

© 2020 г. П.В. ПАКШИН, д-р физ.-мат. наук (pakshinpv@gmail.com),
Ю.П. ЕМЕЛЬЯНОВА, канд. физ.-мат. наук (emelianovajulia@gmail.com)
(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического
университета им. Р.Е. Алексева)

УПРАВЛЕНИЕ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ ДИСКРЕТНЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ¹

Рассматриваются дискретные линейные системы с переключениями в повторяющемся режиме. Системы находятся под действием случайных внешних возмущений, и в измерениях присутствуют аддитивные шумы. Предлагаются два метода синтеза управления с итеративным обучением. Оба метода основаны на построении вспомогательной 2D-модели в форме дискретного повторяющегося процесса. Первый метод основан на установлении условий диссипативности указанной модели при специальном выборе функций запаса и накопления. Такой выбор позволяет затем найти управление, в общем случае нелинейное, которое гарантирует сходимость процесса обучения. Второй метод использует линейный закон коррекции управления с итеративным обучением заданного вида, при этом сходимость процесса обучения гарантируется условиями устойчивости вспомогательной 2D-модели. Оба предложенных закона управления используют в своей структуре стационарный фильтр Калмана. Для получения условий устойчивости используется дивергентный метод векторных функций Ляпунова. Приводится пример, демонстрирующий возможности и особенности нового метода.

Ключевые слова: управление с итеративным обучением, стохастические системы, системы с переключениями, повторяющиеся процессы, 2D-системы, устойчивость, диссипативность, векторная функция Ляпунова.

DOI: 10.31857/S0005231020110069

1. Введение

Управление с итеративным обучением играет важную роль в повышении точности систем, функционирующих в повторяющемся режиме, в частности в разработке высокоточных роботов-манипуляторов. В связи с высокой эффективностью и относительно простой формой такого управления оно привлекает широкий интерес как теоретиков, так и практиков. Начиная с конца 80-х гг. XX в. на крупнейших международных конференциях регулярно организуются сессии, посвященные проблемам управления с итеративным обучением.

Реальные системы находятся под действием случайных возмущений, и в системах всегда присутствуют как систематические, так и случайные погрешности измерений. Эти факторы снижают точность управления, к тому же

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00528_a).

следует учесть, что одним из условий эффективности итеративного обучения является то, что для каждого повторения процесса начальные условия должны быть одинаковыми. Таким образом, учет упомянутых случайных факторов имеет существенное значение.

Впервые идея управления с итеративным обучением была предложена в патенте США [1] с приоритетом от 1967 г., затем концепция такого управления была сформулирована в [2] на японском языке. Эти результаты не были востребованы, пока не появилась серия публикаций [3–6], вызвавшая широкий интерес как теоретиков, так и практиков. В дальнейшем, по различным вопросам управления с итеративным обучением было опубликовано большое количество работ, в том числе монографии [7, 8], обзорные статьи [9, 10] и специальные выпуски журналов (*Int. J. Control.* 2000, 2011; *Asian J. Control.* 2002, 2011). В настоящее время управление с итеративным обучением стало важным направлением интеллектуального управления, и оно широко используется во многих практических приложениях, в первую очередь в робототехнике.

Обзор результатов по стохастическому управлению с итеративным обучением представлен в [11, 12]. Эти обзоры и самостоятельный анализ публикаций в базе SCOPUS показывают, что решению задачи стохастического управления с итеративным обучением в классической постановке (измерения содержат шумы и на объект управления действуют случайные возмущения) посвящено небольшое число работ, основное внимание уделяется учету случайных потерь информационных пакетов в канале связи между измеряемым выходом и входом (*random packet losses, data dropouts*). Исследование этих вопросов, безусловно, важно, но оно не заменяет и не исключает исследований упомянутых классических задач.

Анализ упомянутых публикаций показывает, что конструктивные методы синтеза стохастического управления с итеративным обучением в рамках классической постановки предложены в [13–18] для линейных систем с дискретным временем, другие работы учитывают только дополнительные к классической постановке случайные факторы. В этих работах предложены алгоритмы двух типов. В [13, 14] предложен так называемый алгоритм D-типа, использующий для построения алгоритма управления с итеративным обучением аналог производной ошибки обучения, в [15], дополнительно предложен алгоритм P-типа, непосредственно использующий ошибку обучения, этот алгоритм затем был расширен и усовершенствован в [16], в [17, 18] рассмотрены некоторые специальные вопросы, связанные со сходимостью и оптимизацией этих алгоритмов.

В [19–21] задача управления с итеративным обучением решается на основе предложенного авторами дивергентного метода векторных функций Ляпунова в сочетании с использованием фильтра Калмана. Сравнительный анализ показал, что полученные результаты позволяют во много раз увеличить скорость сходимости ошибки обучения по сравнению с [13–16], кроме того, за счет применения фильтра Калмана существенно уменьшается дисперсия ошибки.

В [22] для дискретных линейных систем с постоянными параметрами предложен алгоритм управления с итеративным обучением на основе совместного применения метода супервектора [8] и фильтра Калмана. В силу того что в [22] решается специальная задача, связанная с вариациями эталонной траектории, сравнить результаты этой работы с [13–16] и [19–21] не представляется возможным. По-видимому, по этой причине в [22] публикации [13–16] даже не упоминаются.

В данной статье результаты [19, 20] распространяются на системы с переключениями. В современной теории управления под системами с переключениями обычно понимают класс моделей динамических систем, состоящих из конечного числа подсистем, из которых в текущий момент времени функционирует лишь одна, называемая активной подсистемой, при этом выбор активной подсистемы определяется некоторым логическим правилом. Простейшим примером может служить многорежимная система, в которой подсистемы интерпретируются как отдельные режимы этой системы. Обычно подсистемы описываются индексированным множеством дифференциальных или разностных уравнений. Для первоначального знакомства с результатами теории систем с переключениями можно рекомендовать [23–27]. При управлении с итеративным обучением переключения возникают естественным образом при начальной настройке системы. Например, в случае манипулятора, перемещающего грузы на конвейер, целесообразно делать несколько повторений без нагрузки и запускать рабочий режим при достижении требуемой точности.

2. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную стохастическую систему в повторяющемся режиме, описываемую линейной моделью с переключениями

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_k(p+1) &= A(k)x_k(p) + B(k)u_k(p) + v_k(p), & (A(k), B(k)) \in \mathcal{F}, \\ y_k(p) &= Cx_k(p), \\ y_{wk}(p) &= Cx_k(p) + w_k(p), & p \in [0, T-1], \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где $x_k(p) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояния, $y_k(p) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор выходных переменных, $y_{wk}(p) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор измеряемых переменных, $u_k(p) \in \mathbb{R}^{n_u}$ – вектор управления, $v_k(p) \in \mathbb{R}^{n_v}$ – вектор возмущений, действующих на объект, $w_k(p) \in \mathbb{R}^{n_w}$ – вектор шумов измерений, $\mathcal{F} = \{(A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_N, B_N)\}$ – множество пар матриц согласованных размеров. Предполагается, что $v_k(p)$ и $w_k(p)$ – независимые гауссовские белые шумы с ковариационными матрицами $E[v_k(p)v_k^T(p)] = S_v$, $E[w_k(p)w_k^T(p)] = S_w$.

Следуя понятиям, принятым в теории систем с переключениями [23], рассмотрим кусочно постоянное отображение множества неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathcal{F}$. Такое отображение задается кусочно постоянной функцией $\sigma : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ так, что $A(k) = A_{\sigma(k)}$ и $B(k) = B_{\sigma(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Функцию σ можно рассматривать как *сигнал переключения относительно повторений*. Предположим, что переключения происходят в начале каж-

дого повторения, и определим моменты переключения k_1, k_2, \dots как номера повторений, на которых в системе (2.1) происходят переключения. Таким образом, сигнал переключения определяет на каждом повторении k индекс $i = \sigma(k) \in \mathcal{N}$ активной подсистемы, динамика которой описывается уравнениями

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x_k(p+1) &= A_i x_k(p) + B_i u_k(p) + v_k(p), \quad i \in \mathcal{N}, \\ y_k(p) &= C x_k(p), \\ y_{wk}(p) &= C x_k(p) + w_k(p), \quad p \in [0, T-1], \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Выходная переменная системы (2.1) на каждом повторении должна воспроизводить желаемую траекторию $y_{ref}(p)$, $0 \leq p \leq N-1$. Для достижения этой цели можно использовать управление с обратной связью. Обозначим через $e_k(p)$ ошибку воспроизведения желаемой траектории на k -м повторении:

$$(2.3) \quad e_k(p) = y_{ref}(p) - y_k(p), \quad 0 \leq p \leq T-1.$$

Если начальные условия на каждом повторении одинаковы, такое управление будет обеспечивать одинаковую ошибку воспроизведения желаемой траектории на всех шагах, причем может оказаться, что величина этой ошибки не соответствует требованиям по точности. Поставим задачу найти такое управление, которое последовательно уменьшает ошибку с увеличением числа повторений. Такую задачу может решить управление с итеративным обучением, которое на очередном повторении определяется соотношением

$$(2.4) \quad u_{k+1}(p) = u_k(p) + \Delta u_{k+1}(p),$$

где $\Delta u_{k+1}(p)$ – корректирующая поправка, формируемая на основе информации с предыдущего повторения. Эту поправку будем находить из условия выполнения соотношений

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} E[||e_k(p)||] &= E||e_\infty(p)||, \quad E[||e_{k+1}(p)||] \leq E[||e_k(p)||] \quad \forall k, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} E[||u_k(p)||] &= E[||u_\infty(p)||], \quad 0 \leq p \leq T-1, \end{aligned}$$

при этом $\lim_{k \rightarrow \infty} E[||e_k(p)||^2]$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} E[||u_k(p)||^2] = E[||u_\infty(p)||^2]$ должны оставаться ограниченными для всех $0 \leq p \leq T-1$. Соотношение (2.4) может рассматриваться как алгоритм итеративного обучения, а значение $u_\infty(p)$ называется обученным управлением.

Замечание 1. В приложениях процесс обучения считается завершенным, когда достигнута требуемая точность. В рассматриваемом случае, когда система находится под воздействием шумов, адекватной мерой точности может служить среднее или среднеквадратичное значение ошибки на интервале изменения выходной переменной и условие (2.5) является необходимым для достижения требуемой точности.

Таким образом, задача состоит в нахождении корректирующей поправки $\Delta u_{k+1}(p)$, обеспечивающей выполнение (2.5) при ограниченности

$\lim_{k \rightarrow \infty} E[||e_k(p)||^2]$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} E[||u_k(p)||^2] = E[||u_\infty(p)||^2]$ для всех $0 \leq p \leq T-1$.

Будем предполагать, что моменты переключений наблюдаемы. Поскольку вектор выходных переменных измеряется с шумами, для его предварительной обработки используем фильтр Калмана

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \hat{x}_k(p+1) &= A_i \hat{x}_k(p) + B_i u_k(p) + F_i (y_{wk}(p) - C \hat{x}_k(p)), \\ \hat{x}_k(0) &= F_i y_{wk}(0), \quad i \in \mathcal{N}, \end{aligned}$$

где $\hat{x}_k(p)$ – оценка вектора состояния и $\hat{y}_k(p) = C \hat{x}_k(p)$,

$$F_i = A_i S_i C^T [C S_i C^T + S_w]^{-1}$$

и S_i – решение алгебраического уравнения Риккати

$$(2.7) \quad S_i = A_i S_i A_i^T - A_i S_i C^T [C S_i C^T + S_w]^{-1} C S_i A_i^T + S_w.$$

Введем в рассмотрение ошибку оценивания $\tilde{x}_k(p) = x_k(p) - \hat{x}_k(p)$ и вспомогательные векторы приращений по переменной k оценки вектора состояния и ошибки оценивания,

$$(2.8) \quad \hat{\eta}_{k+1}(p+1) = \hat{x}_{k+1}(p) - \hat{x}_k(p), \quad \tilde{\eta}_{k+1}(p+1) = \tilde{x}_{k+1}(p) - \tilde{x}_k(p).$$

Поскольку $y_k(p)$ недоступен для наблюдения, ошибка обучения

$$e_k(p) = y_{ref}(p) - y_k(p)$$

не может быть непосредственно использована для управления. Вместо нее будем далее использовать оценку

$$\hat{e}_k(p) = y_{ref}(p) - C \hat{x}_k(p).$$

Запишем уравнения относительно приращений:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \bar{\eta}_{k+1}(p+1) &= A_{i11} \bar{\eta}_{k+1}(p) + A_{i12} \hat{e}_k(p) + B_{i1} \nu_{k+1}(p) + D_{i1} \bar{w}_{k+1}(p), \\ \hat{e}_{k+1}(p) &= A_{i21} \bar{\eta}_{k+1}(p) + A_{i22} \hat{e}_k(p) + B_{i2} \nu_{k+1}(p) + D_{i2} \bar{w}_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N}, \end{aligned}$$

где

$$\bar{\eta}_{k+1}(p) = [\tilde{\eta}_{k+1}(p)^T \hat{\eta}_{k+1}(p)^T]^T, \quad \nu_{k+1}(p) = \Delta u_{k+1}(p-1),$$

$$\bar{w}_{k+1}(p) = [\Delta v_{k+1}(p-1)^T \Delta w_{k+1}(p-1)^T]^T,$$

$$\Delta v_{k+1}(p-1) = v_{k+1}(p-1) - v_k(p-1),$$

$$\Delta w_{k+1}(p-1) = w_{k+1}(p-1) - w_k(p-1),$$

$$A_{i11} = \begin{bmatrix} A_i - F_i C & 0 \\ F_i C & A_i \end{bmatrix}, \quad B_{i1} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_i \end{bmatrix}, \quad D_{i1} = \begin{bmatrix} I & -F_i \\ 0 & F_i \end{bmatrix},$$

$$A_{i12} = 0, \quad A_{i22} = I, \quad A_{i21} = [-CF_i C - CA],$$

$$B_{i2} = -CB_i, \quad D_{i2} = [0 \quad -CF_i].$$

Система (2.9) относится к классу дискретных повторяющихся процессов, представляющих собой одну из разновидностей так называемых 2D-систем [28]. Особенность таких систем состоит в том, что они разрешены относительно частных приращений переменных состояния, в случае дискретного времени, или относительно частных производных переменных состояния, в случае непрерывного времени, по каждому из независимых аргументов, и стандартные методы классической и современной теории управления становятся неприменимыми для их исследования. В последние годы авторы систематически развивали теорию устойчивости, диссипативности и стабилизации таких систем на основе свойств дивергенции векторных функций Ляпунова [20, 21, 29–32]. Этот подход, названный дивергентным методом векторных функций Ляпунова, далее используется для решения поставленной задачи.

3. Устойчивость и диссипативность

Корректирующую поправку будем строить как управление с обратной связью для системы (2.9) относительно приращений. Развиваемый далее подход открывает возможность искать это управление в достаточно общем виде

$$(3.1) \quad \nu_{k+1}(p) = \varphi(\bar{\eta}_{k+1}(p), \hat{e}_k(p)), \quad \varphi(0, 0) = 0.$$

В частности, как показано в [19, 20], такая форма корректирующей поправки расширяет возможности синтеза в случае линейных систем без переключений.

Определение 1. Дискретный повторяющийся процесс (2.9), (3.1) называется устойчивым вдоль повторений по второму моменту, если

$$(3.2) \quad \lim_{k+p \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\|\bar{\eta}_k(p)\|^2 + \|\hat{e}_k(p)\|^2] \leq \Gamma < \infty,$$

где Γ не зависит от T .

Дальнейший анализ основан на векторной функции Ляпунова

$$(3.3) \quad V_i(\xi, \epsilon) = \begin{bmatrix} V_1(\xi) \\ V_{2i}(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{2n_x}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}^{n_y}, \quad i \in \mathcal{N},$$

где

$$V_1(\xi) > 0, \quad \xi \neq 0, \quad V_{2i}(\epsilon) > 0, \quad \epsilon \neq 0, \quad V_1(0) = 0, \quad V_{2i}(0) = 0, \quad i \in \mathcal{N}.$$

Стохастический аналог дивергенции этой функции вдоль траекторий системы (2.9), (3.1) определяется выражением

$$(3.4) \quad \begin{aligned} DV_i(\xi, \epsilon) = & \mathbb{E} [V_1(\bar{\eta}_{k+1}(p+1)) | \bar{\eta}_{k+1}(p) = \xi, \hat{e}_k(t) = \epsilon] - V_1(\xi) + \\ & + \mathbb{E} [V_{2i}(\hat{e}_{k+1}(p)) | \bar{\eta}_{k+1}(p) = \xi, \hat{e}_k(p) = \epsilon] - V_{2i}(\epsilon), \quad i \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Этот оператор представляет сумму средних частных приращений по переменным k и p функции V_i при условии, что аргументы на предыдущем шаге принимают фиксированные значения ξ и ϵ , и, таким образом, является естественным обобщением дивергенции на рассматриваемый случай стохастической системы.

Обозначим число переключений сигнала σ на интервале (k_s, k_f) через $N_\sigma(k_f, k_s)$ и, следуя общим принципам теории систем с переключением [23–25], введем в рассмотрение *среднее время ожидания* в соответствии со следующим определением.

Определение 2. Положительное число $\kappa_a \in \mathbb{Z}^+$ называется *средним временем ожидания для сигнала переключения относительно повторений σ* , если для некоторого $N_0 \geq 0$

$$(3.5) \quad N_\sigma(k_f, k_s) \leq N_0 + \frac{k_f - k_s}{\kappa_a}, \quad k_f \geq k_s \geq 0.$$

Неравенство (3.5) означает, что в среднем число шагов между любыми двумя последовательными переключениями на рассматриваемом интервале не меньше κ_a .

Теорема 1. Если существует векторная функция (3.3) и положительные скаляры c_1 , c_2 , c_3 и γ , такие что

$$(3.6) \quad c_1 \|\xi\|^2 \leq V_1(\xi) \leq c_2 \|\xi\|^2,$$

$$(3.7) \quad c_1 \|\epsilon\|^2 \leq V_{2i}(\epsilon) \leq c_2 \|\epsilon\|^2,$$

$$(3.8) \quad DV_i(\xi, \epsilon) \leq \gamma - c_3(\|\xi\|^2 + \|\epsilon\|^2), \quad i \in \mathcal{N},$$

то дискретный повторяющийся процесс (2.9), (3.1) является устойчивым вдоль повторений по второму моменту для любого сигнала переключения относительно повторений σ со средним временем ожидания

$$(3.9) \quad \kappa_a > \ln \left(\frac{c_1}{c_2} \right) \left(\ln \left(1 - \frac{c_3}{c_1} \right) \right)^{-1}$$

и произвольным N_0 .

Доказательство. Рассмотрим интервал $(0, k_f)$ и обозначим через $N_\sigma = N_\sigma(k_f, 0)$ число переключений на этом интервале. Обозначим

$$\bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(p)) = E[V_1(\bar{\eta}_{k+1}(p))], \quad \bar{V}_{2i}(\hat{e}_k(p)) = E[V_{2i}(\hat{e}_k(p))].$$

Применяя к обеим частям (3.8) оператор математического ожидания и учитывая (3.4), получим, что

$$(3.10) \quad \begin{aligned} & \bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(p+1)) + \bar{V}_{2\sigma(k+1)}(\hat{e}_{k+1}(p)) \leq \\ & \leq \left(1 - \frac{c_3}{c_2} \right) (\bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(p)) + \bar{V}_{2\sigma(k)}(\hat{e}_k(p)) + \gamma). \end{aligned}$$

Левая часть (3.10) является положительно определенной и поскольку $c_2 > 0$ и $c_3 > 0$, из (3.10) следует, что $0 < 1 - \frac{c_3}{c_2} < 1$. Обозначим $\lambda = 1 - \frac{c_3}{c_2}$ и перепишем (3.10) в виде

$$(3.11) \quad \begin{aligned} & \bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(p+1)) \leq \\ & \leq \lambda \bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(p)) + \lambda \bar{V}_{2\sigma(k)}(\hat{e}_k(p)) - \bar{V}_{2\sigma(k+1)}(\hat{e}_{k+1}(p)) + \gamma. \end{aligned}$$

Решая неравенство (3.11) относительно $\bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(p))$, имеем

$$(3.12) \quad \begin{aligned} & \bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(p)) \leq \bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(0))\lambda^p + \\ & + \sum_{h=0}^{p-1} \left[\lambda \bar{V}_{2\sigma(k)}(\hat{e}_k(h)) - \bar{V}_{2\sigma(k+1)}(\hat{e}_{k+1}(h)) \right] \lambda^{p-1-h} + \\ & + \gamma \sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$H_k(p) = \sum_{q=0}^{p-1} \bar{V}_{2,\sigma(k)}(\hat{e}_k(p)) \lambda^{p-1-q},$$

тогда из (3.12) следует, что

$$(3.13) \quad \begin{aligned} H_{k+1}(p) & \leq \lambda H_{k,\sigma(k)}(p) + \lambda^p \bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(0)) - \\ & - \bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(p)) + \gamma \sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q}. \end{aligned}$$

Пусть на повторении k_n происходит переключение с активной системы i на активную систему j . Тогда в соответствии с (3.7)

$$(3.14) \quad V_{2j}(y) \leq \mu V_{2i}(y), \quad i, j \in \mathcal{N},$$

где

$$\mu = \frac{c_2}{c_1} \geq 1.$$

Решая неравенство (3.13) и учитывая (3.14), получим

$$\begin{aligned} H_k(t) & \leq \mu^{N_\sigma} \lambda^k H_{0,\sigma(0)}(p) + \\ & + \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{k-1-n} \left[\lambda^p \bar{V}_1(\bar{\eta}_{n+1}(0)) - \bar{V}_1(\bar{\eta}_{n+1}(p)) \right] + \\ & + \gamma \sum_{n=0}^{k-1} \left(\sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q} \right) \lambda^{k-1-n}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{k-1-n} \bar{V}_1(\bar{\eta}_{n+1}(p)) + \sum_{h=0}^{p-1} \lambda^{p-1-h} \bar{V}_{2\sigma(k)}(\hat{e}_k(h)) \leq \\
& \leq \mu^{N_\sigma} \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{k-1-n} V_1(\bar{\eta}_{n+1}(p)) + \sum_{h=0}^{p-1} \lambda^{p-1-h} \bar{V}_{2\sigma(k)}(\hat{e}_k(h)) \leq \\
(3.15) \quad & \leq \mu^{N_\sigma} \left(\lambda^p \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{k-1-n} \bar{V}_1(\bar{\eta}_{n+1}(0)) + \lambda^k \sum_{h=0}^{p-1} \lambda^{p-1-h} \bar{V}_{2,\sigma(0)}(\hat{e}_0(h)) \right) + \\
& \quad + \gamma \sum_{n=0}^{k-1} \left(\sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q} \right) \lambda^{k-1-n}.
\end{aligned}$$

Из неравенства (3.15) с учетом (3.6), (3.7) и того, что $\bar{\eta}_{n+1}(0) = 0$, следует, что

$$(3.16) \quad \mathbb{E}[|\bar{\eta}_k(p)|^2] \leq \frac{\mu^{N_\sigma}}{c_1} \left[\lambda^k \sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q} \bar{V}_2(\hat{e}_0(q)) \right] + \frac{\gamma}{c_1(1-\lambda)^2}$$

и

$$(3.17) \quad \mathbb{E}[|\hat{e}_k(p-1)|^2] \leq \frac{\mu^{N_\sigma}}{c_1} \left[\lambda^k \sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q} \bar{V}_2(\hat{e}_0(q)) \right] + \frac{\gamma}{c_1(1-\lambda)^2}.$$

Поскольку величина $\hat{e}_0(p) = y_{ref}(p) - C\hat{x}_0(p)$ ограничена для всех $0 \leq p \leq T-1$, то правые части (3.16) и (3.17) будут ограничены тогда и только тогда, когда $\mu^{N_\sigma} \lambda^k < 1$. Отсюда с учетом (3.5) следует (3.9). Это означает, что повторяющийся процесс (2.9), (3.1) является устойчивым вдоль повторений по второму моменту для любого сигнала переключения относительно повторений σ со средним временем ожидания, удовлетворяющим (3.9), и произвольным N_0 . Теорема 1 доказана.

Из доказательства теоремы вытекает следующий результат.

Следствие. Дискретный повторяющийся процесс (2.9), (3.1) является устойчивым вдоль повторений по второму моменту для произвольного сигнала переключения относительно повторений σ , если существует векторная функция

$$(3.18) \quad V(\xi, \epsilon) = [V_1(\xi) \ V_2(\epsilon)]^T$$

и положительные скаляры c_1, c_2, c_3 , и γ , такие что

$$\begin{aligned}
(3.19) \quad & c_1 \|\xi\|^2 \leq V_1(\xi) \leq c_2 \|\xi\|^2, \\
& c_1 \|\epsilon\|^2 \leq V_2(\epsilon) \leq c_2 \|\epsilon\|^2, \\
& \mathcal{D}V(\xi, \epsilon) \leq \gamma - c_3(\|\xi\|^2 + \|\epsilon\|^2).
\end{aligned}$$

Сформируем для системы (2.9) дополнительный вектор выхода $z_{k+1}(p) \in \mathbb{R}^{n_z}$, определяемый выражением

$$(3.20) \quad z_{k+1}(p) = C_1 \bar{\eta}_{k+1}(p) + C_2 \hat{e}_k(p) + C_3 v_{k+1}(p),$$

где C_1, C_2 и C_3 – постоянные матрицы согласованных размеров. Следуя [20], введем определение диссипативности вдоль повторений.

Определение 3. Дискретный повторяющийся процесс (2.9) называется диссипативным вдоль повторений по второму моменту относительно входной переменной $\nu_{k+1}(t)$ и выходной переменной $z_{k+1}(t)$, определенной в (3.20), если существуют векторная функция вида (3.3), скалярная функция $S_i(\nu_{k+1}(p), z_{k+1}(p))$, $i \in \mathcal{N}$, положительные скаляры c_1, c_2, c_3 и γ , удовлетворяющие условиям (3.6), (3.7) и

$$(3.21) \quad DV_i(\xi, \epsilon) \leq S_i(\nu_{k+1}(p), z_{k+1}(p)) + \gamma - c_3(\|\xi\|^2 + \|\epsilon\|^2), \quad i \in \mathcal{N}.$$

4. Синтез управления

4.1. Синтез нелинейного управления с переключениями

В теории диссипативности по Виллемсу функции S_i и V_i называются функцией запаса и функцией накопления. Нетрудно видеть, что если при некотором выборе z корректирующая поправка (3.1) удовлетворяет условию

$$S_i(z_{k+1}(p), \nu_{k+1}(p)) \leq 0, \quad i \in \mathcal{N},$$

то система (2.9), (3.1) в соответствии с теоремой 1 будет устойчивой вдоль повторений по второму моменту для любого сигнала переключения относительно повторений σ со средним временем ожидания, удовлетворяющим (3.9) и произвольным N_0 . Таким образом, задача сводится к нахождению стабилизирующей тройки $\{V, z, \nu\}$.

Обозначим

$$\zeta_{k+1}(p) = \begin{bmatrix} \bar{\eta}_{k+1}(p) \\ \hat{e}_k(p) \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_{i11} & A_{i12} \\ A_{i21} & A_{i22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \end{bmatrix}, \quad i \in \mathcal{N},$$

и определим блочно-диагональную матрицу $P_i = \text{diag}[P_1 \ P_{2i}] \succ 0$ как решение неравенства Риккати

$$(4.1) \quad \bar{A}_i^T P_i \bar{A} - (1 - \sigma)P_i - \bar{A}_i^T P_i \bar{B}_i [\bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i + R]^{-1} \bar{B}_i^T P_i \bar{A}_i + Q \preceq 0, \quad i \in \mathcal{N},$$

где $0 < \delta < 1$ – положительный скаляр, $Q \succ 0$ и $R \succ 0$ – весовые матрицы. Нетрудно видеть, что если система линейных матричных неравенств

$$(4.2) \quad \begin{bmatrix} (1 - \delta)X_i & X_i \bar{A}^T & X_i \\ \bar{A}_i X_i & X_i + \bar{B}_i R^{-1} \bar{B}_i^T & 0 \\ X_i & 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad X_i \succ 0, \quad i \in \mathcal{N},$$

разрешима относительно

$$X_i = \text{diag}[X_1 \ X_{2i}] \succ 0,$$

то

$$P_i = X_i^{-1}, \quad i \in \mathcal{N}.$$

Следующая теорема 2 предлагает одно из возможных множеств стабилизирующих троек.

Теорема 2. Дискретный повторяющийся процесс (2.9) является диссипативным вдоль повторений по второму моменту с функцией запаса

$$(4.3) \quad \begin{aligned} S_i(\nu_{k+1}(p), z_{k+1}(p)) &= z_{k+1}^T(p) (\bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i + R)^{-1} z_{k+1}(p) + \\ &+ 2z_{k+1}(p)^T \nu_{k+1}(p) + \nu_{k+1}(p)^T [\bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i + R] \nu_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N}, \end{aligned}$$

относительно входной переменной $\nu_{k+1}(t)$ и выходной переменной

$$(4.4) \quad z_{k+1}(p) = \bar{B}_i^T P_i \bar{A}_i \zeta_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N},$$

где $P_i = X_i^{-1}$, а $X_i = \text{diag}[X_1 \ X_{2i}] \succ 0$, $i \in \mathcal{N}$, является решением (4.1). Множество корректирующих поправок (3.1), обеспечивающих устойчивость вдоль повторений по второму моменту системы (2.9), (3.1), определяется соотношением

$$(4.5) \quad \nu_{k+1}(p) = -[\bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i + R]^{-1} \bar{B}_i^T P_i \bar{A}_i \Theta_i(\zeta_{k+1}(p)) \zeta_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N},$$

где $\Theta(\zeta)$ – симметричная матричная функция, удовлетворяющая соотношению

$$(4.6) \quad \begin{aligned} M_i - M_i \Theta_i(\zeta) - \Theta_i(\zeta) M_i - \Theta_i(\zeta) M_i + \Theta_i(\zeta) M_i \Theta_i(\zeta) - Q - (\delta - \mu) P_i \preceq 0, \\ i \in \mathcal{N}, \end{aligned}$$

для всех $\zeta \in \mathbb{R}^{2n_x + 2n_y}$, где $M_i = \bar{A}_i^T P_i \bar{B}_i [\bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i + R]^{-1} \bar{B}_i^T P_i \bar{A}_i$, $0 < \mu < \sigma$, $i \in \mathcal{N}$.

Доказательство. Выберем компоненты функции (3.3) в виде квадратичных форм

$$V_1(\xi) = \xi^T P_1 \xi, \quad V_2(\epsilon) = \epsilon^T P_{2i} \epsilon,$$

где $P_1 \succ 0$ и $P_{2i} \succ 0$ – соответствующие диагональные блоки матрицы P_i , являющейся решением (4.1). Обозначим $\bar{\xi} = [\xi^T \ \epsilon^T]^T$. Последовательно оценивая дивергенцию (3.3) вдоль траекторий (2.9), получим

$$(4.7) \quad \begin{aligned} DV_i(\xi, \epsilon) &= \\ &= \bar{\xi}^T \left(\bar{A}_i^T P_i \bar{A}_i - (1 - \delta) P_i - \bar{A}_i^T P_i \bar{B}_i [\bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i + R]^{-1} \bar{B}_i^T P_i \bar{A}_i + Q \right) \bar{\xi} + \\ &+ \bar{\xi}^T \bar{A}_i^T P_i \bar{B}_i [\bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i + R]^{-1} \bar{B}_i^T P_i \bar{A}_i \bar{\xi} - \\ &- \bar{\xi}^T (Q + \delta P_i) \bar{\xi} + 2\bar{\xi}^T \bar{A}_i^T P_i \bar{B}_i \nu_{k+1}(p) + \\ &+ \nu_{k+1}(p)^T \bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i \nu_{k+1}(p) + 2 \left[\text{tr}[P_1 S_{1i}] + \text{tr}[P_{2i} S_{2i}] \right] \leq \\ &\leq \bar{\xi}^T \bar{A}_i^T P_i \bar{B}_i [\bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i + R]^{-1} \bar{B}_i^T P_i \bar{A}_i \bar{\xi} + 2\bar{\xi}^T \bar{A}_i^T P_i \bar{B}_i \nu_{k+1}(p) + \\ &+ \nu_{k+1}(p)^T \bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i \nu_{k+1}(p) - \bar{\xi}^T (Q + \delta P_i) \bar{\xi} + 2 \left[\text{tr}[P_1 S_{1i}] + \text{tr}[P_{2i} S_{2i}] \right], \end{aligned}$$

где

$$S_{1i} = \begin{bmatrix} S_v + F_i S_w F_i^T & -F_i S_w F_i^T \\ -F_i S_w F_i^T & F_i S_w F_i^T \end{bmatrix}, \quad S_{2i} = C F_i S_w F_i^T C^T.$$

Из (4.7) следует, что система (2.9) является диссипативной вдоль повторений по второму моменту относительно входа $\nu_{k+1}(p)$ и выхода (4.4) с функцией запаса (4.3) и

$$\gamma = \max_{i \in \mathcal{N}} \left\{ 2[\text{tr}[P_1 S_{1i}] + \text{tr}[P_2 S_{2i}]] \right\}, \quad c_3 = \mu \min_{i \in \mathcal{N}} \{ \lambda_{\min}(P_i) \}.$$

Для корректирующей поправки в виде (4.5) из (4.7) с учетом (4.6) и принятых обозначений следует, что

$$DV_i(\bar{\eta}, \hat{\epsilon}) \leq -c_3 (\|\xi\|^2 + \|\epsilon\|^2) + \gamma.$$

Следовательно, в соответствии с теоремой 1, система (4.5), (2.9) устойчива вдоль повторений по второму моменту для любого сигнала переключения относительно повторений σ со средним временем ожидания, удовлетворяющим (3.9) и произвольным N_0 . Постоянные c_1 и c_2 в (3.9) определяются выражениями

$$c_1 = \min \left\{ \lambda_{\min}(P_1), \min_{i \in \mathcal{N}} \{ \lambda_{\min}(P_{2i}) \} \right\}, \quad c_2 = \max \left\{ \lambda_{\max}(P_1), \max_{i \in \mathcal{N}} \{ \lambda_{\max}(P_{2i}) \} \right\}.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Поскольку приращение ошибки оценивания $\tilde{\xi}_{k+1}(p)$ неустойчиво для формирования корректирующей поправки, матрица Θ_i всегда должна иметь вид $\Theta_i(\zeta) = \text{diag}[0_{n_x} \ \Theta_{i1}(\zeta)]$. В простейшем случае матрица Θ_{i1} может быть выбрана не зависящей от ζ , и тогда, после нахождения матрицы P_i , условие (4.6) сводится к системе линейных матричных неравенств, при этом теорема 1 дает линейную корректирующую поправку. В общем случае $\Theta_i(\zeta)$ зависит от изменения ошибки относительно повторений и можно пытаться уменьшать значения коэффициентов корректирующих поправок после достижения требуемой точности и, наоборот, увеличивать эти коэффициенты, когда ошибка велика, другими словами, вводить адаптацию к величине ошибки. Такой подход позволит найти разумный компромисс между скоростью обучения и энергозатратами на управление. Наиболее просто это можно сделать за счет кусочно-постоянного изменения Θ в зависимости от достигнутой точности. Такое решение для систем без переключений рассмотрено в [20].

4.2. Синтез линейного управления без переключений

В ряде случаев представляет интерес построить управление без переключений. Здесь более эффективным представляется другой подход к решению. Рассмотрим функцию Ляпунова (3.18) с компонентами $V_1(\xi) = \xi^T P_1 \xi$,

$V_2(\epsilon) = \epsilon^T P_2 \epsilon$, где $P_1 \succ 0$ и $P_2 \succ 0$ – постоянные матрицы. Закон коррекции будем искать в виде линейной обратной связи по приращениям доступных для измерения переменных и по ошибке:

$$(4.8) \quad v_{k+1}(p) = K_1 \hat{\xi}_{k+1}(p) + K_2 \hat{e}_k(p) = KH \zeta_{k+1}(p),$$

где $K = [K_1 \ K_2]$, $H = [0 \ I_{n_x+n_y}]$. Вычисляя дивергенцию (3.18) вдоль траекторий (2.9), (4.8), получим

$$(4.9) \quad DV = \xi^T (\bar{A}_{ci}^T P \bar{A}_{ci} - P) \bar{\xi} + 2[\text{tr}[P_1 S_{1i}] + \text{tr}[P_2 S_{2i}]], \quad i \in \mathcal{N},$$

где

$$P = \text{diag}[P_1 \ P_2],$$

$$\bar{A}_{ci} = \begin{bmatrix} A_i - F_i C & 0 & 0 \\ F_i C & A_i + B_i K_1 & B_i K_2 \\ -C F_i C & -C(A_i + B_i K_1) & I - C B_i K_2 \end{bmatrix}, \quad i \in \mathcal{N}.$$

Предположим, что матрицы $P \succ 0$ и K удовлетворяют системе неравенств

$$(4.10) \quad (\bar{A}_i + \bar{B}_i K H)^T P (\bar{A}_i + \bar{B}_i K H) - P_i + Q + H^T K^T R K H \preceq 0, \quad i \in \mathcal{N},$$

где $Q \succ 0$ и $R \succ 0$ – матрицы, аналогичные весовым матрицам в теории линейно-квадратичного регулятора. Поскольку выполняется (4.10), то выполняются условия следствия теоремы 1 с параметрами

$$\gamma = \max_{i \in \mathcal{N}} \left\{ 2[\text{tr}[P_1 S_{1i}] + \text{tr}[P_2 S_{2i}]] \right\}, \quad c_3 = \lambda_{\min}(Q + H^T K^T R K H)$$

и, таким образом, система (2.9), (4.8) является устойчивой вдоль повторений по второму моменту для произвольного сигнала переключения относительно повторений σ . Неравенства (4.10) с помощью известной леммы о дополнении Шура сводятся к линейным матричным неравенствам и уравнению относительно переменных $X = \text{diag}[P_1^{-1} \ P_2^{-1}]$, Y , и Z :

$$(4.11) \quad \begin{bmatrix} X & (\bar{A}_i X + \bar{B}_i Y H)^T & X & (Y H)^T \\ \bar{A}_i X + \bar{B}_i Y H & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ Y H & 0 & 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0,$$

$$X \succ 0, \quad H X = Z H, \quad i \in \mathcal{N}.$$

Если неравенства и уравнение (4.11) совместны, то $K = [K_1 \ K_2] = Y Z^{-1}$, поскольку в силу структуры матрицы H матрица Z является невырожденной.

5. Пример

Рассмотрим модель манипулятора с одним гибким звеном [33], функционирующего в повторяющемся режиме с постоянным периодом повторения в условиях действия внешних возмущений и шумов измерений. Динамика движения манипулятора в пространстве состояний описывается уравнениями

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A_0 x_k(t) + B_0(u_k(t) + \mu_k(t)), \quad 0 \leq t \leq T_f, \\ y_k(t) &= C x_k(t) + \omega_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где на k -м повторении $x_k(t) = [\theta_k(t) \quad \alpha_k(t) \quad \dot{\theta}_k(t) \quad \dot{\alpha}(t)_k]^T$, $\theta_k(t)$ – угол поворота сервопривода, $\alpha_k(t)$ – угол отклонения гибкого звена,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_s}{J_{eq}} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\frac{K_s(J_l + J_{eq})}{J_l J_{eq}} & \frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \\ -\frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

B_{eq} – коэффициент вязкого трения сервопривода, K_s – жесткость гибкого звена, J_l – момент инерции гибкого звена относительно центра масс, J_{eq} – момент инерции сервопривода, $\mu_k(t)$ и $\omega_k(t)$ – независимые последовательности непрерывных гауссовских шумов с постоянными интенсивностями Q_n и R_n . Движение гибкого звена происходит в горизонтальной плоскости. Для построения и анализа управления с итеративным обучением перейдем к эквивалентной дискретной модели с постоянным периодом T_s

$$(5.2) \quad \begin{aligned} x_k(p+1) &= A x_k(p) + B u_k(p) + v_k(p), \\ y_{wk}(p) &= C x_k(p) + w_k(p), \quad p = 0, 1, \dots, N_{T_f}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $A = \exp(A_0 T_s)$, $B = \int_0^{T_s} \exp(A_0 \tau) B_0 d\tau$, p – номер периода дискретности, N_{T_f} – число периодов дискретности на отрезке $[0, T_f]$, $v_k(p)$ и $w_k(p)$ – независимые последовательности гауссовских дискретных белых шумов с ковариациями

$$(5.3) \quad S_v = \int_0^{T_s} \exp(A_0 \tau) B_0 Q_n B_0^T \exp(A_0^T \tau) d\tau, \quad S_w = R_n / T_s.$$

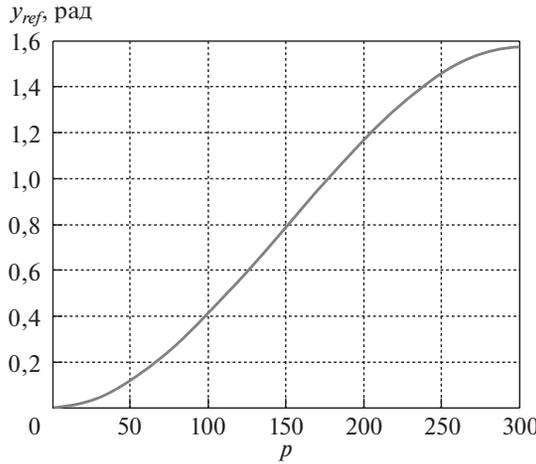


Рис. 1. Желаемая траектория изменения угла поворота вала сервомотора.

Задача состоит в нахождении алгоритма управления с итеративным обучением, при котором выходная переменная $y_k(p) = \theta_k(p)$ воспроизводила бы желаемую траекторию $y_{ref}(t)$ с заданной точностью e^* . Для формирования управления доступен только угол $\theta_k(p)$, который в соответствии с (5.2) измеряется с шумами. Точность будем оценивать по выборочному среднеквадратическому отклонению

$$(5.4) \quad E(k) = \sqrt{\frac{1}{N_{T_f}} \sum_{p=0}^{N_{T_f}} \|\hat{e}_k(p)\|^2}.$$

Для расчетов и моделирования были приняты следующие номинальные значения параметров из [33]: $B_{eq} = 0,004$ Н·м/(рад/с), $K_s = 1,3$ Н·м/рад, $J_l = 0,0038$ кг·м², $J_{eq} = 2,08 \cdot 10^{-3}$ кг·м². Продолжительность цикла повторения T_f составляет 3 с, требуемая точность $e^* = 1$ град. = 0,0175 рад., постоянные интенсивности шумов имеют величины $Q_n = 0,16 \cdot 10^{-4}$ и $R_n = 0,2 \cdot 10^{-5}$.

Желаемая траектория изменения выходной переменной описывается уравнением

$$y_{ref}(t) = \frac{\pi t^2}{6} - \frac{\pi t^3}{27}, \quad t \in [0; T],$$

и представлена на рис. 1

При начале работы манипулятора несколько первых повторений проходят без нагрузки для предварительной настройки, при этом значения параметров соответствуют номинальным. После трех повторений манипулятор нагружается, при этом изменяется значение J_l , которое становится равным 0,1038 кг·м². Исходя из физического смысла переменных состояния зададим весовые матрицы

$$Q = \text{diag}[10^{-4} \quad 10^{-3} \quad 10^{-2} \quad 10^{-4} \quad 10^{-4} \quad 10^{-3} \quad 10^{-2} \quad 10^{-4} \quad 10^6], \quad R = 1$$

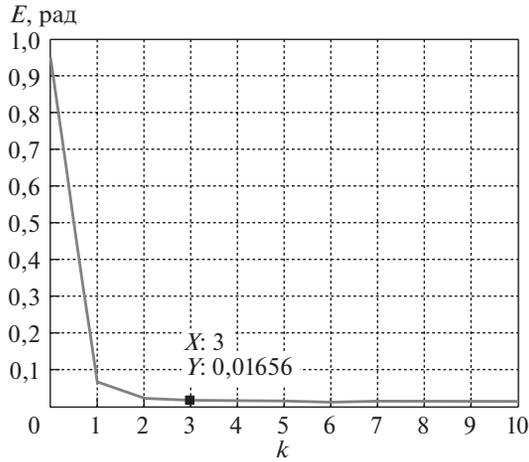


Рис. 2. Изменение среднеквадратической ошибки в зависимости от числа повторений для управления с переключением.

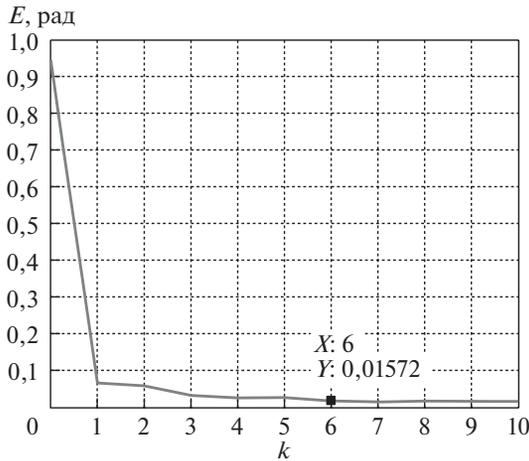


Рис. 3. Изменение среднеквадратической ошибки в зависимости от числа повторений для управления без переключения.

и примем $T_s = 0,01$ с. Рассматривая скачкообразное изменение нагрузки на манипулятор как переключение, воспользуемся результатами подраздела 4.2, которые удобны для сравнительного анализа. Обозначим матрицы ненагруженного манипулятора через A_1 , B_1 и матрицы нагруженного манипулятора — A_2 , B_2 . Переключаемый алгоритм управления с итеративным обучением имеет вид

$$\hat{x}_k(p) = A_i \hat{x}_k(p-1) + B_i u_k(p-1) + F_i (y_k(p-1) - C \hat{x}_k(p-1)),$$

$$i = \begin{cases} 1, & \text{если } k < 3, \\ 2, & \text{если } k \geq 3, \end{cases}$$

$$F_i = \begin{cases} F_1 = [0,4321 & -0,2936 & 6,1515 & -4,0246]^T, & \text{если } k < 3, \\ F_2 = [0,3950 & -0,3667 & 4,5955 & -4,4811]^T, & \text{если } k \geq 3, \end{cases}$$

$$u_k(p) = u_{k-1}(p) + K_1(\hat{x}_k(p) - \hat{x}_{k-1}(p)) + K_{2i}(y_{ref}(p) - y_{k-1}(p+1)),$$

$$K_1 = [-29,5324 \quad 6,1375 \quad -1,1415 \quad -0,7588],$$

$$K_{2i} = \begin{cases} 27,8263, & \text{если } k < 3, \\ 26,6316, & \text{если } k \geq 3. \end{cases}$$

При использовании алгоритма без переключений

$$u_k(p) = u_{k-1}(p) + K_1(\hat{x}_k(p) - \hat{x}_{k-1}(p)) + K_2(y_{ref}(p) - y_{k-1}(p+1)),$$

$$K_1 = [-21,1783 \quad 14,6783 \quad -2,0471 \quad -1,6679], \quad K_2 = 20,8358.$$

На рис. 2, 3 показано изменение среднеквадратической ошибки в зависимости от числа повторений для управления с переключением и без переключения соответственно.

Анализ полученных зависимостей показывает, что в случае управления с переключением требуемая точность достигается сразу же после настроечных повторений, в то время как в случае управления без переключений для достижения нужной точности требуются дополнительные шаги в рабочем режиме, что, очевидно, нежелательно.

6. Заключение

В данной статье предложены методы синтеза управления с итеративным обучением для стохастических систем с переключениями на основе теории 2D-систем в форме дискретных повторяющихся процессов. Приведенный пример показывает, что когда переключения наблюдаемы, управление с переключением позволяет ускорить сходимость процесса обучения. Дальнейшего исследования требует вопрос выбора нелинейной функции $\Theta_i(\zeta)$ в методе синтеза на основе диссипативности (теорема 2 и замечание 2). Открытым остался вопрос о влиянии динамики фильтра Калмана на скорость сходимости процесса обучения и точность. Значительный интерес представляют сетевые задачи управления с итеративным обучением, где переключения являются естественной моделью изменений информационной структуры сети. Комбинация управления с итеративным обучением и управления с обратной связью также представляет интересную задачу для дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Garden M.* Learning Control of Actuators in Control Systems. U.S. Patent 3555252, 1971.
2. *Uchiyama M.* Formulation of High-Speed Motion Pattern of a Mechanical Arm by Trial // Trans. SICE (Soc. Instrum. Contr. Eng.). 1978. V. 14. No. 6. P. 706–712.
3. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering Operation of Robots by Learning // J. Robot. Syst. 1984. V. 1. P. 123–140.

4. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering Operation of Dynamic Systems by Learning: A New Control Theory for Servomechanism or Mechatronic Systems // Proc. 23rd Conf. Decision Control. Las Vegas. 1984. P. 1064–1069.
5. *Craig J.J.* Adaptive Control of Manipulators through Repeated Trials // Proc. Amer. Control Conf. 1984. P. 1566–1573.
6. *Casalino G., Bartolini G.* A Learning Procedure for the Control of Movements of Robotic Manipulators // Proc. IASTED Symp. Robot. Autom. 1984. P. 108–111.
7. *Xu J.-X., Tan Y.* Linear and Nonlinear Iterative Learning Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences. N.Y.: Springer, 2003.
8. *Ahn H.-S., Moore K.L., Chen Y.Q.* Iterative Learning Control. Robustness and Monotonic Convergence for Interval Systems. London: Springer-Verlag, 2007.
9. *Bristow D.A., Tharayil M., Alleyne A.G.* A Survey of Iterative Learning Control // IEEE Control Syst. Mag. 2006. V. 23. No. 3. P. 96–114.
10. *Ahn H.-S., Chen Y.Q., Moore K.L.* Iterative Learning Control: Brief Survey and Categorization // IEEE Trans. Syst. Man, Cybernet. Part C: Applications and Reviews. 2007. V. 37. No. 6. P. 1099–1121.
11. *Shen D., Wang Y.* Survey on Stochastic Iterative Learning Control // J. Process Control. 2014. V. 24. P. 64–77.
12. *Shen D.* A Technical Overview of Recent Progresses on Stochastic Iterative Learning Control // UST. 2018. V. 6. No. 3. P. 147–164.
13. *Saab S.S.* A Discrete-Time Stochastic Learning Control Algorithm // IEEE Trans. Autom. Control. 2001. V. 46. No. 6. P. 877–887.
14. *Saab S.S.* On a Discrete-Time Stochastic Learning Control Algorithm // IEEE Trans. Autom. Control. 2001. V. 46. No. 8. P. 1333–1336.
15. *Saab S.S.* Stochastic P-type/D-type Iterative Learning Control Algorithms // Int. J. Control. 2003. V. 76. No. 2. P. 139–148.
16. *Saab S.S.* A Stochastic Iterative Learning Control Algorithm with Application to an Induction Motor // Int. J. Control. 2004. V. 77. No. 2. P. 144–163.
17. *Saab S.S.* Optimal Selection of the Forgetting Matrix into an Iterative Learning Control Algorithm // IEEE Trans. Autom. Control. 2005. V. 50. No. 12. P. 2039–2043.
18. *Saab S.S.* Optimality of First-Order ILC among Higher Order ILC // IEEE Trans. Autom. Control. 2006. V. 51. No. 8. P. 1332–1336.
19. *Pakshin P., Emelianova J., Galkowski K., Rogers E.* Iterative Learning Control Design for Discrete Stochastic Linear Systems // Proc. 18th Eur. Control Conf. Napoli, Italy. 2019. P. 3776–3771.
20. *Pakshin P., Emelianova J., Rogers E., Galkowski K.* Repetitive Process Based Stochastic Iterative Learning Control Design for Linear Dynamics // Syst. Control Lett. 2020. V. 137. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2020.104625>
21. *Пакишин П.В., Копосов А.С., Емельянова Ю.П.* Управление с итеративным обучением мультиагентной системой в условиях случайных возмущений // АИТ. 2020. № 3. С. 132–156.
Pakshin P.V., Kuposov A.S., Emelianova J.P. Iterative Learning Control of a Multi-agent System under Random Perturbations // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 3. P. 483–502.
22. *Oh S-K, Lee J.M.* Stochastic Iterative Learning Control for Discrete Linear Time-Invariant System with Batch-Varying Reference Trajectories // J. Process Control. 2015. V. 36. P. 64–78.
23. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston, MA: Birkhäuser, 2003.

24. *Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulff K., King C.* Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems // *SIAM Rev.* 2007. V. 49. P. 545–592.
25. *Lin H., Antsaklis P.J.* Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2009. V. 54. P. 308–321.
26. *Sun Z., Ge S.S.* Stability Theory of Switched Dynamical Systems. London: Springer-Verlag, 2011.
27. *Alwan M.S., Liu X.* Theory of Hybrid Systems: Deterministic and Stochastic. Beijing: Springer Nature Singapore Pte Ltd. and Higher Education Press, 2018.
28. *Rogers E., Galkowski K., Owens D.H.* Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes / *Lect. Notes Control Inform. Sci.* Berlin: Springer-Verlag, 2007. V. 349.
29. *Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Galkowski K., Rogers E.* Dissipivity and Stabilization of Nonlinear Repetitive Processes // *Syst. Control Lett.* 2016. V. 91. P. 14–20.
30. *Пакишин П.В., Емельянова Ю.П., Емельянов М.А., Галковский К., Роджерс Э.* Стохастическая устойчивость некоторых классов 2D-систем // *АиТ.* 2018. № 1. С. 113–129.
Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Galkowski K., Rogers E. Stochastic Stability of Some Classes of Nonlinear 2D Systems // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 1. P. 89–102.
31. *Pakshin P., Emelianova J., Galkowski K., Rogers E.* Stabilization of Two-Dimensional Nonlinear Systems Described by Fornasini-Marchesini and Roesser models // *SIAM J. Control Optim.* 2018. V. 56. P. 3848–3866.
32. *Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Galkowski K., Rogers E.* Passivity Based Stabilization of Repetitive Processes and Iterative Learning Control Design // *Syst. Control Lett.* 2018. V. 122. P. 101–108.
33. *Apkarian J., Karam P., Levis M.* Workbook on Flexible Link Experiment for Matlab/Simulink Users. Quanser, 2011.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 27.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020