

© 2020 г. А.В. БОРИСОВ, д-р физ.-мат. наук (A.Borisov@frccsc.ru)  
(Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН, Москва;  
Московский авиационный институт;  
Центр фундаментальной и прикладной математики МГУ)

## $\mathcal{L}_1$ -ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ МАРКОВСКИХ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ I: ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ РЕАЛИЗАЦИИ<sup>1</sup>

Первая часть статьи посвящена разработке класса алгоритмов численного решения задачи фильтрации состояний марковских скачкообразных процессов по косвенным непрерывным наблюдениям в присутствии винеровских шумов. В качестве критерия оптимальности выступает средняя  $\mathcal{L}_1$ -норма ошибки оценки. Интенсивность шумов в наблюдениях может зависеть от оцениваемого состояния. Алгоритмы численного решения используют не исходные непрерывные, а дискретизованные по времени наблюдения. Особенностью предлагаемых алгоритмов является учет вероятности появления нескольких скачков оцениваемого состояния на интервале дискретизации наблюдений. Основным результатом являются утверждения о точности приближенного решения задачи фильтрации в зависимости от числа учитываемых скачков оцениваемого состояния, размера шага дискретизации по времени и применяемой схемы численного интегрирования. Они служат теоретической основой последующего анализа конкретных численных схем реализации решения задачи фильтрации.

*Ключевые слова:* марковский скачкообразный процесс, устойчивый алгоритм численного решения, локальная и глобальная точность аппроксимации.

DOI: 10.31857/S0005231020110021

### 1. Введение

Фильтр Вонэма [1] является одной из наиболее распространенных процедур обработки сигналов, используемых в технике, телекоммуникациях, экономике и финансах, биологии, медицине и в других областях [2–5]. Уравнения данного фильтра описывают решение задачи оптимального оценивания состояний *марковского скачкообразного процесса* (МСП) по его косвенным наблюдениям в присутствии аддитивных винеровских шумов. Оценки фильтрации представляют собой условное распределение состояния МСП относительно имеющихся наблюдений, обладающее очевидными свойствами покомпонентной неотрицательности и нормировки. Несмотря на элегантный вид

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-07-00187 А.

уравнений фильтра, его численная реализация сталкивается со значительными проблемами. Например, явные численные методы решения систем стохастических дифференциальных уравнений, основанные на разложении Ито–Тейлора [6], примененные к системе уравнений фильтра Вонэма, проявляют свойства неустойчивости и «разваливаются»: вычисленные с его помощью аппроксимации перестают удовлетворять условиям неотрицательности и нормировки и со временем достигают произвольно больших по модулю значений. Далее в статье будем называть *устойчивыми* алгоритмы численного решения уравнений фильтра Вонэма, сохраняющие свойства неотрицательности и нормировки для получаемых оценок, которые также будем называть устойчивыми. Для оценок – приближений условного распределения МСП сохранение введенного выше определения устойчивости представляется ключевым, так как этим свойством обладает и само приближаемое условное распределение. В данной работе термин «устойчивость» не используется как синоним слова «робастность», но близок по смыслу к устойчивости численных алгоритмов решения нелинейных дифференциальных уравнений [7, 8] и многошаговых нелинейных дискретных схем [9]. Устойчивость гарантирует, что  $\mathcal{L}_1$ -норма ошибки аппроксимации всегда ограничена сверху одной и той же константой.

Уравнения фильтра Вонэма являются частным случаем нелинейных стохастических уравнений типа Кушнера–Стратоновича. Для этого класса разработаны различные алгоритмы решения, обладающие свойством устойчивости:

- процедуры, основанные на слабой аппроксимации исходных процессов марковскими цепями [10, 11],
- варианты схемы дробных шагов [12],
- робастные процедуры, основанные на преобразовании Кларка [13, 14],
- схемы, связанные с представлением распределений через их логарифм [15],

и др. Все эти алгоритмы созданы для систем аддитивных винеровских шумов в наблюдениях и базируются на гирсановской замене вероятностной меры. Различные алгоритмы численного решения стохастических дифференциальных уравнений со скачками изложены в [16], а в приложении к решению задач оценивания и управления для систем с мультипликативными шумами – в [17–19].

Последние исследования заставляют вернуться к данной теме. В [20] представлено обобщение результата Вонэма на случай мультипликативных шумов в наблюдениях. Известно [24], что задачи фильтрации по наблюдениям с мультипликативными шумами сводятся к оцениванию по косвенным наблюдениям с вырожденными шумами: в их качестве выступают квадратические характеристики шумов в наблюдениях – процессы, не доступные прямому наблюдению, которые сами являются результатом некоторого предельного перехода. В заметке [25] предложена идея аппроксимации обобщенного фильтра Вонэма с помощью дискретизации наблюдений и их последующего оптимального использования, однако численно реализуемый алгоритм, равно как и его точностные характеристики, не представлены.

На проблему численной реализации алгоритма оптимальной фильтрации стохастической системы с непрерывным временем можно взглянуть с другой точки зрения. При решении современными средствами вычислительной техники задач фильтрации по имеющимся непрерывным наблюдениям на первом этапе их дискретизируют, либо они изначально поступают уже в дискретизованном виде со средств наблюдения. На следующем этапе обработки обычно подбираются численные методы, обеспечивающие при уменьшении шага дискретизации по времени сильную или слабую сходимость получаемых аппроксимаций к решению задачи оптимальной фильтрации по непрерывным наблюдениям. За редким исключением (см. [26, 27]) авторы не предпринимают попыток оптимизировать процесс обработки *дискретизованных* наблюдений. А ведь решение задачи оптимальной фильтрации состояний МСП по наблюдениям, дискретизованным по времени, во-первых, дало бы наилучшее приближение точного решения уравнений фильтра Вонэма и, во-вторых, гарантировало бы устойчивость этой аппроксимации. Более того, решение задачи оптимальной фильтрации по дискретизованным наблюдениям без дополнительных предположений о малости шага по времени имеет самостоятельную практическую ценность. Отказ от такого подхода объясняется узостью класса стохастических дифференциальных систем наблюдения, которые можно точно дискретизовать по времени так, чтобы итоговая система являлась рекуррентной системой с дискретным временем и некоторым белым шумом в правой части. Помимо этого, в ряде реальных задач шаг дискретизации наблюдений не может быть уменьшен в связи с техническими ограничениями используемых измерительных средств или из-за необходимости проведения некоторой предобработки (осреднения, сглаживания и т.д.) «сырых» наблюдений.

Целью первой части работы является представление решения задач  $\mathcal{L}_1$ -оптимальной фильтрации состояния МСП по непрерывным и дискретизованным наблюдениям с аддитивными и/или мультипликативными шумами, а также устойчивых аппроксимаций данного решения. Статья имеет следующую структуру. Раздел 2 содержит постановку задач фильтрации МСП. В разделе 3 представлены решения этих задач:  $\mathcal{L}_1$ -оптимальные оценки фильтрации совпадают с оценками максимума апостериорной вероятности. Это значит, что для их определения нужно знать условное распределение МСП относительно имеющихся наблюдений. Условное распределение вычисляется рекуррентно в виде некоторой дроби, представляющей собой формулу Байеса. Числитель и знаменатель в ней содержат интегралы – дисперсионно-сдвиговые смеси гауссовских распределений. Смешивающим в них является распределение времени пребывания МСП в том или ином состоянии на временном отрезке дискретизации наблюдений. Так как смешивающее распределение имеет громоздкий вид, оптимальную оценку предлагается приближать сходящейся последовательностью устойчивых аппроксимаций, ограничивающих возможное число скачков МСП на интервале дискретизации. Для этих аппроксимаций получены локальная и глобальная характеристики точности. Данные сведения изложены в разделе 4. В числителе и знаменателе аналитических аппроксимаций присутствуют слагаемые – интегралы, не вычисляемые аналитически. Выбор той или иной схемы их численной реализации

влияет на итоговую точность полученных оценок. В разделе 5 представлены локальная и глобальная характеристики влияния ошибок численного интегрирования на отклонение приближенного решения от оптимального. Анализ полученных результатов и их обсуждение представлены в разделе 6.

## 2. Постановка задачи $\mathcal{L}_1$ -оптимальной фильтрации

На полном вероятностном пространстве с фильтрацией  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$  рассматривается стохастическая динамическая система

$$(2.1) \quad X_t = X_0 + \int_0^t \Lambda^\top X_s ds + \mu_s,$$

$$(2.2) \quad Y_t = \int_0^t f X_s ds + \int_0^t \sum_{n=1}^N X_s^n g_n^{1/2} dW_s,$$

где

—  $X_t \triangleq \text{col}(X_t^1, \dots, X_t^N) \in \mathbb{S}^N$  — ненаблюдаемое состояние системы, являющееся однородным МСП с конечным множеством состояний  $\mathbb{S}^N \triangleq \{e_1, \dots, e_N\}$  ( $\mathbb{S}^N$  — множество единичных векторов евклидова пространства  $\mathbb{R}^N$ ), матрицей интенсивностей переходов  $\Lambda$  и начальным распределением  $\pi$ ;

—  $\mu_t \triangleq \text{col}(\mu_t^1, \dots, \mu_t^N) \in \mathbb{R}^N$  —  $\mathcal{F}_t$ -согласованный мартингал;

—  $Y_t \triangleq \text{col}(Y_t^1, \dots, Y_t^M) \in \mathbb{R}^M$  — косвенные наблюдения, зашумленные  $\mathcal{F}_t$ -согласованным стандартным винеровским процессом  $W_t \triangleq \text{col}(W_t^1, \dots, W_t^M) \in \mathbb{R}^M$ ;  $f$  —  $(M \times N)$ -мерная матрица плана наблюдений, а набор симметричных матриц  $\{g_n\}_{n=1, \dots, N}$  характеризует интенсивности шумов в зависимости от текущего состояния  $X_t$ .

Возможны два варианта статистической информации для последующего оценивания состояния МСП.

1. Наблюдению полностью доступен процесс  $Y$ ; поток  $\sigma$ -алгебр, им порожденный, обозначен следующим образом:  $\mathcal{O}_t \triangleq \sigma\{Y_s : 0 \leq s \leq t\}$ .

2. Наблюдению доступны приращения исходного непрерывного процесса  $Y$  при равномерной дискретизации времени с шагом  $h > 0$ :

$$(2.3) \quad y_r = \int_{t_{r-1}}^{t_r} f X_s ds + \int_{t_{r-1}}^{t_r} \sum_{n=1}^N X_s^n g_n^{1/2} dW_s, \quad r \in \mathbb{N},$$

где  $t_r \triangleq rh$  — точки полученной сетки. Неубывающее семейство  $\sigma$ -алгебр, порожденное последовательностью  $\{y_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ , обозначено следующим образом:  $\mathcal{O}_r \triangleq \sigma\{y_\ell : 0 \leq \ell \leq r\}$ ,  $\mathcal{O}_0 \triangleq \{\emptyset, \Omega\}$ .

Расстояние между точками  $\alpha = \text{col}(\alpha^1, \dots, \alpha^N)$  и  $\beta = \text{col}(\beta^1, \dots, \beta^N)$  в пространстве  $\mathbb{R}^N$  определяется с помощью  $\mathcal{L}_1$ -нормы:  $\|\alpha - \beta\|_1 \triangleq \sum_{n=1}^N |\alpha^n - \beta^n|$ .

Задача  $\mathcal{L}_1$ -оптимальной фильтрации состояния  $X$  по непрерывным наблюдениям  $Y$  заключается в нахождении такой оценки  $\widehat{X}_t, t \geq 0$ , что

$$(2.4) \quad \widehat{X}_t \in \underset{\tilde{X}_t \in \mathbf{X}_t}{\text{Argmin}} \mathbf{E} \left\{ \|\tilde{X}_t - X_t\|_1 \right\},$$

где  $\mathbf{X}_t$  – множество всех таких  $O_t$ -согласованных процессов  $\widehat{X}_t$  с конечным первым моментом, что  $\sum_{n=1}^N \widehat{X}_t^n \equiv 1$  с вероятностью 1.

Задача  $\mathcal{L}_1$ -оптимальной фильтрации состояния  $X$  по дискретным наблюдениям  $\mathcal{Y}$  заключается в нахождении такой оценки  $\widehat{X}_r, r \in \mathbb{N}$  состояния МСП  $X_{rh}$ , что

$$(2.5) \quad \widehat{X}_r \in \underset{\tilde{X}_r \in \mathcal{X}_r}{\text{Argmin}} \mathbf{E} \left\{ \|\tilde{X}_r - X_{rh}\|_1 \right\},$$

где  $\mathcal{X}_r$  – множество всех таких  $O_r$ -согласованных последовательностей  $\{\widehat{X}_r\}$  с конечным первым моментом, что  $\sum_{n=1}^N \widehat{X}_r^n \equiv 1$  с вероятностью 1.

В дальнейшем изложении, если какой-либо вектор-столбец  $\alpha$  удовлетворяет условию нормировки, то это условие будет записываться в форме  $\mathbf{1}\alpha = 1$ , где  $\mathbf{1}$  – вектор-строка подходящей размерности, состоящая из единиц.

Исследуемая частично наблюдаемая динамическая система и поставленные задачи фильтрации имеют некоторые особенности.

Во-первых, процесс непрерывных наблюдений  $Y_t$  может быть преобразован к виду

$$Y_t = \int_0^t \sum_{n=1}^N X_s^n \left( f e_n ds + g_n^{1/2} dW_s \right).$$

Из него следует, что полезный сигнал  $X_t$  наблюдается в присутствии *мультипликативного шума* – процесса броуновского движения с известными неслучайными сносом и диффузией. В то же время в частном случае  $g_n \equiv g, n = \overline{1, N}$  процесс  $Y_t$  может быть преобразован к виду

$$Y_t = \int_0^t f X_s ds + g^{1/2} W_t$$

и рассматриваться как полезный сигнал, *аддитивно* зашумленный процессом броуновского движения с нулевым сносом и известной неслучайной диффузией. Поэтому в общем случае  $Y_t$  можно назвать наблюдениями с аддитивными/мультипликативными шумами.

Во-вторых, дополнительное требование выполнения условия нормировки для допустимых оценок представляется достаточно естественным, ведь все возможные значения оцениваемого состояния  $X_t$ , образующие множество  $\mathbb{S}^N$  координатных ортов пространства  $\mathbb{R}^N$ , также удовлетворяют этому свойству.

### 3. Решение задач $\mathcal{L}_1$ -оптимальной фильтрации

Решать задачи фильтрации будем в предположении, что для (2.1) и (2.2) выполняются следующие условия.

а. Исследуемое вероятностное пространство с фильтрацией имеет вид

$$\left( \Omega^X \times \Omega^W, \mathcal{F}^X \times \mathcal{F}^W, \mathbb{P}^X \times \mathbb{P}^W, \{ \mathcal{F}_t^X \times \mathcal{F}_t^W \}_{t \geq 0} \right),$$

и процессы  $X_t(\omega^X)$  и  $W_t(\omega^W)$  независимы.

б. Шумы в наблюдениях равномерно невырожденные, т.е.  $g_n > 0$  для всех  $n = \overline{1, N}$ .

Приведенные выше условия являются естественными для задач фильтрации и не обременительными.

Пусть  $\hat{x}_t \triangleq \mathbb{E} \{ X_t | \mathcal{O}_t \}$  и  $\hat{x}_r \triangleq \mathbb{E} \{ X_{t_r} | \mathcal{O}_r \}$  – векторы *условных математических ожиданий* (УМО) состояния МСП  $X_t$  относительно непрерывных и дискретизованных наблюдений, которые в силу того, что  $X_t \in \mathbb{S}^N$ , совпадают с условными распределениями. Построим по этим условным распределениям  $\hat{x}_t$  и  $\hat{x}_r$  оценки максимума апостериорной вероятности:

$$\hat{X}_t = e_{n^*}, \quad \text{где} \quad n^* \in \underset{n=1, N}{\text{Argmax}} \hat{x}_t^n$$

— оценка максимума апостериорной вероятности по непрерывным наблюдениям,

$$\hat{X}_r = e_{n^*}, \quad \text{где} \quad n^* \in \underset{n=1, N}{\text{Argmax}} \hat{x}_r^n$$

— оценка максимума апостериорной вероятности по дискретизованным наблюдениям.

*Лемма 1. Решение задач  $\mathcal{L}_1$ -оптимальной фильтрации по непрерывным и дискретизованным наблюдениям доставляется оценками максимальной апостериорной вероятности.*

Доказательство леммы 1 дано в [21, с. 125].

Результат леммы нуждается в некоторых комментариях. Во-первых,  $\mathcal{L}_1$ -оптимальная оценка не единственна. В качестве нее может выступать любой орт с номером, соответствующим максимальной условной вероятности, в случае, если таких компонент несколько. Более того, в качестве  $\mathcal{L}_1$ -оптимальной оценки может выступать любая выпуклая комбинация подобных ортов. Однако представляется, что практического значения такая неединственность не имеет. Ниже будет получен явный вид условного распределения как относительно непрерывных, так и дискретизованных наблюдений. Анализируя вид последних, можно сделать вывод: условные распределения получаются путем рекуррентного нелинейного преобразования невырожденных гауссовских случайных векторов, поэтому вероятность появления двух или более условных мод равна нулю. Поиск условий, при которых условные моды не единственны с положительной вероятностью, не входит в цели данной работы.

Во-вторых, факт, что  $\mathcal{L}_1$ -оптимальной оказалась оценка максимума апостериорной вероятности, является не вполне очевидным. Например, в классической статистической задаче оценивания скалярного параметра относительно  $\mathcal{L}_1$ -критерия [22] оптимальной оказывается выборочная медиана. Согласно классической монографии [23, Sect. 2.3, Problem 3.3] медиана апостериорного распределения также является  $\mathcal{L}_1$ -оптимальной оценкой случайного скалярного параметра. Кстати, к этому же случаю сведется  $\mathcal{L}_1$ -оптимальная фильтрация состояния МСП в случае, если его фазовым пространством выступит некоторое конечное подмножество числовой оси, например  $\{1, 2, \dots, N\}$ . Результат леммы 1 базируется именно на том, что фазовым пространством для  $X_t$  выступает множество единичных ортов  $\mathbb{S}^N$ . Выбор такого фазового пространства вполне распространен (см., например, [5]) и весьма эффективен при математических выводах.

Стохастическая дифференциальная система, определяющая УМО  $\hat{x}_t$  относительно непрерывных наблюдений, представлена в [20]. Рекуррентная схема вычисления УМО  $\hat{x}_t$  относительно дискретных наблюдений представлена в заметке [25]. Схема является основой построения алгоритмов численного решения задач фильтрации, представленных в данной работе, поэтому ниже приведен ее корректный вывод.

Воспользуемся подходом из [28]. Применим метод математической индукции. При  $r = 0$

$$(3.1) \quad \hat{x}_0 = \mathbf{E} \{X_0 | \mathcal{O}_0\} = \mathbf{E} \{x_0\} = \pi.$$

Пусть для некоторого  $r \in \mathbb{N}$  известно условное распределение  $\hat{x}_{r-1} = \mathbf{E} \{X_{t_{r-1}} | \mathcal{O}_{r-1}\}$ . Определим УМО  $\hat{x}_r$  на следующем шаге. Для этого необходимо найти совместное распределение  $(X_{t_r}, Y_r)$  относительно  $\mathcal{O}_{r-1}$ . Из модели наблюдений и леммы 7.5 [29] следует, что распределение  $Y_r$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_{t_r}^X \vee \mathcal{O}_{r-1}$  является гауссовским с параметрами

$$(3.2) \quad \mathbf{E} \{y_r | \mathcal{F}_{t_r}^X\} = f\tau_r, \quad \text{cov}(y_r, y_r | \mathcal{F}_{t_r}^X) = \sum_{n=1}^N \tau_r^n g_n,$$

где  $\tau_r = \text{col}(\tau_r^1, \dots, \tau_r^N) \triangleq \int_{t_{r-1}}^{t_r} X_s ds$  – случайный вектор,  $n$ -я компонента которого равна случайному времени пребывания процесса  $X$  в состоянии  $e_n$  на отрезке  $[t_{r-1}, t_r]$ . Ниже в изложении будем использовать следующие обозначения:

- $\mathcal{D} \triangleq \left\{ u = \text{col}(u^1, \dots, u^N) : u_n \geq 0, \sum_{n=1}^N u^n = h \right\}$  –  $(N-1)$ -мерный симплекс в пространстве  $\mathbb{R}^M$  – носитель распределения  $\tau_r$ ;
- $\Pi \triangleq \left\{ \pi = \text{col}(\pi^1, \dots, \pi^N) : \pi_n \geq 0, \sum_{n=1}^N \pi^n = 1 \right\}$  – «вероятностный симплекс», множество возможных начальных распределений  $\pi$ ;
- $N_r^X$  – случайное число скачков состояния  $X_t$ , произошедших на отрезке времени  $[t_{r-1}, t_r]$ ,
- $a_r^s \triangleq \{ \omega \in \Omega : N_r^X(\omega) \leq s \}$ ,  $A_r^s \triangleq \prod_{q=1}^r a_q^s$ ;

–  $\rho^{k,\ell,q}(du)$  – распределение вектора  $X_{t_r}^\ell \mathbf{I}_{\{q\}}(N_r^X) \tau_r$  при условии  $X_{t_{r-1}} = e_k$ , т.е. для любого  $\mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$  верно равенство

$$\mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{\mathcal{G}}(\tau_r) \mathbf{I}_{\{q\}}(N_r^X) X_{t_r}^\ell | X_{t_{r-1}} = e_k \right\} = \int_{\mathcal{G}} \rho^{k,\ell,q}(du);$$

–  $\mathcal{N}(y, m, K) \triangleq (2\pi)^{-M/2} \det^{-1/2} K \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|y - m\|_{K^{-1}}^2 \right\}$  –  $M$ -мерная плотность гауссовского распределения с математическим ожиданием  $m$  и невырожденной ковариационной матрицей  $K$ ;

–  $\|\alpha\|_K^2 \triangleq \alpha^\top K \alpha$ ,  $\langle \alpha, \beta \rangle_K \triangleq \alpha^\top K \beta$ .

В силу марковского свойства  $\{(X_{t_r}, \mathcal{Y}_r)\}_{r \geq 0}$ , формулы полной вероятности и теоремы Фубини для любого множества  $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$  верна следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ X_{t_r} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(Y_r) | \mathcal{O}_{r-1} \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left\{ X_{t_r} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(Y_r) | \mathcal{F}_{t_r}^X \vee \mathcal{O}_{r-1} \right\} | \mathcal{O}_{r-1} \right\} = \\ &= \mathbb{E} \left\{ X_{t_r} \int_{\mathcal{A}} \mathcal{N} \left( y, f \tau_r, \sum_{p=1}^N \tau_r^p g_p \right) dy | \mathcal{O}_{r-1} \right\} = \\ &= \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left\{ X_{t_r} \int_{\mathcal{A}} \mathcal{N} \left( y, f \tau_r, \sum_{p=1}^N \tau_r^p g_p \right) dy | X_{t_{r-1}} \vee \mathcal{O}_{r-1} \right\} | \mathcal{O}_{r-1} \right\} = \\ &= \mathbb{E} \left\{ \sum_{\ell=1}^N e_\ell \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=1}^N e_k^\top X_{t_{r-1}} \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{A}} \mathcal{N} \left( y, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) dy \rho^{k,\ell,q}(du) | \mathcal{O}_{r-1} \right\} = \\ &= \sum_{\ell=1}^N e_\ell \int_{\mathcal{A}} \left[ \sum_{k=1}^N \hat{x}_{r-1}^k \sum_{q=0}^{\infty} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left( y, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho^{k,\ell,q}(du) \right] dy \end{aligned}$$

из чего следует, что интегранд в квадратных скобках в последнем выражении определяет искомое совместное распределение  $(X_{t_r}, \mathcal{Y}_r)$  относительно  $\mathcal{O}_{r-1}$ . Тогда условное распределение  $\hat{x}_r$  покомпонентно определяется с помощью обобщенного варианта формулы Байеса [29]

$$(3.3) \quad \hat{x}_r^j = \frac{\sum_{k=1}^N \hat{x}_{r-1}^k \sum_{q=0}^{\infty} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left( \mathcal{Y}_r, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho^{k,j,q}(du)}{\sum_{i,\ell=1}^N \hat{x}_{r-1}^i \sum_{c=0}^{\infty} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left( \mathcal{Y}_r, fv, \sum_{n=1}^N v^n g_n \right) \rho^{i,\ell,c}(dv)}, \quad j = \overline{1, N}.$$

Таким образом, доказана следующая

*Лемма 2.* Если для системы наблюдения (2.1), (2.3) верны условия а и б, то условное распределение  $\hat{x}_r$  определяется формулой (3.1) при  $r = 0$  и рекуррентным соотношением (3.3) в моменты  $t_r$  получения наблюдений  $\mathcal{Y}_r$ .

В [30] в качестве иллюстративного примера рассматривалась задача СК-оптимальной фильтрации состояний МСП по дискретизованным наблюдениям, полученным в некоторые неслучайные моменты времени. В этой работе оценка фильтрации определяется также с помощью некоторой рекуррентной процедуры. Однако в [30] эта процедура записана в абстрактной форме: интегранды в ее числителе и знаменателе содержат условные математические ожидания без указания, как их можно вычислить. В данной же работе все интегранды в числителе и знаменателе (3.3) явным образом определены и могут быть вычислены аналитически или численно сколь угодно точно.

#### 4. Аналитическая аппроксимация условного распределения и ее точность

Рекурсия (3.3) не может быть непосредственно реализована в виде некоторой численной схемы: суммы бесконечных рядов из интегралов в числителе и знаменателе не могут быть вычислены аналитически. Поэтому их предлагается заменить конечными рядами, а векторную последовательность  $\bar{x}_r(s)$ , вычисляемую покомпонентно с помощью рекурсии

$$(4.1) \quad \bar{x}_r^j(s) = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{x}_{r-1}^k(s) \sum_{q=0}^s \int \mathcal{N} \left( \mathcal{Y}_r, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho^{k,j,q}(du)}{\sum_{i,\ell=1}^N \bar{x}_{r-1}^i(s) \sum_{c=0}^s \int \mathcal{N} \left( \mathcal{Y}_r, fv, \sum_{n=1}^N v^n g_n \right) \rho^{i,\ell,c}(dv)}, \quad j = \overline{1, N}$$

назовем *аналитической аппроксимацией  $s$ -го порядка* условного распределения. Легко видеть, что аппроксимация  $\bar{x}_r(s)$  обладает свойством устойчивости.

Так как искомая  $\mathcal{L}_1$ -оптимальная оценка  $\widehat{X}_r$  является функцией условного распределения  $\widehat{x}_r$ , которое может быть вычислено только приближенно в форме аппроксимации  $\bar{x}_r(s)$ , то важным представляется определить степень близости  $\widehat{x}_r$  и  $\bar{x}_r(s)$ .

Введем следующие обозначения для неотрицательных случайных величин и матриц из них:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \xi_q^{kj} &\triangleq \sum_{m=0}^s \int \mathcal{N} \left( \mathcal{Y}_q, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho^{k,j,m}(du), \\ \theta_q^{kj} &\triangleq \sum_{m=0}^{\infty} \int \mathcal{N} \left( \mathcal{Y}_q, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho^{k,j,m}(du), \\ \xi_q &\triangleq \|\xi_q^{kj}\|_{k,j=\overline{1,N}}, \quad \theta_q \triangleq \|\theta_q^{kj}\|_{k,j=\overline{1,N}}. \end{aligned}$$

Оценки  $\widehat{x}_r$  (3.3) и  $\bar{x}_r(s)$  (4.1) могут быть записаны в рекуррентной форме:

$$(4.3) \quad \widehat{x}_r = \left( \mathbf{1} \theta_r^\top \widehat{x}_{r-1} \right)^{-1} \theta_r^\top \widehat{x}_{r-1},$$

$$(4.4) \quad \bar{x}_r(s) = \left( \mathbf{1} \xi_r^\top \bar{x}_{r-1}(s) \right)^{-1} \xi_r^\top \bar{x}_{r-1}(s).$$

Определим характеристики близости оценок  $\{\bar{x}_r(s)\}$  и  $\{\hat{x}_r\}$ . Так как система (2.1), (2.3) является автономной, то в качестве локальной характеристики точности аппроксимации  $\{\bar{x}_r(s)\}$  может быть выбрана величина

$$(4.5) \quad \sigma(s) \triangleq \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \{ \|\hat{x}_1 - \bar{x}_1(s)\|_1 \} = \sup_{\pi \in \Pi} \sum_{j=1}^N \mathbb{E} \left\{ |\hat{x}_1^j - \bar{x}_1^j(s)| \right\},$$

определяющая, насколько сильно рекурсии (3.3) и (4.1) разойдутся за один шаг, стартуя из одной точки  $\pi$ .

Обе схемы, примененные  $r$  раз, позволяют вычислить и оценки  $\hat{x}_r$  и  $\bar{x}_r(s)$  в точке  $t_r$ . В качестве глобальной характеристики точности аппроксимации в этом случае естественно рассмотреть величину

$$(4.6) \quad \Sigma_r(s) \triangleq \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \{ \|\hat{x}_r - \bar{x}_r(s)\|_1 \} = \sup_{\pi \in \Pi} \sum_{j=1}^N \mathbb{E} \left\{ |\hat{x}_r^j - \bar{x}_r^j(s)| \right\},$$

определяющую, насколько сильно рекурсии (3.3) и (4.1) разойдутся за  $r$  шагов, стартуя из единой точки  $\pi$ .

В отличие от традиционных показателей точности [6], представляющих собой  $\mathcal{L}_2$ -норму ошибок аппроксимации, предлагаемые характеристики связаны с  $\mathcal{L}_1$ -нормой.

Следующее утверждение определяет верхние оценки величин  $\sigma(s)$  и  $\Sigma_r(s)$ .

*Теорема 1. В условиях леммы 2 верны неравенства*

$$(4.7) \quad \sigma(s) \leq 2C_1 \frac{(\bar{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!}$$

и

$$(4.8) \quad \Sigma_r(s) \leq 2 - 2 \left( 1 - C_1 \frac{(\bar{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!} \right)^r,$$

где  $\bar{\lambda} \triangleq \max_{1 \leq n \leq N} |\lambda_{nn}|$ , а  $C_1 = C_1(h, \bar{\lambda}) \in (0, 1)$  – параметр

$$(4.9) \quad C_1 \triangleq e^{-\bar{\lambda}h} \frac{(s+1)!}{(\bar{\lambda}h)^{s+1}} \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{(\bar{\lambda}h)^k}{k!}.$$

При этом верно неравенство

$$C_1 \frac{(\bar{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!} < 1.$$

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Неравенства (4.7) и (4.8) имеют следующую интерпретацию. Для произвольной устойчивой оценки  $\check{x}_r$  ее отклонение от оптимальной  $\hat{x}_r$  не превосходит 2:

$$\max_{\check{x}_r, \pi} \mathbb{E} \{ \|\check{x}_r - \hat{x}_r\|_1 \} = 2.$$

Аппроксимация  $\bar{x}_1(s)$  построена в предположении, что на интервале дискретизации наблюдений длиной  $h$  состояние МСП совершит не более  $s$  скачков. При этом величина  $C_1 \frac{(\bar{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!}$  ограничивает сверху вероятность того, что число скачков превзойдет порог  $s$ . Правая часть неравенства (4.7) является произведением максимально возможного промаха на вероятность превышения порога  $s$  числом скачков. Глобальная оценка (4.8) построена аналогично: предполагается, что максимальное расхождение  $\bar{x}_r(s)$  и  $\hat{x}_r$  может произойти в том случае, если хотя бы на одном из  $r$  отрезков длины  $h$  МСП  $X$  совершит более  $s$  скачков.

Утверждения теоремы 1 имеют практическую пользу. В них нет требований асимптотики по параметрам  $s$  и  $h$ : представленные оценки точности носят универсальный характер. В подавляющем большинстве современных цифровых систем управления частота съема измерений фиксирована или ограничена сверху. В некоторых случаях имеются дополнительные алгоритмические ограничения на интервал дискретизации: исходные «сырые» данные должны быть подвергнуты предварительной обработке типа сглаживания, осреднения и т.п. Например, использование диффузионной аппроксимации процессов восстановления [31] правомерно лишь при значительных интервалах осреднения, длина которых зависит от моментных характеристик времени между скачками.

Неравенство (4.8) позволяет также получить следующие асимптотические результаты. При фиксированных  $(h, s)$  и  $r \rightarrow +\infty$  глобальная ошибка  $\Sigma_r(s)$  экспоненциально стремится к своему максимально возможному значению 2, причем делает это тем медленнее, чем меньше показатель локальной ошибки  $C_1 \frac{(\bar{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!}$ .

Рассмотрим глобальный показатель точности аппроксимации в фиксированный момент времени  $T$  при асимптотике  $h \rightarrow 0$ . В этом случае  $r = \frac{T}{h}$ , и из (4.8) следует цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \Sigma_r(s) &\leq 2 - 2 \left( 1 - \frac{(\bar{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!} \right)^r = \\ &= 2 \left[ 1 - \exp \left( r \ln \left( 1 - \frac{(\bar{\lambda}T)^{s+1}}{(s+1)!r^{s+1}} \right) \right) \right] \triangleq \bar{\Sigma}_r(s). \end{aligned}$$

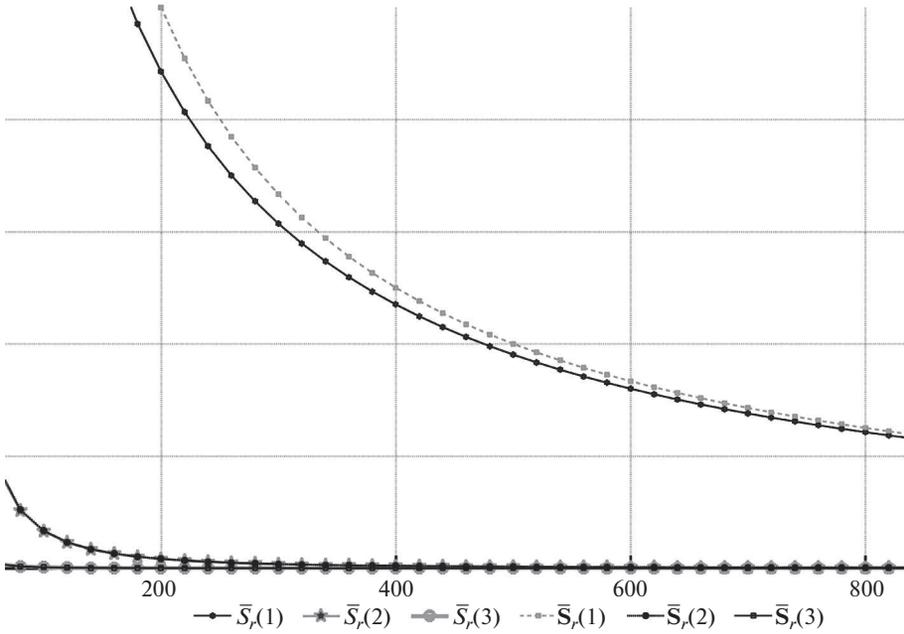
При достаточно больших  $r$  имеет место эквивалентность

$$\ln \left( 1 - \frac{(\bar{\lambda}T)^{s+1}}{(s+1)!r^{s+1}} \right) \sim - \frac{(\bar{\lambda}T)^{s+1}}{(s+1)!r^{s+1}},$$

т.е.

$$\bar{\Sigma}_r(s) \sim 2 \left[ 1 - \exp \left( -r \frac{(\bar{\lambda}T)^{s+1}}{(s+1)!r^{s+1}} \right) \right] = 2 \left[ 1 - \exp \left( -\bar{\lambda}T \frac{\left( \frac{\bar{\lambda}T}{r} \right)^s}{(s+1)!} \right) \right].$$

В то же время, чтобы сохранить свойство оценки сверху, можно воспользоваться неравенством  $\ln(1-x) > -x - x^2$ , верным для любых  $x \in (0, \frac{1}{2})$ : как



Сравнение показателей глобальной точности  $\bar{\Sigma}_r(s)$  и  $\bar{S}_r(s)$  аналитических аппроксимаций порядков  $s = 1, 2, 3$ .

только  $r$  станет настолько велико, что  $\frac{(\bar{\lambda}T)^{s+1}}{(s+1)!r^{s+1}} < \frac{1}{2}$ , то

$$\Sigma_r(s) \leq 2 \left\{ 1 - \exp \left[ -\bar{\lambda}T \frac{\left(\frac{\bar{\lambda}T}{r}\right)^s}{(s+1)!} \left( 1 + \frac{\left(\frac{\bar{\lambda}T}{r}\right)^{s+1}}{(s+1)!} \right) \right] \right\}.$$

Для определения порядка точности более предпочтительна верхняя оценка точности  $\Sigma_r(s)$  в виде степенной функции шага дискретизации  $h$ . Используя неравенство  $(1-x)^r > 1-rx$ , верного для любого  $x \in (0, 1)$  и  $r > 1$ , можно получить следующую оценку сверху

$$\bar{S}_r(s) \leq 2\bar{\lambda}T \frac{(\bar{\lambda}T)^s}{(s+1)!r^s} \triangleq \bar{S}_r(s).$$

Для иллюстрации влияния порядка аппроксимации  $s$  на показатель глобальной точности на рисунке приведены зависимости от  $r$  величины  $\bar{S}_r(s)$  и  $\bar{\Sigma}_r(s)$  для  $\bar{\lambda} = 10$ ,  $T = 1$  и  $s = 1, 2, 3$ .

Из рисунка следуют два вывода. Во-первых, показатели  $\bar{S}_r(s)$  и  $\bar{\Sigma}_r(s)$  очень близки друг к другу за исключением случая  $s = 1$ . Во-вторых, увеличение степени аппроксимации значительно повышает ее точность, например, при  $s = 2$  и  $r = 100$  (т.е.  $h = 0,1$ ) показатель точности составляет 0,33, что для порядка  $s = 1$  не достигается даже при  $r = 1000$  (т.е. при  $h = 0,01$ ):  $\bar{S}_{1000}(1) = 0,1$ .

## 5. Численная аппроксимация условного распределения и ее точность

В рекуррентной схеме (4.4) требуется вычисление интегралов  $\xi_r^{ij}$ , что невозможно сделать аналитически. Использование численного интегрирования вносит дополнительные ошибки. Исследуем их влияние на общую точность аппроксимации условного распределения.

Значения интегралов  $\xi^{ij}(y)$  аппроксимируются суммами

$$(5.1) \quad \xi^{ij}(y) \approx \psi^{ij}(y) \triangleq \sum_{\ell=1}^L \mathcal{N} \left( y, fw_{\ell}, \sum_{p=1}^N w_{\ell}^p g_p \right) \varrho_{\ell}^{ij},$$

$$\psi(y) \triangleq \|\psi^{ij}(y)\|_{i,j=\overline{1,N}},$$

определяемыми множеством пар  $\{(w_{\ell}, \varrho_{\ell}^{ij})\}_{\ell=\overline{1,L}}$ . Здесь  $\varrho_{\ell}^{ij} \geq 0$  ( $\ell = \overline{1,L}$ ) – веса,  $\sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^L \varrho_{\ell}^{ij} \leq \mathfrak{W} \leq 1$ , а  $w_{\ell} \triangleq \text{col}(w_{\ell}^1, \dots, w_{\ell}^N) \in \mathcal{D}$  – точки. Аналогично матрицам  $\xi_q$  строятся их аппроксимации  $\psi_q \triangleq \|\psi^{ij}(y_q)\|_{i,j=\overline{1,N}}$ .

По построению элементы матрицы  $\psi_q$  являются положительными случайными величинами, поэтому приближенная оценка  $\tilde{x}_r$ , вычисляемая рекуррентно по формуле

$$(5.2) \quad \tilde{x}_r \triangleq \left( \mathbf{1} \psi_r^{\top} \tilde{x}_{r-1} \right)^{-1} \psi_r^{\top} \tilde{x}_{r-1},$$

обладает свойством устойчивости.

Обозначим

$$(5.3) \quad \gamma^{kj} \triangleq \psi^{kj} - \xi^{kj}, \quad \gamma_r \triangleq \left\| \gamma^{kj}(y_r) \right\|_{k,j=\overline{1,N}},$$

$$(5.4) \quad \bar{\gamma}^{kj} \triangleq |\gamma^{kj}|, \quad \bar{\gamma}_r \triangleq \left\| |\gamma^{kj}(y_r)| \right\|_{k,j=\overline{1,N}}$$

– ошибки аппроксимации интегралов и их абсолютные значения.

Рекуррентная схема вычисления  $\bar{x}_r$  (4.4) заменяется на схему (5.2), при этом обе рекурсии стартуют из одного и того же начального условия  $\pi$ .

Схемы (4.4) и (5.2) строились в расчете на выполнение события  $A_r^s$ , т.е. на непревышение числом скачков порога  $s$  на всех интервалах  $[t_{q-1}, t_q]$ , принадлежащих отрезку  $[0, t_r]$ . Поэтому показатель близости  $\tilde{x}_r$  и  $\bar{x}_r(s)$  нужно выбирать с учетом этого ограничения. В качестве локальной характеристики будем рассматривать псевдометрику

$$(5.5) \quad \varepsilon(s) \triangleq \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{A_1^s}(\omega) \|\tilde{x}_1 - \bar{x}_1(s)\|_1 \right\} = \sup_{\pi \in \Pi} \sum_{j=1}^N \mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{A_1^s}(\omega) |\tilde{x}_1^j - \bar{x}_1^j(x)| \right\}.$$

Глобальный показатель близости определяется аналогично:

$$(5.6) \quad \mathcal{E}_r(s) \triangleq \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{A_r^s}(\omega) \|\tilde{x}_r - \bar{x}_r(x)\|_1 \right\} = \sup_{\pi \in \Pi} \sum_{n=1}^N \mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{A_r^s}(\omega) |\tilde{x}_r^n - \bar{x}_r^n(x)| \right\}.$$

Эти величины характеризуют разницу применения алгоритмов (4.4) и (5.2) за один и  $r$  шагов при выполнении ограничений на число скачков состояния, описанных выше.

*Теорема 2.* Если для схемы (5.1) приближенного вычисления интеграла (4.2) выполняется неравенство

$$(5.7) \quad \max_{i=1, N} \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} |\psi^{ij}(y) - \xi^{ij}(y)| dy < \delta,$$

то для локального и глобального показателей близости верны оценки сверху

$$(5.8) \quad \varepsilon(s) \leq 2\delta, \quad \mathcal{E}_r(s) \leq 2r\mathfrak{W}^{r-1}\delta.$$

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Возможность характеристики точности численного решения задачи фильтрации, стохастической по своей природе, с помощью условия (5.7), относящегося к чистому математическому анализу, представляется замечательной. Далее, если сумма весов  $\mathfrak{W} = \sum_{\ell, j} \varrho_\ell^{ij}$  отделена от единицы, т.е.  $\mathfrak{W} < 1$ , глобальный показатель ошибки численного интегрирования  $\mathcal{E}_r(s)$  растет с увеличением  $r$  *сублинейно*, так же как и глобальный показатель ошибки аналитической аппроксимации  $\Sigma_r(s)$ . При этом следует отметить, что в классических численных методах решения стохастических дифференциальных уравнений глобальная ошибка растет линейно с ростом времени интегрирования [6].

Характеристики точности аналитической аппроксимации и ее численной реализации должны быть объединены в единый показатель. Если выполняются условия теорем 1 и 2, то

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \tau(s) &\triangleq \sup_{\pi \in \Pi} \mathbf{E} \left\{ \|\hat{x}_1 - \tilde{x}_1\|_1 \right\} \leq \\ &\leq \sup_{\pi \in \Pi} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{I}_{a_1^s}(\omega) \|\tilde{x}_1 - \bar{x}_1(s) + \bar{x}_1(s) - \hat{x}_1\|_1 + \mathbf{I}_{\bar{a}_1^s}(\omega) \|\tilde{x}_1 - \bar{x}_1(s)\|_1 \right\} \leq \\ &\leq 2\mathbf{P} \{ \bar{a}_1^s \} + \sup_{\pi \in \Pi} \mathbf{E} \left\{ \|\bar{x}_1(s) - \hat{x}_1\|_1 \right\} + \sup_{\pi \in \Pi} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{I}_{a_1^s}(\omega) \|\tilde{x}_1 - \bar{x}_1(s)\|_1 \right\} = \\ &= 2\mathbf{P} \{ \bar{a}_1^s \} + \sigma(s) + \varepsilon(s) \leq 4 \frac{(\bar{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!} + 2\delta. \end{aligned}$$

Итоговый глобальный показатель близости условного распределения  $\hat{x}_r \triangleq \mathbf{E} \{ X_r | \mathcal{O}_r \}$  и его приближения  $\tilde{x}_r$  может быть ограничен сверху аналогичным образом:

$$(5.10) \quad \mathcal{T}(s) \triangleq \sup_{\pi \in \Pi} \mathbf{E} \left\{ \|\hat{x}_r - \tilde{x}_r\|_1 \right\} \leq 4 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{(\bar{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!} \right)^r \right] + 2r\mathfrak{W}^{r-1}\delta.$$

Вообще говоря, параметры аналитической аппроксимации ( $h, s$ ) и численного интегрирования  $\delta$  могут выбираться независимо друг от друга. Однако

наличие ограничений по доступным вычислительным ресурсам и требований к точности аппроксимации ведут к совместной оптимизации данных параметров.

Тем не менее при разработке эффективных алгоритмов численного решения задачи фильтрации состояний МСП по непрерывным наблюдениям эти параметры нуждаются в совместном оптимальном выборе. Зафиксируем некоторый горизонт  $T$  и порядок аналитической аппроксимации  $s$ . Будем увеличивать число шагов  $r \rightarrow \infty$ , а значит уменьшать шаг дискретизации  $h = \frac{T}{r} \rightarrow 0$ . В этом случае в силу неравенства Бернулли и неравенства  $0 < \mathfrak{W} \leq 1$

$$\begin{aligned}
 \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E} \left\{ \left\| \tilde{x}_{T/h} - \hat{x}_{T/h} \right\|_1 \right\} &\leq 4 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{(\bar{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!} \right)^r \right] + 2r\mathfrak{W}^{r-1}\delta \leq \\
 (5.11) \quad &\leq 4r \frac{(\bar{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!} + 2r\mathfrak{W}^{r-1}\delta = 4\bar{\lambda}T \frac{(\bar{\lambda}h)^s}{(s+1)!} + 2r\mathfrak{W}^{r-1}\delta \leq \\
 &\leq 2T \left( 2\bar{\lambda} \frac{(\bar{\lambda}h)^s}{(s+1)!} + \frac{\delta}{h} \right).
 \end{aligned}$$

Первое слагаемое в скобках соответствует вкладу в суммарную ошибку, определяемую аналитической аппроксимацией, второе – вкладу ошибки численного интегрирования. Ясно, что оптимальным будет выбор параметров, обеспечивающий обоим слагаемым одинаковый порядок малости, который достигается при  $\delta \sim \frac{(\bar{\lambda}h)^{s+1}}{\lambda}$ .

## 6. Заключение

Решение задачи  $\mathcal{L}_1$ -оптимальной фильтрации состояний МСП по непрерывным или дискретизованным наблюдениям не может быть получено в явной аналитической форме. Для реализации решения средствами вычислительной техники требуются классы специальных алгоритмов приближенного решения. Основным результатом данной статьи являются теоремы 1, 2 и формула (5.11), описывающие влияние выбранных аналитической аппроксимации и схемы численного интегрирования на итоговую точность приближения условного распределения. Сравнительный численный анализ конкретных алгоритмов, используемых для фильтрации состояний МСП по наблюдениям с аддитивными и мультипликативными шумами, будет представлен во второй части работы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 1.* Используя обозначения  $\Xi_r \triangleq \xi_1 \xi_2 \dots \xi_r$  и  $\Theta_r \triangleq \theta_1 \theta_2 \dots \theta_r$  для матриц со случайными элементами, оценки  $\hat{x}_r$  и  $\bar{x}_r(s)$  можно выписать в явной форме:

$$\hat{x}_r = \left( \mathbf{1} \Theta_r^\top \pi \right)^{-1} \Theta_r^\top \pi, \quad \bar{x}_r(s) = \left( \mathbf{1} \Xi_r^\top \pi \right)^{-1} \Xi_r^\top \pi.$$

Из определения (4.2) следует, что  $\xi_q^{kj} \leq \theta_q^{kj}$ , поэтому матрица  $\Theta_r - \Xi_r$  содержит только неотрицательные элементы. Для краткости запись зависимости от  $r$  в обозначениях  $\Xi_r$  и  $\Theta_r$  будет опущена. Верна следующая цепочка неравенств

$$\begin{aligned}
\text{E} \{ \|\hat{x}_r - \bar{x}_r(s)\|_1 \} &= \text{E} \left\{ \left\| \frac{1}{\mathbf{1}\Theta^\top \pi} \Theta^\top \pi - \frac{1}{\mathbf{1}\Xi^\top \pi} \Xi^\top \pi \right\|_1 \right\} = \\
&= \text{E} \left\{ \frac{1}{\mathbf{1}\Theta^\top \pi \mathbf{1}\Xi^\top \pi} \left\| \mathbf{1}\Xi^\top \pi (\Theta - \Xi)^\top \pi - \mathbf{1}(\Theta - \Xi)^\top \pi \Xi^\top \pi \right\|_1 \right\} \leq \\
(\text{П.1}) \quad &\leq \text{E} \left\{ \frac{1}{\mathbf{1}\Theta^\top \pi \mathbf{1}\Xi^\top \pi} \left( \mathbf{1}\Xi^\top \pi \|(\Theta - \Xi)^\top \pi\|_1 + \mathbf{1}(\Theta - \Xi)^\top \pi \|\Xi^\top \pi\|_1 \right) \right\} = \\
&= 2\text{E} \left\{ \frac{1}{\mathbf{1}\Theta^\top \pi} \mathbf{1}(\Theta - \Xi)^\top \pi \right\}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим вспомогательную оценку

$$\check{x}_r \triangleq \text{E} \{ X_{t_r} \mathbf{I}_{A_r^s}(\omega) | \mathcal{O}_r \}.$$

Из абстрактного варианта формулы Байеса следует, что  $\check{x}_r = \frac{1}{\mathbf{1}\Theta^\top \pi} \Xi^\top \pi$  и

$$(\text{П.2}) \quad \hat{x}_r - \check{x}_r = \text{E} \left\{ X_{t_r} \mathbf{I}_{A_r^s}(\omega) | \mathcal{O}_r \right\} = \frac{1}{\mathbf{1}\Theta^\top \pi} (\Theta - \Xi)^\top \pi.$$

Из (П.1) и (П.2) следует, что для  $r = 1$  и  $\forall \pi \in \Pi$

$$\begin{aligned}
\text{E} \left\{ \|\hat{x}_1 - \bar{x}_1(s)\|_1 \right\} &\leq 2\text{E} \left\{ \left\| \text{E} \{ X_{t_1} \mathbf{I}_{\bar{a}_1^s}(\omega) | \mathcal{O}_1 \} \right\|_1 \right\} = \\
(\text{П.3}) \quad &= 2\text{E} \left\{ \sum_{n=1}^N \text{E} \left\{ X_{t_1}^n \mathbf{I}_{\bar{a}_1^s}(\omega) | \mathcal{O}_1 \right\} \right\} = 2\text{E} \left\{ \text{E} \{ \mathbf{I}_{\bar{a}_1^s}(\omega) | \mathcal{O}_1 \} \right\} = 2\text{P} \{ \bar{a}_1^s \}.
\end{aligned}$$

Процесс  $N_t^X$  общего числа скачков состояния  $X_t$  является считающим, и его квадратическая характеристика равна

$$\langle N^X, N^X \rangle_t = - \int_0^t \sum_{n=1}^N \lambda_{nn} X_s^n ds,$$

поэтому искомую вероятность можно оценить сверху следующим образом

$$(\text{П.4}) \quad \text{P} \{ \bar{a}_1^s \} \leq e^{-\bar{\lambda}h} \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{(\bar{\lambda}h)^k}{k!} = C_1 \frac{(\bar{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!}.$$

Из последнего неравенства и (П.3) следует истинность неравенства  $\sigma(s) \leq \leq 2C_1 \frac{(\bar{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!}$ , т.е. оценка локальной точности (4.7) верна.

С помощью марковского свойства пары  $(X_t, N_t^X)$  и (П.4) можно оценить сверху и вероятность  $\mathbf{P} \{ \bar{A}_r^s \} : \mathbf{P} \{ \bar{A}_r^s \} \leq 1 - \left( 1 - C_1 \frac{(\bar{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!} \right)^r$ , из чего следует истинность оценки глобальной точности (4.8). Теорема 1 доказана.

*Доказательство теоремы 2.* Итак,  $\tilde{x}_1 = (\mathbf{1}\psi_1^\top \pi)^{-1} \psi_1^\top \pi$ ,  $\bar{x}_1 = (\mathbf{1}\xi_1^\top \pi)^{-1} \xi_1^\top \pi$  и  $\Delta_1 = \tilde{x}_1 - \bar{x}_1$ . Используя свойства матричных операций, легко показать, что  $[\gamma_1^\top \pi \mathbf{1} - \mathbf{1}\gamma_1^\top \pi I] \gamma_1^\top \pi = 0$ . Обе оценки обладают свойством устойчивости, поэтому  $\|\tilde{x}_1\|_1 = \|\bar{x}_1\|_1 = 1$ . Верна следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|\Delta_1\|_1 &= \frac{1}{\mathbf{1}\psi_1^\top \pi \mathbf{1}\xi_1^\top \pi} \left\| \mathbf{1}\xi_1^\top \pi \psi_1^\top \pi - \mathbf{1}\psi_1^\top \pi \xi_1^\top \pi \right\|_1 = \\ &= \frac{1}{\mathbf{1}\psi_1^\top \pi \mathbf{1}\xi_1^\top \pi} \left\| \mathbf{1}\xi_1^\top \pi \gamma_1^\top \pi - \mathbf{1}\gamma_1^\top \pi \xi_1^\top \pi \right\|_1 = \\ &= \frac{1}{\mathbf{1}\psi_1^\top \pi \mathbf{1}\xi_1^\top \pi} \left\| [\gamma_1^\top \pi \mathbf{1} - \mathbf{1}\gamma_1^\top \pi I] \xi_1^\top \pi \right\|_1 = \\ &= \frac{1}{\mathbf{1}\psi_1^\top \pi \mathbf{1}\xi_1^\top \pi} \left\| [\gamma_1^\top \pi \mathbf{1} - \mathbf{1}\gamma_1^\top \pi I] [\xi_1^\top \pi + \gamma_1^\top \pi] \right\|_1 = \\ &= \frac{1}{\mathbf{1}\xi_1^\top \pi} \left\| [\gamma_1^\top \pi \mathbf{1} - \mathbf{1}\gamma_1^\top \pi I] \tilde{X}_1 \right\|_1 \leq \\ &\leq \frac{1}{\mathbf{1}\xi_1^\top \pi} \left\| [\gamma_1^\top \pi \mathbf{1} - \mathbf{1}\gamma_1^\top \pi I] \right\|_1 \left\| \tilde{X}_1 \right\|_1 \leq \\ &\leq 2 \frac{\mathbf{1}\bar{\gamma}_1^\top \pi}{\mathbf{1}\xi_1^\top \pi} = \sum_{i=1}^N \pi_i \frac{\sum_{j=1}^N \bar{\gamma}_1^{ij}}{\sum_{k,\ell=1}^N \xi_1^{k\ell} \pi_k}. \end{aligned}$$

Используя последнее неравенство, (5.7) и (П.7), можно показать, что

$$\mathbf{E} \{ \mathbf{I}_{a_1^s}(\omega) \|\Delta_1\|_1 \} \leq 2 \sum_{i=1}^N \pi_i \int_{\mathbb{R}^M} \sum_{j=1}^N \bar{\gamma}^{ij}(y) dy \leq 2\delta.$$

Истинность первого неравенства (5.8) следует из того, что неравенство вверху выполняется для любого  $\pi \in \Pi$ .

Определим матрицы со случайными элементами – функции от  $\xi_r$  и  $\psi_r$ :

$$\Xi_{q,r} \triangleq \begin{cases} \xi_q \xi_{q+1} \dots \xi_r, & \text{если } q \leq r, \\ I & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\Psi_{q,r} \triangleq \begin{cases} \psi_q \xi_{q+1} \dots \psi_r, & \text{если } q \leq r, \\ I & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\Gamma_{q,r} \triangleq \Psi_{q,r} - \Xi_{q,r}.$$

Для доказательства теоремы 2 потребуется вспомогательная

Лемма 3. Если  $\phi_r \triangleq \phi_r(\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_r)$  – неотрицательная  $\mathcal{O}_r$ -измеримая случайная величина и  $\Phi_r \triangleq \frac{\phi_r}{\mathbf{1}\Xi_{1,r}^\top \pi}$ , то

$$(II.5) \quad \mathbb{E} \{ \mathbf{I}_{A_r^s}(\omega) \Phi_r \} = \int_{\mathbb{R}^M} \dots \int_{\mathbb{R}^M} \phi_r(y_1, \dots, y_r) dy_r \dots dy_1.$$

Доказательство леммы 3. Рассмотрим неотрицательную интегрируемую функцию  $\phi_1 = \phi_1(y) : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}_+$  и  $\mathcal{O}_1$ -измеримую случайную величину

$$(II.6) \quad \Phi_1 \triangleq \frac{\phi_1(\mathcal{Y}_1)}{\mathbf{1}\Xi_1^\top(\mathcal{Y}_1)\pi} = \frac{\phi_1(\mathcal{Y}_1)}{\sum_{i,j=1}^N \sum_{m=0}^s \int \mathcal{N} \left( \mathcal{Y}_1, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho^{i,j,m}(du) \pi_i}.$$

Найдем  $\mathbb{E} \{ \mathbf{I}_{a_1^s}(\omega) \Phi_1 \}$ :

$$(II.7) \quad \begin{aligned} & \mathbb{E} \{ \mathbf{I}_{a_1^s}(\omega) \Phi_1 \} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^M} \int_{\mathcal{D}} \frac{\phi_1(y) \sum_{k,\ell=1}^N \sum_{n=0}^s \mathcal{N} \left( y, fv, \sum_{q=1}^N v^q g_q \right) \rho^{k,\ell,n}(dv) \pi_k}{\sum_{i,j=1}^N \sum_{m=0}^s \int \mathcal{N} \left( y, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho^{i,j,m}(du) \pi_i} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^M} \phi_1(y) \frac{\sum_{k,\ell=1}^N \sum_{n=0}^s \int \mathcal{N} \left( y, fv, \sum_{q=1}^N v^q g_q \right) \rho^{k,\ell,n}(dv) \pi_k}{\sum_{i,j=1}^N \sum_{m=0}^s \int \mathcal{N} \left( y, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho^{i,j,m}(du) \pi_i} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^M} \phi_1(y) dy. \end{aligned}$$

Рассмотрим неотрицательную интегрируемую функцию  $\phi_2 = \phi_2(y_1, y_2) : \mathbb{R}^{2M} \rightarrow \mathbb{R}_+$  и  $\mathcal{O}_2$ -измеримую случайную величину

$$\begin{aligned} \Phi_2 & \triangleq \frac{\phi_2(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)}{\mathbf{1}\Xi_{1,2}^\top(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)\pi} = \\ &= \frac{\phi_2(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)}{\sum_{i_1, j_1=1}^N \sum_{m_1, m_2=0}^s \int \int \mathcal{N} \left( \mathcal{Y}_1, fu_1, \sum_{p_1=1}^N u^{p_1} g_{p_1} \right) \mathcal{N} \left( \mathcal{Y}_2, fu_2, \sum_{p_2=1}^N u^{p_2} g_{p_2} \right) \rho^{i_1, i_2, m_1}(du_1) \rho^{i_2, j_1, m_2}(du_2) \pi_i} \end{aligned}$$

и найдем  $\mathbb{E} \{ \mathbf{I}_{A_2^s}(\omega) \Phi_2 \}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ \mathbf{I}_{A_2^s}(\omega) \Phi_2 \} &= \int_{\mathbb{R}^M} \int_{\mathbb{R}^M} \phi_2(y_1, y_2) \times \\ &\times \frac{\sum_{k,k_2,\ell=1}^N \sum_{n_1,n_2=0}^s \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left( y_1, f v_1, \sum_{q_1=1}^N v^{q_1} g_{q_1} \right) \mathcal{N} \left( y_2, f v_2, \sum_{q_2=1}^N v^{q_2} g_{q_2} \right) \rho^{k,k_2,n_1}(dv_1) \rho^{k_2,\ell,n_2}(dv_2) \pi_k}{\sum_{i,i_2,j=1}^N \sum_{m_1,m_2=0}^s \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left( y_1, f u_1, \sum_{p_1=1}^N u^{p_1} g_{p_1} \right) \mathcal{N} \left( y_2, f u_2, \sum_{p_2=1}^N u^{p_2} g_{p_2} \right) \rho^{i,i_2,m_1}(du_1) \rho^{i_2,j,m_2}(du_2) \pi_i} \times \\ &\times dy_2 dy_1 = \int_{\mathbb{R}^M} \int_{\mathbb{R}^M} \phi_2(y_1, y_2) dy_2 dy_1. \end{aligned}$$

Справедливость утверждения леммы в общем случае  $\mathbb{E} \{ \mathbf{I}_{A_r^s}(\omega) \Phi_r \}$  проверяется аналогично. Лемма 3 доказана.

Оценим сверху норму ошибки  $\Delta_r = \tilde{x}_r - \bar{x}_r$ . Из определения матриц  $\Xi$ ,  $\Psi$  и  $\Gamma$  следует, что

$$(II.8) \quad \Gamma_{1,r} \triangleq \Psi_{1,r} - \Xi_{1,r} = \sum_{t=1}^r \Psi_{1,t-1} \gamma_t \Psi_{t+1,r}.$$

Проводя преобразования, аналогичные выкладкам для  $\Delta_1$ , получаем, что

$$(II.9) \quad \begin{aligned} \|\Delta_r\|_1 &\leq \frac{1}{\mathbf{1} \Xi_{1,r}^\top \pi} \left\| \left[ \Gamma_{1,r}^\top \pi \mathbf{1} - \mathbf{1} \Gamma_{1,r}^\top \pi I \right] \right\|_1 \leq \\ &\leq 2 \sum_{t=1}^r \frac{1}{\mathbf{1} \Xi_{1,r}^\top \pi} \mathbf{1} \Psi_{t+1,r}^\top \bar{\gamma}_t^\top \Psi_{1,t-1}^\top \pi. \end{aligned}$$

Для оценки вклада каждого слагаемого в (II.9) используем (II.5). Для простоты изложения рассмотрим случай  $r = 3$ , функцию  $\phi(y_1, y_2, y_3) : \mathbb{R}^{3M} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\phi(y_1, y_2, y_3) = \mathbf{1} \psi^\top(y_3) \bar{\gamma}^\top(y_2) \psi^\top(y_1) \pi$$

и  $O_3$ -измеримую случайную величину  $\Phi \triangleq \frac{\phi(y_1, y_2, y_3)}{\mathbf{1} \Xi_{1,3}^\top(y_1, y_2, y_3) \pi}$ . Оценим сверху следующее математическое ожидание:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ \mathbf{I}_{A_3^s}(\omega) \Phi \} &= \int_{\mathbb{R}^M} \int_{\mathbb{R}^M} \int_{\mathbb{R}^M} \sum_{i,j,k,m=1}^N \pi_i \psi^{ij}(y_1) \bar{\gamma}^{jk}(y_2) \psi^{km}(y_3) dy_3 dy_2 dy_1 = \\ &= \sum_{i,j,k=1}^N \pi_i \sum_{\ell=1}^L \varrho_\ell^{ij} \int_{\mathbb{R}^M} \bar{\gamma}^{jk}(y_2) dy_2 \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^L \varrho_n^{km} = \\ &= \mathfrak{W} \sum_{i,j=1}^N \pi_i \sum_{\ell=1}^L \varrho_\ell^{ij} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^M} \bar{\gamma}^{jk}(y_2) dy_2 \leq \mathfrak{W} \delta \sum_{i=1}^N \pi_i \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^L \varrho_\ell^{ij} \leq \mathfrak{W}^2 \delta. \end{aligned}$$

Действуя аналогичным образом, можно показать, что для произвольного  $r \geq 2$

$$\mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{A_r^s}(\omega) \frac{\mathbf{1} \Psi_{t+1,r}^\top \bar{\gamma}_t^\top \Psi_{1,t-1}^\top \pi}{\mathbf{1} \Xi_{1,r}^\top \pi} \right\} \leq \mathfrak{W}^{r-1} \delta.$$

Тогда окончательно  $\mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{A_r^s}(\omega) \|\Delta_r\|_1 \right\} \leq 2r \mathfrak{W}^{r-1} \delta$ , и истинность второго неравенства (5.8) следует из того, что неравенство сверху выполняется для любого  $\pi \in \Pi$ .

Теорема 2 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wonham W.* Some applications of stochastic differential equations to optimal nonlinear filtering // SIAM J. Contr. Optim. 1964. P. 347–369.
2. *Rabiner L.R.* A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition // Proc. IEEE. 1989. V. 77. P. 257–286.
3. *Ephraim Y., Merhav N.* Hidden Markov processes // IEEE Transactions on Information Theory. 2002. V. 48. No. 6. P. 1518–1569.
4. *Cappé O., Moulines E., Ryden T.* Inference in Hidden Markov Models. Berlin: Springer, 2005.
5. *Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B.* Hidden Markov Models: Estimation and Control. New York: Springer, 2008.
6. *Kloeden P., Platen E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer, 1992.
7. *Kahaner D., Moler C., Nash S.* Numerical Methods and Software. New Jersey: Prentice Hill, 1989.
8. *Isaacson E., Keller H.* Analysis of Numerical Methods. New York: Dover Publications, 1994.
9. *Stoer J., Bulirsch R.* Introduction to Numerical Analysis. New York: Springer, 1993.
10. *Кущнер Г.* Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. М.: Физматлит, 1985.
11. *Kushner H., Dupuis P.* Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time. New York: Springer, 2001.
12. *Ito K., Rozovskii B.* Approximation of the Kushner Equation for Nonlinear Filtering // SIAM J. Contr. Optim. 2000. V. 38. No. 3. P. 893–915.
13. *Clark J.* The design of robust approximations to the stochastic differential equations of nonlinear filtering / J.K. Skwirzynski (ed.), Communication systems and random process theory. Amsterdam. Sijthoff and Noordhoff, 1978.
14. *Malcolm V., Elliott R., van der Hoek J.* On the numerical stability of time-discretized state estimation via Clark transformations // Proc. 42nd IEEE Conf. Decis. Contr. 2003. Maui. P. 1406–1412.
15. *Yin G., Zhang Q., Liu Y.* Discrete-time approximation of Wonham filters // J. Control Theory Appl. 2004. No. 2. P. 1–10.
16. *Platen E., Bruti-Liberati N.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance. Berlin: Springer, 2010.

17. *Crisan D., Kouritzin M., Xiong J.* Nonlinear filtering with signal dependent observation noise // *Electron. J. Probab.* 2009. No. 14. P. 1863–1883.
18. *Dragan V., Morozan T., Stoica A.* *Mathematical Methods in Robust Control of Discrete-Time Linear Stochastic Systems.* New York: Springer, 2010.
19. *Dragan V., Aberkane S.*  $\mathcal{H}_2$ -Optimal Filtering for Continuous-Time Periodic Linear Stochastic Systems with State-Dependent Noise // *Syst. Control Lett.* 2014. No. 66. P. 35–42.
20. *Борисов А.В.* Фильтрация Вонэма по наблюдениям с мультипликативными шумами // *АиТ.* 2018. № 1. С. 52–65.  
*Borisov A.V.* Wonham Filtering by Observations with Multiplicative Noises // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 1. P. 39–50.
21. *Борисов А.В.* Применение методов оптимальной фильтрации для оперативного оценивания состояний сетей массового обслуживания // *АиТ.* 2016. № 2. С. 115–141.  
*Borisov A.V.* Application of Optimal Filtering Methods for On-Line of Queuing Network States // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 2. P. 277–296.
22. *Хубер П.* Робастность в статистике. М.: Мир, 1984.
23. *Anderson B., Moore J.* *Optimal Filtering.* New Jersey: Prentice Hill, 1979.
24. *Takeuchi Y., Akashi H.* Least-squares state estimation of systems with state-dependent observation noise // *Automatica.* 1985. V. 21. No. 3. P. 303–313.
25. *Борисов А.В.* Фильтрация состояний марковских скачкообразных процессов по дискретизованным наблюдениям // *Информатика и ее применения.* 2018. Т. 12. №. 3. С. 115–121.
26. *Bäuerle N., Gilitschenski I., Hanebeck U.* Exact and Approximate Hidden Markov Chain Filters Based on Discrete Observations // *Statistics & Risk Modeling.* 2016. V. 32. No. 3–4. P. 159–176.
27. *James M., Krishnamurthy V., Le Gland F.* Time Discretization of Continuous-Time Filters and Smoothers for HMM Parameter Estimation // *IEEE Trans. Autom. Contr.* 1996. V. 42. No. 2. P. 593–605.
28. *Бертсекас Д., Шрив С.* Стохастическое оптимальное управление. Случай дискретного времени. М.: Физматлит, 1985.
29. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* *Статистика случайных процессов.* М.: Наука, 1974.
30. *Cvitanić J., Liptser R., Rozovskii B.* A filtering approach to tracking volatility from prices observed at random times // *Annals Appl. Probab.* 2006. V. 16. No. 3. P. 1633–1652.
31. *Боровков А.А.* *Асимптотические методы в теории массового обслуживания.* М.: Физматлит, 1995.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.*

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 20.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020