

© 2020 г. И.Н. СИНИЦЫН, д-р техн. наук (sinitsin@dol.ru),
В.И. СИНИЦЫН, д-р физ.-мат. наук (sinitsin_vi@mail.ru)
(Федеральное государственное учреждение
“Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН” (ФИЦ ИУ РАН), Москва;
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)),
Э.Р. КОРЕПАНОВ, канд. техн. наук (ekorepanov@ipiran.ru),
Т.Д. КОНАШЕНКОВА (tkonashenkova64@mail.ru)
(Федеральное государственное учреждение
“Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН” (ФИЦ ИУ РАН), Москва)

ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ КАНОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

На основе вейвлет канонических разложений (ВЛКР) рассматриваются задачи синтеза линейных оптимальных в среднем квадратическом (с.к.) фильтров. Для моделирования существенно нестационарных стохастических процессов (СтП), в том числе описывающих ударные воздействия, предлагается использовать ВЛКР, построенные на основе коэффициентов разложения его ковариационной функции по ортогональному двумерному вейвлет базису. Для оценки наблюдаемого процесса, представленного в виде ВЛКР, построен с.к. оптимальный линейный оператор в виде набора формальных правил, описывающих реакцию оператора на базисные вейвлет функции. Получены формулы для вычисления с.к. оптимальной оценки сигнала и с.к. оптимальной оценки качества построенного с.к. оптимального линейного оператора. Дано описание инструментального программного обеспечения “Синтез-ВЛ”, разработанного в среде MATLAB. Приводится тестовый пример с дельта-функцией.

Ключевые слова: вейвлет каноническое разложение, нестационарный линейный с.к. оптимальный фильтр, ортогональные вейвлеты с конечным носителем, вейвлеты Хаара.

DOI: 10.31857/S0005231020110082

1. Введение

В [1] приведен обстоятельный обзор современных подходов решения задачи синтеза линейных оптимальных в среднем квадратическом фильтров. В [2] дан краткий обзор известного алгоритмического и программного обеспечения для решения задач нелинейного анализа стохастических систем (СтС) на основе канонических разложений (КР). Приводятся примеры с результатами работы инструментального программного обеспечения в среде MATLAB. Изложенные в [3] материалы входят в состав разработанного инструментального программного обеспечения в среде MATLAB и позволяют решать широкий круг задач, связанных со спектрально-корреляционным анализом и с

моделированием стационарных и нестационарных стохастических процессов (СтП). С помощью данных алгоритмов можно проводить анализ линейных и нелинейных преобразований случайных величин и функций. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что для большинства типовых инженерных задач достаточно ограничиваться небольшим числом членов КР. Описанное методическое и алгоритмическое обеспечение нашло применение в задачах моделирования и оценки параметров вибровозмущений и синтеза средств виброзащиты, виброненадежности компьютерного и коммуникационного оборудования.

Для моделирования существенно нестационарных СтП в условиях, например, ударных воздействий успешно применяются вейвлет методы. Методы моделирования СтП в линейных СтС и линейных СтС с параметрическими шумами на основе вейвлет канонических разложений (ВЛКР) разработаны в [3–8]. Вопросы синтеза с.к. оптимальных линейных фильтров посредством вейвлет канонических разложений в регулярных случаях рассмотрены в [9]. В настоящей статье на основе ВЛКР рассматриваются задачи синтеза оптимальных с.к. фильтров.

2. Теорема о вейвлет с.к. оптимальном линейном операторе

Пусть наблюдаемый сигнал $Z(t)$ и сигнал $W(s)$, подлежащий воспроизведению, можно представить в виде суммы линейной комбинации известных функций со случайными коэффициентами и помехи в виде некоторой случайной функции [10]:

$$(2.1) \quad Z(t) = \sum_{r=1}^N U_r \xi_r(t) + X(t), \quad t \in T,$$

$$(2.2) \quad W(s) = \sum_{r=1}^N U_r \zeta_r(s) + Y(s), \quad s \in S,$$

где $X(t)$, $Y(s)$ – случайные функции с нулевыми математическими ожиданиями; $\xi_1, \dots, \xi_N, \zeta_1, \dots, \zeta_N$ – заданные структурные функции; U_1, \dots, U_N – случайные величины (СВ) с нулевыми математическими ожиданиями и не коррелированные со случайными функциями $X(t)$ и $Y(s)$. Требуется найти такой оператор A_t , чтобы случайная функция

$$W^*(s) = A_t Z(t)$$

была с.к. оптимальной оценкой сигнала $W(s)$. Согласно [10] для этого необходимо и достаточно, чтобы линейный оператор A_t был с.к. оптимальным, т.е. удовлетворял уравнению

$$(2.3) \quad A_t[K_X(t, \tau)] = K_{YX}(s, \tau) + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} (\zeta_p(s) - A_t[\xi_p(t)]) \xi_q(\tau).$$

При этом для определения с.к. оптимального линейного оператора пригодны только такие решения уравнения (2.3), которые преобразуют $X(t)$ в случайные функции, обладающие конечными дисперсиями. Тогда уравнение (2.3) имеет общий вид

$$(2.4) \quad A_t[K_X(t, \tau)] = f(s, \tau) \quad (t, \tau \in T; s \in S),$$

где $f(s, \tau)$ – известная функция. В [9] доказана теорема о вейвлет с.к. оптимальном линейном операторе.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1) в пространстве $L^2(T)$, где $T = [t_0, t_1]$ – некоторый промежуток, задан ортонормированный вейвлет базис, порожденный вейвлетами с конечными носителями, вида

$$(2.5) \quad \left(\varphi_{00}^t(t), \psi_{jk}^t(t) \right),$$

где $\varphi_{00}^t(t) = \varphi^t(t)$ – масштабированная функция $\varphi_{jk}^t = \sqrt{2^j} \varphi^t(2^j t - k)$; $\psi_{00}^t(t) = \psi^t(t)$ – материнский вейвлет; $\psi_{jk}^t(t) = \sqrt{2^j} \psi^t(2^j t - k)$; $j = 1, 2, \dots, J^t$; $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$; J^t – максимальный уровень разрешения;

2) в пространстве $L^2(S)$, где $S = [s_0, s_1]$ – некоторый промежуток, задан ортонормированный вейвлет базис вида, порожденный вейвлетами с конечными носителями, вида

$$(2.6) \quad \left(\varphi_{00}^s(s), \psi_{jk}^s(s) \right),$$

где $\varphi_{00}^s(s) = \varphi^s(s)$ – масштабированная функция $\varphi_{jk}^s = \sqrt{2^j} \varphi^s(2^j s - k)$; $\psi_{00}^s(s) = \psi^s(s)$ – материнский вейвлет; $\psi_{jk}^s(s) = \sqrt{2^j} \psi^s(2^j s - k)$; $j = 1, 2, \dots, J^s$; $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$; J^s – максимальный уровень разрешения;

3) в пространстве $L^2(T \times T)$ определен двумерный ортонормированный базис путем тензорного произведения двух одномерных вейвлет базисов (2.5) в случае, когда масштабирование по обеим переменным происходит одинаково:

$$(2.7) \quad \Phi_{00}^{tA}(t_1, t_2) = \varphi_{00}^t(t_1) \varphi_{00}^t(t_2),$$

$$(2.8) \quad \Psi_{jkn}^{tH}(t_1, t_2) = \varphi_{jk}^t(t_1) \psi_{jn}^t(t_2),$$

$$(2.9) \quad \Psi_{jkn}^{tB}(t_1, t_2) = \psi_{jk}^t(t_1) \varphi_{jn}^t(t_2),$$

$$(2.10) \quad \Psi_{jkn}^{tD}(t_1, t_2) = \psi_{jk}^t(t_1) \psi_{jn}^t(t_2),$$

где $j = 1, \dots, J^t$; $k, n = 0, 1, \dots, 2^j - 1$;

4) в пространстве $L^2(S \times T)$ определен двумерный ортонормированный базис вида путем тензорного произведения двух одномерных вейвлет базисов (2.5) и (2.6) в случае, когда масштабирование по обеим переменным происходит по-разному:

$$(2.11) \quad \Phi_{00}^{sA}(s, t) = \varphi_{00}^s(s) \varphi_{00}^t(t),$$

$$(2.12) \quad \Psi_{j_2 n}^{sH}(s, t) = \varphi_{00}^s(s) \psi_{j_2 n}^t(t),$$

$$(2.13) \quad \Psi_{j_1 k}^{sB}(s, t) = \psi_{j_1 k}^s(s) \varphi_{00}^t(t),$$

$$(2.14) \quad \Psi_{j_1 k j_2 n}^{sD}(s, t) = \psi_{j_1 k}^t(s) \psi_{j_2 n}^t(t),$$

где $j_1 = 0, 1, \dots, J^s$; $k = 0, 1, \dots, 2^{j_1} - 1$; $j_2 = 0, 1, \dots, J^t$; $n = 0, 1, \dots, 2^{j_2} - 1$;

5) функция $f(s, t) \in L^2(S \times T)$ имеет сходящееся вейвлет разложение (ВЛР) согласно [11–13]:

$$\begin{aligned} f(s, \tau) = & a^f \Phi_{00}^{sA}(s, \tau) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jk}^f \Psi_{jk}^{sH}(s, \tau) + \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^f \Psi_{jk}^{sB}(s, \tau) + \\ & + \sum_{j_1=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} \sum_{j_2=0}^{J^t} \sum_{n=0}^{2^{j_2}-1} d_{j_1 k j_2 n}^f \psi_{j_1 k j_2 n}^{sD}(s, \tau), \end{aligned}$$

где

$$a^f = \int_S \int_T f(s, \tau) \Phi_{00}^{sA}(s, \tau) dt ds,$$

$$h_{jk}^f = \int_S \int_T f(s, \tau) \Psi_{jk}^{sH}(s, \tau) dt ds,$$

$$b_{jk}^f = \int_S \int_T f(s, \tau) \Psi_{jk}^{sB}(s, \tau) dt ds,$$

$$d_{j_1 k j_2 n}^f = \int_S \int_T f(s, \tau) \Psi_{j_1 k j_2 n}^{sD}(s, \tau) dt ds;$$

6) функция $K_X(t, \tau) \in L^2(T \times T)$ допускает сходящееся ВЛР согласно [11–13]:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} K_X(t, \tau) = & a^t \Phi_{00}^{tA}(t, \tau) + \\ & + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n=0}^{2^{j-1}} \left(h_{jkn}^t \Psi_{jkn}^{tH}(t, \tau) + b_{jkn}^t \Psi_{jkn}^{tB}(t, \tau) + d_{jkn}^t \Psi_{jkn}^t D(t, \tau) \right), \end{aligned}$$

где

$$a^t = \int_T \int_T K_X(t_1, t_2) \Phi_{00}^{tA}(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

$$h_{jkn}^t = \int_T \int_T K_X(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^{tH}(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

$$b_{jkn}^t = \int_T \int_T K_X(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^{tB}(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

$$d_{jkn}^t = \int_T \int_T K_X(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^{tD}(t_1, t_2) dt_1 dt_2;$$

7) результат воздействия неизвестного линейного оператора A_t на базисные вейвлет функции вида (2.5) представляют собой функции, принадлежащие пространству $L^2(S)$.

Тогда линейный оператор A_t , который является решением уравнения (2.4), определяется посредством набора формальных правил:

$$(2.16) \quad \begin{aligned} A_t[\varphi_{jk}^t(t)] &= u_{jk}(s) \quad (j = 0, 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1), \\ A_t[\psi_{00}^t(t)] &= v_{00}(s), \\ A_t[\psi_{jk}^t(t)] &= 0 \quad (j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1), \end{aligned}$$

где

$$u_{00}(s) = a_{00}^u \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{00in}^u \psi_{in}^s(s);$$

$$v_{00}(s) = a_{00}^v \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{00in}^v \psi_{in}^s(s);$$

$$u_{jk}(s) = a_{jk}^u \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{jkin}^u \psi_{in}^s(s) \quad (j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1);$$

параметры a_{00}^u , d_{00in}^u , a_{00}^v , d_{00in}^v , a_{jk}^u , d_{jkin}^u ($i = 0, \dots, J^s; n = 0, 1, \dots, 2^i - 1$; $j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$) являются решением системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{aligned} &a^t a_{00}^u + b_{000}^t a_{00}^v = a^f, \\ &h_{000}^t a_{00}^u + d_{000}^t a_{00}^v = h_{00}^f, \\ &\sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t a_{jk}^u = h_{jn}^f \quad (j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1), \\ &a^t d_{00il}^u + b_{000}^t d_{00il}^v = b_{il}^f \quad (i = 0, \dots, J^s; l = 0, 1, \dots, 2^i - 1), \\ &h_{000}^t d_{00il}^u + d_{000}^t d_{00il}^v = d_{il00}^f \quad (i = 0, \dots, J^s; l = 0, 1, \dots, 2^i - 1), \\ &\sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t d_{jkil}^u = d_{iljn}^f \\ &(i = 1, \dots, J^s; l = 0, 1, \dots, 2^i - 1; j = 1, \dots, J^t; n = 0, 1, \dots, 2^j - 1). \end{aligned} \right.$$

3. Вейвлет канонические разложения

Примем, что случайная функция (СФ) $X(t)$ в (2.1) допускает каноническое разложение (КР) вида

$$(3.1) \quad X(t) = \sum_{\nu=1}^{L^t} V_{\nu} x_{\nu}(t),$$

где V_{ν} – некоррелированные СВ с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями D_{ν} ; $x_{\nu}(t)$ – детерминированные координатные функции, представленные в виде линейной комбинации базисных вейвлет функций вида (2.5).

Для удобства представим одномерный ортонормированный вейвлет базис (2.5) в виде:

$$(3.2) \quad f_1(t) = \varphi_{00}^t(t); \quad f_2(t) = \psi_{00}^t(t); \quad f_{\nu}(t) = \psi_{jk}^t(t)$$

для $\nu = 3, 4, \dots, L^t$; $\nu = l + k + 1$; $l = 2^j$; $j = 1, 2, \dots, J^t$; $k = 0, 1, \dots, l - 1$; $L^t = 2 \cdot 2^{J^t}$.

Последовательный алгоритм построения вейвлет канонического разложения СФ $X(t)$ определяется известными формулами [10] декорреляции СВ:

$$A_{\nu} = \int_T f_{\nu} X(t) dt \quad (\nu = 1, 2, \dots, L^t).$$

Определим ковариационные моменты СВ A_{ν} :

$$k_{\nu\mu} = M[A_{\nu}^{\circ} \bar{A}_{\mu}^{\circ}] = \int_T \int_T f_{\nu}(t_1) f_{\mu}(t_2) K_X(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (\nu, \mu = 1, 2, \dots, L^t).$$

На основании (2.15) имеем:

$$(3.3) \quad k_{11} = a^t; \quad k_{12} = h^t; \quad k_{21} = b^t; \quad k_{22} = d_{000}^t; \quad k_{\nu\mu} = d_{jn_1n_2}^t$$

для $\nu = l + n_1 + 1$; $\mu = l + n_2 + 1$; $l = 2^j$; $j = 1, 2, \dots, J^t$; $n_1, n_2 = 0, 1, \dots, l - 1$. Остальные $k_{\nu\mu} = 0$.

Для удобства введем функции

$$(3.4) \quad z_{\nu}(t) = \int_T f_{\nu}(\tau) K_X(t, \tau) d\tau \quad (\nu = 1, 2, \dots, L^t).$$

Тогда в силу (2.15) имеем:

$$z_1(t) = a^t \varphi_{00}^t(t) + b_{000}^t \psi_{00}^t(t); \quad z_2(t) = h_{000}^t \varphi_{00}^t(t) + d_{000}^t \psi_{00}^t(t);$$

$$z_{\nu}(t) = \sum_{k=0}^{2^j-1} \left(h_{jkn}^t \varphi_{jk}^t(t) + d_{jkn}^t \psi_{jk}^t(t) \right)$$

для $\nu = 3, \dots, L^t$; $\nu = l + n + 1$; $l = 2^j$; $j = 1, 2, \dots, J^t$; $n = 0, 1, \dots, l - 1$.

При этом некоррелированные СВ V_ν удовлетворяют соотношениям:

$$A_1^\circ = V_1; \quad A_r^\circ = -\sum_{\nu=1}^{r-1} c_{r\nu} V_\nu + V_r \quad (r = 2, 3, \dots, L^t);$$

где

$$(3.5) \quad c_{\nu 1} = -\frac{k_{\nu 1}}{D_1} \quad (\nu = 2, 3, \dots, L^t);$$

$$c_{\nu \mu} = -\frac{1}{D_\mu} \left(k_{\nu \mu} - \sum_{\lambda=1}^{\mu-1} D_\lambda c_{\mu \lambda} c_{\nu \lambda} \right) \quad (\mu = 2, 3, \dots, \nu-1; \nu = 3, 4, \dots, L^t);$$

$$(3.6) \quad D_1 = D[V_1] = k_{11}; \quad D_\nu = D[V_\nu] = k_{\nu\nu} - \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} D_\nu |c_{\nu\lambda}|^2 \quad (\nu = 2, 3, \dots, L^t).$$

Координатные функции $x_\nu(t)$ в силу [10] определяются последовательно формулами:

$$x_1(t) = \frac{1}{D_1} z_1(t);$$

$$x_\nu(t) = \frac{1}{D_\nu} \left(\sum_{\lambda=1}^{\nu-1} d_{\nu\lambda} z_\lambda(t) + z_\nu(t) \right) \quad (\nu = 2, 3, \dots, L^t);$$

$$d_{\nu\lambda} = c_{\nu\lambda} + \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} d_{\mu\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \nu-2); \quad d_{\nu,\nu-1} = c_{\nu,\nu-1}.$$

Далее представим координатные функции $x_\nu(t)$ в виде линейных комбинаций базисных вейвлет функций вида (2.5):

$$(3.7) \quad x_1(t) = \frac{1}{D_1} \left(a^t \varphi_{00}^t(t) + b_{000}^t \psi_{00}^t(t) \right);$$

$$(3.8) \quad x_2(t) = \frac{1}{D_2} \left((d_{21} a^t + h_{000}^t) \varphi_{00}^t(t) + (d_{21} b_{000}^t + d_{000}^t) \psi_{00}^t(t) \right);$$

$$(3.9) \quad x_3(t) = \frac{1}{D_3} \left((d_{31} a^t + d_{32} h_{000}^t) \varphi_{00}^t(t) + (d_{31} b_{000}^t + d_{32} d_{000}^t) \psi_{00}^t(t) + \right.$$

$$\left. + h_{100}^t \varphi_{10}^t(t) + h_{110}^t \varphi_{11}^t(t) + d_{100}^t \psi_{10}^t(t) + d_{110}^t \psi_{11}^t(t) \right);$$

$$(3.10) \quad x_4(t) = \frac{1}{D_4} \left((d_{41} a^t + d_{42} h_{000}^t) \varphi_{00}^t(t) + (d_{41} b_{000}^t + d_{42} d_{000}^t) \psi_{00}^t(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^1 (d_{43} h_{1k0}^t + h_{1k1}^t) \varphi_{1k}^t(t) + \sum_{k=0}^1 (d_{43} d_{1k0}^t + d_{1k1}^t) \psi_{1k}^t(t) \right).$$

Для следующих координатных функций для удобства введем обозначения

$$(3.11) \quad x_\nu(t) = x_{jn}^*(t)$$

$$(\nu = 5, 6, \dots, L^t; \nu = 2^j + n + 1; j = 2, 3, \dots, J^t; n = 0, 1, \dots, 2^j - 1).$$

Если $n = 0$, то $\nu = 2^j + 1$ для $j = 2, 3, \dots, J^t$ и

$$(3.12) \quad x_\nu(t) = x_{j0}^*(t) = \\ = \frac{1}{D_\nu} \left((d_{\nu 1} a^t + d_{\nu 2} h_{000}^t) \varphi_{00}^t(t) + (d_{\nu 1} b_{000}^t + d_{\nu 2} d_{000}^t) \varphi_{00}^t(t) + \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=0}^{2^i-1} \sum_{n_1=0}^{2^i-1} d_{\nu\lambda} (h_{ikn_1}^t \varphi_{ik}^t(t) + d_{ikn_1}^t \psi_{ik}^t(t)) + \sum_{k=0}^{2^j-1} (h_{jk0}^t \varphi_{jk}^t(t) + d_{jk0}^t \psi_{jk}^t(t)) \right)$$

для $\lambda = 2^i + n_1 + 1$.

Если $n \neq 0$, то $\nu = 2^j + n + 1$ для $j = 2, 3, \dots, J^t$; $n = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ и

$$(3.13) \quad x_\nu(t) = x_{jn}^*(t) = \\ = \frac{1}{D_\nu} \left((d_{\nu 1} a^t + d_{\nu 2} h_{000}^t) \varphi_{00}^t(t) + (d_{\nu 1} b_{000}^t + d_{\nu 2} d_{000}^t) \psi_{00}^t(t) + \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=0}^{2^i-1} \sum_{n_1=0}^{2^i-1} d_{\nu\lambda} (h_{ikn_1}^t \varphi_{ik}^t(t) + d_{ikn_1}^t \psi_{ik}^t(t)) + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n_1=0}^{n-1} d_{\nu\lambda_1} (h_{ikn_1}^t \varphi_{ik}^t(t) + d_{ikn_1}^t \psi_{ik}^t(t)) + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{2^j-1} (h_{jkn}^t \varphi_{jk}^t(t) + d_{jkn}^t \psi_{jk}^t(t)) \right)$$

для $\lambda = 2^i + n_1 + 1, \lambda_1 = 2^j + n_1 + 1$.

Наконец, можно убедиться, что выражения (3.7)–(3.13) можно записать в общем виде:

$$(3.14) \quad x_\nu(t) = \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} \left(a_{\nu jk}^x \varphi_{jk}^t(t) + d_{jk}^x \psi_{jk}^t(t) \right) \quad (\nu = 1, 2, \dots, L^t).$$

4. Синтез вейвлет с.к. оптимальной оценки сигнала

Для решения операторного уравнения (2.3) применим теорему 1. Будем считать, что выполнены все условия теоремы 1, а также дополнительные условия:

1) функции $\xi_1, \dots, \xi_N \in L^2(T)$ и представимы в виде сходящихся вейвлет разложений (ВЛР) на промежутке T :

$$(4.1) \quad \xi_p(t) = a_p^\xi \varphi_{00}^t(t) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{pjk}^\xi \psi_{jk}^t(t) \quad (p = 1, \dots, N),$$

где

$$a_p^\xi = \int_T \xi_p(t) \varphi_{00}^t(t) dt,$$

$$d_{pjk}^\xi = \int_T \xi_p(t) \psi_{jk}^t(t) dt;$$

2) функции $\zeta_1, \dots, \zeta_N(s) \in L^2(S)$ и представимы в виде сходящихся ВЛР на промежутке S :

$$(4.2) \quad \zeta_p(t) = a_p^\zeta \varphi_{00}^s(s) + \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{pjk}^\zeta \psi_{jk}^s(s) \quad (p = 1, \dots, N),$$

где

$$a_p^\zeta = \int_S \zeta_p(s) \varphi_{00}^s(s) ds,$$

$$d_{pjk}^\zeta = \int_S \zeta_p(s) \psi_{jk}^s(s) ds;$$

3) функция $K_{YX}(s, \tau) \in L^2(S \times T)$ и представима в виде сходящегося ВЛР:

$$(4.3) \quad K_{YX}(s, \tau) = a^s \Phi_{00}^{sA}(s, \tau) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jk}^s \Psi_{jk}^{sH}(s, \tau) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^s \Psi_{jk}^{sB}(s, \tau) + \sum_{j_1=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} \sum_{j_2=0}^{J^t} \sum_{n=0}^{2^{j_2}-1} d_{j_1 k j_2 n}^s \Psi_{j_1 k j_2 n}^{sD}(s, \tau),$$

где

$$a^s = \int_S \int_T K_{YX}(s, \tau) \Phi_{00}^{sA}(s, \tau) d\tau ds,$$

$$h_{jk}^s = \int_S \int_T K_{YX}(s, \tau) \Psi_{jk}^{sH}(s, \tau) d\tau ds,$$

$$b_{jk}^s = \int_S \int_T K_{YX}(s, \tau) \Psi_{jk}^{sB}(s, \tau) d\tau ds,$$

$$d_{j_1 k j_2 n}^s = \int_S \int_T K_{YX}(s, \tau) \Psi_{j_1 k j_2 n}^{sD}(s, \tau) d\tau ds.$$

Тогда с.к. оптимальный линейный оператор A_t задается набором формальных правил теоремы 1. Коэффициенты ВЛР функций $u_{00}(s), v_{00}(s), u_{jk}(s)$ ($j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$) по базису вида (2.6) удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида (2.17):

$$(4.4) \quad a^t a_{00}^u + b_{000}^t a_{00}^v = a^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \left(a_p^\zeta - a_p^\xi a_{00}^u - d_{p00}^\xi a_{00}^v \right) a_q^\xi,$$

$$(4.5) \quad d_{000}^t a_{00}^v + h_{000}^t a_{00}^u = h_{00}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \left(a_p^\zeta - a_p^\xi a_{00}^u - d_{p00}^\xi a_{00}^v \right) d_{q00}^\xi,$$

$$(4.6) \quad \sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t a_{jk}^u = h_{jn}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \left(a_p^\zeta - a_p^\xi a_{00}^u - d_{p00}^\xi a_{00}^v \right) d_{qjn}^\xi$$

$$(i = 0, 1, \dots, J^s; l = 0, 1, \dots, 2^i - 1),$$

$$(4.7) \quad a^t d_{00il}^u + b_{000}^t d_{000il}^v = b_{il}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \left(a_p^\zeta - a_p^\xi a_{00}^u - d_{p00}^\xi a_{00}^v \right) a_q^\xi$$

$$(i = 0, 1, \dots, J^s; l = 0, 1, \dots, 2^i - 1),$$

$$(4.8) \quad d_{000}^t d_{000il}^v + h_{000}^t d_{00il}^u = d_{il00}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \left(d_{pil}^\zeta - a_p^\xi d_{00il}^u - d_{p00}^\xi d_{000il}^v \right) d_{q00}^\xi$$

$$(i = 0, 1, \dots, J^s; l = 0, 1, \dots, 2^i - 1),$$

$$(4.9) \quad \sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t d_{jki}^u = d_{iljn}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \left(d_{pil}^\zeta - a_p^\xi d_{00il}^u - d_{p00}^\xi d_{000il}^v \right) d_{qjn}^\xi$$

$$(j = 1, \dots, J^t; n = 0, 1, \dots, 2^j - 1; i = 0, 1, \dots, J^s; l = 0, 1, \dots, 2^i - 1).$$

Качество оптимального с.к. оператора определяется с.к. оценкой [10]:

$$\begin{aligned} \eta(s) &= M \left[|\delta W|^2 \right] = M \left[|W(s) - W^*(s)|^2 \right] = M \left[|W(s) - A_t Z(t)|^2 \right] = \\ &= \Gamma_W(s, s) - A_t \overline{\Gamma_{WZ}(s, t)} = \Gamma_W(s, s) - A_t \Gamma_{WZ}(s, t), \end{aligned}$$

так как $\Gamma_{WZ}(s, t)$ – действительная функция. Согласно (2.1), (2.2):

$$\Gamma_W(s, s) = \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) \zeta_q(s) + K_Y(s, s),$$

$$\Gamma_{WZ}(s, t) = \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) \xi_q(t) + K_{YX}(s, t).$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \eta(s) &= \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) \zeta_q(s) + K_Y(s, s) - \\ &- A_t \left[\sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) \xi_q(t) + K_{YX}(s, t) \right] = \\ &= \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) \left(\zeta_q(s) - a_q^\xi u_{00}(s) - d_{q00}^\xi v_{00}(s) \right) + K_Y(s, s) - \\ &- \left(\left(a^s \varphi_{00}^s + \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^s \varphi_{jk}^s(s) \right) u_{00}(s) + h_{00}^s \varphi_{00}^s(s) v_{00}(s) \right). \end{aligned}$$

В итоге получено следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, а также:

- 1) наблюдаемый сигнал $Z(t)$ имеет вид (2.1), сигнал, подлежащий воспроизведению, $W(s)$ имеет вид (2.2);
- 2) $\xi_1, \dots, \xi_N \in L^2(T)$; $\zeta_1, \dots, \zeta_N \in L^2(S)$; $K_{YX}(s, t) = M[Y(s)X(t)] \in L^2(S \times R)$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) с.к. оптимальный линейный оператор A_t , определяемый уравнением (2.3), задается набором формальных правил (2.16), а параметры a_{jk}^u , d_{jkin}^u , a_{00}^u , d_{00in}^u , a_{00}^v , d_{00in}^v ($i = 0, \dots, J^s$; $n = 0, 1, \dots, 2^i - 1$; $j = 1, \dots, J^t$; $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$) определяются СЛАУ (4.4)–(4.9);

- 2) качество с.к. оптимального линейного оператора A_t определяется с.к. оценкой:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \eta(s) &= \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) \left(\zeta_q(s) - a_q^\xi u_{00}(s) - d_{q00}^\xi v_{00}(s) \right) + K_Y(s, s) - \\ &- \left(\left(a^s \varphi_{00}^s + \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^s \varphi_{jk}^s(s) \right) u_{00}(s) + h_{00}^s \varphi_{00}^s(s) v_{00}(s) \right). \end{aligned}$$

Следствие. Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда с.к. оптимальная оценка $W^*(s)$ сигнала $W(s)$ определяется формулой:

$$(4.11) \quad W^*(s) = A_t Z(t) = \sum_{r=1}^N U_r \left(a_r^\xi u_{00}(s) + d_{r00}^\xi v_{00}(s) \right) + \\ + \sum_{\nu=1}^{L^t} V_\nu \left(d_{\nu 00}^x v_{00}(s) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} a_{\nu j k}^x u_{j k}(s) \right).$$

Следствием теоремы 2 являются два алгоритма: построение с.к. оптимального линейного оператора A_t и построение с.к. оптимальной оценки $W^*(s)$ сигнала $W(s)$.

Алгоритм 1.

1. Задание вейвлет базисов (2.5), (2.6), (2.7)–(2.10), (2.11)–(2.14).
2. Вейвлет разложение функций $\xi_1, \dots, \xi_N \in L^2(T)$ по базису (2.5), функций $\zeta_1, \dots, \zeta_N(s) \in L^2(S)$ по базису (2.6), функции $K_X(t, \tau) \in L^2(T \times T)$ по базису (2.7)–(2.10), $K_{YX}(s, \tau) \in L^2(S \times T)$ по базису (2.11)–(2.14).
3. Составление и решение СЛАУ (4.4)–(4.9) относительно $a_{jk}^u, d_{jkil}^u, a_{00}^u, d_{00in}^u, a_{00}^v, d_{00in}^v$ ($i = 0, \dots, J^s; n = 0, 1, \dots, 2^i - 1; j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$).
4. Задание набора формальных правил (2.16), которыми определяется с.к. оптимальный линейный оператор A_t .
5. Вычисление с.к. оптимальной оценки η по формуле (4.10) для определения качества с.к. оптимального линейного оператора A_t .

Алгоритм 2.

1. Вейвлет разложение функций $\xi_1, \dots, \xi_N \in L^2(T)$ по базису (2.5) в виде (4.1).
2. Вейвлет каноническое разложение случайной функции (СФ) $X(t)$ в виде (3.1):
 - определение $k_{\nu\mu}$ по формулам (3.3), остальные $k_{\nu\mu} = 0$;
 - определение $D_\nu = D[V_\nu]$ по формулам (3.5), (3.6);
 - определение координатных функции $x_\nu(t)$ в виде линейных комбинаций базисных вейвлет функций вида (2.5) по формулам (3.7)–(3.14).
3. Построение с.к. оптимальной оценки $W^*(s)$ сигнала $W(s)$ в виде (4.11).

5. Инструментальное программное обеспечение “Синтез-ВЛ”

На основе методических результатов разделов 3 и 4 в ФИЦ ИУ РАН разработано инструментальное программное обеспечение (ИПО) “Синтез-ВЛ” в среде MATLAB, которое реализует алгоритмы построения вейвлет с.к. оптимального линейного оператора в случае линейной зависимости сигнала от параметров и аддитивной помехи и осуществляет:

- 1) ввод исходных данных: набор подпрограмм-функций, задающих структурные функции $\xi_1, \dots, \xi_N, \zeta_1, \dots, \zeta_N$ и ковариационные функции $K_X(t, \tau), K_{YX}(s, \tau)$; промежуток наблюдения $[t_0, t_1]$ СтП $Z(t)$; промежуток оценки $[s_0, s_1]$ СтП $W(t)$; максимальные уровни вейвлет разложения J^t и J^S ;

2) одномерное вейвлет разложение структурных функций $\xi_1, \dots, \xi_N, \zeta_1, \dots, \zeta_N$ по вейвлет базису Хаара с применением стандартной функции `wavedec`;

3) двумерное вейвлет разложение ковариационных функций $K_X(t, \tau)$ и $K_{YX}(s, \tau)$ по вейвлет базису Хаара с применением стандартной функции `wavedec2`;

4) автоматическое составление и решение СЛАУ для вычисления параметров: $a_{jk}^u, d_{jki}^u, a_{00}^v, d_{00in}^v$ ($i = 1, \dots, J^s; n = 0, 1, \dots, 2^i - 1; j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$);

5) построение ВЛКР процесса $X(t)$ на основе двумерного вейвлет разложения ковариационной функции $K_X(t, \tau)$ по вейвлетам Хаара;

6) вывод результатов в числовом виде.

Исходные данные для ИПО “Синтез-ВЛ”, задаваемые в числовом виде:

1) начальный момент времени наблюдения сигнала $T0 = t_0$;

2) конечный момент времени наблюдения сигнала $T = t_1$;

3) начальный момент времени оценки сигнала $S0 = s_0$;

4) конечный момент времени оценки сигнала $SS = s_1$;

5) максимальные уровни вейвлет разложения $Jt = J^t, Js = J^s$;

6) количество базисных вейвлет функций $Nt = 2 \cdot 2^{J^t}, Ns = 2 \cdot 2^{J^s}$.

Исходные данные для ИПО “Синтез-ВЛ” в аналитическом виде, задаваемые в виде пользовательских функций-подпрограмм:

1) набор функций-подпрограмм $fksi1, \dots, fksiN$ для задания структурных функций ξ_1, \dots, ξ_N ;

2) набор функций-подпрограмм $fdzet1, \dots, fdzetN$ для задания структурных функций ζ_1, \dots, ζ_N ;

3) подпрограмма-функция $fcov$ для задания ковариационной функции $K_X(t, \tau)$;

4) подпрограмма-функция $fcovYX$ для задания ковариационной функции $K_{YX}(s, \tau)$.

Подпрограммы-функции имеют синтаксис вызова: $cov = fcov(t1, t2)$; $covYX = fcovYX(s, t)$; $ksi = fksii(t)$ ($i = 1, \dots, N$); $dzet = fdzeti(s)$ ($i = 1, \dots, N$).

Все вычисления осуществляются в подпрограмме-функции `SYNTHESISWL1`, которая имеет синтаксис вызова:

$$[WOt, nett] = SYNTHESISWL1(Jt, Nt, T0, T, Js, Ns, S0, SS).$$

Выходные данные выдаются в матричном виде:

1) $WOt(Ns)$ — вектор значений с.к. оптимальной оценки $W^*(s)$ сигнала $W(s)$ в точках $s_j = S0 + (j - 1)$ для $j = 1, 2, \dots, Ns$;

2) $nett(Ns)$ — вектор значений с.к. оптимальной оценки η качества с.к. оптимального линейного оператора A_t в точках $s_j = S0 + (j - 1)$ для $j = 1, 2, \dots, Ns$.

При вычислениях используется подпрограмма-функция `KRWL1` для построения ВЛКР процесса $X(t)$, заданного на промежутке $[0, T]$, на основе двумерного вейвлет разложения ковариационной функции $K_X(t, \tau)$ по вейвлетам Хаара и для реализации алгоритма, изложенного в разделе 3. Подпрограмма-

функция KRWL1 имеет синтаксис вызова:

$$[Xnu, Dnu, DispX, XKRW] = KRWL1(J, NJ, T),$$

где J – максимальный уровень вейвлет разложения; $NJ = 2 \cdot 2^J$. При вычислениях используется стандартная функция `wavedec2` для получения коэффициентов двумерного вейвлет разложения ковариационной функции одномерного СтП $X(t)$, заданной с помощью подпрограммы-функции `fcov`. Выходные данные выдаются в матричном виде:

1) $Xnu(NJ, NJ)$ – матрица значений координатных функций ВЛКР:

$$Xnu(i, j) = x_i \left(\frac{T(j-0,5)}{N} \right) \quad \text{для } i, j = 1, 2, \dots, NJ;$$

2) $Dnu(NJ)$ – вектор значений дисперсий D_ν ($\nu = 1, 2, \dots, NJ$) некоррелированных СВ V_1, \dots, V_{NJ} ;

3) $DispX(NJ)$ – вектор значений дисперсии СтП $X(t)$ в точках $t_j = \frac{T(j-0,5)}{NJ}$ для $j = 1, 2, \dots, NJ$;

4) $XKRW(NJ)$ – вектор значений реализации СтП $X(t)$ в точках $t_j = \frac{T(j-0,5)}{NJ}$ для $j = 1, 2, \dots, NJ$.

6. Применения

Найти с.к. оптимальный линейный фильтр, предназначенный для воспроизведения сигнала

$$(6.1) \quad W(s) = U_1 + U_2 \delta(s - s^*)$$

по результатам наблюдения суммы этого сигнала и некоррелированной помехи, т.е.

$$(6.2) \quad Z(t) = U_1 + U_2 \delta(t - t^*) + X(t).$$

Наблюдение производится в течение интервала времени длительностью T , предшествующего данному моменту s ($s \geq T$). Случайная функция $X(t)$ задана математическим ожиданием, равным нулю, и ковариационной функцией $K_X(t, \tau) = D \exp(-\alpha|t - \tau|)$. U_1, U_2 – СВ с нулевыми математическими ожиданиями, не коррелированные с $X(t)$, $M[U_p \overline{U}_q] = \gamma_{pq}$ ($p, q = 1, 2$).

Применим алгоритм 1 для построения с.к. оптимального линейного оператора A_t для воспроизведения сигнала $W(s)$, заданного формулой (6.1), по результатам наблюдения сигнала $Z(t)$, заданного формулой (6.2), и для определения с.к. оптимальной оценки η качества оператора A_t . При вычислениях будем использовать ортонормированный базис Хаара вида (2.5), где

$$\text{масштабирующая функция } \varphi_{00}^t(t) = \varphi^t(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, 1), \\ 1, & \text{если } t \notin [0, 1), \end{cases}$$

$$\text{материнский вейвлет } \psi_{00}^t(t) = \psi^t(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1, & \text{если } t \in [\frac{1}{2}, 1), \\ 0, & \text{если } t \notin [0, 1). \end{cases}$$

Перейдем от переменной $t \in [s - T, s]$ к переменной $\bar{t} \in [0, 1]$ с помощью замены переменной $\bar{t} = \frac{t - (s - T)}{s - (s - T)} = \frac{t - (s - T)}{T}$. Тогда

$$K_X(t, \tau) = K_X(\bar{t}, \bar{\tau}) = D \exp(-\alpha T(|\bar{t} - \bar{\tau}|)),$$

$$Z(t) = Z(\bar{t}) = U_1 + U_2((s - T) + T\bar{t}) + X((s - T) + T\bar{t}).$$

Далее в примере для простоты записи будем считать, что $t = \bar{t}$, $\tau = \bar{\tau}$.

Уравнение (2.3) в данном случае имеет вид:

$$A_t[K_X(t, \tau)] = \sum_{p,q=1}^2 \gamma_{pq} \left(\zeta_p(s) - A_t[\xi_p(t)] \right) \xi_q(\tau),$$

так как $Y(s) = 0$ и как следствие $K_{YX}(s, \tau) = 0$.

Тогда СЛАУ для определения неизвестных функций $u_{00}(s)$, $v_{00}(s)$, $u_{jk}(s)$ ($j = 1, 2, \dots, J^t$; $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$) для заданного значения переменной s имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^t u_{00}(s) + b_{000}^t v_{00}(s) = \sum_{p,q=1}^2 \gamma_{pq} \lambda_p a_q^\xi, \\ d_{000}^t v_{00}(s) + h_{000}^t u_{00}(s) = \sum_{p,q=1}^2 \gamma_{pq} \lambda_p d_{q00}^\xi, \\ \sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t u_{jk}(s) = \sum_{p,q=1}^2 \gamma_{pq} \lambda_p d_{qjn}^\xi \\ (j = 1, 2, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1), \\ \lambda_1 = \zeta_1(s) - a_1^\xi u_{00}(s) - d_{100}^\xi v_{00}(s), \\ \lambda_2 = \zeta_2(s) - a_2^\xi u_{00}(s) - d_{200}^\xi v_{00}(s). \end{array} \right.$$

Здесь для удобства введены переменные

$$\lambda_p = \zeta_p(s) - a_p^\xi u_{00}(s) - d_{p00}^\xi v_{00}(s) \quad (p = 1, 2).$$

Для заданного значения переменной s набор формальных правил, которыми определяется с.к. оптимальный линейный оператор A_t при $t \in [0, 1]$, имеет вид (2.16). При этом с.к. оптимальная оценка η для определения качества с.к. оптимального линейного оператора A_t вычисляется по формуле:

$$\eta(s) = \sum_{p,q=1}^2 \gamma_{pq} \zeta_p(s) \left(\zeta_q(s) - a_q^\xi u_{00}(s) - d_{q00}^\xi v_{00}(s) \right).$$

С.к. оптимальная оценка η качества с.к. оптимального линейного оператора A_t зависит только от функций $u_{00}(s)$, $v_{00}(s)$. Для построения с.к. оптимальной оценки $W^*(s)$ сигнала $W(s)$ необходимо выполнить алгоритм 2.

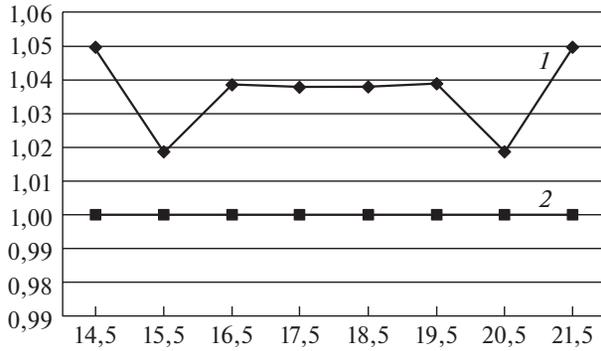


Рис. 1. Графики дисперсии СВ $X(t)$: график 1 – точные значения, график 2 – приближенные значения.

В результате имеем

$$W^*(s) = \sum_{r=1}^2 U_r \left(a_r^\xi u_{00}(s) + d_{r00}^\xi v_{00}(s) \right) + \sum_{\nu=1}^{L^t} V_{\nu\nu} \left(d_{\nu 00}^x v_{00}(s) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} a_{\nu jk}^x u_{jk}(s) \right).$$

Вычисления осуществлялись на основе ИПО “Синтез-ВЛ”. Использовались следующие исходные данные: $\alpha = 1$; $s = 11, 12, \dots, 18$; $T = 8$; $t^* = (s - T) + \frac{3T}{2 \cdot 2^{J^t}}$; $s^* = s$; $\gamma_{11} = \gamma_{22} = 1$; $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0$.

Как показали вычислительные эксперименты, уже при $J^t = 2$ относительная точность аппроксимации дисперсии $X(t)$ оказывается менее 5%. Был использован вейвлет базис Хаара для $J^t = 2$. В табл. 1 и на рис. 1 приведены точные значения дисперсии $D_T(t_i)$ для $X(t)$ в точках $t_i \in [10, 18]$ и приближенные значения дисперсии $D_a(t_i)$, полученные методом ВЛКР.

Величина с.к. ошибки аппроксимации дисперсии в этом случае равна

$$\sigma_n^D = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(D_a(t_i) - D_T(t_i) \right)^2} = 0,0374.$$

Значения дисперсий D_ν независимых нормально распределенных СВ V_ν , вычисленные по формулам (3.5), (3.6), приведены в табл. 2.

Таблица 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i	10,5	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5	16,5	17,5
$D_a(t_i)$	1,0499	1,0185	1,0387	1,0383	1,0383	1,0387	1,0185	1,0499
$D_T(t_i)$	1	1	1	1	1	1	1	1

Таблица 2

ν	1	2	3	4	5	6	7	8
D_ν	0,2206	0,1785	0,1302	0,1302	0,0851	0,0851	0,0851	0,0851

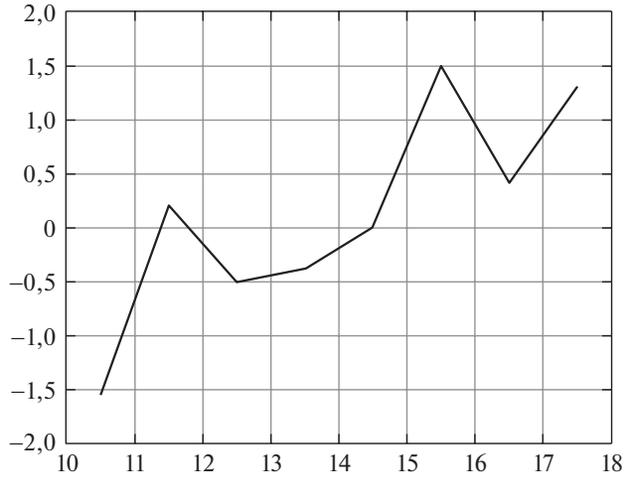


Рис. 2. График реализации СФ $X(t)$.

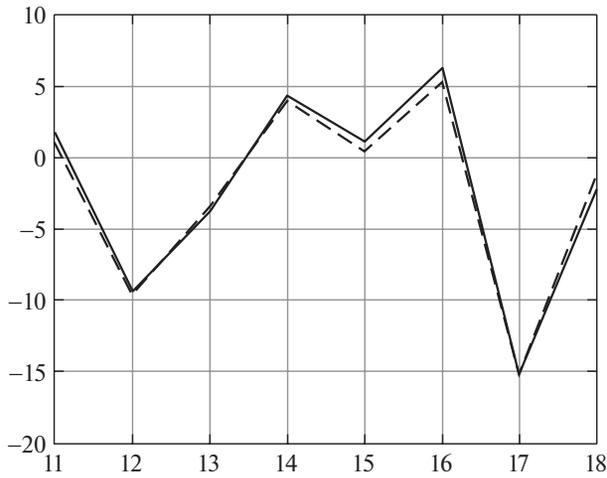


Рис. 3. Графики реализации сигнала $W(s)$ и его оценки $W^*(s)$ ($s = 11, 12, \dots, 18$): сплошная линия — сигнал, штриховая линия — его оценка.

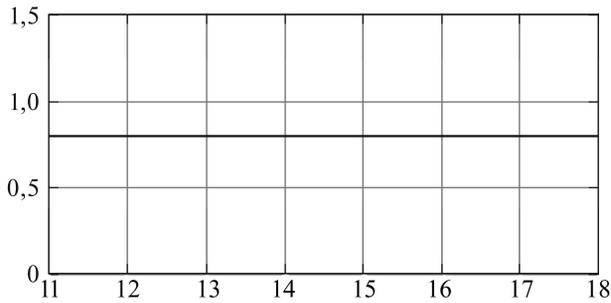


Рис. 4. График с.к. оптимальной оценки η точности оператора A_t .

На рис. 2 изображена одна из реализаций $X(t)$, смоделированная на основе ее ВЛКР (3.1).

На рис. 3 и 4 представлены результаты вычислительного эксперимента для $s \in [11, 18]$.

Значение η зависит от того, насколько значения $\zeta_q(s)$ отличаются от значений выражений $\zeta_q^*(s) = a_q^\xi u_{00}(s) - d_{q00}^\xi v_{00}(s)$ ($q = 1, 2$). Вычислительные эксперименты показали, что с.к. оптимальная оценка η точности с.к. оптимального линейного оператора A_t равна 0,7973 при значениях сигнала $W(s) \in [-15, 2122; 6, 2199]$.

7. Заключение

Разработано вейвлет методическое и инструментальное программное обеспечение для с.к. оптимального синтеза существенно нестационарных линейных фильтров на основе вейвлет канонических разложений в среде MATLAB.

Для стохастических систем в условиях стохастических одно- и многократных ударных воздействий, описываемых КР, ВЛР и ВЛКР разработано специальное инструментальное обеспечение для оптимизации фильтров, оценки и идентификации ударных воздействий. Эти результаты нашли применения в задачах анализа и моделирования, оценки и идентификации ударных воздействий в прецизионных информационно-управляющих системах.

Аналогично [13, 14] рассматриваются сложные виброударные одно- и многомерные виброударные воздействия, представимые КР, ВЛР и ВЛКР.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карпенко А.П.* Современные алгоритмы поисковой оптимизации. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017.
2. *Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Сергеев И.В.* Развитие алгоритмического обеспечения анализа стохастических систем, основанного на канонических разложениях случайных функций // *АиТ.* 2011. № 2. С. 195–206.
Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Belousov V.V., Sergeev I.V. Development of Algorithmic Support for the Analysis of Stochastic Systems Based on Canonical Expansions of Random Functions // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 2. P. 405–415.
3. *Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности. IV // *Системы высокой доступности.* 2017. Т. 13. № 3. С. 55–69.
4. *Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности. V // *Системы высокой доступности.* 2018. Т. 14. № 1. С. 59–70.
5. *Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности. VI // *Системы высокой доступности.* 2018. Т. 14. № 2. С. 40–56.

6. *Синицын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности. VII // Системы высокой доступности. 2019. Т. 15. № 1. С. 47–61.
7. *Синицын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности. VIII // Системы высокой доступности. 2019. Т. 15. № 1. С. 62–69.
8. *Синицын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Развитие прямых методов аналитического интерполяционного моделирования распределений в стохастических системах // Системы компьютерной математики и их приложения. Матер. XX Междунар. науч. конф. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2019. Вып. 20.4.1. С. 256–260.
9. *Синицын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Метод линейной оптимальной обработки информации посредством вейвлет разложений // Системы компьютерной математики и их приложения. Матер. XXI Междунар. науч. конф. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. Вып. 21. С. 213–220.
10. *Синицын И.Н.* Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследования. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2009.
11. *Добеша И.* Десять лекций по вейвлетам. Москва–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004.
12. *Новиков И.Я., Стечкин С.Б.* Основы теории всплесков // Успехи математических наук. 1998. Т. 53. № 6 (324). С. 53–126.
13. *Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А.* Вейвлеты и их использование // УФН. 2001. Т. 171. № 5. С. 465–501.
14. *Синицын И.Н., Сергеев И.В.* Применение канонических представлений случайных функций в задачах расчета виброзащитных систем для компьютерного оборудования // Тр. XI Междунар. науч. конф., посвящ. 70-летию проф. В.П. Дьяконова. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2010. ISBN 978-5-88018-445-3. С. 239–241.
15. *Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Сергеев И.В.* Компьютерное моделирование стохастических систем на базе канонических разложений // Тр. XI Междунар. конф. “Кибернетика и высокие технологии XXI в. (С&Т 2010)”. Воронеж: НПФ “Саквояж” ООО, 2010. ISBN 978-5-904259-05-1. С. 798–809.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 25.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020