© 2020 г. **А.С. БОРТАКОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук (asbortakov@mail.ru)**
(Московский авиационный институт)

ТЕОРЕМА РАЗДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО В СРЕДНЕМ УПРАВЛЕНИЯ ГИБРИДНЫМИ СИСТЕМАМИ ПЕРЕМЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ[1]

Рассматривается задача оптимального в среднем управления линейной гибридной системой, непрерывное движение которой чередуется с дискретными изменениями (переключениями) со сменой пространства состояний. Начальное состояние системы случайное. Качество управления характеризуется средним значением квадратичного функционала. Моменты переключений и их количество заранее не заданы. Они определяются в результате минимизации функционала. Для рассматриваемой задачи классический принцип разделения не выполняется. Доказан так называемый условный принцип разделения. Приводятся примеры применения условного и классического принципов разделения.

Ключевые слова: гибридные системы, изменение размерности пространства состояний, оптимальное в среднем управление, теорема разделения.

DOI: 10.31857/S0005231020110045

1. Введение

Задачи оптимального управления пучками траекторий непрерывных детерминированных систем были исследованы в [1, 2]. При дальнейших исследованиях были получены достаточные условия оптимальности в среднем управления пучками траекторий непрерывно-дискретных [3] и переключаемых [4]. В [5] для линейных гибридных систем постоянной размерности была доказана теорема разделения. В настоящей статье эта теорема доказывается для гибридных систем переменной размерности (ГСПР).

Непрерывное движение ГСПР описывается дифференциальными уравнениями, а мгновенные изменения состояния (переключения) — рекуррентными уравнениями или включениями. В момент переключения меняется пространство состояний системы, в частности его размерность. Системы управления с изменяемым пространством состояний исследовались под разными названиями: составные системы [6], ступенчатые системы [7], системы со сменой фазового пространства [8], сложные (многоэтапные) процессы [9], системы с переменной структурой и размерностью [10, 11], гибридные системы с промежуточными условиями [12, 13]. В задачах оптимального управления [6–8, 12, 13], как правило, моменты смены фазового пространства фиксированы или определяются промежуточными условиями, а переключения состояний неуправляемы. Количество переключений задано, а в первых публикациях [6–8] по этой тематике переключение единственное. Необходимые условия для ги-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-128-а).

бридных систем с промежуточными условиями, обобщающие принцип максимума, получены в [12, 13], где количество переключений задано, моменты переключений не фиксированы, а сами переключения неуправляемы. Другой подход к исследованию гибридных систем заключается в использовании дискретно-непрерывных и импульсных систем управления [14].

Достаточные условия оптимальности ГСПР получены в [15, 16] для задач, в которых количество и моменты переключений заранее не заданы, а переключения управляемы. При этом допускались процессы с мгновенными многократными переключениями. Однако применение этих условий для линейно-квадратичных задач (ЛКЗ) затруднительно. Причина этого заключается в том, что функция цены (функция Гамильтона–Якоби–Беллмана (ГЯБ)) в ЛКЗ управления ГСПР не является квадратичной [17]. Начиная с ЛКЗ управления непрерывными системами [18] квадратичность функции цены была доказана для дискретных и непрерывно-дискретных систем. Отметим, что в этих системах либо нет переключений, либо они происходят в заданные моменты времени. В гибридных системах моменты переключений не фиксированы, и их оптимизация приводит к неквадратичным функциям цены. Поэтому для синтеза оптимальных линейных ГСПР с квадратичным функционалом качества нужны новые достаточные условия, которые получены в настоящей статье.

Для ЛКЗ управления непрерывными стохастическими системами доказана теорема разделения [19]: оптимальное в среднем управление стохастической системой совпадает с оптимальным позиционным управлением соответствующей детерминированной системой, в котором используется оптимальная оценка состояния стохастической системы. При таком способе формирования управления задачи оптимального управления и наблюдения можно решать отдельно. Этот подход получил название принципа разделения. Он широко применяется на практике, часто без обоснования, даже для нелинейных систем. В частном случае для детерминированной непрерывной системы, начальное состояние которой не определено, теорема разделения доказана в [1]: оптимальное в среднем управление линейной системой с квадратичным функционалом качества совпадает с оптимальным управлением одной траекторией этой системы, исходящей из геометрического центра тяжести множества возможных начальных состояний. В этом детерминированном случае задача наблюдения тривиальная. Она сводится к нахождению центра тяжести множества возможных состояний.

В настоящей статье рассматривается задача управления линейной ГСПР, начальное состояние которой представляет собой случайный вектор с заданной плотностью вероятности. Качество управления характеризуется средним значением квадратичного функционала качества управления отдельной траекторией. Эту задачу можно рассматривать как задачу оптимального в среднем управления пучком траекторий детерминированной ГСПР. Для таких ЛКЗ классический принцип разделения не выполняется, поскольку, как указано выше, функция цены не является квадратичной. Однако оказывается справедливым *условный* принцип разделения: *оптимальное в среднем управление пучком траекторий совпадает с условным оптимальным управлением траекторией, исходящей из математического ожидания вектора началь-*

ного состояния системы. Условное оптимальное управление отличается от оптимального дополнительным условием — фиксированными моментами переключений. Согласно условному принципу задача наблюдения отделена от задачи условного оптимального управления, т.е. математическое ожидание начального состояния системы находится отдельно от оптимального управления с фиксированными моментами переключений. Однако оптимальные моменты переключений определяются при минимизации среднего значения функционала. Последняя задача минимизации конечномерная и может быть решена многими методами.

В статье доказывается теорема разделения для оптимального в среднем управления линейной ГСПР с квадратичным критерием качества. Получены уравнения для нахождения оптимальных законов управления. Выделен класс ЛКЗ, в котором выполняется классический принцип разделения. Рассмотрены академические примеры, демонстрирующие применение условного и классического принципов разделения для ГСПР. В частности, приведен контрпример ЛКЗ задачи управления гибридной системой, в котором классический принцип разделения не выполняется, а условный принцип разделения выполняется.

2. Постановки задач

Пусть на заданном промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ динамическая система совершает N переключений в моменты времени $t_1, \ldots, t_N$, образующие неубывающую конечную последовательность $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots t_N\}$:

$$t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_N \leqslant t_F. \tag{2.1}$$

Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно линейному дифференциальному уравнению:

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i(t) + B_i(t)u_i(t), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{2.2}$$

а в моменты переключений — дискретно, в соответствии с рекуррентным уравнением

$$x_i(t_i) = \widehat{A}_i(t_i)x_{i-1}(t_i) + \widehat{B}_i(t_i)v_i, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2.3}$$

В соотношениях (2.2): $\mathcal{N} \triangleq \{i = 0, 1, \ldots, N \,|t_i < t_{i+1}\}$ — множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков $T_i = [t_i, t_{i+1}]$ непрерывного изменения системы; $x_i(t)$ — состояние системы в момент времени $t \in T_i$, $x_i(t) \in X_i = \mathbb{R}^{n_i}$; $u_i(t)$ — управление непрерывным движением системы в момент времени $t \in T_i$, $u_i(t) \in U_i = \mathbb{R}^{p_i}$, $i \in \mathcal{N}$. Элементы матриц $A_i(\cdot)$ и $B_i(\cdot)$ суммируемы на T_i, $i \in \mathcal{N}$. При $t_i = t_{i+1}$ промежуток T_i, $i \notin \mathcal{N}$, представляет собой точку $T_i = \{t_i\}$, функция $x_i(\cdot)$ определена в одной точке t_i, а значение $u(t_i)$ управления несущественно. В уравнении (2.3): v_i — управление переключением системы в момент $t_i \in \mathcal{T}$, $v_i \in V_i = \mathbb{R}^{q_i}$, $i = 1, \ldots, N$. Возможное равенство последовательных моментов в (2.1) означает, что система совершает мгновенные многократные переключения [15, 16].

Множество допустимых программных управлений $\mathcal{W}(t_0, x_0)$ составляют пары $w = (u(\cdot), v(\cdot))$, включающие управление непрерывным движением – последовательность $u(\cdot) \triangleq \{u_i(\cdot)\}_{i=0}^{N}$ ограниченных измеримых функций $u_i: T_i \to \to U_i$; управление переключениями – последовательность $v(\cdot) \triangleq \{(t_i, v_i) | t_i \in \mathcal{T}, v_i \in V_i, i = 1, \ldots, N\}$. Подчеркнем, что последовательность $v(\cdot)$ фактически определяет множество переключений $\mathcal{T}$, причем у разных допустимых управлений $v(\cdot)$ количество N переключений и моменты $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots t_N\}$ переключений могут не совпадать. При этом не исключается случай отсутствия переключений, когда $N = 0$ и $\mathcal{T} = \varnothing$ по определению. Допустимое управление $w \in \mathcal{W}(t_0, x_0)$ согласно [20] порождает для любого начального условия $x_0(t_0) = x_0$ единственную допустимую траекторию $x(\cdot) \triangleq x_i(\cdot)_{i=0}^{N}$, которая на каждом ненулевом (по длине) промежутке T_i, $i \in \mathcal{N}$, представляет собой абсолютно непрерывную функцию $x_i: T_i \to X_i$, удовлетворяющую почти всюду T_i дифференциальному уравнению (2.2). В каждый момент переключения $t_i \in \mathcal{T}$ скачки $x_{i-1}(t_i) \to x_i(t_i)$ допустимой траектории удовлетворяют рекуррентному уравнению (2.3). На множестве $\mathcal{W}(t_0, x_0)$ допустимых управлений задан квадратичный функционал качества

$$I(t_0, x_0, w) = \sum_{i=0}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\frac{1}{2} x_i^{\mathrm{T}}(t) C_i(t) x_i(t) + \frac{1}{2} u_i^{\mathrm{T}}(t) D_i(t) u_i(t)\right] dt + \\ + \sum_{i=1}^{N} \left[\lambda_i(t_i) + \frac{1}{2} x_{i-1}^{\mathrm{T}}(t_i) \widehat{C}_i(t_i) x_{i-1}(t_i) + \frac{1}{2} v_i^{\mathrm{T}} \widehat{D}_i(t_i) v_i\right] + \\ + \frac{1}{2} x_N^{\mathrm{T}}(t_F) F x_N(t_F), \tag{2.4}$$

где $t_{N+1} \triangleq t_F$. Все матрицы в (2.4) – симметрические соответствующих порядков. Матрицы $C_i(t)$, $\widehat{C}_i(t)$, F — неотрицательно определенные, а $D_i(t)$ и $\widehat{D}_i(t)$ — положительно определенные. Функции $C_i(\cdot)$, $D_i(\cdot)$ — измеримые ограниченные, а $\widehat{C}_i(\cdot)$, $\widehat{D}_i(\cdot)$ — ограниченные. Величины $\lambda_i(t)$ — положительные, точнее

$$\lambda_i(t) \geqslant \lambda^+ > 0 \tag{2.5}$$

при всех $t \in T$, $i = 1, \ldots, N$, для некоторого положительного числа λ^+. Слагаемые, зависящие от момента t_i, можно рассматривать как затраты (или "штраф") на переключение $x_{i-1}(t_i) \to x_i(t_i)$ состояния системы. При условии (2.5) затраты будут не меньше $\lambda^+ > 0$. Отметим, что в функционале (2.4) количество переключений N и моменты переключений t_i, $i = 1, \ldots, N$, являются управляющими параметрами, относящимися к управлению переключениями $v(\cdot)$.

Задача 1 (оптимального управления). Требуется найти наименьшее значение функционала (2.4) и оптимальное управление $w^* \in \mathcal{W}(t_0, x_0)$, на котором это значение достигается:

$$I(t_0, x_0, w^*) = \min_{w \in \mathcal{W}(t_0, x_0)} I(t_0, x_0, w). \tag{2.6}$$

Подчеркнем, что при минимизации (2.6) определяются количество переключений N, моменты переключений $\mathcal{T}$, управление $u(\cdot)$ непрерывным движением системы, а также управление $v(\cdot)$ переключениями. При этом количество переключений N будет конечным из-за положительности затрат на каждое переключение. Кроме того, условие (2.5) исключает у оптимальных процессов так называемые *фиктивные* переключения, при которых состояние системы не изменяется $x_i(t_i) = x_{i-1}(t_i)$ и фактического переключения нет. При положительных затратах на переключение процессы с фиктивными переключениями, разумеется, не будут оптимальными.

В теории и на практике нередко возникают задачи управления с фиксированными моментами переключений, например задачи управления дискретными или непрерывно-дискретными системами. Пусть $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_N\}$ — заданное множество моментов переключений (2.1). Обозначим через $I(t_0, x_0, w|\mathcal{T})$ функционал качества управления (2.4) при фиксированных моментах переключений. Задача минимизации условного функционала качества $I(t_0, x_0, w|\mathcal{T})$ на множестве $\mathcal{W}(t_0, x_0|\mathcal{T})$ допустимых управлений из $\mathcal{W}(t_0, x_0)$ с заданными моментами переключений (2.1) формулируется следующим образом.

Задача 2 (условного оптимального управления). Требуется найти наименьшее значение функционала $I(t_0, x_0, w|\mathcal{T})$ при заданных моментах переключений $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots t_N\}$ и условное оптимальное управление $w_{\mathcal{T}} \in \mathcal{W}(t_0, x_0|\mathcal{T})$, на котором это значение достигается:

$$I(t_0, x_0, w_{\mathcal{T}}|\mathcal{T}) = \min_{w \in \mathcal{W}(t_0, x_0|\mathcal{T})} I(t_0, x_0, w|\mathcal{T}). \tag{2.7}$$

Такое управление $w_{\mathcal{T}}$ называется *условным* оптимальным, поскольку оно находится при дополнительном условии — заданных моментах переключений $\mathcal{T}$.

Задачи (2.6) и (2.7) связаны. Оптимальное управление $w^* \in \mathcal{W}(t_0, x_0)$ получается из условного оптимального управления $w_{\mathcal{T}} \in \mathcal{W}(t_0, x_0|\mathcal{T})$ после дополнительной минимизации по моментам переключений $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_N\}$:

$$I(t_0, x_0, w^*) = \min_{N \in \mathbb{Z}_+} \min_{t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_N \leqslant t_F} I(t_0, x_0, w|\mathcal{T}).$$

Пусть в отличие от задачи (2.6) начальное состояние x_0 системы точно неизвестно, а является случайным вектором с известной плотностью распределения $p_0 : X_0 \to \mathbb{R}$. Предполагается, что в процессе управления никакой дополнительной информации, уточняющей состояние системы, не поступает. Обозначим через $\mathcal{W}(t_0, p_0)$ множество допустимых управлений $w = (u(\cdot), v(\cdot))$, каждое из которых порождает допустимую траекторию для любого начального состояния $x_0 \in X_0$. Пусть по-прежнему качество управления одной траекторией характеризуется функционалом (2.4), а качество управления системой со случайным начальным состоянием оценивается средним значением этого функционала

$$\overline{I}(t_0, p_0, w) = \int\limits_{X_0} p_0(x_0) I(t_0, x_0, w) dx_0. \tag{2.8}$$

Предполагаем, что это среднее значение существует. Функционалы вида (2.8) применяются и для детерминированных задач управления пучками траекторий [21]. В этом случае функция $p_0(\cdot)$ играет роль начальной плотности пучка частиц.

Задача 3 (оптимального в среднем управления). Требуется найти наименьшее среднее значение (2.8) функционала (2.4) и оптимальное в среднем управление $\overline{w} \in \mathcal{W}(t_0, p_0)$, на котором это значение достигается:

$$\overline{I}(t_0, p_0, \overline{w}) = \min_{w \in \mathcal{W}(t_0, p_0)} \overline{I}(t_0, p_0, w).$$

Как и в случае управления одной траекторией, задачу оптимального в среднем управления можно рассматривать при дополнительном условии — заданных моментах переключений $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_N\}$. При этом качество управления характеризуется средним значением

$$\overline{I}(t_0, p_0, w|\mathcal{T}) = \int\limits_{X_0} p_0(x_0) I(t_0, x_0, w|\mathcal{T}) dx_0. \tag{2.9}$$

условного функционала качества $I(t_0, x_0, w|\mathcal{T})$. Задача минимизации этого функционала на множестве $\mathcal{W}(t_0, p_0|\mathcal{T})$ допустимых управлений из $\mathcal{W}(t_0, x_0)$ с заданными моментами переключений (2.1) формулируется следующим образом.

Задача 4 (условного оптимального в среднем управления). Требуется найти наименьшее среднее значение функционала (2.9) при заданных моментах переключений $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots t_N\}$ и условное оптимальное в среднем управление $\overline{w}_{\mathcal{T}} \in \mathcal{W}(t_0, p_0)$, на котором это значение достигается:

$$\overline{I}(t_0, p_0, \overline{w}_{\mathcal{T}}) = \min_{w \in \mathcal{W}(t_0, p_0|\mathcal{T})} \overline{I}(t_0, p_0, w).$$

3. Оптимальное управление

Сначала выясним характер зависимости функционала (2.4) от начального состояния. Пусть $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots t_N\}$ — фиксированное множество моментов переключений (2.1). На участках непрерывного движения (2.2) и при переключениях (2.3) текущее состояние ГСПР является аффинной функцией начального состояния x_0:

$$x_i(t) = k(t|t_1, \ldots, t_i) x_0 + l(t, w|t_1, \ldots, t_i), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}. \tag{3.1}$$

Функции k и l зависят от всех моментов переключений $t_1, \ldots, t_i$, принадлежащих промежутку $[t_0, t]$, причем функционал $w \to l(t, w|t_1, \ldots, t_i)$ — линейный по управлению $w = (u(\cdot), v(\cdot))$, определенному на $[t_0, t]$. Подставляя (3.1) в условный функционал качества (2.6), получаем

$$I(t_0, x_0, w|\mathcal{T}) = \frac{1}{2} x_0^{\mathrm{T}} K(t_0|\mathcal{T}) x_0 + L(t_0, w|\mathcal{T}) x_0 + M(t_0, w|\mathcal{T}). \tag{3.2}$$

Здесь $K(t_0|\mathcal{T})$ — симметрическая неотрицательно определенная матрица порядка n_0, $L(t_0,w|\mathcal{T})$ – векторная функция (строка), линейно зависящая от управления w, $M(t_0,w|\mathcal{T})$ — положительно определенный квадратичный функционал от управления w. Заметим, что при фиксированных моментах переключений $\mathcal{T}$ множество допустимых управлений можно считать линейным нормированным пространством, поскольку его составляют пары $w=(u(\cdot),v(\cdot))$ с измеримым ограниченным управлением $u(\cdot)$ непрерывным движением и конечной последовательностью $v(\cdot)$ векторов управления переключениями. На множестве $\mathcal{W}(t_0,x_0)$ функционал (3.2) дифференцируем по управлению, причем производная (Фреше) имеет вид

$$I'(t_0,x_0,w|\mathcal{T}) = L'(t_0|\mathcal{T})x_0 + M'(t_0,w|\mathcal{T}). \tag{3.3}$$

Обозначение $L'(t_0|\mathcal{T}) = L'(t_0,w|\mathcal{T})$ подчеркивает, что производная линейной функции $w \to L(t_0,w|\mathcal{T})$ не зависит от управления.

Условное оптимальное программное управление $w_{\mathcal{T}}$ одной траекторией, исходящей из начальной позиции (t_0,x_0), удовлетворяет необходимому условию оптимальности: $I'(t_0,x_0,w|\mathcal{T})=0$. Для положительно определенного квадратичного функционала (3.2) это условие будет также и достаточным. Записывая производную (3.3), вычисленную на условном оптимальном управлении $w_{\mathcal{T}}$, получаем

$$L'(t_0|\mathcal{T})x_0 + M'(t_0,w_{\mathcal{T}}|\mathcal{T}) = 0. \tag{3.4}$$

Поскольку функционал $w \to M(t_0,w|\mathcal{T})$ квадратичный, то уравнение (3.4) представляет собой линейное функциональное уравнение относительно условного оптимального управления $w_{\mathcal{T}}$. Заметим, что оптимальное управление $w^* \in \mathcal{W}(t_0,x_0)$ также удовлетворяет уравнению (3.4), поскольку оно является условным оптимальным при наилучшем выборе моментов переключений $\mathcal{T}^*$, т.е.

$$L'(t_0|\mathcal{T}^*)x_0 + M'(t_0,w^*|\mathcal{T}^*) = 0.$$

4. Оптимальное в среднем управление

Запишем выражение для среднего значения функционала (3.2):

$$\overline{I}(t_0,p_0,w|\mathcal{T}) = \int\limits_{X_0} p_0(x_0)\left\{\frac{1}{2}x_0^{\mathrm{T}}K(t_0|\mathcal{T})x_0 + L(t_0,w|\mathcal{T})x_0 + M(t_0,w|\mathcal{T})\right\}dx_0.$$

Найдем производную этого функционала по управлению

$$\begin{aligned}\overline{I}\,'(t_0,p_0,w|\mathcal{T}) = L'(t_0|\mathcal{T})\int\limits_{X_0} p_0(x_0)x_0dx_0 + M'(t_0,w|\mathcal{T}) =\\ = L'(t_0|\mathcal{T})\overline{x}_0 + M'(t_0,w|\mathcal{T}),\end{aligned}$$

где $\overline{x}_0$ — математическое ожидание начального состояния системы. Условное оптимальное в среднем управление $\overline{w}_{\mathcal{T}}$ удовлетворяет необходимому условию экстремума:

$$L'(t_0|\mathcal{T})\overline{x}_0 + M'(t_0, \overline{w}_{\mathcal{T}}|\mathcal{T}) = 0. \tag{4.1}$$

Оптимальное в среднем управление $\overline{w}$ также является условным оптимальным в среднем управлением $\overline{w} = \overline{w}_{\overline{\mathcal{T}}}$ при наилучшем выборе моментов переключений $\overline{\mathcal{T}}$. Поэтому оно удовлетворяет уравнению (4.1)

$$L'(t_0|\overline{\mathcal{T}})\overline{x}_0 + M'(t_0, \overline{w}|\overline{\mathcal{T}}) = 0. \tag{4.2}$$

Сравнивая (4.2) с (3.4), заключаем, что оптимальное в среднем управление $\overline{w} = \overline{w}_{\overline{\mathcal{T}}}$ совпадает с условным оптимальным управлением $w_{\mathcal{T}}$ для начального состояния $\overline{x}_0$. Отсюда следует справедливость утверждения.

Теорема 1 (теорема разделения). *Оптимальное в среднем управление линейной ГСПР с квадратичным функционалом качества совпадает с условным оптимальным управлением одной траекторией, исходящей из математического ожидания начального состояния системы.*

Как видим, для поставленной задачи выполняется так называемый *условный* принцип разделения. Оптимальное в среднем управление может не совпадать с оптимальным управлением траекторией, исходящей из математического ожидания начального состояния системы. Эти управления могут отличаться моментами переключений или даже количеством переключений. Для детерминированных ЛКЗ управления непрерывными, дискретными, непрерывно-дискретными системами принцип разделения выполняется, поскольку моменты переключений фиксированы или переключений нет вовсе.

Отметим, что задача наблюдения в рассматриваемом случае тривиальная. Она сводится к нахождению среднего значения начального состояния системы. Аналогичная оценка множества возможных состояний применяется в задачах управления пучками траекторий детерминированных систем. В качестве оценки выбирается геометрический центр тяжести (барицентр). Такая задача наблюдения существенно проще традиционного наблюдения в стохастических системах, непременно связанного со стохастической фильтрацией.

5. Синтез оптимального управления

Применение метода динамического программирования [22] опирается на понятие функции цены (функции Гамильтона–Якоби–Беллмана (ГЯБ)), которая определяется минимальным значением функционала оставшихся потерь. Обозначим через $\mathcal{W}_i(t, x_i)$ множество допустимых программных управлений после i-го переключения для процессов, удовлетворяющих условию $x_i(t) = x_i$. Оставшиеся переключения происходят в моменты $t_{i+1}, \ldots, t_N$, которые образуют неубывающую конечную последовательность на промежутке $[t, t_F]$:

$$t \triangleq t_i \leqslant t_{i+1} \leqslant \ldots \leqslant t_N \leqslant t_{N+1} \triangleq t_F. \tag{5.1}$$

Количество $k = N - i$ оставшихся переключений и сами моменты переключений $t_{i+1}, \ldots, t_N$ не фиксированы и у разных допустимых процессов могут не совпадать.

На множестве $\mathcal{W}_i(t, x_i)$ определим функционал оставшихся потерь:

$$I_i(t, x_i, w) = \sum_{j=i}^{N} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[\frac{1}{2}x_j^{\mathrm{T}}(t)C_j(t)x_j(t) + \frac{1}{2}u_j^{\mathrm{T}}(t)D_j(t)u_j(t)\right] dt + \tag{5.2}$$

$$+ \sum_{j=i+1}^{N} \left[\lambda_j\left(t_j\right) + \frac{1}{2}x_{j-1}^{\mathrm{T}}\left(t_j\right)\widehat{C}_j\left(t_j\right)x_{j-1}\left(t_j\right) + \frac{1}{2}v_j^{\mathrm{T}}\widehat{D}_j\left(t_j\right)v_j\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}x_N^{\mathrm{T}}\left(t_F\right)Fx_N\left(t_F\right).$$

Функция цены $\varphi_i(t, x_i)$ после i-го переключения по определению равна значению функционала оставшихся потерь (5.2), вычисленному на оптимальном процессе, удовлетворяющем начальному условию $x_i(t) = x_i$. Иначе говоря, функция цены равна минимальному значению функционала оставшихся потерь (5.2) на множестве допустимых управлений $\mathcal{W}_i(t, x_i)$:

$$\varphi_i(t, x_i) = \min_{w \in \mathcal{W}_i(t, x_i)} I_i(t, x_i, w).$$

При фиксированных моментах переключений функционал (5.2) и множество допустимых программных управлений будем обозначать, указывая дополнительно последовательность $\mathcal{T} = \{t_{i+1}, \ldots, t_N\}$ моментов переключений: $I_i(t, x_i, w|\mathcal{T})$ и $\mathcal{W}(t, x_i, w|\mathcal{T})$ соответственно. Функция $\varphi_i(t, x_i|t_{i+1}, \ldots, t_N)$, равная значению функционала оставшихся потерь $I_i(t, x_i, w|\mathcal{T})$, вычисленному на процессе, исходящем из стартовой позиции (t, x_i), при управлении, которое оптимально среди всех допустимых управлений, имеющих $k = N - i$ переключений, быть может фиктивных, в моменты времени $t_{i+1}, \ldots, t_N$, образующие неубывающую последовательность (5.1), называется k-*моментной функцией цены* [17]. Для процессов без переключений, когда $k = 0$ и $\mathcal{T} = \varnothing$, нульмоментную функцию цены обозначим через $\varphi_i(t, x_i|\varnothing)$. Функцию цены можно выразить через ее моментные функции

$$\varphi_i(t, x_i) = \min_{N \in \mathbb{Z}_+} \min_{t \leqslant t_{i+1} \leqslant \ldots \leqslant t_N \leqslant t_F} \varphi_i(t, x_i|t_{i+1}, \ldots, t_N).$$

Рекуррентная процедура нахождения моментных функций цены для гибридных систем постоянной размерности представлена в [17]. Опишем аналогичную процедуру для ГСПР. Согласно определению моментная функция цены $(t, x_i) \to \varphi_i(t, x_i|t_{i+1}, \ldots, t_N)$ на $[t_i, t_{i+1}] \times X_i$ удовлетворяет уравнению ГЯБ

$$\min_{u_i \in U_i} \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\left[A_i\left(t\right)x_i + B_i\left(t\right)u_i\right] + \right. \tag{5.3}$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,x_i^{\mathrm{T}}C_i\left(t\right)x_i + \frac{1}{2}\,u_i^{\mathrm{T}}D_i\left(t\right)u_i \right\} = 0$$

с терминальным условием в момент переключения t_{i+1}:

$$\begin{aligned}(5.4)\qquad & \varphi_i(t_{i+1}, x_i|t_{i+1}, \ldots, t_N) = \\ &= \min_{v_{i+1}\in V_{i+1}} \left\{ \varphi_{i+1}(t_{i+1}, \widehat{A}_{i+1}x_i + \widehat{B}_{i+1}v_{i+1}|t_{i+2}, \ldots, t_N)\lambda_{i+1} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}x_i^{\mathrm{T}}\widehat{C}_{i+1}x_i + \frac{1}{2}v_{i+1}^{\mathrm{T}}\widehat{D}_{i+1}v_{i+1} \right\}.\end{aligned}$$

Рекуррентное уравнение (5.4) связывает k-моментную функцию цены ($k = N - i$) после i-го переключения с $(k-1)$-моментной функцией цены после $(i+1)$-го переключения. Здесь и далее для сокращения записи рекуррентных уравнений аргумент t_{i+1} у матриц опускаются.

Для ЛКЗ моментные функции цены будут квадратичными:

$$\begin{aligned}(5.5)\qquad & \varphi_i(t, x_i|t_i, \ldots, t_N) = \\ &= \frac{1}{2}x_i^{\mathrm{T}}\Phi_i(t|t_{i+1}, \ldots, t_N)x_i + \lambda_{i+1}(t_{i+1}) + \ldots + \lambda_N(t_N),\end{aligned}$$

где Φ_i — симметрическая неотрицательно определенная матрица порядка n_i, абсолютно непрерывная по t на $[t_i, t_{i+1}]$. Подставляя (5.5) в уравнения (5.3), (5.4), получаем для нахождения матриц Φ_i, $i = 0, 1, \ldots, N$, следующую рекуррентную процедуру.

Матрица $\Phi_i(t)$ нульмоментной функции цены $\varphi_i(t, x_i|\varnothing)$ после i-го переключения (без последующих переключений) удовлетворяет на $[t_0, t_F]$ матричному дифференциальному уравнению Риккати:

$$(5.6)\qquad \dot{\Phi}_i + A_i^{\mathrm{T}}(t)\Phi_i + \Phi_i A_i(t) + C_i(t) - \Phi_i B_i(t)D_i^{-1}(t)B_i^{\mathrm{T}}(t)\Phi_i = 0$$

с терминальным условием $\Phi_i(t_F) = F$. Оптимальное управление непрерывным движением линейно по состоянию системы

$$(5.7)\qquad \mathbf{u}_i(t, x_i) = -D_i^{-1}(t)B_i^{\mathrm{T}}(t)\Phi_i(t)x_i.$$

Матрица $\Phi_i(t|t_{i+1}, \ldots, t_N)$ k-моментной функции цены ($k = N - i$) после i-го переключения находится по матрице Φ_{i+1} предыдущей $(k-1)$ моментной функции. В момент t_{i+1} первого из оставшихся переключений эта матрица удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$\begin{aligned}(5.8)\qquad & \Phi_i(t_{i+1}|t_{i+1}, \ldots, t_N) = \\ &= -\widehat{A}_{i+1}^{\mathrm{T}}\Phi_{i+1}^{k-1}\widehat{B}_{i+1}\left[\widehat{D}_{i+1} + \widehat{B}_{i+1}^{\mathrm{T}}\Phi_{i+1}^{k-1}\widehat{B}_{i+1}\right]^{-1}\widehat{B}_{i+1}^{\mathrm{T}}\Phi_{i+1}^{k-1}\widehat{A}_{i+1} + \\ &+ \widehat{C}_{i+1} + \widehat{A}_{i+1}^{\mathrm{T}}\Phi_{i+1}^{k-1}\widehat{A}_{i+1},\end{aligned}$$

а условное оптимальное управление переключениями линейно по состоянию системы

$$\begin{aligned}(5.9)\qquad & \mathbf{v}_{i+1}(t_{i+1}, x_i|t_{i+2}, \ldots, t_N) = \\ &= -\left[\widehat{D}_{i+1} + \widehat{B}_{i+1}^{\mathrm{T}}\Phi_{i+1}^{k-1}\ \widehat{B}_{i+1}\right]^{-1}\widehat{B}_{i+1}^{\mathrm{T}}\Phi_{i+1}^{k-1}\widehat{A}_{i+1}x_i.\end{aligned}$$

В правых частях уравнений (5.8), (5.9) матрица $\Phi_{i+1}^{k-1} = \Phi_{i+1}(t_{i+1}|t_{i+2},\ldots,t_N)$ – это матрица $(k-1)$-моментной функции цены после $(i+1)$-го переключения, $k = N - i$. При $i = N-1$ аргументы $t_{i+2},\ldots,t_N$ отсутствуют и матрица $\Phi_i(t_{i+1}|t_{i+2},\ldots,t_N) = \Phi_i(t_{i+1})$, т.е. совпадает с матрицей нульмоментной функции цены.

На промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ матрица $\Phi_i(t|t_{i+1},\ldots,t_N)$ как функция времени t удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению Риккати (5.6) с терминальным условием (5.8). Оптимальное управление непрерывным движением на этом промежутке линейно по состоянию системы

$$\mathbf{u}_i(t, x_i|t_{i+1},\ldots,t_N) = -D_i^{-1}(t)B_i^{\mathrm{T}}(t)\Phi_i(t|t_{i+1},\ldots,t_N)x_i. \tag{5.10}$$

При $k = 0$ управление (5.10) совпадает с (5.7).

В результате рекуррентной процедуры находятся матрицы $\Phi_i(t), \Phi_i(t|t_1),\ldots$ $\ldots,\Phi_i(t|t_1,\ldots,t_N)$ моментных функции цены (5.5), а также соответствующие условные оптимальные управления (5.9), (5.10). Для завершения синтеза оптимального управления остается определить количество переключений N и сами моменты переключений $t_1,\ldots,t_N$, решая задачу конечномерной минимизации

$$\min I = \min_{N\in\mathbb{Z}_+} \min_{t_0\leqslant t_1\ldots\leqslant t_N\leqslant t_F} \left\{ \frac{1}{2}x_0^{\mathrm{T}}\Phi_0(t_0|t_1,\ldots,t_N)x_0 + \lambda_1(t_1) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \lambda_N(t_N) \right\}. \tag{5.11}$$

Заметим, что из-за положительности затрат (2.5) минимум (5.11) достигается при конечном числе переключений N.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2 (оптимальное управление). *Оптимальное управление линейной ГСПР* (2.1)–(2.3) *с квадратичным функционалом качества* (2.4) *имеет вид*

$$\begin{gathered} u_i^*(t) = -D_i^{-1}(t)B_i^{\mathrm{T}}(t)\Phi_i(t|t_{i+1}^*,\ldots,t_{N^*}^*)x_i^*(t), \\ t \in \left[t_i^*, t_{i+1}^*\right], \quad i = 0,1,\ldots,N^*, \end{gathered} \tag{5.12}$$

$$\begin{gathered} v_i^*(t_i^*) = -\left[\widehat{D}_i + \widehat{B}_i^{\mathrm{T}}\Phi_i(t_i^*|t_{i+1}^*,\ldots,t_{N^*}^*)\widehat{B}_i\right]^{-1} \times \\ \times \widehat{B}_i^{\mathrm{T}}\Phi_i(t_i^*|t_{i+1}^*,\ldots,t_{N^*}^*)\widehat{A}_i x_{i-1}^*(t_i^*). \end{gathered} \tag{5.13}$$

Наименьшее значение функционала, оптимальное количество переключений N^* и оптимальные моменты переключений $t_1^*,\ldots,t_{N^*}^*$ являются решением задачи минимизации (5.11).

Подчеркнем, что условные оптимальные управления (5.9), (5.10) линейны по состоянию системы. Однако количество переключений N^* и моменты переключений $t_1^*,\ldots,t_{N^*}^*$, которые находятся в (5.11), в общем случае нелинейно зависят от начального состояния x_0. Поэтому оптимальные управления (5.12), (5.13) ГСПР оказывается нелинейными по состоянию в отличие от классических ЛКЗ оптимального управления.

6. Синтез оптимального в среднем управления

Как было показано выше, оптимальное в среднем управление совпадает с условным оптимальным управлением $\overline{w}_{\mathcal{T}}$ одной траекторией, исходящей из математического ожидания $\overline{x}_0$ начального состояния системы. Для синтеза такого управления используем так называемую функцию стоимости полуоптимального процесса [5], значение $\beta_i(t, x_i, \overline{x})$ которой по определению равно значению функционала оставшихся потерь (5.2), вычисленному на траектории $x(\cdot)$, исходящей из позиции (t, x_i), при управлении $\overline{w}$, оптимальном для траектории $\overline{x}(\cdot)$, исходящей из позиции $(t, \overline{x}_i)$. Иначе говоря, функция $\beta_i(t, x_i, \overline{x})$ равна значению функционала оставшихся потерь на полуоптимальном процессе $(x(\cdot), \overline{w})$, в котором управление $\overline{w}$ оптимальное (правда, для траектории $\overline{x}(\cdot)$), а траектория $x(\cdot)$ неоптимальная, хотя получается при управлении $\overline{w}$. При совпадении аргументов $x_i = \overline{x}_i$ имеет место равенство

$$\varphi_i(t, \overline{x}_i) = \beta_i(t, \overline{x}_i, \overline{x}_i). \tag{6.1}$$

Чтобы получить функцию стоимости $\beta_i(t, x_i, \overline{x})$, будем использовать, как и для функции цены, вспомогательные функции. Функцию $\beta_i(t, x_i, \overline{x}_i | t_{i+1}, \ldots$ $\ldots, t_N)$, равную (по определению) значению функционала оставшихся потерь (5.2), вычисленному на траектории, исходящей из позиции (t, x_i), при условном оптимальном управлении $\overline{w}_{\mathcal{T}}$, имеющем $k = N - i$ переключений в моменты $\mathcal{T} = \{t_{i+1}, \ldots, t_N\}$, для траектории, исходящей из позиции $(t, \overline{x}_i)$, будем называть *k-моментной функцией стоимости полуоптимального процесса* после i-го переключения.

Рекуррентная процедура нахождения моментных функций стоимости полуоптимального процесса для гибридных систем постоянной размерности представлена в [5]. Опишем аналогичную процедуру для ГСПР. Согласно определению моментная функция стоимости $(t, x_i) \to \beta_i(t, x_i, \overline{x}_i | t_{i+1}, \ldots, t_{i+k})$ на $[t_i, t_{i+1}] \times X_i \times X_i$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial t} + \frac{\partial \beta_i}{\partial x_i}\left[A_i(t)x_i + B_i(t)\overline{u}_i\right] + \frac{\partial \beta_i}{\partial \overline{x}_i}\left[A_i(t)\overline{x}_i + B_i(t)\overline{u}_i\right] + \\ + \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}} C_i(t) x_i + \frac{1}{2}\overline{u}_i^{\mathrm{T}} D_i(t) \overline{u}_i = 0 \tag{6.2}$$

с терминальным условием в момент переключения t_{i+1}:

$$\beta_i(t_{i+1}, x_i, \overline{x}_i | t_{i+1}, \ldots, t_N) = \frac{1}{2}x_i^{\mathrm{T}} \widehat{C}_{i+1} x_i + \frac{1}{2}\overline{v}_{i+1}^{\mathrm{T}} \widehat{D}_{i+1} \overline{v}_{i+1} + \\ + \beta_{i+1}\left(t_{i+1}, \widehat{A}_{i+1}x_i + \widehat{B}_{i+1}\overline{v}_{i+1}, \widehat{A}_{i+1}\overline{x}_i + \widehat{B}_{i+1}\overline{v}_{i+1} | t_{i+2}, \ldots, t_N\right). \tag{6.3}$$

В уравнениях (6.2), (6.3) условные оптимальные управления $\overline{u}_i$ и $\overline{v}_i$ имеют вид (5.10) и (5.9) соответственно для состояния $x_i = \overline{x}_i$. Как и ранее, для сокращения записи рекуррентных уравнений аргумент t_{i+1} у матриц не указывается.

Для ЛКЗ моментная функция стоимости будет квадратичной:

$$\beta_i\left(t, x_i, \overline{x}_i \,|\, t_{i+1}, \ldots, t_N\right) = \tag{6.4}$$

$$= \frac{1}{2}\,\overline{x}_i^{\mathrm{T}}\Phi_i\overline{x}_i + \frac{1}{2}\,\overline{x}_i^{\mathrm{T}}\Phi_i\Delta x_i + \frac{1}{2}\Delta x_i^{\mathrm{T}}\Phi_i\overline{x}_i + \frac{1}{2}\,\Delta x_i^{\mathrm{T}}\Gamma_i\Delta x_i +$$

$$+ \lambda_{i+1}\left(t_{i+1}\right) + \ldots + \lambda_N\left(t_N\right).$$

Здесь $\Gamma_i = \Gamma_i(t|t_{i+1}, \ldots, t_N)$ — симметрическая неотрицательно определенная матрица порядка n_i, абсолютно непрерывная по t на $[t_i, t_{i+1}]$; $\Delta x_i = x_i - \overline{x}_i$; $\Phi_i = \Phi_i(t|t_{i+1}, \ldots, t_N)$ — матрица k-моментной функции цены (5.3), $k = N - i$. При $\Delta x = 0$ получаем равенство (6.1). Подставляем (6.4) в уравнения (6.2), (6.3). Учитывая, что матрицы Φ_i удовлетворяют уравнениям (5.6), (5.8), для нахождения матриц Γ_i, $i = 0, 1, \ldots$, имеем следующую рекуррентную процедуру.

Матрица Γ_i как функция времени $t \to \Gamma_i(t|t_{i+1}, \ldots, t_N)$ на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\Gamma}_i + A_i^{\mathrm{T}}(t)\Gamma_i + \Gamma_i A_i(t) - C_i(t) = 0 \tag{6.5}$$

с терминальным условием в момент переключения t_{i+1}:

$$\begin{gathered}\Gamma_i\left(t_{i+1} \,|\, t_{i+1}, \ldots, t_N\right) = \\ = \widehat{A}_{i+1}^{\mathrm{T}}\,\Gamma_{i+1}\left(t_{i+1} \,|\, t_{i+2}, \ldots, t_N\right)\widehat{A}_{i+1} + \widehat{C}_{i+1}.\end{gathered} \tag{6.6}$$

Здесь $\Gamma_{i+1}(t_{i+1}|t_{i+2}, \ldots, t_N)$ — матрица $(N - i - 1)$-моментной функции стоимости после $(i+1)$-го переключения. Матрица $\Gamma_i(t)$ нульмоментной функции стоимости удовлетворяет уравнению (6.5) с терминальным условием $\Gamma_i(t_F) = F$. В отличие от уравнения Риккати (5.6) и рекуррентного уравнения (5.8) дифференциальное уравнение (6.5) и рекуррентное уравнение (6.6) линейные, что упрощает процедуру решения.

По функции стоимости находим среднее значение (2.8) функционала качества

$$\overline{I}(t_0, p_0, \overline{w}_{\mathcal{T}}) = \int\limits_{X_0} p_0(x_0)\beta_0(t_0, x_0, \overline{x}_0)dx_0. \tag{6.7}$$

Упростим (6.7) для условного оптимального управления $\overline{w}_{\mathcal{T}}$, $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_N\}$, траекторией, исходящей из математического ожидания $\overline{x}_0$ начального состояния системы. Подставляя (6.4) в (6.7) и учитывая, что среднее значение $\overline{\Delta x} = 0$, получаем

$$\begin{gathered}\overline{I}(t_0, p_0, \overline{w}_{\mathcal{T}}) = \frac{1}{2}\overline{x}_0^{\mathrm{T}}\Phi_0(t_0|t_1, \ldots, t_N)\overline{x}_0 + \\ + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Gamma_0(t_0|t_1, \ldots, t_N)K_0\right] + \sum_{i=1}^{N}\lambda_i(t_i).\end{gathered} \tag{6.8}$$

Здесь K_0 — матрица ковариации случайного вектора x_0:

$$K_0 = \overline{(x_0 - \overline{x}_0)(x_0 - \overline{x}_0)^{\mathrm{T}}}.$$

Для завершения синтеза оптимального в среднем управления остается определить количество переключений N и сами моменты переключений $t_1, \ldots, t_N$, решая задачу конечномерной минимизации

$$\min \overline{I} = \min_{N \in \mathbb{Z}_+} \min_{t_0 \leqslant t_1 \ldots \leqslant t_N \leqslant t_F} \left\{ \frac{1}{2} \overline{x}_0^{\mathrm{T}} \Phi_0(t_0 | t_1, \ldots, t_N) \overline{x}_0 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(t_i) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left[\Gamma_0(t_0 | t_1, \ldots, t_N) K_0 \right] \right\}. \tag{6.9}$$

Заметим, что из-за положительности затрат (2.5) минимум (6.9) достигается при конечном числе переключений N.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3 (оптимальное в среднем управление). *Оптимальное в среднем управление линейной ГСПР* (2.1)–(2.3) *с квадратичным функционалом качества* (2.4) *имеет вид*

$$\overline{u}_i(t) = -D_i^{-1}(t) B_i^{\mathrm{T}}(t) \Phi_i\left(t \,|\, \overline{t}_{i+1}, \ldots, \overline{t}_{\overline{N}}\right) \overline{x}_i(t),$$
$$t \in \left[\overline{t}_i, \overline{t}_{i+1}\right], \quad i = 0, 1, \ldots, \overline{N},$$

$$\overline{v}_i(\overline{t}_i) = -\left[\widehat{D}_i + \widehat{B}_i^{\mathrm{T}} \Phi_i\left(\overline{t}_i \,|\, \overline{t}_{i+1}, \ldots, \overline{t}_{\overline{N}}\right) \widehat{B}_i\right]^{-1} \times$$
$$\times \widehat{B}_i^{\mathrm{T}} \Phi_i\left(t_i^* \,|\, \overline{t}_{i+1}, \ldots, \overline{t}_{\overline{N}}\right) \widehat{A}_i \overline{x}_{i-1}\left(\overline{t}_i\right).$$

Наименьшее среднее значение функционала, оптимальное количество переключений $\overline{N}$ *и оптимальные моменты переключений* $\overline{t}_1, \ldots, \overline{t}_{\overline{N}}$ *являются решением задачи минимизации* (6.9).

Как видим, при синтезе оптимального в среднем управления задача наблюдения — нахождение математического ожидания начального состояния системы — вполне тривиальная и решается отдельно от задачи управления. Задача синтеза условного оптимального управления также решается независимо от задачи наблюдения. Однако завершающая операция синтеза оптимального в среднем управления — поиск оптимальных моментов переключений (6.9) — выполняется при известных математическом ожидании и ковариационной матрице вектора начального состояния. Иначе говоря, последнюю операцию синтеза оптимального в среднем управления нельзя отделить от задачи наблюдения.

Отметим случай, когда выполняется классический принцип разделения.

Следствие. Если матрица $\Gamma_0(t_0|t_1, \ldots, t_N)$, *удовлетворяющая уравнениям* (6.5), (6.6), *не зависит от моментов переключений* $t_1, \ldots, t_N$, *то оптимальное в среднем управление линейной ГСПР с квадратичным функционалом качества совпадает с оптимальным управлением одной траекторией, исходящей из математического ожидания начального состояния системы.*

Доказательство. В самом деле, подставляя в (6.9) $\Gamma_0(t_0|t_1,\ldots,t_N) = \Gamma_0(t_0)$, получаем задачу минимизации

$$\min \overline{I} = \min_{N\in\mathbb{Z}_+} \min_{t_0\leqslant t_1\ldots\leqslant t_N} \left\{ \frac{1}{2}\overline{x}_0^{\mathrm{T}} \Phi_0(t_0|t_1,\ldots,t_N)\overline{x}_0 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(t_i) \right\} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,[\Gamma(t_0)K_0]\,. \tag{6.10}$$

Последнее слагаемое не зависит от переключений. Поэтому решение задачи минимизации (6.10) совпадает с решением задачи (5.11) при $x_0 = \overline{x}_0$. Значит, оптимальное в среднем управление и оптимальное управление для траектории, исходящей из математического ожидания начального состояния, совпадают, так как имеют одинаковое количество переключений и одинаковые моменты переключений, что и требовалось доказать.

7. Примеры

Рассмотрим две ЛКЗ управления в среднем гибридными системами. В первом примере для ГСПР выполняется классический принцип разделения. Во втором примере для гибридной системы второго порядка классический принцип не выполняется, а условный — оказывается справедливым.

Пример 1 (движение носителя с отделением управляемых объектов). Гибридная система представляет собой группу объектов, количество которых увеличивается с каждым переключением. Движение начинает один составной объект (носитель) массы M. При каждом переключении от него отделяется один простой объект массы m, который продолжает самостоятельное управляемое движение. Количество управляемых объектов, а следовательно, и размерность гибридной системы, увеличивается с каждым переключением. Сформулируем постановку задачи.

Пусть на заданном промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ динамическая система совершает N переключений в моменты времени $t_1,\ldots,t_N$: $t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_N \leqslant t_F$.

Между неравными последовательными моментами переключений $t_i < t_{i+1}$ движение носителя и отделившихся простых объектов описываются дифференциальными уравнениями:

$$\begin{gathered} \dot{x} = y(t), \quad (M - im)\dot{y} = u(t), \\ \dot{x}_j = y_j(t), \quad m\dot{y}_j = u_j(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}]\,. \end{gathered} \tag{7.1}$$

Здесь x, y, u — координаты состояния носителя и его управление, $(M - im)$ — масса носителя после отделения от него i объектов; x_j, y_j, u_j — координаты и управление j-го объекта, $j = 1,\ldots,i$; m — масса каждого простого объекта. Ограничения на координаты и управления отсутствуют. Масса носителя не меньше суммарной массы переносимых объектов $M \geqslant Nm$.

В момент переключения t_i от носителя отделяется i-й объект под действием управления v_i, а состояния носителя и ранее отделившихся объектов не меняются:

$$x(t_i) = x(t_i - 0), \quad y(t_i) = y(t_i - 0);$$
$$(7.2) \qquad x_i(t_i) = x(t_i), \quad y_i(t_i) = y(t_i) + v_i;$$
$$x_j(t_i) = x_j(t_i - 0), \quad y_j(t_i) = y_j(t_i - 0), \quad j = 1, \ldots, i-1.$$

Качество управления оценивается квадратичным функционалом

$$I\left(t_0, x_0, y_0, w\right) =$$
$$= \sum_{i=0}^{N} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \frac{(M - im)}{2M} u^2\left(t\right) + \frac{m}{2M} \left[u_1^2\left(t\right) + \ldots + u_i^2\left(t\right)\right] \right\} dt +$$
$$(7.3) \qquad + \sum_{i=1}^{N} \left\{ \lambda_i\left(t_i\right) + \frac{m}{2M} v_i^2 + \frac{m}{2M} \left[x_i^2\left(t_F\right) + y_i^2\left(t_F\right)\right] \right\} +$$
$$+ \frac{M - Nm}{2M} \left[x^2\left(t_F\right) + y^2\left(t_F\right)\right],$$

где (x_0, y_0) — начальное состояние носителя, $\lambda_i(t_i) = \alpha_i(t_F - t)^2 + \beta_i$ — положительные затраты на i-е переключение, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$. Весовые коэффициенты в (7.3) перед квадратами переменных пропорциональны массам простых объектов и массе носителя после отделения простых объектов соответственно.

Начальное состояние (x_0, y_0) носителя является случайным вектором, имеющим равномерное распределение на квадрате $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$. Качество управления системой со случайным начальным состоянием оценивается средним значением функционала (7.3):

$$(7.4) \qquad \overline{I}(t_0, w) = \frac{1}{4} \int\limits_0^2 \int\limits_0^2 I(t_0, x_0, w) dx_0 dy_0.$$

Требуется найти:

1) наименьшее значение функционала (7.3) и оптимальное управление для процесса, удовлетворяющего начальному условию $x_0 = 1$, $y_0 = 1$;

2) наименьшее среднее значение (7.4) функционала (7.3) и оптимальное в среднем управление, на котором это значение достигается.

Будем искать решение задачи при следующих значениях параметров: $t_0 = 0$, $t_F = 10$, $M = 3$, $m = 1$, $\alpha_1 = 0{,}012$, $\alpha_2 = 0{,}0145$, $\beta_1 = \beta_2 = 0{,}01$. Поскольку $M = 3m$, то количество отделяемых объектов не более двух ($N \leqslant 2$). По сравнению с общей постановкой задачи вектор состояния системы до первого переключения имеет вид $(x, y)^{\mathrm{T}}$, между переключениями — $(x, y, x_1, y_1)^{\mathrm{T}}$, после второго переключения — $(x, y, x_1, y_1, x_2, y_2)^{\mathrm{T}}$. Матрицы в уравнениях движения (2.2), (2.3) для рассматриваемой задачи имеют соответствующие размеры. Например, в момент первого переключения $\widehat{A}_1 = \mathrm{diag}(E_2, E_2)$, где

E_2 — единичная матрица второго порядка, $\widehat{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$; после второго переключения

$$A_2 = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

1. Перед синтезом оптимального управления ГСПР рассмотрим две простые вспомогательные задачи. Первая задача — это ЛКЗ Больца

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad M\dot{y}(t) = u, \tag{7.5}$$

$$I = \int_t^{t_F} \frac{1}{2}u^2(t)dt + \frac{1}{2}F_{11}x^2(t_F) + F_{12}x(t_F)y(t_F) + \frac{1}{2}F_{22}y^2(t_F) \to \min.$$

В этой задаче функция цены квадратичная $\varphi(t, x, y) = \frac{1}{2}\varphi_{11}x^2 + \varphi_{12}xy + \frac{1}{2}\varphi_{22}y^2$, причем матрица $\mathbf{\Phi} = (\varphi_{ij})$ квадратичной формы удовлетворяет уравнению Риккати, аналогичному (5.6). Записывая для элементов матрицы $\mathbf{\Phi}$ дифференциальные уравнения, получаем систему

$$\dot{\varphi}_{11}(t) - \frac{\varphi_{12}^2}{M^2} = 0, \quad \dot{\varphi}_{12}(t) + \varphi_{11} - \frac{\varphi_{12}\varphi_{22}}{M^2} = 0, \quad \dot{\varphi}_{22}(t) + 2\varphi_{12} - \frac{\varphi_{22}^2}{M^2} = 0.$$

Решение этой системы с терминальными условиями $\varphi_{11}(t_F) = F_{11}$, $\varphi_{12}(t_F) = F_{12}$, $\varphi_{22}(t_F) = F_{22}$ имеет вид

$$\varphi_{11}(t) = M^2\frac{M^2F_{11} + |F|\tau}{\Delta}, \qquad \varphi_{12}(t) = M^2\frac{M^2(F_{11}\tau + F_{12}) + |F|\frac{\tau^2}{2}}{\Delta},$$
$$\varphi_{22}(t) = M^2\frac{M^2(F_{11}\tau^2 + 2F_{12}\tau + F_{22}) + |F|\frac{\tau^3}{3}}{\Delta},$$

где $\Delta = M^4 + M^2\left(F_{11}\frac{\tau^3}{3} + F_{12}\tau^2 + F_{22}\tau) + \frac{\tau^4}{12}|F|\right)$, $\tau = t_F - t$, $|F| = F_{11}F_{22} - F_{12}^2$ — определитель симметрической матрицы $F = (F_{ij})$. Оптимальное позиционное управление линейное по состоянию системы

$$\mathbf{u}(t, x, y) = -\frac{\varphi_{12}(t)x + \varphi_{22}(t)y}{M}. \tag{7.6}$$

Обозначим через $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(t|t_F, M, F)$ матрицу квадратичной функции цены φ.

Вторая вспомогательная задача — это дискретная одношаговая ЛКЗ Больца

$$x_1 = x_0, \quad y_1 = y_0 + v, \quad I = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}F_{11}x_1^2 + F_{12}x_1y_1 + \frac{1}{2}F_{22}y_1^2 \to \min.$$

Функция цены в этой задаче квадратичная $\widehat{\varphi}(x, y) = \frac{1}{2}\widehat{\varphi}_{11}x^2 + \widehat{\varphi}_{12}xy + \frac{1}{2}\widehat{\varphi}_{22}y^2$, ее коэффициенты находятся по формулам

$$\widehat{\varphi}_{11} = F_{11} - \frac{F_{12}^2}{1 + F_{22}}, \quad \widehat{\varphi}_{12} = \frac{F_{12}}{1 + F_{22}}, \quad \widehat{\varphi}_{22} = \frac{F_{22}}{1 + F_{22}}.$$

Оптимальное позиционное управление линейно по состоянию

$$\mathbf{v}(x,y) = -\frac{F_{12}x + F_{22}y}{1+F_{22}}. \tag{7.7}$$

Обозначим через $\widehat{\mathbf{\Phi}} = \widehat{\mathbf{\Phi}}(F)$ матрицу квадратичной функции цены $\widehat{\varphi}$.

При помощи матриц $\mathbf{\Phi}(t|t_F, M, F)$ и $\widehat{\mathbf{\Phi}}(F)$ можно выразить матрицы квадратичных форм моментных функций цены (5.5). Записывая эти выражения, матрицы, соответствующие носителю, будем указывать без индекса, а соответствующие простым объектам — с индексом, равным номеру объекта. Например, матрица нульмоментной функции цены после второго переключения имеет вид $\mathrm{diag}(\Phi(t), \Phi_1(t), \Phi_2(t))$; матрица одномоментной функции цены между переключениями — $\mathrm{diag}(\Phi(t|t_2), \Phi_1(t))$.

Для нульмоментной функции цены $\varphi_0(t_0, x_0, y_0)$ матрица $\Phi_0(t_0)$ находится по формуле $\Phi_0(t_0) = \mathbf{\Phi}(t_0|t_F, M, E_2)$, так как задача без переключений совпадает с задачей Больца (7.5) при $F = E_2$.

Матрица $\Phi_0(t_0|t_1)$ одномоментной функции цены $\varphi_0(t_0, x_0, y_0|t_1)$ находится следующим образом. Сначала определяются матрицы нульмоментных функций цены для носителя $\Phi(t_1) = \mathbf{\Phi}(t_1|t_F, M-m, E_2)$ и для простого объекта $\Phi_1(t_1) = \mathbf{\Phi}(t_1|t_F, m, E_2)$ в момент t_1 после переключения. Затем находим матрицу $\Phi_0(t_1|t_1) = \frac{M-m}{M}\Phi(t_1) + \frac{m}{M}\widehat{\mathbf{\Phi}}(\Phi_1(t_1))$ одномоментной функции цены в момент t_1 перед переключением. И по формуле $\Phi_0(t_0|t_1) = \mathbf{\Phi}(t_0|t_1, M, \Phi_0(t_1|t_1))$ получаем искомую матрицу.

Для двухмоментной функции цены $\varphi_0(t_0, x_0, y_0|t_1, t_2)$ процедура нахождения матрицы $\Phi_0(t_0|t_1, t_2)$ аналогичная. Сначала определяются матрицы нульмоментных функций цены для носителя $\Phi(t_2) = \mathbf{\Phi}(t_2|t_F, M-2m, E_2)$, первого $\Phi_1(t_1) = \mathbf{\Phi}(t_1|t_F, m, E_2)$ и второго $\Phi_2(t_2) = \mathbf{\Phi}(t_2|t_F, m, E_2)$ простых объектов. Затем находим матрицу одномоментной функции цены для носителя в момент t_2 перед переключением $\Phi(t_2|t_2) = \frac{M-2m}{M}\Phi(t_2) + \frac{m}{M}\widehat{\mathbf{\Phi}}(\Phi_2(t_2))$. Потом находим матрицу $\Phi(t_1|t_2) = \mathbf{\Phi}(t_1|t_2, M-m, \Phi(t_2|t_2))$ одномоментной функции цены для носителя в момент t_1 после первого переключения. Далее определяем матрицу двухмоментной функции цены в момент t_1 перед первым переключением $\Phi_0(t_1|t_1, t_2) = \frac{M-m}{M}\Phi(t_1|t_1, t_2) + \frac{m}{M}\widehat{\mathbf{\Phi}}(\Phi_1(t_1))$. И по формуле $\Phi_0(t_0|t_1, t_2) = \mathbf{\Phi}(t_0|t_1, M, \Phi(t_1|t_1, t_2))$ получаем искомую матрицу.

В результате описанной процедуры находятся моментные функции цены. В задаче без переключений наименьшее значение функционала качества (7.3) для заданного начального состояния $(x_0, y_0) = (1,1)^{\mathrm{T}}$ вычисляется по нульмоментной функции цены $\min I_0 = \varphi_0(0,1,1) = 1{,}7321$. Для задач с переключениями нужно выполнить оптимизацию моментов переключений, решая соответственно задачи

$$\min I_1 = \min_{0 \leqslant t_1 \leqslant t_F} \varphi_0(0,1,1|t_1), \quad \min I_2 = \min_{0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_F} \varphi_0(0,1,1|t_1, t_2).$$

В первой задаче получаем $\min I_1 = 1{,}7231$ при $t_1 = 2{,}163$; во второй — $\min I_2 = 1{,}7031$ при $t_1 = 2{,}32$, $t_2 = 9{,}72$.

При численном решении задачи моментные функции находились по точным формулам, а оптимизация моментов переключений выполнялась приближенно перебором на сетке с шагом 0,001 для одного переключения и с

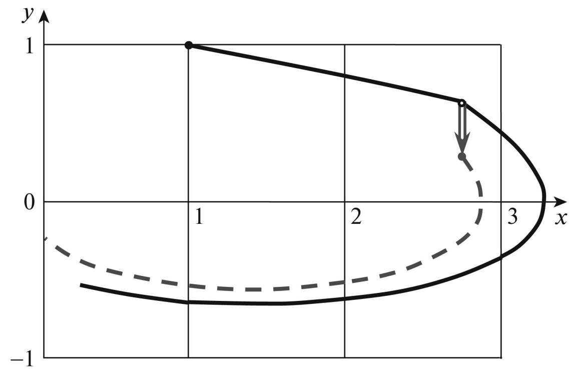

Рис. 1.

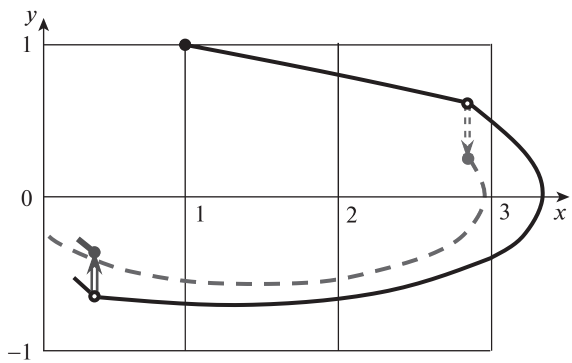

Рис. 2.

шагом 0,01 с двумя переключениями. Условные оптимальные траектории с одним и двумя переключениями представлены на рис. 1 и 2 соответственно. Сплошной линией изображается движение носителя и второго объекта, штриховой — первого объекта, двойными стрелками — отделение объекта от носителя. Условные оптимальные управления определяются формулами (7.6), (7.7). Таким образом, оптимальным является процесс с двумя переключениями.

2. Для решения задачи оптимального в среднем управления ГСПР нужно найти моментные функции стоимости (6.4). Разумеется, речь идет о матрицах Γ, так как матрицы Φ моментных функций цены уже найдены в п. 1. В рассматриваемом функционале (7.3) матрицы C_i и $\widehat{C}_i$ нулевые, а собственные движения (без управления) носителя и простых объектов описываются одинаковыми уравнениями. Поэтому матрицы Γ для носителя и простых объектов будут отличаться только коэффициентами, пропорциональными массам.

Обозначим через $\mathbf{\Gamma}(t|t_F, F)$ симметрическую матрицу второго порядка с элементами

$$\gamma_{11}(t) = F_{11}, \quad \gamma_{12}(t) = F_{12} + F_{11}\tau, \quad \gamma_{22}(t) = F_{22} + 2F_{12}\tau + F_{11}\tau^2,$$

где $\tau = t_F - t$. Эта матрица удовлетворяет уравнению (6.5) для нульмоментной функции стоимости с терминальным условием $\mathbf{\Gamma}(t_F|t_F, F) = F$.

С помощью этой матрицы выразим все матрицы Γ для моментных функций стоимости. Как и ранее, матрицы, соответствующие носителю, будем писать без индекса, а соответствующие простым объектам — с индексами, равными номеру объекта.

Для нульмоментной функции стоимости $\beta_0(t_0, x_0, y_0, \overline{x}_0, \overline{y}_0)$ матрица $\Gamma_0(t_0)$ находится по формуле $\Gamma_0(t_0) = \mathbf{\Gamma}(t_0|t_F, E_2)$.

Матрица $\Gamma_0(t_0|t_1)$ одномоментной функции стоимости $\beta_0(t_0, x_0, y_0, \overline{x}_0, \overline{y}_0|t_1)$ находится следующим образом. Сначала определяются матрицы нульмоментных функций стоимости для носителя $\Gamma(t_1) = \frac{(M-m)}{M}\mathbf{\Gamma}(t_1|t_F, E_2)$ и для простого объекта $\Gamma_1(t_1) = \frac{m}{M}\mathbf{\Gamma}(t_1|t_F, E_2)$ в момент t_1 после переключения. В момент переключения эти матрицы складываются: $\Gamma_0(t_1|t_1) = \Gamma(t_1) + \Gamma_1(t_1) = \mathbf{\Gamma}(t_1|t_F, E_2)$ — матрица одномоментной функции стоимости в момент t_1 перед переключением. Последнее равенство записано, так как сумма весовых коэффициентов равна единице. Наконец, по формуле $\Gamma_0(t_0|t_1) = \mathbf{\Gamma}(t_0|t_1, \Gamma_0(t_1|t_1))$ получаем искомую матрицу. Отметим, что из-за непрерывности продолжения решения дифференциальных уравнений имеем равенство $\mathbf{\Gamma}(t_0|t_1, \Gamma_0(t_1|t_1)) = \mathbf{\Gamma}(t_0|t_1, \mathbf{\Gamma}(t_1|t_F, E_2)) = \mathbf{\Gamma}(t_0|t_F, E_2)$. Поэтому матрица Γ_0 одномоментной функции стоимости не зависит от момента переключения t_1: $\Gamma_0(t_0|t_1) = \Gamma_0(t_0)$.

Аналогично доказывается, что матрица $\Gamma_0(t_0|t_1, t_2)$ двухмоментной функции стоимости $\beta_0(t_0, x_0, y_0, \overline{x}_0, \overline{y}_0|t_1, t_2)$ также не зависит от моментов переключений t_1,t_2.

Таким образом, согласно следствию, в рассматриваемой ЛКЗ принцип разделения выполняется. Поэтому оптимальное управление (с двумя переключениями), наденное в п. 1 для математического ожидания $(\overline{x}_0, \overline{y}_0) = (1, 1)$ начального состояния, является оптимальным в среднем управлением ГСПР. Наименьшее среднее значение функционала вычисляется по формуле (6.10):

$$\min \overline{I}_2 = \frac{1}{2}(\overline{x}_0, \overline{y}_0)^{\mathrm{T}}\Phi_0(t_0|t_1, t_2)(\overline{x}_0, \overline{y}_0) + \lambda_1(t_1) + \lambda_2(t_2) + \\ + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,[\Gamma(t_0)K_0] = 18{,}7031,$$

где $K_0 = \frac{1}{3}E_2$, а моменты переключений — такие же как в п. 1: $t_1 = 2{,}32$, $t_2 = 9{,}72$.

Пример 2 (движение с переключениями канала управления). Пусть на заданном промежутке времени $[0, 3]$ гибридная система постоянной размерности совершает N переключений (скачков) в моменты времени t_i, $i = 1, \ldots, N$, которые образуют неубывающую конечную последовательность: $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_N \leqslant t_{N+1} \triangleq 3$. Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно дифференциальным уравнениям:

$$\dot{x}_1(t) = u(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_2(t), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{7.8}$$

а в моменты переключений — дискретно в соответствии с рекуррентными уравнениями

$$x_{1i} = x_{2i-} + v_i, \quad x_{2i} = x_{1-}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{7.9}$$

Здесь, как и ранее, $\mathcal{N} \triangleq \{i=0,1,\ldots,N \,|\, t_i<t_{i+1}\}$ – множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков $T_i=[t_i,t_{i+1}]$ непрерывного движения системы; $x(t)$ – состояние системы в момент времени $t\in T_i$, $x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in X = \mathbb{R}^2$; $u(t)$ — значение управления непрерывным движением системы в момент времени $t\in T_i$, $u\in\mathbb{R}$. В уравнении (7.9): $x_i=(x_{1i},x_{2i})=x(t_i)$ — состояние системы сразу после i-го переключения, $x_{i-}=(x_{1i-},x_{2i-})$ — состояние системы непосредственно перед i-м переключением; v_i — управление переключением системы в момент $t_i\in\mathcal{T}$, $v_i\in\mathbb{R}$, $\mathcal{T}=\{t_1,\ldots,t_N\}$.

Качество процесса управления оценивается квадратичным функционалом

$$I(x_0,w)=\int\limits_0^3 \frac{1}{2}\left[u^2(t)+x_1^2(t)+x_2^2(t)\right]dt+\sum_{i=1}^{N}\left(\lambda+\frac{\eta}{2}v_i^2\right), \tag{7.10}$$

где x_0 — начальное состояние системы, $w=(u(\cdot),v(\cdot))$ — допустимое управление. Коэффициенты λ и η определяют затраты на каждое переключение. Количество N и моменты переключений $t_1,\ldots,t_N$ заранее не заданы и подлежат оптимизации.

Начальное состояние (x_0,y_0) является случайным вектором, имеющим равномерное распределение на параллелограмме с вершинами $A(7{,}5;5)$, $B(8{,}5;5)$, $C(7{,}5;6)$, $D(6{,}5;6)$. Качество управления системой со случайным начальным состоянием оценивается средним значением функционала (7.10):

$$\overline{I}(t_0,w)=\int\limits_{ABCD} I(x_0,w)dx_0. \tag{7.11}$$

Требуется найти:

1) оптимальное управление w для траектории, исходящей из центра $\overline{x}_0 = (7{,}5;5{,}5)$ параллелограмма $ABCD$, и соответствующее этому управлению значение функционала (7.10);

2) оптимальное в среднем управление $\overline{w}$ и соответствующее этому управлению среднее значение (7.11) функционала (7.10).

В системе (7.8), (7.9) имеется один канал управления: первая координата управляема при непрерывном движении, а вторая – нет (она экспоненциально отклоняется от нуля). В момент переключения фактически происходит взаимная замена координат состояния — неуправляемая координата становится управляемой и наоборот, причем значение первой управляемой координаты корректируется при помощи управления. Таким образом, совершая переключения (т.е. меняя канал управления), можно попеременно управлять координатами состояния системы.

По сравнению с общей постановкой задачи имеем гибридную систему постоянной размерности (второго порядка) со скалярными управлениями: $X=\mathbb{R}^2$, $U=V=\mathbb{R}$, $t_0=0$, $t_F=3$. Нижнюю индексацию количества сделанных переключений у вектора состояния $x_i(t)$, функций цены φ_i (стоимости β_i) и моментных функций цены (стоимости), а также соответствующих матриц опускаем.

1. Перед синтезом оптимального управления ГСПР рассмотрим вспомогательную ЛКЗ Больца

$$\dot{x}_1(t) = u(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_2(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_F, \quad x(t_0) = (x_{10}, x_{20})^{\mathrm{T}},$$

$$I(x_0, w) = \int\limits_{t_0}^{t_F} \frac{1}{2}\left[u^2(t) + x_1^2(t) + x_2^2(t)\right] dt + \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}}(t_F) F x(t_F) \to \min,$$

где F — симметрическая неотрицательно определенная матрица второго порядка. Функция цены в этой задаче квадратичная $\varphi(t,x) = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} \mathbf{\Phi}(t|t_F, F)x$. Элементы симметрической матрицы $\mathbf{\Phi}$ имеют вид [17]:

$$\Phi_{11} = \frac{1}{2\Delta^2}\left[(1 + F_{11}^2)\operatorname{sh} 2\tau + 2F_{12}\operatorname{ch} 2\tau\right], \quad \Phi_{12} = \frac{F_{12}}{\Delta} e^{\tau},$$

$$\Phi_{22} = -\frac{F_{12}^2 e^{2\tau}}{\Delta}\operatorname{sh}\tau + \frac{1}{2}\left(e^{2\tau} - 1\right) + F_{22} e^{2\tau},$$

где $\tau = t_F - t$, $\Delta = \operatorname{ch}\tau + \Phi_{11}\operatorname{sh}\tau$. Оптимальное позиционное управление линейно по состоянию $\mathbf{u}(t,x) = -\Phi_{11}(t)x_1 - \Phi_{12}(t)x_2$.

Перейдем к нахождению моментных функций цены, которые имеют вид:

$$\varphi(t_0, x|t_1, \ldots, t_k) = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} \Phi(t|t_1, \ldots, t_k)x + k\lambda.$$

Непрерывное изменение матриц Φ моментных функций цены выражается при помощи матрицы $\mathbf{\Phi}$, а скачки при переключениях определяются рекуррентным уравнением

$$\Phi(t_1|t_1, \ldots, t_N) = \frac{1}{\eta + \Phi_{11}} \begin{pmatrix} \eta\Phi_{22} + \Phi_{11}\Phi_{22} - \Phi_{12}^2 & \eta\Phi_{12} \\ \eta\Phi_{12} & \eta\Phi_{11} \end{pmatrix}. \tag{7.12}$$

В правой части уравнения (7.12) стоят элементы матрицы $\Phi(t_1|t_2, \ldots, t_N)$, предшествующей $(N-1)$-моментной функции цены. Условное оптимальное позиционное управление переключением системы $\mathbf{v}(t_1, x|t_2, \ldots, t_N) = -\Phi_{12}x_1 - \Phi_{11}x_2$.

Для нульмоментной функции цены $\varphi(t_0, x_0)$ матрица $\Phi(t_0)$ получается по формуле $\Phi(t_0) = \mathbf{\Phi}(t_0|t_F, O)$, где O — нулевая квадратная матрица второго порядка.

Матрица $\Phi(t_0|t_1)$ одномоментной функции цены $\varphi(t_0, x_0, y_0|t_1)$ находится следующим образом. Сначала определяется матрица нульмоментной функции цены $\Phi(t_1) = \mathbf{\Phi}(t_1|t_F, O)$ в момент t_1 после переключения. Затем матрица $\Phi(t_1|t_1)$ одномоментной функции цены в момент t_1 перед переключением, которая определяется рекуррентным уравнением (7.12) с элементами матрицы $\Phi(t_1)$ в правой части. Наконец, по формуле $\Phi(t_0|t_1) = \mathbf{\Phi}(t_0|t_1, \Phi_0(t_1|t_1))$ получаем искомую матрицу. Продолжая аналогичным образом, получаем следующие моментные функции цены [17].

На каждом шаге рекуррентной процедуры определяем наименьшее значение функционала (7.10) при фиксированном числе переключений

$$I_k = \min_{t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k \leqslant t_F} \left\{ \frac{1}{2} x_0^{\mathrm{T}} \Phi(t_0|t_1, \ldots, t_k) x_0 + k\lambda \right\}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{7.13}$$

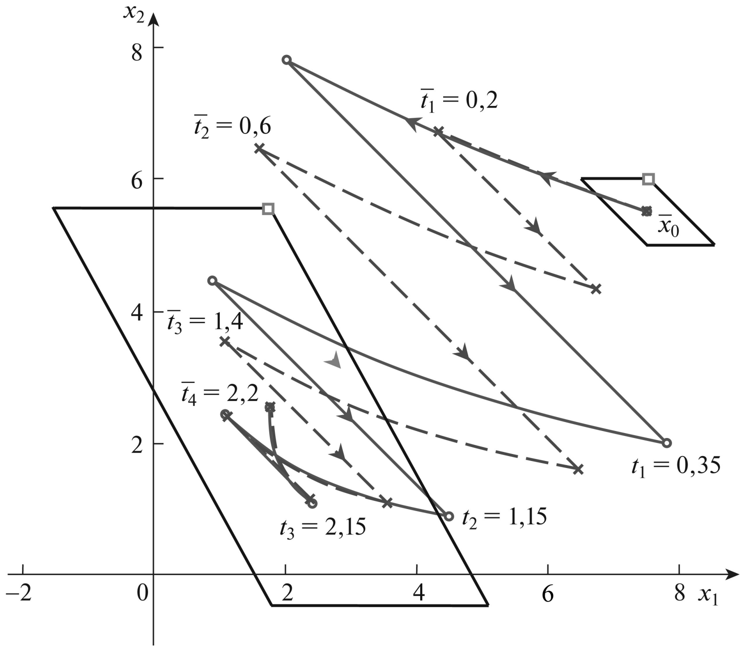

Рис. 3.

Условием окончания служит неравенство $I_k \leqslant I_{k+1}$, т.е. шаг k, после которого наименьшие значения (7.13) перестают убывать. Проверку нужно начинать с неравенства $I_0 \leqslant I_1$, где $I_0 = \varphi(t_0, x_0)$ — наименьшее значение функционала в задаче без переключений.

При численном решении задачи моментные функции находились по точным формулам, а оптимизация моментов переключений выполнялась приближенно перебором на сетке с шагом 0,01. Для заданного начального состояния были получены следующие значения функционалов:

$$I_0 = 2547{,}0217, \quad I_1 = 111{,}97371, \quad I_2 = 111{,}74633,$$
$$I_3 = 111{,}70389, \quad I_4 = 111{,}76546.$$

Так как $I_3 < I_4$, то оптимальной оказывается траектория с тремя переключениями в моменты времени: $t_1 = 0{,}35$, $t_2 = 1{,}15$, $t_3 = 2{,}15$. На рис. 3 оптимальная фазовая траектория изображена сплошной линией, начинающейся в точке $\overline{x}_0$, состояния непосредственно до и после переключений отмечены маленькими окружностями, направление движения указано стрелками.

2. Для решения задачи оптимального в среднем управления нужно найти моментные функции стоимости (6.4), которые для рассматриваемой задачи имеют вид

$$\beta(t, x, \overline{x}|t_1, \ldots, t_N) = \frac{1}{2}\overline{x}^{\mathrm{T}}\Phi\overline{x}_i + \frac{1}{2}\overline{x}^{\mathrm{T}}\Phi\Delta x_i + \\ + \frac{1}{2}\Delta x^{\mathrm{T}}\Phi\overline{x} + \frac{1}{2}\Delta x^{\mathrm{T}}\Gamma\Delta x + N\lambda. \tag{7.14}$$

Матрицы Φ моментных функций цены найдены в п. 1 решения. Поэтому для формирования (7.14) остается получить матрицы Γ. В формуле (7.14) учитывается, что при $\Delta x = 0$ выполняется равенство (6.1).

Обозначим через $\mathbf{\Gamma}(t|t_F, F)$ симметрическую матрицу второго порядка с элементами

$$\mathbf{\Gamma}_{11} = F_{11} + \tau, \quad \mathbf{\Gamma}_{12} = F_{12}e^{\tau}, \quad \mathbf{\Gamma}_{22} = F_{22} + e^{2\tau} + \frac{1}{2}\left(e^{2\tau} - 1\right).$$

Эта матрица удовлетворяет уравнению (6.5), соответствующему решаемой задаче, с терминальным условием $\mathbf{\Gamma}(t_F|t_F, F) = F$.

Запишем также рекуррентное уравнение (6.6) для рассматриваемой ЛКЗ

$$\Gamma(t_1|t_1, \ldots, t_N) = \begin{pmatrix} \Gamma_{22} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{11} \end{pmatrix}. \tag{7.15}$$

В правой части уравнения (7.15) стоят элементы матрицы $\Gamma(t_1|t_2, \ldots, t_N)$, предшествуюшей $(N-1)$-моментной функции стоимости $\beta(t_1, x, \overline{x}|t_2, \ldots, t_N)$.

Для нульмоментной функции стоимости $\beta(t_0, x_0, \overline{x}_0)$ матрица $\Gamma(t_0)$ получается по формуле $\Gamma(t_0) = \mathbf{\Gamma}(t_0|t_F, O)$, где O — нулевая квадратная матрица второго порядка.

Матрица $\Gamma(t_0|t_1)$ одномоментной функции стоимости $\beta(t_0, x_0, \overline{x}_0|t_1)$ находится следующим образом. Сначала определяется матрица нульмоментной функции стоимости $\Gamma(t_1) = \mathbf{\Gamma}(t_1|t_F, O)$ в момент t_1 после переключения. Затем получаем матрицу $\Gamma(t_1|t_1)$ одномоментной функции стоимости в момент t_1 перед переключением, которая определяется рекуррентным уравнением (7.15) с элементами матрицы $\Gamma(t_1)$ в правой части. Наконец, по формуле $\Gamma(t_0|t_1) = \mathbf{\Gamma}(t_0|t_1, \Gamma(t_1|t_1))$ получаем искомую матрицу. Продолжая аналогичным образом, получаем моментные функции стоимости.

На каждом шаге рекуррентной процедуры определяем наименьшее среднее значение функционала (7.10) при фиксированном числе переключений. Для этого решаем задачу минимизации, используя формулу (6.8):

$$\overline{I}_k = \min_{t_0 \leqslant t_1 \ldots \leqslant t_k} \left\{ \frac{1}{2}\overline{x}_0^{\mathrm{T}} \Phi(t_0|t_1, \ldots, t_k)\overline{x}_0 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Gamma_0(t_0|t_1, \ldots, t_N)K_0\right] + k\lambda \right\}.$$

Для заданного распределения начального состояния были получены следующие значения функционалов:

$$\overline{I}_0 = 3076{,}988, \quad \overline{I}_1 = 119{,}663, \quad \overline{I}_2 = 115{,}185,$$
$$\overline{I}_3 = 115{,}066, \quad \overline{I}_4 = 115{,}016, \quad \overline{I}_5 = 115{,}058.$$

Так как $\overline{I}_4 < \overline{I}_5$, то оптимальным в среднем оказывается управление с четырьмя переключениями в моменты времени $\overline{t}_1 = 0{,}2$, $\overline{t}_2 = 0{,}6$, $\overline{t}_3 = 1{,}4$, $\overline{t}_4 = 2{,}2$. Для этого управления на рис. 3 изображены множества возможных состояний системы в начальный и конечный моменты времени, представляющие собой параллелограммы, а также траектория, исходящая из математического ожидания $\overline{x}_0 = (7{,}5; 5{,}5)^{\mathrm{T}}$. Отметим, что эта траектория (штриховая линия) отличается от оптимальной траектории для того же начального состояния (сплошная линия). У этих процессов даже разное количество переключений. Значит, классический принцип разделения не выполняется. Условный принцип разделения выполняется, так как оптимальное в среднем управление является условным оптимальным для траектории, исходящей из центра тяжести.

8. Заключение

Принцип разделения позволяет свести задачу оптимального в среднем управления детерминированной системой со случайным начальным состоянием к совокупности двух задач — оптимального управления одной траекторией и оптимального наблюдения. Решением задачи наблюдения служит оценка начального состояния, например его математическое ожидание. Эта оценка используется в оптимальном позиционном управлении, полученном при решении задачи управления одной траекторией. Обоснованием такого подхода для ЛКЗ управления ГСПР служит доказанный в статье так называемый условный принцип разделения. По сравнению с обычным принципом разделения, справедливым для ЛКЗ оптимального в среднем управления непрерывными, дискретными и непрерывно-дискретными системами, условный принцип разделения сложнее с вычислительной точки зрения. Для его применения нужно вычислить и запомнить моментные функции цены, которые зависят от нарастающего количества моментов переключений. Это существенно повышает требования к вычислительным ресурсам, необходимым для численного решения задачи. Если количество допустимых переключений небольшое из-за технических ограничений, то решение задачи упрощается. Условный принцип разделения можно применять и для нелинейных ГСПР. Поскольку принцип разделения для нелинейных систем не выполняется, получаемое управление не будет оптимальным в среднем. Однако на практике это субоптимальное управление часто оказывается вполне приемлемым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Д.А.* Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
2. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
3. *Бортаковский А.С.* Оптимальное и субоптимальное управления пучками траекторий детерминированных непрерывно-дискретных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 1. С. 18–33.
4. *Бортаковский А.С., Немыченков Г.И.* Оптимальное в среднем управление детерминированными переключаемыми системами при наличии дискретных неточных измерений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2019. № 1. С. 52–77.
5. *Бортаковский А.С.* Теорема разделения в задачах управления пучками траекторий детерминированных линейных переключаемых систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2020. № 2. С. 37–63.
6. *Величенко В.В.* Оптимальное управление составными системами // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 4. С. 754–756.
7. *Медведев В.А., Розова В.Н.* Оптимальное управление ступенчатыми системами // АиТ. 1972. № 3. С. 15–23.

Medvedev V.A., Rozova V.N. Optimal Control of Incremental Systems // Autom. Remote Control. 1972. V. 33. No. 3. P. 359–366.

8. *Болтянский В.Г.* Задача оптимизации со сменой фазового пространства // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 3. С. 518–521.
9. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985.
10. *Емельянов С.В., Уткин В.И., Таран В.А. и др.* Теория систем с переменной структурой. М.: Наука, 1970.
11. *Кириллов А.Н.* Динамические системы с переменной структурой и размерностью // Изв. вузов. Сер. Приборостроение. 2009. Т. 52. № 3. С. 23–28.
12. *Sussmann H.J.* A maximum principle for hybrid optimal control problems / Proc. of 38th IEEE Conf. on Decision and Control. Phoenix, 1999.
13. *Dmitruk A.V., Kaganovich A.M.* The Hybrid Maximum Principle is a consequence of Pontryagin Maximum Principle // Syst. Control Lett. 2008. V. 57. P. 964–970.
14. *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005.
15. *Бортаковский А.С.* Синтез оптимальных систем управления со сменой моделей движения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2018. № 4. С. 57–74.
16. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности гибридных систем переменнной размерности // Тр. МИАН. 2020. Т. 308. № 2. С. 88–100.
17. *Бортаковский А.С., Урюпин И.В.* Минимизация количества переключений оптимальных непрерывно-дискретных управляемых процессов // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2019. № 4. С. 29–46.
18. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1973.
19. *Wonham W.M.* On the Separation Theorem of Stochastic Control // SIAM J. Control. 1968. V. 6. P. 312–326.
20. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
21. *Овсянников Д.А.* Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990.
22. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит. 1960.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 18.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020