Автоматика и телемеханика, № 9, 2019

© 2019 г. **А.С. ПОЗНЯК, д-р техн. наук (apoznyak@ctrl.cinvestav.mx)**
(CINVESTAV-IPN, Мехико, Мексика)

РОБАСТНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ И НЕГАУССОВЫХ ШУМАХ: ПРОЦЕДУРА WMLLM[1]

Изложены основные идеи теории робастной идентификации, инициированной Я.З. Цыпкиным в 80-х гг. XX в. Показано, что параллельное применение "*процедуры отбеливания*" и рекуррентной версии min-max "*метода максимального правдоподобия*" (ММП) гарантирует свойство асимптотической согласованности процедуры. Также получено информационное неравенство Рао–Крамера и показано, что комбинированная процедура достигает информационной границы. Это означает, что для широкого класса регулярных наблюдений моделей ARX (авторегрессия с внешним входом) не существует никакого другого алгоритма идентификации, оценивающего неизвестные параметры асимптотически "быстрее", чем обсуждаемая здесь процедура, если распределение белого шума входа формирующего фильтра известно точно. Основная особенность этого метода заключается в возможном учете внешнего негауссовского белого шума, определенного (для данного класса допустимых распределений) на входе формирующего фильтра, создавая негауссовскую и коррелированную шумовую последовательность, влияющую на вход ARX-модели. Формулируется *почти наверное* сходимость и *асимптотическая нормальность* ошибки оценки. Если информация на входе формирующего фильтра является неопределенной, т.е. когда распределение принадлежит данному классу, то применяется подход Хубера с использованием робастной версии ММП.

Ключевые слова: робастная идентификация, процедура отбеливания, рекуррентный ММП, негауссовский белый шум, неравенство Рао–Крамера.

DOI: 10.1134/S0005231019090071

1. Введение

1.1. Основные подходы к описанию неопределенности в робастной идентификации

Идентификация, ориентированная на управление, направлена на разработку некоторых числовых процедур, обеспечивающих оценку моделей, подходящих для робастных методов синтеза управления [1, 2]. Такие процедуры идентификации должны обеспечивать не только номинальную модель, но и надежную оценку неопределенности, связанную с этой моделью. Различные подходы для описания неопределенности имеются в публикациях (например, [3–5]). Наиболее современные из них:

[1] WMLLM — от англ. "Whitening plus Maximum LikeLihood Method".

— *Стохастическое вложение* (СВ) [6, 7] — метод частотной области, который предполагает, что немоделированная динамика может быть адекватно представлена нестационарным случайным процессом, дисперсия которого увеличивается с частотой. Номинальная модель обычно получается путем оценки метода наименьших квадратов из данных частотной области; следовательно, необходимы гармонические входы. Неопределенность, связанная с моделью, оценивается из статистических свойств процесса случайного блуждания, описывающего немоделированную динамику;
— *Моделирование ошибки модели* (МОМ) [8] использует стандартные методы ошибки прогнозирования для определения номинальной модели по данным ввод-вывода во временно́й области [9]. Затем можно оценить немоделированную динамику, посмотрев на ту часть идентификационных невязок, которая исходит из входных данных. Идентификация динамики невязки (которая может быть выполнена с использованием снова методов ошибки прогнозирования) обеспечивает так называемую "модель ошибки модели". Область доверия модели ошибки модели позволяет оценить неопределенность, связанную с номинальной моделью, и может быть использована в качестве инструмента проверки модели;
— *Идентификация на множестве моделей* (ИММ) (см. обзор [10]) предоставляет эффективные алгоритмы для оценки набора выполнимых моделей, совместимых с имеющимися данными и равномерно граниченных (РО) ошибок допущения. Выбор номинальной модели обычно выполняется путем минимизации функции стоимости, связанной с возможным набором. Сам возможный набор дает размер неопределенности, связанной с номинальной моделью [11–13].

Каждый из этих методов явно использует наличие смещения ошибки модели, что может мотивировать термин "*робастная идентификация*". Первые два подхода были разработаны в статистической структуре, последний основан на предположениях о равномерно ограниченной ошибке (РОО).

1.2. Неформальное описание проблемы и полученные результаты в ИПУ под руководством профессора Я.З. Цыпкина

Эта статья представляет основные идеи робастной теории идентификации, которая была инициирована Я.З. Цыпкиным в 80-е гг. XX в. в Институте проблем управления (ИПУ) [14, 15] и относится к МОМ-классу подходов, связанных с проблемой идентификации. Далее показано, что параллельное применение "*процедуры отбеливания*" и периодической версии min-max "*метода максимального правдоподобия*" (ММП) гарантируют свойство *асимптотической состоятельности* этих процедур. Показывается, что комбинированная процедура достигает соответствующей информации Рао-Крамера. Это означает, что для широкого класса *регулярных наблюдений* ARX-модели (авторегрессия с внешним входом), не существует никакого другого алгоритма идентификации, оценивающего в асимптотике неизвестные параметры "быстрее" процедуры, обсуждаемой далее, если распределение белого шума на входе формирующего фильтра известно точно. Основная особенность этого метода заключается в возможном учете внешнего негауссова белого шу-

Рис. 1. Последний день А.С. Позняка в лаб. 7. 19 февраля 1993 г.

ма (определенного на заданном классе допустимых распределений) на входе формирующего фильтра, составляющего шумовую последовательность, действующего на входе ARX-модели, негауссовского и коррелированного. Также будут сформулированы *сходимость почти наверное*, а также *асимптотическая нормальность* ошибки оценки. Если информация на входе формирующего фильтра неопределенная, а именно когда распределение шума принадлежит данному классу, то применяется *подход Хубера* с использованием робастной (max-min) версии ММП [16]. Обратите внимание, что статьи [14–16] рассматривали только случай "белого шума", хотя и негауссовской природы.

Далее рассмотрим некоторые публикации группы Цыпкина, которые касались стохастических коррелированных шумовых возмущений, генерируемых формирующим фильтром известной или неизвестной структуры. Итак, в [17, 18] можно найти обзоры соответствующих статей, опубликованных до 1983 и 1990 гг. соответственно. Главные свойства стохастических градиентных процедур (как оптимизации, так и идентификации) изучались в [19]. Оценка параметров авторегрессионных процессов рассмотрена в [20]. Публикации [21, 22] имели дело с анализом асимптотических свойств (таких, как сходимость и асимптотическая нормальность) стохастических процедур при наличии коррелированного шума. Свойства стохастических алгоритмов, "оптимальных на классе" при наличии коррелированного шума (с известным формирующим фильтром), были проанализированы в [23]. Обобщенная версия метода инструментальных переменных, специально применяемая для

Рис. 2. Г.Н. Архипова, А.С. Позняк, Б.Т. Поляк, Я.З. Цыпкин и С.Р. Фаина. 1994 г.

идентификации модели ARMA, была предложена и изучена в [24]. Публикации [25–27] были посвященны анализу нелинейных рекуррентных алгоритмов идентификации с использованием нелинейных преобразований невязок и рекуррентных алгоритмов параметрических предсказаний вместе с расширенной версией метода наименьших квадратов (МНК). Свойство асимптотической нормальности и скорость сходимости алгоритмов идентификации с нелинейным преобразованием невязки как для стационарных, так и для нестационарных моделей изучены в [27, 28]. Публикации [29, 30] посвящены сходимости рекуррентных оценок моделей ARX с помехами, создаваемыми процессами ARMA. Некоторые версии обобщенных ускоренных алгоритмов идентификации были представлены в [31, 32]. Сводка основных результатов, касающихся анализа и разработки робастных процедур оптимизации и идентификации, может быть найдена в [33, 34].

1.3. Структура статьи

Раздел 2 представляет постановку задачи и обсуждает априорную доступную информацию. В разделе 3 основные определения (такие, как регулярные наблюдения и другие), используемые в этой статье, вводят неравенство Крамера–Рао и дают точное представление информационной матрицы Фишера, рассчитанной специально для рассматриваемой проблемы идентификации. В разделе 4 представлен анализ процедуры идентификации WMLLM. Раздел 5 представляет робастную (оптимальную на классе) версию WMLLM-процедуры и представляет два примера выбора нелинейного преобразования. Заключительные замечания завершают статью.

2. Постановка задачи и доступная априорная информация

2.1. ARX модель и формирующий фильтр

Рассмотрим ARX модель

$$\begin{gathered} y_n=\sum_{l=1}^{L} a_l y_{n-l}+\sum_{k=0}^{K} b_k w_{n-k}+\eta_n, \\ \eta_n+\sum_{s=1}^{K_2} d_{2,s}\eta_{n-s}=\xi_n+\sum_{s=1}^{K_1} d_{1,s}\xi_{n-s}, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $y_n \in \mathbb{R}^1$ — доступные скалярные наблюдения, w_n — измеримая детерминированная (или, вообще говоря, случайная) входная последовательность, а $\eta_n \in \mathbb{R}^1$ — цветной шум, который является результатом *формирующего фильтра* с функцией перехода

$$\begin{gathered} H\left(q^{-1}\right)=H_1\left(q^{-1}\right)/H_2\left(q^{-1}\right), \\ H_1\left(q^{-1}\right)=1+\sum_{s=1}^{K_1} d_{1,s}q^{-s}, \quad H_2\left(q^{-1}\right)=1+\sum_{s=1}^{K_2} d_{2,s}q^{-s} \end{gathered} \tag{2.2}$$

(q^{-1} — одношаговый оператор задержки, действующий как $y_{k-1}=q^{-1}y_k$) с независимой стационарной последовательностью $\{\xi_t\}$ с нулевым средним и ограниченной мощностью.

2.2. Основные предположения

1. Все случайные величины $\{w_n,\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ заданы на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$ с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_n\subseteq\mathcal{F}_{n+1}\subset\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}_{n-1}{:=}\sigma\left(y_{-l},\dots,y_{-1},\dots,y_{n-1};w_0,\dots,w_n;\eta_{-K_2},\dots,\eta_{n-1};\xi_{-K_1},\dots,\xi_{n-1}\right). \tag{2.3}$$

2. Для всех $n\geqslant 0$

$$\mathbf{E}\{\xi_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\} \overset{\text{п.н.}}{=} 0, \quad \mathbf{E}\{\xi_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\} \overset{\text{п.н.}}{=} \sigma_\xi^2<\infty \text{ (п.н. – почти наверное).} \tag{2.4}$$

3. Измеряемая входная последовательность $\{w_n\}_{n\geqslant 0}$ имеет ограниченную мощность

$$\mathbf{E}\left\{w_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right\} \overset{\text{п.н.}}{=} \sigma_{w,n}^2<\infty \tag{2.5}$$

и не зависит от $\{\xi_n\}$, т.е.

$$\mathbf{E}\left\{w_n\xi_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right\} \overset{\text{п.н.}}{=} w_n\mathbf{E}\left\{\xi_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right\} \overset{\text{п.н.}}{=} 0. \tag{2.6}$$

4. Формирующий фильтр предполагается устойчивым и "минимально-фазовым", т.е. оба полинома $H_1\left(q^{-1}\right)$ и $H_2\left(q^{-1}\right)$ гурвицевы, имеют все корни внутри единичного круга в комплексной плоскости и предполагаются известными.

5. ARX-объект (2.1) устойчивый: полином

$$H_0\left(q^{-1}\right) := 1 - \sum_{l=1}^{L} a_l q^{-l} \tag{2.7}$$

— гурвицев.

6. Формирующий фильтр $H\left(q^{-1}\right) = H_1\left(q^{-1}\right)/H_2\left(q^{-1}\right)$ устойчивый и имеет минимально-фазовую структуру, т.е. предполагается, что оба полинома $H_1\left(q^{-1}\right)$ и $H_2\left(q^{-1}\right)$ устойчивые.

2.3. Формат регрессии представления

Система (2.1) может быть представлена в так называемом *формате регрессии*

$$y_n = z_n^{\top} c + \eta_n, \tag{2.8}$$

где вектор

$$c = (a_1, \ldots, a_L; b_0, \ldots, b_K)^{\intercal} \in \mathrm{R}^{L+K+1} \tag{2.9}$$

представляет *набор неизвестных параметров* для оценивания и вектор

$$z_n := (y_{n-1}, \ldots, y_{n-L}; w_n, \ldots, w_{n-K})^{\intercal} \in \mathrm{R}^{L+K+1} \tag{2.10}$$

означает *обобщенный регрессионный измеримый (доступный онлайн) вход.*

2.4. Процесс отбеливания для робастных и минимально-фазообразующих фильтров

Модель (2.8) может быть символически представлена как

$$y_n = z_n^{\intercal} c + \eta_n = z_n^{\intercal} c + \frac{H_1(q)}{H_2(q)}\xi_n\,. \tag{2.11}$$

С учетом предположения 6 полиномы $H_1(q)$ и $H_2(q)$ устойчивы и, следовательно, можно применить обратный оператор $\frac{H_2(q)}{H_1(q)}$ с обеих сторон модели (2.11), получая

$$\begin{gathered}
\tilde{y}_n = \frac{H_2(q)}{H_1(q)} y_n, \quad \tilde{y}_{-s} := 0, \quad s = 0, 1, \ldots, K_1, \\
\tilde{z}_n = \frac{H_2(q)}{H_1(q)} z_n, \quad \tilde{z}_{-s} := 0, \quad s = 0, 1, \ldots, K_1, \qquad (2.12) \\
\tilde{\xi}_n := \frac{H_2(q)}{H_1(q)}\frac{H_1(q)}{H_2(q)}\xi_n = \xi_n + O_\omega\left(\lambda^n\right), \quad |\lambda| < 1,
\end{gathered}$$

где λ — одно из собственных значений (корней) многочленов $H_1(q)$ и $H_2(q)$, наиболее близкое к единичному кругу. Итак, наконец, после приложения "*процесса отбеливания*" (обратный оператор) получаем

$$\tilde{y}_n = \tilde{z}_n^{\mathsf{T}} c + \tilde{\xi}_n. \tag{2.13}$$

Замечание 1. Это означает, что интерактивное применение "процесса отбеливания" к рассматриваемой исходной модели (2.11) позволяет рассмотреть соответствующую преобразованную модель (2.12), которая имеет дело с "квази" белым шумом $\tilde{\xi}_n$, экспоненциально быстро стремящимся к точному белому шуму ξ_n, выполняя равенство

$$\left\| \tilde{\xi}_n - \xi_n \right\| = O_\omega(\lambda^n) \longrightarrow 0$$

при $n \longrightarrow \infty$.

2.5. Класс рекуррентных процедур идентификации с нелинейным преобразованием невязки

Рассмотрим следующий класс процедур рекуррентной идентификации, которые применяются к преобразованной модели (2.13) (после отбеливания):

$$\begin{gathered} c_n = c_{n-1} + \Gamma_n \tilde{z}_n \varphi\left(\tilde{y}_n - \tilde{z}_n^{\mathsf{T}} c_{n-1}\right), \\ c_0 - \text{произвольное начальное заданное значение}, \\ \Gamma_n = \left(\sum_{t=0}^{n} \tilde{z}_t \tilde{z}_t^{\mathsf{T}}\right)^{-1}, \quad n \geqslant n_0 := \left\{\min_k \sum_{t=0}^{k} \tilde{z}_t \tilde{z}_t^{\mathsf{T}}\right\} > 0. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Замечание 2. Обратите внимание, что Γ_n в (2.14) можно вычислить рекуррентно (как в методе наименьших квадратов):

$$\Gamma_n = \Gamma_{n-1} - \frac{\Gamma_{n-1} \tilde{z}_n \tilde{z}_n^{\mathsf{T}} \Gamma_{n-1}}{1 + \tilde{z}_n^{\mathsf{T}} \Gamma_{n-1} \tilde{z}_n}, \quad n \geqslant n_0 := \inf\{n : \Gamma_n > 0\}, \tag{2.15}$$

и Γ_n обладает (в принятых допущениях) следующим свойством:

$$\begin{gathered} \Gamma_n \overset{\text{п.н.}}{\simeq} \frac{1}{n} \mathcal{R}^{-1}, \\ \mathcal{R} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left\{\tilde{z}_k^{\mathsf{T}} \tilde{z}_k\right\} > 0. \end{gathered} \tag{2.16}$$

Здесь $\mathcal{R}$ — матрица ковариаций, $\mathbf{E}$ — математическое ожидание.

Замечание 3. Эта процедура была предложена и описана в [13, раздел 13.6.4; 34], но не было представлено никакого анализа.

2.6. Постановка задачи

З а д а ч а. Рассматриваемая проблема заключается в анализе последовательности $\{c_n\}_{n \geqslant 0}$, сгенерированной процедурой (2.14), и в демонстрации, что при специальном выборе нелинейной функции φ (с использованием ММП) процедура асимптотически оптимальна (или оптимальна на классе) в некотором вероятностном смысле, обеспечивая наиболее быструю сходимость c_n к действительному вектору параметров c. Будем называть эту процедуру "отбеливание плюс метод максимального правдоподобия" (WMLLM).

Чтобы сформулировать эту проблему в строго математической форме, необходимы следующие понятия и определения.

3. Регулярные наблюдения и информационное неравенство

Данные наблюдений, доступные на первых n шагах рекурсии (2.8),

$$\mathbf{y}_n := \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}, \tag{3.1}$$

содержат всю доступную до времени n информацию о параметре оценивания $c \in \mathbb{R}^N$. Функция

$$p(\mathbf{y}_n \mid c), \quad c \in C \subseteq \mathbb{R}^N \tag{3.2}$$

называется *совместной плотностью распределения* вектора $\mathbf{y}_n$.

3.1. Основные определения

Любая борелевская функция

$$c_n = c_n(\mathbf{y}_n) \in \mathbb{R}^N \tag{3.3}$$

может рассматриваться как оценка c.

О п р е д е л е н и е 1. 1.*Вектор-функцией*

$$\begin{gathered} m_n(c) := \mathbf{E}\{c_n\} = \int\limits_{Y_n} c_n(\mathbf{y}_n)\, p(\mathbf{y}_n \mid c)\, d\mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^N, \\ Y_n := \{\mathbf{y}_n \mid p(\mathbf{y}_n \mid c) > 0, \quad c \in C\}, \end{gathered} \tag{3.4}$$

называют ***среднее значение оценки*** *c_n, основанное на доступных наблюдениях $\mathbf{y}_n$.*

2. *Если*

$$m_n(c) = c, \tag{3.5}$$

тогда оценка c_n называется ***несмещенной****, и —* ***асимптотически несмещенной****, если*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} m_n(c) = c.$$

3. *Наблюдения* $\mathbf{y}_n$ *называются* ***регулярными на классе*** C *параметров, если*

$$\sup_{c\in C}\mathbf{E}\left\{\left\|\nabla_c \ln p\left(\mathbf{y}_n \mid c\right)\right\|^2\right\} = \tag{3.6}$$
$$= \sup_{c\in C}\int\limits_{Y_n}\left\|\nabla_c \ln p\left(\mathbf{y}_n \mid c\right)\right\|^2 p\left(\mathbf{y}_n \mid c\right) d\mathbf{y}_n < \infty,$$

и для всех $c \in C$

$$\mathbb{I}_F\left(c,n\right) := \mathbf{E}\Big\{\nabla_c \ln p\left(\mathbf{y}_n \mid c\right)\nabla_c^{\mathsf{T}} \ln p\left(\mathbf{y}_n \mid c\right)\Big\} = \tag{3.7}$$
$$= \int\limits_{Y_n}\left[\nabla_c \ln p\left(\mathbf{y}_n \mid c\right)\nabla_c^{\mathsf{T}} \ln p\left(\mathbf{y}_n \mid c\right)\right] p\left(\mathbf{y}_n \mid c\right) d\mathbf{y}_n > 0.$$

Матрица $\mathbb{I}_F\left(c,n\right)$ *называется* ***информационной матрицей Фишера*** *для набора доступных наблюдений* $\mathbf{y}_n$.

3.2. Информационное неравенство Крамера–Рао

Теорема 1. Для любого множества регулярных наблюдений Y_n *и для любой оценки* c_n *с дифференцируемой функцией среднего значения* $m_n(c)$ *выполняется следующее неравенство:*

$$\mathbf{E}\Big\{\left(c_n - c\right)\left(c_n - c\right)^{\mathsf{T}}\Big\} \geqslant \left[m_n(c) - c\right]\left[m_n(c) - c\right]^{\mathsf{T}} + \tag{3.8}$$
$$+\ \ \nabla m_n(c)\mathbb{I}_F^{-1}\left(c,n\right)\nabla^{\mathsf{T}} m_n(c).$$

Следствие. Для несмещенных оценок, удовлетворяющих

$$m_n(c) = c, \quad \nabla m_n(c) = I_{n\times n},$$

неравенство Крамера–Рао принимает вид

$$\mathbf{E}\Big\{\left(c_n - c\right)\left(c_n - c\right)^{\mathsf{T}}\Big\} \geqslant \mathbb{I}_F^{-1}\left(c,n\right). \tag{3.9}$$

Доказательство следствия. См., например, доказательство теоремы 13.3 в [34].

Замечание 4. Это неравенство означает, что после n регулярных наблюдений $\mathbf{y}_n$ ковариационная матрица ошибки оценки $(c_n - c)$, определяющая качество оценки, не может быть меньше соответствующей информационной матрицы Фишера (3.7). Другими словами, информационная матрица Фишера (3.7) определяет максимально возможное качество процесса идентификации, которое не может быть улучшено ни одним алгоритмом идентификации.

3.3. Вычисление информационной матрицы Фишера

Используя формулу Байеса

$$p(\mathbf{y}_n \mid c) = p(y_n \mid \mathbf{y}_{n-1}; c)\, p(\mathbf{y}_{n-1} \mid c) =$$
$$= \cdots = \left[\prod_{k=1}^{n} p(y_k \mid \mathbf{y}_{k-1}; c)\right] p(y_0 \mid c),$$

для *функции вероятности* $L_n(\mathbf{y}_n \mid c)$ получаем представление:

$$L_n(\mathbf{y}_n \mid c) := -\ln p(\mathbf{y}_n \mid c) = -\sum_{k=1}^{n} \ln p(y_k \mid \mathbf{y}_{k-1}; c) - \ln p(y_0 \mid c). \tag{3.10}$$

Определим также

$$u_t(c) := \nabla_c L_t(\mathbf{y}_t \mid c) - \nabla_c L_{t-1}(\mathbf{y}_{t-1} \mid c) =$$
$$= -\frac{\nabla_c p(y_t \mid \mathbf{y}_{t-1}; c)}{p(y_t \mid \mathbf{y}_{t-1}; c)} = -\nabla_c \ln p(y_t \mid \mathbf{y}_{t-1}; c),$$

что является *мартингал-разностью*, а именно

$$\mathbf{E}\{u_t(c) \mid \mathcal{F}_{t-1}\} \overset{\text{п.н.}}{=} 0,$$

и удовлетворяет свойству

$$\nabla_c u_t(c) = -\frac{\nabla_c^2 p(y_t \mid \mathbf{y}_{t-1}; c)}{p(y_t \mid \mathbf{y}_{t-1}; c)} + \frac{\nabla_c p(y_t \mid \mathbf{y}_{t-1}; c)\, \nabla_c^{\mathsf{T}} p(y_t \mid \mathbf{y}_{t-1}; c)}{p^2(y_t \mid \mathbf{y}_{t-1}; c)}. \tag{3.11}$$

Лемма 1. Для регулярных несмещенных наблюдений информационная матрица Фишера $\mathbb{I}_F(c,n)$ *может быть вычислена как*

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_F(c,n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left\{u_k u_k^{\mathsf{T}}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\{\nabla_c u_k(c)\} = \\ &= \mathbf{E}\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{\nabla_c p(y_k \mid \mathbf{y}_{k-1}; c)\, \nabla_c^{\mathsf{T}} p(y_k \mid \mathbf{y}_{k-1}; c)}{p^2(y_k \mid \mathbf{y}_{k-1}; c)}\right\}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.4. Асимптотическое неравество Крамера–Рао

Умножая обе части (3.9) на n, получаем

$$n\mathbf{E}\{(c_n - c)(c_n - c)^{\mathsf{T}}\} \geqslant \left(\frac{1}{n}\mathbb{I}_F(c,n)\right)^{-1}.$$

Взяв $n \longrightarrow \infty$, получаем

$$\liminf_{n \longrightarrow \infty} n\mathbf{E}\{(c_n - c)(c_n - c)^{\mathsf{T}}\} \geqslant \mathbb{I}_F^{-1}(c), \tag{3.13}$$

где

$$\mathbb{I}_F(c) := \limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n}\mathbb{I}_F(c,n) = \limsup_{n \longrightarrow \infty} \mathbf{E}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k(c)\, u_k^{\mathsf{T}}(c)\right\} > 0.$$

Замечание 5. Ввиду (3.11) следует

$$\mathbb{I}_F(c) = \limsup_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\mathbf{E}\left\{\nabla_c^2 L_n(\mathbf{y}_t \mid c)\right\}. \tag{3.14}$$

Действительно,

$$\mathbb{I}_F(c) = \limsup_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\mathbb{I}_F(c,n) = \limsup_{n\longrightarrow\infty}\mathbf{E}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\nabla_c u_t(c)\right\} =$$

$$= \limsup_{n\longrightarrow\infty}\mathbf{E}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\nabla_c^2\left[L_t(\mathbf{y}_t \mid c) - L_{t-1}(\mathbf{y}_{t-1} \mid c)\right]\right\} =$$

$$= \limsup_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\mathbf{E}\left\{\nabla_c^2\sum_{k=1}^{n}\left[L_t(\mathbf{y}_t \mid c) - L_{t-1}(\mathbf{y}_{t-1} \mid c)\right]\right\} =$$

$$= \limsup_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\mathbf{E}\left\{\nabla_c^2\left[L_n(\mathbf{y}_t \mid c) - L_0(\mathbf{y}_0 \mid c)\right]\right\} = \limsup_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\mathbf{E}\left\{\nabla_c^2 L_n(\mathbf{y}_t \mid c)\right\}.$$

3.5. Вычисление информации Фишера для ARX-модели с негауссовым цветным шумом

Используя (3.14) и вычисляя $\nabla_c p(y_k \mid \mathbf{y}_{k-1}; c)$, можно показать, что

$$\mathbb{I}_F(c,n) = I_{F,\xi}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left\{\tilde{z}_k\tilde{z}_k^{\mathsf{T}}\right\}, \tag{3.15}$$

где $I_{F,\xi}$ — информация Фишера о случайном стационарном значении ξ_k (3.18). Ввиду (3.13) имеем

$$\begin{gathered}\liminf_{n\longrightarrow\infty} n\mathbf{E}\left\{(c_n - c)(c_n - c)^{\mathsf{T}}\right\} \geqslant \mathbb{I}_F^{-1}(c) = \left(\limsup_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\mathbb{I}_F(c,n)\right)^{-1} = \\ = I_{F,\xi}^{-1}\left(\limsup_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left\{\tilde{z}_k\tilde{z}_k^{\mathsf{T}}\right\}\right)^{-1} = I_{F,\xi}^{-1}\mathcal{R}^{-1}\end{gathered} \tag{3.16}$$

с

$$\mathcal{R} := \limsup_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left\{\tilde{z}_k\tilde{z}_k^{\mathsf{T}}\right\} \tag{3.17}$$

и

$$\begin{gathered}I_{F,\xi} := \int\limits_{v_k}\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}p_\xi(x)\mid_{x=\tilde{v}_k}\right)^2}{p_\xi(\tilde{v}_k)}dv_k, \\ \tilde{v}_k = v_k - c^{\mathsf{T}}z_k + \sum_{s=1}^{K_2}d_{2,s}\eta_{k-s} + \sum_{s=1}^{K_1}d_{1,s}\xi_{k-s}.\end{gathered} \tag{3.18}$$

Остальная часть статьи посвящена разработке численных процессов идентификации, которые являются асимптотически оптимальными, а именно такими, которые достигают скорости сходимости $\sim \dfrac{1}{n} I_{F,\xi}^{-1} \mathcal{R}^{-1}$, или, что эквивалентно, обеспечивают выполнение точного равенства $(=)$ вместо $(\geqslant)$ в (3.16).

4. Анализ процедуры идентификации WMLLM

4.1. Асимптотическая сходимость с вероятностью единица

Теорема 2. *Если:*
1) ξ_n *— независимая одинаково распределенная последовательность с*

$$\mathbf{E}\left\{\xi_n\right\} = 0, \quad \mathbf{E}\left\{\xi_n^2\right\} = \sigma^2 > 0, \quad \mathbf{E}\left\{\xi_n^4\right\} = \mathbf{E}\left\{\xi_1^4\right\} < \infty;$$

2) *нелинейное преобразование* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям*

$$x\psi\left(x\right) \geqslant \delta x^2, \quad \delta > 0, \quad \psi\left(0\right) = 0, \quad S\left(x\right) \leqslant k_0 + k_1 x^2$$

с

$$\psi\left(x\right) := \mathbf{E}\left\{\varphi\left(x + \xi_n\right)\right\}, \quad S\left(x\right) := \mathbf{E}\left\{\varphi^2\left(x + \xi_n\right)\right\},$$

то

$$\Delta_n := c_n - c \underset{n \longrightarrow \infty}{\overset{\text{п.н.}}{\longrightarrow}} 0.$$

Доказательство. Следует схема доказательства теоремы 13.5 в [34], которая не учитывает процесс отбеливания. Итак, для доказательства данной теоремы достаточно изменить y_n и z_n на $\tilde{y}_n$ и $\tilde{z}_n$ соответственно. Первоначально этот метод был предложен и использован в [15].

Замечание 6. Обратите внимание, что если $\psi\left(x\right)$ дифференцируемо в точке $x = 0$, что соответствует $\psi' t(0) > 0$, то для достаточно больших n ввиду (2.14) имеем

$$\Delta_n = \left[I_{n\times n} - \frac{\psi'\left(0\right)}{n} \mathcal{R}^{-1} \tilde{z}_n \tilde{z}_n^{\intercal}\right] \Delta_{n-1} + \frac{1}{n} \mathcal{R}^{-1} \tilde{z}_n \left(o_\omega\left(1\right) + \zeta_n\right), \tag{4.1}$$

где

$$\zeta_n := \varphi\left(\xi_n + O_\omega\left(\lambda^n\right) - \tilde{z}_n^{\intercal} \Delta_{n-1}\right) - \psi\left(-\tilde{z}_n^{\intercal} \Delta_{n-1}\right),$$

удовлетворяя

$$\mathbf{E}\left\{\zeta_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right\} \overset{\text{п.н.}}{=} 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \Delta_{n-1} + \frac{1}{n}\mathcal{R}^{-1}\tilde{z}_n\varphi\left(\tilde{y}_n - \tilde{z}_n^{\mathsf{T}}\left[\Delta_{n-1}+c\right]\right) = \\
&= \Delta_{n-1} + \frac{1}{n}\mathcal{R}^{-1}\tilde{z}_n\varphi\left(\underbrace{\tilde{y}_n - \tilde{z}_n^{\mathsf{T}}c}_{\xi_n+O_\omega(\lambda^n)} - \tilde{z}_n^{\mathsf{T}}\Delta_{n-1}\right) = \\
&= \Delta_{n-1} + \frac{1}{n}\mathcal{R}^{-1}\tilde{z}_n\varphi\left(\xi_n + O_\omega\left(\lambda^n\right) - \tilde{z}_n^{\mathsf{T}}\Delta_{n-1}\right) = \\
&= \Delta_{n-1} + \frac{1}{n}\mathcal{R}^{-1}\tilde{z}_n\left[\underbrace{\psi\left(-\tilde{z}_n^{\mathsf{T}}\Delta_{n-1}\right)}_{\psi(0)+\psi'(0)\left(-\tilde{z}_n^{\mathsf{T}}\Delta_{n-1}\right)+o_\omega(1)} + \zeta_n\right] = \\
&= \Delta_{n-1} + \frac{1}{n}\mathcal{R}^{-1}\tilde{z}_n\left[-\psi'\left(0\right)\tilde{z}_n^{\mathsf{T}}\Delta_{n-1} + o_\omega\left(1\right) + \zeta_n\right].
\end{aligned}$$

Следуя лемме 13.7 в [34] и определяя новый процесс $\left\{\tilde{\Delta}_n\right\}_{n\geqslant 0}$ как

$$\tilde{\Delta}_n = \left[1 - \frac{\psi'\left(0\right)}{n}\right]\tilde{\Delta}_{n-1} + \frac{1}{n}\mathcal{R}^{-1}\tilde{z}_n\left(o_\omega\left(1\right)+\zeta_n\right), \quad \tilde{\Delta}_0 = \Delta_0, \tag{4.2}$$

можно сформулировать следующий вспомогательный результат.

4.2. $\sqrt{n}$-эквивалентность

Теорема 3 (о $\sqrt{n}$-эквивалентности). *В предположениях теоремы 2 процесс* (4.1) *является $\sqrt{n}$-эквивалентным процессом* (4.2), *т.е.*

$$\sqrt{n}\left(\Delta_n - \tilde{\Delta}_n\right) \underset{n\longrightarrow\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\longrightarrow}} 0. \tag{4.3}$$

Доказательство. Вытекает из леммы 13.7 в [34].

4.3. Асимптотическая нормальность процесса $\{\sqrt{n}\Delta_n\}_{n\geqslant 0}$

Свойство асимптотической нормальности процесса $\{\sqrt{n}\Delta_n\}_{n\geqslant 0}$ помогает оценить точную скорость сходимости (не только порядок сходимости, но и ее постоянную) процедуры идентификации (2.14).

Теорема 4 (об асимптотической нормальности). *Предположим, что выполняются условия теоремы 2 и, кроме того,*

$$\psi\left(0\right) = 0, \quad S\left(0\right) > 0, \quad \psi'\left(0\right) > 0{,}5. \tag{4.4}$$

Тогда процесс $\{\sqrt{n}\Delta_n\}_{n\geqslant 0}$ асимптотически нормален

$$\sqrt{n}\Delta_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} \mathcal{N}\left(0, V\right) \tag{4.5}$$

с ковариационной матрицей V, равной

$$V = \frac{S(0)}{2\psi'(0) - 1}\mathcal{R}^{-1}. \tag{4.6}$$

Доказательство. Вытекает непосредственно из теоремы 13.6 в [34].

Замечание 7. Матрица V определяет **скорость сходимости** процедуры (2.14), т.е.

$$\Delta_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\xrightarrow{d}} \mathcal{N}\left(0, n^{-1}V\right).$$

Лемма 2. *Согласно принятым предположениям*

$$V \geqslant I_{F,\xi}^{-1}\mathcal{R}^{-1}, \tag{4.7}$$

где нижняя граница в (4.7) *совпадает с границей Крамера–Рао* (3.16) *и достигается при нелинейной функции в* (2.14)

$$\varphi(v) = \varphi^*(v) := -I_{F,\xi}^{-1}\frac{d}{dv}\ln p_\xi(v). \tag{4.8}$$

Доказательство. Вытекает непосредственно из очевидных соотношений

$$0 \leqslant \left[1 - \psi'(0)\right]^2 = 1 - 2\psi'(0) + \left[\psi'(0)\right]^2,$$
$$\left[\psi'(0)\right]^2 \geqslant 2\psi'(0) - 1,$$

с применением неравенства Коши–Шварца.

Итак, лучшая (асимптотически оптимальная) процедура идентификации ММП для цветных шумовых возмущений в (2.14), когда функция плотности распределения $\ln p_\xi(v)$ шума на входе формирующего фильтра точно известна, выглядит следующим образом

$$c_n = c_{n-1} - I_{F,\xi}^{-1}\Gamma_n\tilde{z}_n\frac{d}{dv}\ln p_\xi(v)\mid_{v=\tilde{y}_n - \tilde{z}_n^{\intercal}c_{n-1}}. \tag{4.9}$$

Замечание 8. Обратите внимание, что не существует никакого другого алгоритма, обеспечивающего асимптотическую скорость сходимости лучше, чем процедура (4.9).

5. Робастная версия процедуры WMLLM

5.1. Робастность Хубера–Поляка–Цыпкина

Как только что отмечено, процедура численной оценки (4.9) асимптотически эффективна, только если точная информация о функции плотности распределения шума p_ξ имеется в наличии. Это предположение практически никогда не может быть реализовано в точности, поскольку оно, по сути, является статистическим по своей природе и может быть обеспечено только с некоторым "*уровнем достижимости*". Это в точности означает, что на практике приходится иметь дело не с точной плотностью шума p_ξ, а с классом возможных шумов и их плотностей, а именно: иметь дело с классом шумов, соответствующие плотности которых принадлежат некоторому классу $\mathcal{P}$, т.е.

$$p_\xi \in \mathcal{P}. \tag{5.1}$$

Процедура рекуррентного оценивания (2.14) с нелинейным преобразованием невязки φ обеспечивает скорость сходимости, равную (в "смысле распределения") (4.6), т.е.

- порядок скорости сходимости равен $1/n$,
- и константа (фактически, матрица) сходимости равна V.

Как следует из (4.6), V зависит от реального распределения плотности шума p_ξ (так как $S(0)$, $\psi'(0)$ и $\mathcal{R}$ могут зависеть от p_ξ) и от нелинейной функции φ (через $S(0)$ и $\psi'(0)$). Поэтому чтобы подчеркнуть эту зависимость, будем использовать обозначение

$$V = V(p_\xi, \varphi).$$

Следуя [33] и [16], введем основное определение этого раздела.

Определение 2. *Пара функций $\left(p_\xi^*, \varphi^{**}\right)$ определяет процедуру оценки (4.9) с нелинейным преобразованием невязки φ^*, которая является робастной относительно плотности распределения p_ξ, принадлежащей классу $\mathcal{P}$, если для любой допустимой φ, удовлетворяющей условиям теоремы 4, и любой плотности распределения шума $p_\xi \in \mathcal{P}$ выполняются следующие неравенства "седловой точки":*

$$V(p_\xi, \varphi^{**}) \leqslant V\left(p_\xi^*, \varphi^{**}\right) \leqslant V\left(\varphi, p_\xi^*\right). \tag{5.2}$$

Здесь оба неравенства следует рассматривать в "матричном смысле", т.е.

$$A = A^\intercal \leqslant B = B^\intercal, \quad \textit{если} \quad B - A \geqslant 0.$$

Другими словами, распределение p_ξ^* является "*наихудшим*" в классе $\mathcal{P}$, и нелинейное преобразование φ^{**} является "*нилучшим*", рассчитанным на "*наихудший*" шум с распределением p_ξ^*. Это можно выразить математически следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi^{**} &:= \arg\inf_{\varphi} \sup_{p_\xi \in \mathcal{P}} V(p_\xi, \varphi), \\ p_\xi^* &:= \arg\sup_{p_\xi \in \mathcal{P}} \inf_{\varphi} V(p_\xi, \varphi), \end{aligned} \tag{5.3}$$

так что

$$\inf_{\varphi} \sup_{p_\xi \in \mathcal{P}} V(p_\xi, \varphi) = \sup_{p_\xi \in \mathcal{P}} \inf_{\varphi} V(p_\xi, \varphi) := V^*. \tag{5.4}$$

В соответствии с (4.7) для любого $p_\xi \in \mathcal{P}$ справедливо неравенство

$$\inf_{\varphi} V(p_\xi, \varphi) = [I_F(p_\xi)\mathcal{R}]^{-1}, \tag{5.5}$$

где $\inf_{\varphi}$ достигается при $\varphi^*(v)$ (4.8). Итак, окончательно, *робастная процедура синтеза ММП* сводится к решению задачи

$$\sup_{p_\xi \in \mathcal{P}} \inf_{\varphi} V(p_\xi, \varphi) = \sup_{p_\xi \in \mathcal{P}} \left[I_F(p_\xi)\mathcal{R}^{-1} \right], \tag{5.6}$$

что означает, что нелинейное преобразование невязки φ^{**}, которое робастно по отношению к распределениям $p_\xi \in \mathcal{P}$, есть:

$$\varphi^{**} = -I_{F,\xi}^{-1}\left(p_\xi^*\right) \frac{d}{dv} \ln p_\xi^*(v). \tag{5.7}$$

5.2. Примеры робастной версии процедуры WMLLM

Для процессов ARX (2.13) с $b_k = 0$ ($k = 0, \ldots, K$) ковариационная матрица $\mathcal{R}$ (3.17) удовлетворяет матричному уравнению

$$\mathcal{R} = A\mathcal{R}A + \sigma_\xi^2 \Xi_0$$

с

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_L \\ \mathbf{1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{Vmatrix}, \quad \Xi_0 := \begin{Vmatrix} \mathbf{1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, $\mathcal{R}$ может быть представлена как

$$\mathcal{R} = \sigma_\xi^2 \mathcal{R}_0,$$

где $\mathcal{R}_0$ является решением уравнения

$$\mathcal{R}_0 = A\mathcal{R}_0 A + \Xi_0.$$

Так что задача (5.6) сводится к отысканию

$$\sup_{p_\xi \in \mathcal{P}} \left[\sigma^2(p_\xi) I_F(p_\xi) \right]^{-1},$$

или, что эквивалентно, к

$$\inf_{p_\xi \in \mathcal{P}} \left[\sigma^2(p_\xi) I_F(p_\xi) \right]. \tag{5.8}$$

Пример 1. Рассмотрим класс $\mathcal{P}_1^{AR}$, *содержащий среди прочего распределение Гаусса* $p_{\mathcal{N}\left(0,\sigma_0^2\right)}(x)$, т.е.

$$\mathcal{P}_1^{AR} := \left\{p_\xi \mid \sigma^2\left(p_\xi\right) I_F\left(p_\xi\right) < \infty\right\}, \quad p_{\mathcal{N}\left(0,\sigma_0^2\right)} \in \mathcal{P}_1^{AR}.$$

Лемма 3.

$$p_\xi^*\left(x\right) = \arg\inf_{p_\xi \in \mathcal{P}_1^{AR}} \left[\sigma^2\left(p_\xi\right) I_F\left(p_\xi\right)\right] = p_{\mathcal{N}\left(0,\sigma_0^2\right)}\left(x\right),$$

т.е. наихудшая на $\mathcal{P}_1^{AR}$ *плотность распределения равна в точности плотности гауссовского распределения* $p_{\mathcal{N}\left(0,\sigma_0^2\right)}(x)$.

Доказательство. Используя неравенство Коши–Шварца

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f\left(x\right)\varphi\left(x\right)dx\right)^2 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} f^2\left(x\right)dx \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^2\left(x\right)dx$$

при

$$f\left(x\right) = x, \;\; \varphi\left(x\right) = p_\xi'\left(x\right)/p_\xi\left(x\right),$$

получим

$$\sigma^2 I_F\left(p_\xi\right) \geqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}} x p_\xi'\left(x\right)dx\right)^2 = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} p_\xi\left(x\right)dx\right)^2 = 1,$$

так что достигается равенство при

$$p_\xi'\left(x\right)/p_\xi\left(x\right) = \lambda x,$$

что приводит к

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi/\lambda}}\exp\left\{-\frac{\lambda x^2}{2}\right\}.$$

Однако поскольку

$$I_F\left(p_{\mathcal{N}\left(0,\sigma_0^2\right)}\right) = \sigma_0^{-2},$$

из этого неравенства имеем

$$\sigma^2\left(p_\xi\right) I_F\left(p_\xi\right) \geqslant 1 = \sigma_0^2 I_F\left(p_{\mathcal{N}\left(0,\sigma_0^2\right)}\right),$$

что означает, что

$$p_\xi^*\left(x\right) = p_{\mathcal{N}\left(0,\sigma_0^2\right)}\left(x\right).$$

Лемма 3 доказана.

Итак, робастная на $\mathcal{P}_1^{AR}$ версия процедуры (2.14) содержит

$$\varphi(x) = \varphi^{**}(x) = -I_F^{-1}\left(p_\xi^*\right) \frac{d}{dv} \ln p_\xi^*(v) = x.$$

Пример 2. Для класса $\mathcal{P}_2^{AR}$, содержащего все центрированные распределения с дисперсией не меньше, чем заданная величина σ_0^2, а именно

$$\mathcal{P}_2^{AR} := \left\{ p_\xi : \int_{\mathbb{R}} x^2 p_\xi(x)\, dx \geqslant \sigma_0^2 \right\}, \tag{5.9}$$

имеем следующий результат.

Лемма 4.

$$p_\xi^*(x) = \arg \inf_{p_\xi \in \mathcal{P}_2^{AR}:\ \sigma^2(p_\xi) = \sigma_0^2} I_F(p_\xi), \tag{5.10}$$

т.е. наихудшая на $\mathcal{P}_2^{AR}$ плотность распределения $p_\xi^*(x)$ совпадает с наихудшей плотностью распределения на классе, характеризующем неопределенность распределения для моделей статической регрессии при условии, что

$$\sigma^2\left(p_\xi^*(x)\right) = \sigma_0^2. \tag{5.11}$$

Доказательство. Следует непосредственно из неравенства

$$\sigma^2(p_\xi)\, I_F(p_\xi) \geqslant \sigma_0^2 I_F(p_\xi).$$

6. Заключение

Основные результаты статьи:

- представлены основные идеи *теории робастной идентификации*, инициированная Я.З. Цыпкиным в 80-х гг. XX в;
- показано, что параллельное применение "*Процедуры отбеливания*" и рекурсивной минимаксной версии "*Метода максимального правдоподобия*" (MLLM) гарантирует свойство асимптотической состоятельности этой процедуры;
- для рассматриваемой рекуррентной модели получено информационное неравенство Рао–Крамера и показано, что эта комбинированная процедура достигает этой информационной границы;
- главная особенность рассматриваемого метода состоит в возможности учета внешнего негауссового белого шума (определенного по данному классу допустимых распределений) на входе формирующего фильтра, составляющего шумовую последовательность, влияющую на вход ARX-динамики, которая может быть негауссовой и коррелированной;
- показана *сходимость с вероятностью единица*, а также представлена *асимптотическая нормальность* ошибки оценки для рассматриваемого метода;

- в случае когда информация о распределении входного сигнала формирующего фильтра является априори неизвестной (но принадлежащей некоторому заданному классу), параллельно с использованием процесса "обеливания" применяется общеизвестный подход Хубера с использованием робастной версии ММП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Reinelt W., Garulli A., Ljung L.* Comparing Different Approaches to Model Error Modelling in Robust Identification // Automatica. 2002. V. 38. P. 787–803.
2. *Kosut R.L., Goodwin G.C., Polis M.P.* (Eds.) Special issue on system identification for robust control design // IEEE Trans. Automat. Control. 1992. V. 37. No. 7. P. 899–1008.
3. *Smith R.S., Dahleh M.* // Proc. 1992 Santa Barbara workshop "The Modeling of Uncertainty in Control Systems". Lect. Notes Control Inform. Sci. V. 192. Publisher Springer-Verlag, 1994.
4. *Söderström T., Aström K.J.* Editorial // Special issue on trends in system identification. Automatica. IFAC. 1995. P. 1689–1690.
5. *Garulli A., Tesi A., Vicino A.* (Eds.) Robustness in identification and control // Lect. Notes Control Inform. Sci. 1999. V. 245. Berlin: Springer.
6. *Goodwin G.C.* Identification and Robust Control: Bridging the Gap // Proc. 7th IEEE Mediterranian Conf. on Control and Automation. Israel, Haifa: 1999.
7. *Goodwin G.C., Braslavsky J.H., Seron M.M.* Non-stationary Stochastic Embedding for Transfer Function Estimation // Proc. 14th IFAC World Congr. China, Bejing: 1999.
8. *Ljung L.* Model Validation and Model Error Modeling. Wittenmark B., Rantzer A. (Eds.) // Proc. Aström Sympos. Control. Sweden, Studentliteratur Lund: 1999b. P. 15–42.
9. *Ljung L.* System Identification — Theory for the User (2nd ed.). Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, 1999c.
10. *Walter E., Piet-Lahanier H.* Estimation of Parameter Bounds from Bounded-Error Data: a Survey // Math. Comput. Simulat. 1990. V. 32. P. 449–468.
11. *Wahlberg B., Ljung L.* Hard Frequency-Domain Model Error Bounds from Least-Squares Like Identification Techniques // IEEE Trans. Automat. Control. 1992. V. 37. No. 7. P. 900–912.
12. *Giarré L., Milanese M., Taragna M.* H^∞ Identification and Model Quality Evaluation // IEEE Trans. Automat. Control. 1997. V. 42. No. 2. P. 188–199.
13. *Garulli A., Vicino A., Zappa G.* Conditional Central Algorithms for Worst-Case Set Membership Identification and Filtering // IEEE Trans. Automat. Control. 2000. V. 45. No. 1. P. 14–23.
14. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастное оценивание в условиях неполной информации / Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М.: Изд-во АН СССР, 1977. С. 6–15.
15. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Адаптивные алгоритмы оценивания (сходимость, оптимальность, робастность) // АиТ. 1979. № 3. С. 71–84.

    Polyak B.T., Tsypkin Ya.Z. Adaptive Estimation Algorithms: Convergence, Optimality, Stability // Autom. Remote Control. 1979. V. 40. No. 3. P. 378–389.
16. *Polyak B.T., Tsypkin Ya.Z.* Robust Identification // Automatica. 1980. V. 16. No. 1. January. P. 53–63.

17. *Цыпкин Я.З., Позняк А.С.* Рекуррентные алгоритмы оптимизации в условиях неопределенности // Итоги науки и техники. Сер. Техн. кибернетика. Вып. 16. М.: ВИНИТИ, 1983. С. 3–70.

18. *Цыпкин Я.З., Позняк А.С., Тихонов С.Н.* Оптимальные методы адаптивной идентификации // Итоги науки и техники. Сер. Техн. кибернетика. Вып. 29. М.: ВИНИТИ, 1990. С. 3–44.

19. *Poznyak A.S.* Recursive Stochastic Gradient Procedures in the Presence of Dependent Noise // Lect. Notes Control Inform. Sci. IIASA 81. Stochastic Optim. Springer-Verlag, 1984. P. 522–533.

20. *Poznyak A.S.* Estimating the Parameters of Autoregressing Processes by the Method of Least Squares // Int. J. Syst. Sci. 1980. V. 5. No. 11. P. 235–254.

21. *Позняк А.С., Чикин Д.О.* Асимптотические свойства процедур стохастической аппроксимации при зависимых помехах // АиТ. 1984. № 12. С. 78–93.

    Poznyak A.S., Chikin D.O. Asymptotical Properties of Stochastic Approximation Procedures With Dependent Noises // Autom. Remote Control. 1984. V. 45. No. 12. P. 1601–1615.

22. *Chikin D.O., Poznyak A.S.* Gradient Procedures of Stochastic Approximation with Dependent Noise and their Asymptotic Behavior // Int. J. Syst. Sci. 1985. V. 16. No. 8. P. 917–949.

23. *Позняк А.С., Цыпкин Я.З.* Оптимальные на классе алгоритмы оптимизаций при наличии коррелированных помех // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 6. С. 806–822.

    Poznyak A.S., Tsypkin Ya.Z. Optimization Algorithms Optimal on a Class in the Presence of Correlated Noise // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. 1984. V. 24. No. 3. P. 112–122.

24. *Цыпкин Я.З., Позняк А.С.* Обобщенный метод инструментальных переменных в задачах идентификации линейных объектов // ДАН СССР. 1989. Т. 306. № 5. С. 1068–1072.
    Tsypkin Ya.Z., Poznyak A.S. Generalized Method of Instrumental Variables in Problems of Identification of Linear Objects // Doklady Acad. Nauk of USSR. 1989. V. 306. P. 1068–1073.

25. *Позняк А.С., Тихонов С.Н.* Сильная состоятельность рекуррентных нелинейных алгоритмов оценивания параметров линейных разностных уравнений // АиТ. 1990. № 6. С. 90–101.

    Poznyak A.S., Tikhonov S.N. Strong Consistency of Nonlinear Recursive Algorithms of Estimation of the Parameters of Linear Difference Equations // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 6. P. 98–807.

26. *Позняк А.С., Тихонов С.Н.* О расширении класса нелинейных преобразований невязки в рекуррентных алгоритмах параметрического оценивания // АиТ. 1990. № 10. С. 135–141.
    Poznyak A.S., Tikhonov S.N. On Extension of Nonlinear Residual Transformation Class for Recursive Algorithms of Parametric Estimation // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 10. P. 1418–1424.

27. *Позняк А.С., Тихонов С.Н.* Об асимптотической нормальности и скорости сходимости рекуррентных стохастических процедур с нелинейным преобразованием невязки // АиТ. 1992. № 8. Р. 103–111.

    Poznyak A.S., Tikhonov S.N. Asymptotic Normality and the Rate of Convergence of Recursive Stochastic Processes With a Nonlinear Residual Transformation // Autom. Remote Control. 1992. V. 53. No. 8. P. 1222–1230.

28. *Бондаренко М.В., Позняк А.С.* Асимптотическая нормальность и оценка скорости сходимости алгоритмов идентификации нестационарных объектов // АиТ. 1992. № 7. С. 44–55.

Bondarenko M.V., Poznyak A.S. Asymptotic Normality and an Estimate for the Rate of Convergence of Algorithms for the Identification of Nonstationary Objects // Autom. Remote Control. 1992. V. 53. No. 7. P. 989–999.

29. *Казьмин А.В., Позняк А.С.* Рекуррентное оценивание параметров ARX моделей с помехами, описываемыми ARMA-процессами // АиТ. 1992. № 10. С. 80–88.

Kaz'min A.V., Poznyak A.S. Recurrent Estimation of the Parameters of Autoregression-Exogenous Input Models With Noise Described by Autoregression-Moving Average Processes // Autom. Remote Control. 1992. V. 53. No. 10. P. 1549–1556.

30. *Бондаренко М.В., Позняк А.С.* Сходимость алгоритмов оценивания нестационарных параметров регрессионно-авторегрессионных объектов при помехах типа скользящего среднего // АиТ. 1993. № 8. С. 90–108.

Bondarenko M.V., Poznyak A.S. Convergence of Algorithms for Estimating the Nonstationary Parameters of Regression-Autoregression Plants Under Noise of Moving Averages Type // Autom. Remote Control. 1993. V. 54. No. 8. P. 1255–1271.

31. *Платонов А.А., Позняк А.С., Тихонов С.Н., Шабатин Е.* Анализ обобщенных акселерантных алгоритмов идентификации // АиТ. 1993. № 2. С. 157–170.

Platonov A.A., Poznyak A.S., Tikhonov S.N., Shabatin E. Analysis of Generalized Accelerated Identification Algorithms // Autom. Remote Control. 1993. V. 54. No. 2. P. 311–322.

32. *Позняк А.С., Тихонов С.Н.* Сильная состоятельность расширенного метода наименьших квадратов с нелинейным преобразованием невязки // АиТ. 1990. № 8. С. 119–128.

Poznyak A.S., Tikhonov S.N. Strong Consistency of the Extended Least Squares Method With Nonlinear Error Transformation // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 8. P. 1105–1112.

33. *Huber P.* Robustness and Design. A Survey of Statistical Design and Linear Models. North-Holland Publisher Company, 1975.

34. *Poznyak A.S.* Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers. V. 2. Stochastic Techniques. N.Y.: Elsevier, 2009.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 24.07.2018

После доработки 08.10.2018

Принята к публикации 08.11.2018