi_0(t), \quad t \in T,$$

где

$$(3.8) \quad \Phi_0(t) = F_0(t) B_0(t), \quad t \in T.$$

В силу (3.6), (3.7) и формулы Коши имеем равенство

$$(3.9) \quad H_1 y^0(t^*) = H_1 F_0(t^*) y_* + H_1 C_1 H_1^T \lambda_0 = g_1,$$

где

$$(3.10) \quad C_1 = \int_{t_*}^{t^*} \Phi_0(t) P^{-1}(t) \Phi_0^T(t) dt.$$

При выполнении предположения 3 матрица $H_1 C_1 H_1^T$ будет невырожденной, в чем можно легко убедиться, опираясь на неявный критерий управляемости на подпространстве. Поскольку λ_0 определяется однозначно, то оптимальному управлению в первой базовой задаче соответствует, в силу сформулированного принципа максимума, единственный вектор сопряженных переменных.

4. Вторая базовая задача

На втором этапе вычислений решается задача оптимального управления с бесконечной длительностью процесса

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{ds} &= A_4(t^*)z + B_2(t^*)u, \\
 H_2 z(0) &= H_2 A_4^{-1}(t^*) (A_3(t^*) y^0(t^*) + B_2(t^*) u^0(t^*)) + g_2, \\
 (4.1) \quad z(-\infty) &= 0, \quad J_2(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 u^T P(t^*) u ds \rightarrow \min,
 \end{aligned}$$

которую будем называть *второй базовой*.

Предположение 4. Выполнен критерий управляемости на подпространство

$$\text{rank} (H_2 B_2(t^*), H_2 A_4(t^*) B_2(t^*), \dots, H_2 A_4^{m-1}(t^*) B_2(t^*)) = m_1.$$

Это предположение гарантирует существование допустимых управлений во второй базовой задаче. Отсюда, в свою очередь, следует, что задача (4.1) имеет единственное решение [14] и является нормальной. В этом случае принцип максимума [6] для нее может быть сформулирован следующим образом: пусть $u^*(s)$, $z^*(s)$, $s \leq 0$, — оптимальные управление и траектория в задаче (4.1), тогда существует такой вектор множителей Лагранжа ν_0 размерности m_1 , что выполняется условие

$$\begin{aligned}
 &\Pi \psi^T(s) B_2(t^*) u^*(s) - \frac{1}{2} u^{*T}(s) P(t^*) u^*(s) = \\
 &= \max_{u \in \mathbb{R}^r} \left(\Pi \psi^T(s) B_2(t^*) u - \frac{1}{2} u^T P(t^*) u \right), \quad s \leq 0,
 \end{aligned}$$

где $\Pi \psi(s)$, $s \leq 0$, — решение сопряженной системы

$$\frac{d}{ds} \Pi \psi = -A_4^T(t^*) \Pi \psi, \quad \Pi \psi(0) = H_2^T \nu_0.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$(4.2) \quad u^*(s) = P^{-1}(t^*) B_2^T(t^*) \Pi \psi(s), \quad s \leq 0.$$

Заметим, что

$$(4.3) \quad \Pi \psi^T(s) = \nu_0^T H_2 G(s), \quad \Pi \psi^T(s) B_2(t^*) = \nu_0^T H_2 \Pi \Phi(s), \quad s \leq 0,$$

где

$$(4.4) \quad \Pi \Phi(s) = G(s) B_2(t^*), \quad s \leq 0,$$

а $G(s)$, $s \leq 0$, $-(m \times m)$ -матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$(4.5) \quad \frac{dG}{ds} = -GA_4(t^*), \quad G(0) = E_m.$$

Введем обозначение

$$(4.6) \quad C_3 = \int_{-\infty}^0 (\Pi\Phi(s)P^{-1}(t^*)\Pi\Phi^T(s)) ds.$$

В силу предположения 4 матрица $H_2C_3H_2^T$ будет невырожденной, а поскольку, как следует из (4.2), (4.3) и формулы Коши,

$$(4.7) \quad H_2z^*(0) = H_2C_3H_2^T\nu_0,$$

то оптимальному управлению во второй базовой задаче соответствует, в силу принципа максимума, единственный вектор сопряженных переменных.

Подчеркнем, что единственная информация о решении второй базовой задачи, которая используется в дальнейшем при построении асимптотически субоптимальных управлений, — это вектор множителей Лагранжа ν_0 . Нет необходимости строить оптимальное управление $u^*(s)$, $s \leq 0$, что, впрочем, и невозможно, если задача решается численно.

После решения базовых задач формируется матрица

$$(4.8) \quad I_0 = \begin{pmatrix} H_1C_1H_1^T & 0_{n_1 \times m_1} \\ H_2C_2H_1^T & H_2C_3H_2^T \end{pmatrix}$$

размеров $(n_1 + m_1) \times (n_1 + m_1)$. Матрицы C_1 , C_3 определены ранее формулами (3.10), (4.6), а

$$C_2 = -A_4^{-1}(t^*) (A_3(t^*)C_1 + B_2(t^*)P^{-1}(t^*)B_0^T(t^*)).$$

Как было отмечено, $H_1C_1H_1^T$, $H_2C_3H_2^T$ — невырожденные матрицы, а тогда $\det I_0 \neq 0$.

5. Асимптотический анализ решения исходной задачи

Говорить об асимптотически субоптимальных управлениях можно лишь в том случае, когда исходная задача имеет решение. Убедимся, что при сделанных предположениях в задаче (2.1)–(2.3) с достаточно малым μ существует оптимальное управление. Доказательство будет конструктивным и предопределяет дальнейшие вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений.

Пусть $\psi_1(t, \lambda, \nu, \mu)$, $\psi_2(t, \lambda, \nu, \mu)$, $t \in T$, — решение начальной задачи

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -A_1^T(t)\psi_1 - A_3^T(t)\psi_2, & \psi_1(t^*) &= H_1^T\lambda, \\ \mu\dot{\psi}_2 &= -A_2^T(t)\psi_1 - A_4^T(t)\psi_2, & \psi_2(t^*) &= H_2^T\nu, \end{aligned}$$

где λ, ν — векторы размерности n_1 и m_1 соответственно. Обозначим через $y(t, \lambda, \nu, \mu), z(t, \lambda, \nu, \mu), t \in T$, траекторию системы (2.1), порожденную управлением

$$(5.2) \quad u(t, \lambda, \nu, \mu) = P^{-1}(t) (B_1^T(t) \psi_1(t, \lambda, \nu, \mu) + B_2^T(t) \psi_2(t, \lambda, \nu, \mu)), \quad t \in T.$$

Теорема. При выполнении предположений 1–4 в задаче (2.1)–(2.3) с достаточно малым μ существует единственное оптимальное управление, которое является нормальной экстремалью и представимо в виде

$$(5.3) \quad u^0(t, \mu) = u(t, \lambda(\mu), \nu(\mu), \mu), \quad t \in T.$$

Оптимальному управлению соответствует, в силу принципа максимума, вектор сопряженных переменных

$$(\psi_1(t, \lambda(\mu), \mu\nu(\mu), \mu), \mu\psi_2(t, \lambda(\mu), \mu\nu(\mu), \mu)), \quad t \in T,$$

при этом векторы $\lambda(\mu), \nu(\mu)$, являющиеся решением системы уравнений

$$(5.4) \quad H_1 y(t^*, \lambda, \nu, \mu) - g_1 = 0, \quad H_2 z(t^*, \lambda, \nu, \mu) - g_2 = 0,$$

допускают асимптотические разложения

$$(5.5) \quad \lambda(\mu) \sim \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k, \quad \nu(\mu) \sim \nu_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \nu_k,$$

старшие коэффициенты которых есть векторы множителей Лагранжа в базовых задачах.

Доказательство. Прежде всего покажем, что левые части уравнений (5.4) допускают асимптотические разложения по целым степеням малого параметра, и получим формулы для коэффициентов этих разложений. Для сокращения записи введем обозначения $\eta = (\lambda, \nu)$, $\eta_0 = (\lambda_0, \nu_0)$, и пусть $x(t, \eta, \mu) = (y(t, \eta, \mu), z(t, \eta, \mu))$, $t \in T$. В силу формулы Коши, используя обозначения (2.4), имеем

$$(5.6) \quad x(t^*, \eta, \mu) = F(t_*, \mu) x_* + \int_{t_*}^{t^*} F(t, \mu) B(t, \mu) u(t, \eta, \mu) dt,$$

где $F(t, \mu)$, $t \in T$, — матричная функция размеров $(n + m) \times (n + m)$, которая является решением начальной задачи

$$(5.7) \quad \dot{F} = -FA(t, \mu), \quad F(t^*) = E_{n+m}.$$

Решение этого сингулярно возмущенного уравнения удобно представлять в блочном виде

$$F(t, \mu) = \begin{pmatrix} F_1(t, \mu) & F_2(t, \mu) \\ F_3(t, \mu) & F_4(t, \mu) \end{pmatrix},$$

где F_1, F_2, F_3, F_4 — матрицы размеров $n \times n, n \times m, m \times n$ и $m \times m$ соответственно. С помощью метода пограничных функций [16] они могут быть разложены в асимптотические ряды:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} F_i(t, \mu) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (F_{ik}(t) + \Pi_k F_i(s)), \\ s &= (t - t^*) / \mu, \quad t \in T, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что выражения (5.8) — равномерные по $t \in T$ асимптотические разложения. Отметим как существенный факт также то, что для матричных функций $\Pi_k F_i(s)$, $s \leq 0$, называемых пограничными членами, имеют место оценки

$$(5.9) \quad \|\Pi_k F_i(s)\| \leq \alpha_k \exp(\beta_k s), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где α_k, β_k — положительные постоянные. Приведем несколько старших коэффициентов разложений (5.8), которые понадобятся при доказательстве теоремы:

$$(5.10) \quad \begin{aligned} F_{10} &= F_0(t), \quad F_{20} = 0_{n \times m}, \quad F_{30} = -A_4^{-1}(t^*) A_3(t^*) F_0(t), \\ F_{40} &= 0_{m \times m}, \quad F_{21} = -F_0(t) A_2(t) A_4^{-1}(t), \\ F_{41} &= A_4^{-1}(t^*) A_3(t^*) F_0(t) A_2(t) A_4^{-1}(t), \\ \Pi_0 F_1 &= 0_{n \times n}, \quad \Pi_0 F_2 = 0_{n \times m}, \quad \Pi_0 F_3 = G(s) A_4^{-1}(t^*) A_3(t^*), \\ \Pi_0 F_4 &= G(s), \quad \Pi_1 F_2 = A_2(t^*) A_4^{-1}(t^*) G(s), \end{aligned}$$

где $F_0(t)$, $t \in T$, и $G(s)$, $s \leq 0$, — решения начальных задач (3.4) и (4.5) соответственно.

Запишем (5.6) в блочном виде

$$(5.11) \quad \begin{aligned} y(t^*, \eta, \mu) &= F_1(t_*, \mu) y_* + F_2(t_*, \mu) z_* + \\ &+ \int_{t_*}^{t^*} (F_1(t, \mu) B_1(t) + F_2(t, \mu) B_2(t) / \mu) u(t, \eta, \mu) dt, \\ z(t^*, \eta, \mu) &= F_3(t_*, \mu) y_* + F_4(t_*, \mu) z_* + \\ &+ \int_{t_*}^{t^*} (F_3(t, \mu) B_1(t) + F_4(t, \mu) B_2(t) / \mu) u(t, \eta, \mu) dt. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \psi_1^T(t, \eta, \mu) &= \lambda^T H_1 F_1(t, \mu) + \mu \nu^T H_2 F_3(t, \mu), \\ \psi_2^T(t, \eta, \mu) &= \lambda^T H_1 F_2(t, \mu) / \mu + \nu^T H_2 F_4(t, \mu). \end{aligned}$$

Отсюда и из формул (5.8), (5.10) следует, что имеют место асимптотические разложения

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \psi_i(t, \eta, \mu) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (\psi_{ik}(t, \eta) + \Pi_k \psi_i(s, \eta)), \\ s &= (t - t^*) / \mu, \quad t \in T, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

в которых

$$(5.13) \quad \begin{aligned} \psi_{10}^T(t, \eta) &= \lambda^T H_1 F_0(t), \quad \psi_{20}^T(t, \eta) = -\lambda^T H_1 F_0(t) A_2(t) A_4^{-1}(t), \\ \Pi_0^T \psi_1(s, \eta) &= 0, \quad \Pi_0^T \psi_2(s, \eta) = (\lambda^T H_1 A_2(t^*) A_4^{-1}(t^*) + \nu^T H_2) G(s), \\ \psi_{1k}^T(t, \eta) &= \lambda^T H_1 F_{1k}(t) + \nu^T H_2 F_{3,k-1}(t), \\ \psi_{2k}^T(t, \eta) &= \lambda^T H_1 F_{2,k+1}(t) + \nu^T H_2 F_{4k}(t), \\ \Pi_k^T \psi_1(s, \eta) &= \lambda^T H_1 \Pi_k F_1(s) + \nu^T H_2 \Pi_{k-1} F_3(s), \\ \Pi_k^T \psi_2(s, \eta) &= \lambda^T H_1 \Pi_{k+1} F_2(s) + \nu^T H_2 \Pi_k F_4(s), \\ k &\geq 0, \quad t \in T, \quad s \leq 0. \end{aligned}$$

Эти разложения будут равномерными в области $\|\eta - \eta_0\| < \varepsilon_0$, $t \in T$, где ε_0 — некоторое положительное число. Отметим, что в силу формул (3.7), (4.3) имеют место равенства:

$$(5.14) \quad \begin{aligned} \psi_{10}^T(t, \eta_0) &= \psi^0(t), \quad \psi_{20}^T(t, \eta_0) = - (A_2(t) A_4^{-1}(t))^T \psi^0(t), \quad t \in T, \\ \Pi_0 \psi_2(s, \eta_0) &= \Pi \psi(s), \quad s \leq 0. \end{aligned}$$

Управление (5.2) также допускает равномерное асимптотическое разложение

$$(5.15) \quad u(t, \eta, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (u_k(t, \eta) + \Pi_k u(s, \eta)), \quad s = (t - t^*) / \mu, \quad t \in T,$$

где

$$(5.16) \quad \begin{aligned} u_k(t, \eta) &= P^{-1}(t) (B_1^T(t) \psi_{1k}(t, \eta) + B_2^T(t) \psi_{2k}(t, \eta)), \\ \Pi_k u(s, \eta) &= \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{s^j}{j!} \left(\frac{d^j}{dt^j} (P^{-1} B_1^T)(t^*) \Pi_{k-j} \psi_1(s, \eta) + \frac{d^j}{dt^j} (P^{-1} B_2^T)(t^*) \Pi_{k-j} \psi_2(s, \eta) \right), \\ t &\in T, \quad s \leq 0, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Поскольку наряду с формулами (3.2), (3.6), (4.2) и (5.14) имеет место равенство $\Pi_0 \psi_1(s, \eta) = 0$, то

$$(5.17) \quad u_0(t, \eta_0) = u^0(t), \quad t \in T, \quad \Pi_0 u(s, \eta_0) = u^*(s), \quad s \leq 0.$$

Из (5.8)–(5.10), (5.12), (5.13), (5.15) и (5.16) следует, что вектор-функции (5.11) разлагаются в асимптотические ряды

$$(5.18) \quad y(t^*, \eta, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k y_k(\eta), \quad z(t^*, \eta, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z_k(\eta),$$

в которых

$$\begin{aligned} y_0(\eta) &= F_0(t_*) y_* + \int_{t_*}^{t^*} F_0(t) B_0(t) u_0(t, \eta) dt, \\ z_0(\eta) &= -A_4^{-1}(t^*) A_3(t^*) y_0(\eta) + \int_{-\infty}^0 G(s) B_2(t^*) (u_0(t^*, \eta) + \Pi_0 u(s, \eta)) ds, \\ (5.19) \quad y_k(\eta) &= F_{1k}(t_*) y_* + F_{2k}(t_*) z_* + \int_{t_*}^{t^*} \sum_{j=0}^k F_{1j}(t) B_1(t) u_{k-j}(t, \eta) dt + \\ &\quad + \int_{t_*}^{t^*} \sum_{j=1}^{k+1} F_{2j}(t) B_2(t) u_{k-j+1}(t, \eta) dt + \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-p-1} \frac{s^j}{j!} \frac{d^j}{dt^j} (F_{1, k-p-j-1} B_1)(t^*) \Pi_p u(s, \eta) ds + \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 \sum_{p=0}^k \sum_{j=0}^{k-p} \frac{s^j}{j!} \frac{d^j}{dt^j} (F_{2, k-p-j-1} B_2)(t^*) \Pi_p u(s, \eta) ds + \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-p-1} \frac{s^j}{j!} \Pi_{k-p-j-1} F_1(s) \left(\frac{d^j B_1}{dt^j}(t^*) \Pi_p u(s, \eta) + \frac{\partial^j}{\partial t^j} (B_1 u_p)(t^*, \eta) \right) ds + \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 \sum_{p=0}^k \sum_{j=0}^{k-p} \frac{s^j}{j!} \Pi_{k-p-j} F_2(s) \left(\frac{d^j B_2}{dt^j}(t^*) \Pi_p u(s, \eta) + \frac{\partial^j}{\partial t^j} (B_2 u_p)(t^*, \eta) \right) ds, \\ &\quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Для $z_k(\eta)$, $k \geq 1$, имеет место аналогичная формула с той лишь разницей, что F_{1j} заменяется на F_{3j} , а F_{2j} — на F_{4j} и что вместо $\Pi_j F_1$, $\Pi_j F_2$ соответственно имеем $\Pi_j F_3$, $\Pi_j F_4$, $j = 0, 1, \dots$

С помощью теоремы о неявной функции убедимся, что система уравнений (5.4) однозначно разрешима относительно η при достаточно малых μ . Запишем (5.4) в виде

$$(5.20) \quad R(\eta, \mu) = 0.$$

В силу (5.18) имеет место равномерное в области $\|\eta - \eta_0\| < \varepsilon_0$ асимптотическое разложение

$$(5.21) \quad R(\eta, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k R_k(\eta),$$

в котором $R_0(\eta) = (H_1 y_0(\eta) - g_1, H_2 z_0(\eta) - g_2)$, $R_k(\eta) = (H_1 y_k(\eta), H_2 z_k(\eta))$, $k = 1, 2, \dots$. Положим $R(\eta, 0) = R_0(\eta)$, тогда вектор-функция $R(\eta, \mu)$ будет непрерывной вместе со своими частными производными по компонентам вектора η в области $\|\eta - \eta_0\| < \varepsilon_0$, $0 \leq \mu < \mu_0$, где μ_0 — достаточно малое положительное число.

В силу (5.17), (5.19) и формулы Коши имеем $H_1 y_0(\eta_0) = H_1 y^0(t^*) = g_1$. Матричная функция $G(s)$, $s \leq 0$, является решением начальной задачи (4.5), и поскольку $G(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow -\infty$, то

$$(5.22) \quad \int_{-\infty}^0 G(s) B_2(t^*) u_0(t^*, \eta_0) ds = \\ = - \int_{-\infty}^0 \frac{dG}{ds}(s) A_4^{-1}(t^*) B_2(t^*) u^0(t^*) ds = -A_4^{-1}(t^*) B_2(t^*) u^0(t^*).$$

Вместе с тем из (5.17) и формулы Коши следует, что

$$\int_{-\infty}^0 G(s) B_2(t^*) \Pi_0 u(s, \eta_0) ds = z^*(0).$$

Отсюда и из формул (4.1), (5.19), (5.22) получаем $H_2 z_0(\eta_0) = g_2$. Таким образом, $R(\eta_0, 0) = R_0(\eta_0) = 0$.

Непосредственным дифференцированием вектор-функции (5.19), учитывая (3.7), (4.4), (5.10), (5.13), (5.16), убеждаемся, что $\partial R_0(\eta_0, 0)/\partial \eta = \partial R_0(\eta_0)/\partial \eta = I_0$ (см. (4.8)). Поскольку эта матрица Якоби является невырожденной, то для системы (5.20) или, что то же самое, для системы (5.4) выполнены условия теоремы о неявной функции. Согласно этой теореме в некоторой правосторонней окрестности нуля $0 \leq \mu < \mu_1$ однозначно определена вектор-функция $\eta(\mu) = (\lambda(\mu), \nu(\mu))$, удовлетворяющая уравнениям (5.4). Она непрерывна, и $\eta(0) = \eta_0 = (\lambda_0, \nu_0)$.

Как уже отмечалось, разложение (5.21) является равномерным в области $\|\eta - \eta_0\| < \varepsilon_0$, а его коэффициенты — линейные функции. Тогда для решения $(\lambda(\mu), \nu(\mu))$ системы (5.4) будут иметь место асимптотические разложения (5.5).

Рассмотрим управление (5.3). Оно будет допустимым в задаче (2.1)–(2.3), поскольку для порожденной им траектории $y^0(t, \mu) = y(t, \lambda(\mu), \nu(\mu), \mu)$, $z^0(t, \mu) = z(t, \lambda(\mu), \nu(\mu), \mu)$, $t \in T$, выполняются условия $H_1 y^0(t^*, \mu) = g_1$, $H_2 z^0(t^*, \mu) = g_2$. По построению управление (5.3) является нормальной экстремалью Понтрягина с вектором множителей Лагранжа $(\lambda(\mu), \mu \nu(\mu))$. Ему

соответствует в силу принципа максимума вектор сопряженных переменных $\psi_1^0(t, \mu) = \psi_1(t, \lambda(\mu), \mu\nu(\mu), \mu)$, $\psi_2^0(t, \mu) = \mu\psi_2(t, \lambda(\mu), \mu\nu(\mu), \mu)$, $t \in T$. По доказанному в исходной задаче с достаточно малым μ существует допустимое управление. Тогда эта задача имеет единственное решение [14]. Им будет управление (5.3), поскольку в задачах минимизации выпуклых интегральных функционалов на траекториях линейных систем нормальная экстремаль является оптимальным управлением (см., например, [17]). Теорема доказана.

6. Построение асимптотически субоптимальных управлений

Продолжим изложение алгоритма построения асимптотических приближений к решению задачи (2.1)–(2.3), опираясь на утверждения теоремы и формулы, полученные при ее доказательстве.

Вектор-функция

$$u^{(0)}(t, \mu) = P^{-1}(t) (B_1^T(t) \psi_1(t, \eta_0, \mu) + B_2^T(t) \psi_2(t, \eta_0, \mu)), \quad t \in T,$$

будет асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в исходной задаче. Заметим, что ее можно сформировать непосредственно после решения базовых задач. Асимптотически субоптимальное управление N -го порядка ($N \geq 1$) имеет вид

$$(6.1) \quad u^{(N)}(t, \mu) = P^{-1}(t) \left(B_1^T(t) \psi_1(t, \eta^{(N)}(\mu), \mu) + B_2^T(t) \psi_2(t, \eta^{(N)}(\mu), \mu) \right),$$

где

$$(6.2) \quad \eta^{(N)}(\mu) = \sum_{k=0}^N \mu^k \eta_k, \quad \eta_k = (\lambda_k, \nu_k), \quad k = 1, \dots, N.$$

Для построения управления (6.1) нужно найти коэффициенты λ_k, ν_k , $k = 1, \dots, N$, асимптотических рядов (5.5), что можно сделать методом неопределенных коэффициентов, опираясь на разложение (5.21). Для этого разложим с помощью формулы Тейлора вектор-функцию

$$\sum_{k=0}^N \mu^k R_k \left(\eta^{(N)}(\mu) \right)$$

по степеням μ до порядка N включительно и приравняем коэффициенты разложения нулю (начиная с коэффициента при μ). В результате получим невырожденные системы линейных алгебраических уравнений для последовательного нахождения векторов η_k , $k = 1, \dots, N$:

$$(6.3) \quad I_0 \eta_1 = -R_1(\eta_0), \quad I_0 \eta_k = -R_2(\eta_0) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial R_i}{\partial \eta}(\eta_0) \eta_{k-i}, \quad k \geq 2.$$

Здесь учтено, что коэффициенты разложений (5.19) есть линейные вектор-функции. Заметим, что в силу структуры (4.8) матрицы Якоби I_0 системы (6.3) расщепляются. Последовательно решая эти системы, находим векторы η_k , $k = 1, \dots, N$, и составляем полиномы (6.2). Чтобы построить управление (6.1), нужно найти решение начальной задачи (5.1) для сопряженной системы с

$$\lambda = \sum_{k=0}^N \mu^k \lambda_k, \quad \nu = \sum_{k=0}^N \mu^k \nu_k.$$

Сопряженная система является сингулярно возмущенной и, следовательно, жесткой. Интегрирования жестких систем можно избежать, заменив в (6.1) вектор-функции $\psi_i(t, \eta, \mu)$, $i = 1, 2$, их асимптотическими приближениями

$$\begin{aligned} \psi_i^{(N)}(t, \eta, \mu) &= \sum_{k=0}^N \mu^k (\psi_{ik}(t, \eta) + \Pi_k \psi_i(s, \eta)), \\ s &= (t - t^*) / \mu, \quad t \in T, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Вектор-функция

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(N)}(t, \mu) &= P^{-1}(t) \left(B_1^T(t) \psi_1^{(N)}(t, \eta^{(N)}(\mu), \mu) + \right. \\ &\quad \left. + B_2^T(t) \psi_2^{(N)}(t, \eta^{(N)}(\mu), \mu) \right), \quad t \in T, \end{aligned}$$

наряду с (6.1) будет асимптотически субоптимальным управлением N -го порядка в задаче (2.1)–(2.3). В частности, как следует из (3.6), (3.7), (4.2), (5.13) и (5.14),

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(0)}(t, \mu) &= P^{-1}(t) (B_0^T(t) \psi^0(t) + B_2^T(t) \Pi \psi((t - t^*) / \mu)) = \\ (6.4) \quad &= u^0(t) + u^*((t - t^*) / \mu), \quad t \in T. \end{aligned}$$

Вектор-функция (6.4) есть асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка, что также видно из формул (5.15), (5.17). Заметим, что управление (6.4) не зависит от начального состояния z_* вектора быстрых переменных и при малых μ будет существенно отличаться от решения $u^0(t)$, $t \in T$, первой базовой задачи лишь в пограничном слое, т.е. в некоторой левосторонней окрестности точки t^* .

Замечание 1. Для построения асимптотически субоптимального управления N -го порядка в исходной задаче достаточно найти асимптотическое приближение для $R(\eta, \mu)$ с точностью порядка μ^{N+1} . Это предъявляет к гладкости элементов матриц, формирующих задачу, следующее требование [16]: они должны иметь непрерывные производные до порядка $N + 1$ включительно.

Замечание 2. Из доказательства теоремы видно, что допустимое управление вида (5.3) существует и в случае, когда элементы матриц, формирующих динамическую систему в задаче (2.1)–(2.3), непрерывно дифференцируемы, а поскольку в этой задаче (y_*, z_*) — произвольное начальное состояние, то такое предположение вместе с предположениями 1 и 3 гарантирует

управляемость динамической системы на отрезке $[t_*, t^*]$ относительно подпространства $H_1 y = 0, H_2 z = 0$. Это утверждение в случае полной управляемости ($H_1 = E_n, H_2 = E_m$) приводит к результату, полученному в [18].

Построенные асимптотические приближения множителей Лагранжа, которые являются решением системы уравнений (5.20), можно использовать для нахождения оптимального управления в задаче (2.1)–(2.3) с заданным значением μ . Для этого нужно применить процедуру доводки [19], т.е. найти методом Ньютона корни системы (5.20), взяв в качестве начального приближения $\eta^{(N)}(\mu)$. Чтобы избежать интегрирования жестких систем, вместо матрицы $\partial R(\eta, \mu) / \partial \eta$ можно воспользоваться ее асимптотическим приближением I_0 .

7. Асимптотически субоптимальный синтез

Программные асимптотически субоптимальные управления, разумеется, зависят от начального состояния (y_*, z_*, t_*) динамической системы. Ранее такая зависимость не учитывалась, поскольку начальное состояние считалось заданным. В настоящем разделе, который посвящен построению асимптотически субоптимальной обратной связи нулевого порядка, будем интересоваться именно этой зависимостью. В дальнейшем будем рассматривать матрицу C_1 как функцию t_* , $t_* < t^*$. Момент t^* по-прежнему считается заданным.

Из равенства (3.9) следует, что

$$(7.1) \quad \lambda_0 = (H_1 C_1(t_*) H_1^T)^{-1} (g_1 - H_1 F_0(t_*) y_*),$$

а так как $\psi^0(t_*) = F_0^T(t_*) \psi^0(t^*) = F_0^T(t_*) H_1^T \lambda_0$, то

$$(7.2) \quad \psi^0(t_*) = M_1(t_*) (g_1 - H_1 F_0(t_*) y_*),$$

где $M_1(t) = F_0^T(t) H_1^T (H_1 C_1(t) H_1^T)^{-1}$.

В силу (4.1) и (4.7) справедливо равенство

$$\begin{aligned} \nu_0 &= (H_2 C_3 H_2^T)^{-1} H_2 z^*(0) = \\ &= (H_2 C_3 H_2^T)^{-1} (H_2 A_4^{-1}(t^*) (A_3(t^*) y^0(t^*) + B_2(t^*) u^0(t^*)) + g_2), \end{aligned}$$

из которого и формул (3.6) (3.10), (7.1), (7.2) следует, что

$$\begin{aligned} (7.3) \quad \Pi \psi(s) &= G^T(s) \Pi \psi(0) = G^T(s) H_2^T \nu_0 = \\ &= M_2(s) (H_2 A_4^{-1}(t^*) (A_3(t^*) y^0(t^*) + B_2(t^*) u^0(t^*)) + g_2) = \\ &= M_2(s) (H_2 A_4^{-1}(t^*) (A_3(t^*) F_0(t_*) y_* + M_3(t_*) (g_1 - H_1 F_0(t_*) y_*)) + g_2), \quad s \leq 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M_2(s) &= G^T(s) H_2^T (H_2 C_3 H_2^T)^{-1}, \\ M_3(t) &= (A_3(t^*) C_1(t) + B_2(t^*) P^{-1}(t^*) B_0^T(t^*)) H_1^T (H_1 C_1(t) H_1^T)^{-1}. \end{aligned}$$

Как видно из (6.4), (7.2) и (7.3), асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка в начальный момент времени представимо в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(0)}(t_*, \mu) = & P^{-1}(t_*) \left(B_0^T(t_*) M_1(t_*) H_1 - B_2^T(t_*) M_2((t_* - t^*)/\mu) \times \right. \\ & \times H_2 A_4^{-1}(t^*) (A_3(t^*) - M_3(t_*) H_1) \left. \right) F_0(t_*) y_* - \\ & - P^{-1}(t_*) (M_1(t_*) g_1 + M_2((t_* - t^*)/\mu) (g_2 + M_3(t_*) g_1)). \end{aligned}$$

Поскольку (y_*, z_*, t_*) — произвольное начальное состояние динамической системы, то по определению 2 вектор-функция

$$\begin{aligned} u^{(0)}(t, y, z, \mu) = & \\ (7.4) \quad & = P^{-1}(t) \left(B_0^T(t) M_1(t) H_1 - B_2^T(t) M_2((t - t^*)/\mu) H_2 A_4^{-1}(t^*) \times \right. \\ & \times (A_3(t^*) - M_3(t) H_1) \left. \right) F_0(t) y - \\ & - P^{-1}(t) \left(M_1(t) g_1 + M_2((t - t^*)/\mu) (g_2 + M_3(t) g_1) \right) \end{aligned}$$

представляет собой асимптотически субоптимальную обратную связь нулевого порядка в исходной задаче. Отметим, что построенная обратная связь не зависит от текущей позиции вектора быстрых переменных z .

8. Пример

Рассмотрим задачу переориентации динамически симметричного твердого тела, вращающегося вокруг оси симметрии:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = z_1, \quad \dot{y}_2 = z_2, \quad \mu \dot{z}_1 = -cz_1 - kz_2 + bu_1, \quad \mu \dot{z}_2 = kz_1 - cz_2 + bu_2, \\ y_1(t_*) = y_{*1}, \quad y_2(t_*) = y_{*2}, \\ z_1(t_*) = 0, \quad z_2(t_*) = 0, \\ (8.1) \quad y_1(t^*) = 0, \quad z_1(t^*) = 0, \end{aligned}$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min.$$

Постоянные μ, b, c, k положительны, при этом $\mu \ll 1$. Построим асимптотически субоптимальные управление и обратную связь нулевого порядка в этой задаче. Предположения 1 и 2 в данном случае выполнены.

Для динамической системы в первой базовой задаче

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = \frac{cbu_1 - kbu_2}{c^2 + k^2}, \quad \dot{y}_2 = \frac{kbu_1 + cbu_2}{c^2 + k^2}, \\ y_1(t_*) = y_{*1}, \quad y_2(t_*) = y_{*2}, \quad y_1(t^*) = 0, \\ J_1(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min \end{aligned}$$

выполнено требование (3.5) и, следовательно, выполнено предположение 3. Оптимальное управление в этой задаче представимо в виде

$$u_1^0(t) = -\frac{cy_{*1}}{b(t^* - t_*)}, \quad u_2^0(t) = \frac{ky_{*1}}{b(t^* - t_*)}, \quad t \in T = [t_*, t^*],$$

и не зависит от времени.

Вторая базовая задача имеет вид

$$dz_1/ds = -cz_1 - kz_2 + bu_1, \quad dz_2/ds = kz_1 - cz_2 + bu_2, \quad z_i(-\infty) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$J_2(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (u_1^2 + u_2^2) ds \rightarrow \min.$$

Предположение 4 в данном случае выполнено. Решением второй базовой задачи является управление

$$u_1^*(s) = \frac{2c \exp(cs) \cos(ks)}{b(t^* - t_*)} y_{*1}, \quad u_2^*(s) = \frac{2c \exp(cs) \sin(ks)}{b(t^* - t_*)} y_{*1}, \quad s \leq 0.$$

Согласно формуле (6.4) асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка в задаче (8.1) представимо в виде

$$(8.2) \quad \bar{u}_i^{(0)}(t, \mu) = u_i^0(t) + u_i^*((t - t^*)/\mu), \quad t \in T, \quad i = 1, 2.$$

Асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка, которая строится по формуле (7.4), имеет вид:

$$(8.3) \quad \begin{aligned} u_1^{(0)}(y, z, t, \mu) &= \frac{2c \exp(c(t - t^*)/\mu) \cos(k(t - t^*)/\mu) - c}{b(t^* - t)} y_1, \\ u_2^{(0)}(y, z, t, \mu) &= \frac{2c \exp(c(t - t^*)/\mu) \sin(k(t - t^*)/\mu) + k}{b(t^* - t)} y_1. \end{aligned}$$

Заметим, что в данном примере выражение (8.3) для асимптотически субоптимальной обратной связи следует не только из общей формулы (7.4), но и из формулы (8.2) и приведенных выше выражений для решения базовых задач.

Для оценки качества построенных асимптотических приближений к решению задачи (7.2) были найдены состояния $(y_1(t^*, \mu), z_1(t^*, \mu))$, в которые управление (8.2) (обратная связь (8.3)) переводит динамическую систему при конкретных значениях малого параметра в случае, когда $b = 4$, $c = 3$, $t_* = 0$, $t^* = 4$, $k = 1$, $y_{*1} = -2$, $y_{*2} = 1$. В частности, оказалось, что

$$y_1(4, 0, 1) = -0,03, \quad z_1(4, 0, 1) = 0, \quad y_1(4, 0, 001) = 0,0003, \quad z_1(4, 0, 001) = 0.$$

Результаты вычислений приведены с точностью до 10^{-6} .

9. Заключение

В статье предложены и обоснованы вычислительные процедуры построения асимптотических приближений к решению рассмотренной задачи в виде программы и обратной связи. При реализации предлагаемых алгоритмов исходная задача оптимального управления распадается на две невозмущенные задачи меньшей размерности. Такая декомпозиция позволяет эффективно решать задачи оптимизации динамических систем с большим числом фазовых переменных. Кроме того, вычислительные процедуры алгоритмов не содержат интегрирований жестких систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // *АиТ.* 2006. № 1. С. 3–51.
Dmitriev M.G., Kurina G.A. Singular Perturbation in Control Problems // *Autom. Remote Control.* 2006. V. 67. No. 1. P. 1–43.
2. *Калинин А.И.* Асимптотика решений возмущенных задач оптимального управления // *Изв. РАН. Техн. кибернетика.* 1994. № 3. С. 104–114.
Kalinin A.I. Asymptotics of the Solutions of Perturbed Optimal Control Problems // *J. Comput. Syst. Sci.* 1995. V. 33. No. 6. P. 75–84.
3. *Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y.* Singular Perturbations and Time Scales in Control Theories and Applications: An Overview 2002–2012 // *Int. J. Inform. Syst. Sci.* 2014. V. 9. No. 1. P. 1–36.
4. *Kokotovic P.V., Khalil H.K.* Singular Perturbations in Systems and Control. N.Y.: IEEE Press, 1986.
5. *Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г.* Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979.
6. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
7. *Kokotovic P.V., Jackel R.A.* Singular Perturbation of Linear Regulators: Basic Theorems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1972. V. 17. No. 1. P. 29–37.
8. *Wilde R.R., Kokotovic P.V.* Optimal Open- and Closed Loop Control of Singularly Perturbed Linear Systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1973. V. 18. No. 6. P. 616–626.
9. *Глизер В.Я., Дмитриев М.Г.* Сингулярные возмущения в линейной задаче оптимального управления с квадратичным функционалом // *Докл. АН СССР.* 1975. Т. 225. № 5. С. 997–1000.
10. *O'Malley R.E.Jr.* Singular Perturbation and Optimal Control // *Lect. Notes. Math.* 1978. V. 680. P. 171–218.
11. *Калинин А.И., Лавринович Л.И.* Применение метода малого параметра к сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задаче оптимального управления // *АиТ.* 2016. № 5. С. 3–18.
Kalinin A.I., Lavrinovich L.I. Application of the Small Parameter Method to the Singularly Perturbed Linear-Quadratic Optimal Control Problem // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 5. P. 751–763.
12. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.

13. *Калинин А.И.* О проблеме синтеза оптимальных систем управления // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 3. С. 397–402.
Kalinin A.I. To the Synthesis of Optimal Control Systems // Comput. Math. Math. Phys. 2018. V. 58. No. 3. P. 378–383.
14. *Мордухович Б.Ш.* Существование оптимальных управлений // Современ. пробл. матем. (Итоги науки и техники). М.: ВИНТИ, 1976. Т. 6. С. 207–271.
15. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
16. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
17. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972
18. *Giuev T.R., Dontchev A.L.* Singular Perturbation in Optimal Control Problems with Fixed Final State // Докл. Болгар. АН. 1978. Т. 31. No. 8. С. 935–955.
19. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Минск: Изд-во Университетское, 1984.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Хрустальевым.

Поступила в редакцию 27.02.2019

После доработки 23.07.2019

Принята к публикации 28.11.2019