



В.С. Пугачев
(25.03.1911—25.03.1998)

© 2020 г. **А.И. КИБЗУН**, д-р физ.-мат. наук (kibzun@mail.ru)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)),
И.Н. СИНИЦЫН, д-р техн. наук (sinitsin@dol.ru)
(Федеральное государственное учреждение
“Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление”
Российской академии наук” (ФИЦ ИУ РАН), Москва)

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ОПТИМИЗАЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ¹

Приводится обзор статей, посвященных современным проблемам теории оптимизации стохастических систем. В частности, в ряде статей исследуются задачи оптимального управления стохастическими системами. В другой группе статей рассматриваются задачи фильтрации и идентификации. Кроме того, изучаются задачи стохастического программирования для статических стохастических систем.

Ключевые слова: стохастические задачи, стохастическое оптимальное управление, теория фильтрации, теория идентификации, стохастическое программирование.

DOI: 10.31857/S000523102011001X

¹ Работа Кибзуна А.И. выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-07-00617 А).

1. Введение

Данный номер посвящен 110-летию со дня рождения (25 марта 1911 г.) академика В.С. Пугачева, являющегося выдающимся ученым, основоположником статистической теории управляемых систем, автором фундаментальных работ в области авиационной баллистики и динамики полета, теории управления и информатики, теории дифференциальных уравнений и теории вероятностей.

В номер включены статьи известных российских ученых, работающих в области оптимизации стохастических систем. Все авторы хорошо знали академика В.С. Пугачева, являясь его коллегами, учениками или учениками учеников.

Статьи отражают современное состояние теории оптимизации стохастических систем. В частности, в этих работах большое внимание уделяется постановкам, в которых присутствуют одновременно случайные и неопределенные факторы. В номере представлены как чисто теоретические работы, так и прикладные исследования, направленные на разработку вычислительных алгоритмов решения поставленных стохастических задач. В частности, исследуются задачи фильтрации и идентификации, задачи оптимального управления стохастическими динамическими системами, задачи стохастического программирования и задачи анализа стохастических систем.

2. Обзор полученных результатов

Рассмотрим основные результаты, полученные в представленных публикациях.

В рамках теории оптимального управления получены следующие результаты.

В [1] рассматривается задача оптимального управления дискретной стохастической системой с критерием в форме вероятности первого достижения границ заданной области. Формулируются и доказываются достаточные условия оптимальности в форме метода динамического программирования. С помощью поверхностей уровней 1 и 0 функции Беллмана находятся двусторонние оценки функции оптимального значения вероятностного критерия, и предлагается способ построения субоптимального управления. Формулируются условия эквивалентности с задачей оптимального управления с вероятностным терминальным критерием. Рассматривается пример.

В [2] рассматривается задача оптимального в среднем управления линейной гибридной системой, непрерывное движение которой чередуется с дискретными изменениями (переключениями) со сменой пространства состояний. Начальное состояние системы случайное. Качество управления характеризуется средним значением квадратичного функционала качества управления отдельной траекторией. Моменты переключений и их количество заранее не заданы. Они определяются в результате минимизации среднего значения функционала качества управления. Последняя задача минимизации конечномерная и может быть решена многими методами. Для рассматриваемой задачи классический принцип разделения не выполняется. Принцип разделения позволяет свести задачу оптимального в среднем управления детерми-

нированной системой со случайным начальным состоянием к совокупности двух задач — оптимального управления одной траекторией и оптимального наблюдения. Решением задачи наблюдения служит оценка начального состояния, например его математическое ожидание. Эта оценка используется в оптимальном позиционном управлении, полученном при решении задачи управления одной траекторией. Обоснованием такого подхода для линейно-квадратичных задач (ЛКЗ) управления гибридной системой переменной размерности (ГСПР) служит доказанный в статье так называемый условный принцип разделения. По сравнению с обычным принципом разделения, справедливым для ЛКЗ оптимального в среднем управления непрерывными, дискретными и непрерывно-дискретными системами, условный принцип разделения сложнее с вычислительной точки зрения. Для его применения нужно вычислить и запомнить моментные функции цены, которые зависят от нарастающего количества моментов переключений. Это существенно повышает требования к вычислительным ресурсам, необходимым для численного решения задачи. Если количество допустимых переключений небольшое из-за технических ограничений, то решение задачи упрощается. Условный принцип разделения можно применять и для нелинейных ГСПР. Поскольку принцип разделения для нелинейных систем не выполняется, получаемое управление не будет оптимальным в среднем. Однако на практике это субоптимальное управление часто оказывается вполне приемлемым. Приводятся примеры применения условного и классического принципов разделения.

В [3] рассматриваются дискретные линейные системы с переключениями в повторяющемся режиме. Системы находятся под действием случайных внешних возмущений, и в измерениях присутствуют аддитивные шумы. Предлагаются два метода синтеза управления с итеративным обучением. Оба метода основаны на построении вспомогательной 2D-модели в форме дискретного повторяющегося процесса. Первый метод основан на установлении условий диссипативности указанной модели при специальном выборе функций запаса и накопления. Такой выбор позволяет затем найти управление, в общем случае нелинейное, которое гарантирует сходимость процесса обучения. Вторым методом используется линейный закон коррекции управления с итеративным обучением заданного вида, при этом сходимость процесса обучения гарантируется условиями устойчивости вспомогательной 2D-модели. Оба предложенных закона управления используют в своей структуре стационарный фильтр Калмана. Для получения условий устойчивости используется дивергентный метод векторных функций Ляпунова. Приводится пример, демонстрирующий возможности и особенности нового метода. Приведенный пример показывает, что когда переключения наблюдаемы, управление с переключением позволяет ускорить сходимость процесса обучения. Дальнейшего исследования требует вопрос выбора некоторой нелинейной функции в методе синтеза на основе диссипативности. Открытым остался вопрос о влиянии динамики фильтра Калмана на скорость сходимости процесса обучения и точность. Значительный интерес представляют сетевые задачи управления с итеративным обучением, где переключения являются естественной моделью изменений информационно-структурной сети. Комбинация управления с итеративным обу-

чением и управления с обратной связью также представляет интересную задачу для дальнейших исследований.

В [4] сформулированы и доказаны достаточные условия терминальной инвариантности нелинейных динамических стохастических управляемых систем диффузионно-скачкообразного типа. Скачкообразная компонента имеет вид интеграла по случайной мере Пуассона. Предполагается, что параметры меры (интенсивность и распределение величин скачков) меняются со временем. Предлагаются как условия инвариантности по возмущениям при заданной начальной точке, так и условия абсолютной инвариантности, обеспечивающие постоянство значения терминального критерия при любых начальных данных. Применимость результатов продемонстрирована на ряде модельных примеров, включающих в себя результаты численного моделирования и аналитическое исследование построенных терминально инвариантных динамических систем. Теоретические исследования инвариантных по терминальному критерию систем далеки от завершения. Полученные в [4] общие достаточные условия инвариантности нелинейных стохастических систем в ряде частных случаев приобретают весьма интересные и неочевидные свойства. Однозначно подлежат внимательному исследованию линейные системы, а также системы с линейными по состоянию коэффициентами как в непрерывном случае, так и при наличии скачков, для которых условия в общем виде могут быть доведены до простых регулярных выражений. Еще больше предстоит сделать в практическом плане. Многие математические модели реальных физических процессов в настоящее время содержат случайные параметры, достаточно часто имеющие вид диффузионных или скачкообразных компонент стохастического уравнения. Условия терминальной инвариантности позволяют не приближенно, а точно решать на основе таких моделей множество актуальных прикладных проблем управления. Достаточно сказать, что некоторые модели, рассмотренные ранее, могут быть уточнены за счет введения параметров, учитывающих случайные внешние воздействия. Авторы [4] надеются охватить по крайней мере часть из указанных вопросов в своих дальнейших исследованиях.

В [5] было предложено новое позиционное управление, приближенное к оптимальному в многошаговой задаче портфельной оптимизации с вероятностным критерием. Критерием оптимальности выступает вероятность достижения и превышения капитала инвестора в терминальный момент времени некоторого заранее заданного уровня. Соотношения, на основании которых построено предлагаемое управление, получены с применением формулы полной вероятности и формирования управления в классе кусочно-постоянных управлений. На каждом шаге предлагаемое управление получается исходя из решения ряда задач одномерной условной нелинейной оптимизации. В рассмотренном примере продемонстрировано преимущество предлагаемого управления над известными универсальными управлениями. Рассмотренный подход и предлагаемое управление можно обобщить на случай произвольного количества рискованных активов на каждом шаге, не находя при поиске вероятностной стратегии на каждом шаге детерминированный эквивалент, как в [5], а, например, используя дискретизацию вероятностной меры,

что является предметом дальнейших исследований, как и исследование статистических свойств предлагаемого управления.

В теории фильтрации и идентификации получены следующие результаты.

В [6] на примере решенной задачи оптимизации линейного выхода нелинейной дифференциальной системы по квадратичному критерию обсуждаются практические варианты решения аналогичной задачи для случая неполной информации о состоянии. На основе концепции разделения задач управления и фильтрации предложено два варианта субоптимального управления: путем формального разделения задач и на основании альтернативного представления переменной состояния, использующего метод условно-оптимальной фильтрации состояний стохастических дифференциальных систем наблюдения В.С. Пугачева. Любой из предложенных вариантов потребует существенных усилий для численной реализации и значительных вычислительных ресурсов. Предлагается альтернатива традиционному практическому подходу к синтезу субоптимального управления в задаче с неполной информацией, состоящему в формальной замене в решении состояния на его оценку. Вместо задачи оптимизации выхода, порождаемого исходной моделью дифференциального уравнения, в качестве состояния используется оценка условно-оптимального фильтра. Предложен вариант численной реализации предлагаемого алгоритма на основе имитационного компьютерного моделирования. Практическая реализация описанных алгоритмов и апробация их для оптимизации функционирования программных систем хотя бы в рамках модельных экспериментов — ближайшая перспектива.

В [7] предлагается новый подход для решения задачи фильтрации в линейных системах по неполным измерениям, где характеристики динамического шума точно неизвестны, а в измерениях могут присутствовать аномальные негауссовские ошибки. В основе предлагаемого алгоритма лежит идея совместного использования адаптивного фильтра Калмана и обобщенного метода наименьших модулей. На примерах численного моделирования показано, что в сравнении с классическим методом оптимальной линейной фильтрации решение обладает меньшей чувствительностью к кратковременным выбросам в измерениях и обеспечивает быструю настройку параметров динамики системы. Разработан алгоритм робастной фильтрации, который обладает свойством отказоустойчивости по отношению к аномальным ошибкам в измерениях и адаптивными свойствами по отношению к модели динамического шума системы. Было проведено численное моделирование решения задачи сопровождения цели в линейной системе с двукратным резервированием измерений. Результаты моделирования показали, что робастный фильтр повышает эффективность оценки по сравнению с классическим фильтром Калмана, когда цель выполняет неучтенные в модели маневры. Одновременно с этим обеспечивается устойчивость оценки к систематическим ошибкам в одном из источников измерений, а также к симметричным помехам, распределенным по закону Коши. Разработанный алгоритм устойчив к импульсным помехам в более чем 30 % измерений. В другой ситуации, когда в модели не учитывается увеличение дисперсии нормального шума по всем измерениям, эффективность оценки робастного фильтра снижается. В случае когда ошибки по всем источникам измерений содержат смещенную составляющую, отказы-

устойчивость обеспечивается только условно: существует пороговое значение вероятности появления смещенной ошибки в измерениях, для которой эффективность оценки резко снижается. Разработанный алгоритм неустойчив к медленному увеличению математического ожидания ошибки в одном из источников измерений. Для компенсации указанных недостатков может потребоваться использование дополнительных источников измерений, что является предметом дальнейших исследований. Другим направлением является использование разработанного метода в нелинейных системах. Так как разработанный алгоритм относится к классу алгоритмов «прогноз–коррекция», для работы с нелинейными системами достаточно заменить шаги прогноза и коррекции на соответствующие процедуры, например метода псевдоизмерений или сигма-точечного фильтра. Разработан алгоритм робастной фильтрации, который обладает свойством отказоустойчивости по отношению к аномальным ошибкам в измерениях и адаптивными свойствами по отношению к модели динамического шума системы. В другой ситуации, когда в модели не учитывается увеличение дисперсии нормального шума по всем измерениям, эффективность оценки робастного фильтра снижается. В случае когда ошибки по всем источникам измерений содержат смещенную составляющую, отказоустойчивость обеспечивается только условно: существует пороговое значение вероятности появления смещенной ошибки в измерениях, для которой эффективность оценки резко снижается. Предлагаемый алгоритм может быть использован для решения навигационной задачи на борту летательных аппаратов или для решения задачи сопровождения цели.

В [8] рассматривается один из возможных способов решения задачи оценки неизвестных параметров динамических моделей, описываемых дифференциально-алгебраическими уравнениями. Оценка параметров производится по результатам наблюдений за поведением математической модели. Значения параметров находятся в результате минимизации критерия, описывающего суммарное квадратическое отклонение значений координат вектора состояния от полученных при измерениях точных значений в различные моменты времени. На значения параметров наложены ограничения параллелепипедного типа. Для решения задачи оптимизации предлагается пакетный метод адаптивного случайного поиска, использующий идеи алгоритмов машинного обучения и анализа больших данных. Предложенный метод применен при решении трех модельных задач, их результаты сравнивались с полученными при помощи градиентных методов оптимизации, используемых в процедурах машинного обучения, а также метаэвристическими алгоритмами. Приведены результаты сравнения эффективности его применения по сравнению с известными градиентными методами оптимизации в машинном обучении: SGD, Classical Momentum, NAG, AdaGrad, RMSProp, Adam, Adamax, Nadam на трех модельных примерах.

В [9] на основе вейвлет канонических разложений (ВЛКР) рассматриваются задачи синтеза линейных оптимальных в среднем квадратическом (с.к.) фильтров. Разработано вейвлет методическое и инструментальное программное обеспечение для с.к. оптимального синтеза существенно нестационарных линейных фильтров на основе вейвлет канонических разложений в среде MATLAB. Для стохастических систем в условиях стохастических одно-

и многократных ударных воздействий, описываемых каноническими разложениями (КР) и ВЛКР, разработано специальное инструментальное обеспечение для оптимизации фильтров, оценки и идентификации ударных воздействий. Эти результаты нашли применение в задачах анализа и моделирования, оценки и идентификации ударных воздействий — в прецизионных информационно-управляющих системах. Рассматриваются сложные виброударные одно- и многомерные виброударные воздействия, представимые с помощью КР и ВЛКР. Приводится тестовый пример с результатами работы инструментального программного обеспечения в среде MATLAB.

Статья [4] посвящена разработке класса алгоритмов численного решения задачи фильтрации состояний марковских скачкообразных процессов по косвенным непрерывным наблюдениям в присутствии винеровских шумов. В качестве критерия оптимальности выступает средняя L_1 -норма ошибки оценки. Интенсивность шумов в наблюдениях может зависеть от оцениваемого состояния. Алгоритмы численного решения используют не исходные непрерывные, а дискретизованные по времени наблюдения. Особенностью предлагаемых алгоритмов является учет вероятности появления нескольких скачков оцениваемого состояния на интервале дискретизации наблюдений. Основным результатом являются утверждения о точности приближенного решения задачи фильтрации в зависимости от числа учитываемых скачков оцениваемого состояния, размера шага дискретизации по времени и применяемой схемы численного интегрирования. Эти утверждения служат теоретической основой последующего анализа конкретных численных схем реализации решения задачи фильтрации.

В теории стохастического программирования получены следующие результаты.

В [10] рассматривается задача о построении доверительного множества поглощения, представляющего собой множество начальных позиций системы, обеспечивающих с заданной вероятностью неперевышение функцией потерь в терминальный момент времени некоторого фиксированного уровня. Описанная задача аналогична задаче построения множеств уровня функции вероятности в задачах стохастического программирования. Предлагается подход к построению внешних и внутренних аппроксимаций доверительного множества поглощения. В [10], по сути, предлагается статистический подход к построению внутренней и внешней статистических аппроксимаций доверительного множества поглощения. На первом этапе строятся детерминированные внутренняя и внешняя аппроксимации. Затем полученные аппроксимации уточняются с помощью выборочных оценок. Получены оценки объема выборки, достаточного для построения указанных аппроксимаций. Получены теоретические оценки достаточного объема выборки для построения аппроксимаций. Отметим, что данный объем выборки одновременно гарантирует с заданной вероятностью то, что два построенных множества являются внутренней и внешней аппроксимациями истинного доверительного множества поглощения. Данная оценка улучшается для случая звездчатой функции потерь. Предлагается алгоритм построения аппроксимаций доверительного множества поглощения в двумерном случае. На численном примере показано, что указанные аппроксимации строятся при приемлемом объеме выбор-

ки. При этом обеспечивается близость внутренней и внешней аппроксимаций друг к другу. Конечно, для ряда задач достаточный объем выборки может быть уменьшен. Описание классов таких задач может являться предметом дальнейших исследований. Полученные аппроксимации применяются в задаче планирования производства.

3. Заключение

Составители тематического выпуска *АиТ* надеются, что читателей журнала заинтересуют все представленные статьи, объединенные общей тематикой, и они смогут, хотя бы частично, оценить современное состояние теории оптимизации стохастических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азанов В.М.* Оптимальное управление дискретной стохастической системой с вероятностным критерием и нефиксированным временем окончания // *АиТ.* 2020. № 12. С. 3–23.
2. *Бортаковский А.С.* Теорема разделения для оптимального в среднем управления гибридными системами переменной размерности // *АиТ.* 2020. № 11. С. 48–91.
3. *Пакишин П.В., Емельянова Ю.П.* Управление с итеративным обучением дискретными стохастическими системами с переключениями // *АиТ.* 2020. № 11. С. 95–113.
4. *Борисов А.В.* L_1 -оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов I: точное решение и численные схемы реализации // *АиТ.* 2020. № 11. С. 11–33.
5. *Игнатов А.Н.* О формировании позиционного управления в многошаговой задаче портфельной оптимизации с вероятностным критерием // *АиТ.* 2020. № 12. С. 50–66.
6. *Босов А.В.* Применение условно-оптимального фильтра для синтеза субоптимального управления в задаче оптимизации выхода нелинейной дифференциальной стохастической системы // *АиТ.* 2020. № 11. С. 34–47.
7. *Миллер Б.М., Колосов К.С.* Робастное оценивание на основе метода наименьших модулей и фильтра Калмана // *АиТ.* 2020. № 11. С. 74–94.
8. *Пантелеев А.В., Лобанов А.В.* Минипакетный метод адаптивного случайного поиска для параметрической идентификации динамических систем // *АиТ.* 2020. № 11. С. 114–137.
9. *Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Оптимизация стохастических систем на основе вейвлет канонических разложений // *АиТ.* 2020. № 11. С. 138–156.
10. *Кибзун А.И., Иванов С.В.* Построение доверительных множеств поглощения с помощью статистических методов // *АиТ.* 2020. № 12. С. 82–99.
11. *Хрусталева М.М., Царьков К.А.* Достаточные условия терминальной инвариантности стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа // *АиТ.* 2020. № 11. С. 157–173.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 25.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020