

© 2019 г. Ю.П. ЕМЕЛЬЯНОВА, канд. физ.-мат. наук (emelianovajulia@gmail.com),
П.В. ПАКШИН, д-р физ.-мат. наук (pakshinpv@gmail.com)
(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического
университета им. Р.Е. Алексева)

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ НА ОСНОВЕ НАБЛЮДАТЕЛЯ СОСТОЯНИЯ¹

Рассматриваются линейные системы управления, которые функционируют в режиме с постоянным периодом повторения, возвращаясь всякий раз в исходное состояние. Ставится задача нахождения такого управления, которое, используя информацию о выходной переменной на текущем и предыдущем повторениях и о полученных на основе наблюдателя оценках переменных состояния, обеспечивает сходимость этой переменной к желаемой траектории при неограниченном увеличении числа повторений. Управление такого вида известно как управление с итеративным обучением. Для решения используется подход на основе диссипативности 2D-моделей и дивергентного метода векторных функций Ляпунова. Конечные результаты представлены в виде линейных матричных неравенств. Приводится пример.

Ключевые слова: управление с итеративным обучением, повторяющиеся процессы, 2D-системы, устойчивость, диссипативность, векторная функция Ляпунова.

DOI: 10.1134/S0005231019090034

1. Введение

Управление с итеративным обучением эффективно применяется с целью повышения точности систем, функционирующих в повторяющемся режиме, который, в частности, характерен для роботов-манипуляторов. Задачам, связанным с таким управлением, посвящено множество публикаций. Для предварительного знакомства с этим важным направлением исследований можно рекомендовать [1–3]. Процесс итеративного обучения состоит в коррекции закона управления на текущем повторении на основе информации, накопленной на предыдущем повторении, и текущей информации, т.е. управление с итеративным обучением является простейшей формой управления с памятью.

Пусть на k -м повторении система описывается стандартными линейными уравнениями состояния:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= Ax_k(t) + Bu_k(t), \\ y_k(t) &= Cx_k(t), \quad t \in [0, T], \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-79-00088).

где $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояния, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ – вектор управления, $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор выходных переменных, k – номер повторения. Цель управления заключается в достижении вектором выходных переменных $y_k(t)$ желаемой траектории $y_{ref}(t)$ с заданной точностью. Для достижения этой цели на каждом шаге осуществляется коррекция управления по алгоритму

$$(1.2) \quad u_k(t) = u_{k-1}(t) + \Delta u_k(t), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\Delta u_k(t)$ – корректирующая поправка, которая выбирается из условия, что ошибка обучения

$$(1.3) \quad e_k(t) = y_{ref}(t) - y_k(t)$$

стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ и при этом $u_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t)$ остается ограниченным по абсолютной величине.

Наибольшее распространение получил алгоритм коррекции “типа Аримото”

$$(1.4) \quad u_k(t) = u_{k-1}(t) + \Gamma \dot{e}_k(t), \quad k = 1, 2, \dots,$$

названный так по имени первого автора пионерских работ [4, 5]. В дальнейшем были предложены различные обобщения (1.4), например алгоритм, напоминающий закон ПИД-регулирования

$$(1.5) \quad u_k(t) = u_{k-1}(t) + \Phi e_k(t) + \Gamma \dot{e}_k(t) + \Psi \int_0^t e_k(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots$$

В публикациях за (1.2)–(1.5) закрепилось название алгоритмы (законы) управления с итеративным обучением. Выходная переменная обычно называется профилем повторения. В этих алгоритмах, как правило, не используются ни переменные состояния исходной системы (1.1), ни их оценки. В то же время ясно, что использование этих переменных может обеспечить более высокое качество управления как в смысле увеличения скорости сходимости процесса обучения, так и в смысле достижения более высокой точности. Это, в частности, подтверждает публикация [6], где результаты подтверждены экспериментом. Кроме того, когда на объект управления действуют случайные возмущения и (или) измерения производятся с шумами, фильтрация выходной переменной становится просто необходимой и получающиеся при этом оценки переменных состояния вполне естественно использовать для построения алгоритмов коррекции управления. Существенно отметить, что, как это следует из [7, 8] и [9, 10], в алгоритмах управления с итеративным обучением стохастическими системами фильтрация либо не использовалась [11] (см. также другие статьи автора [11] в этой области), либо использовались оценки только выходных переменных [9, 10]. Лишь в [12], где рассматривается детерминированная система с доступным измерению выходом, предложен алгоритм управления с итеративным обучением, в котором используются оценки состояния, получаемые наблюдателем полного порядка.

В данной статье рассматриваются детерминированные линейные системы, которые функционируют в повторяющемся режиме с постоянным периодом повторения, возвращаясь всякий раз в исходное состояние. Измерению на каждом повторении доступна только выходная переменная. В отличие от [12] ставится задача нахождения параметризованного множества управлений с итеративным обучением, использующих информацию о выходной переменной и оценках состояния на текущем и предыдущем повторениях. Это множество включает подмножество нелинейных управлений, в то время как в [12] рассматривалось только линейное управление. Для решения используется подход, который сводит нахождение условий сходимости процесса итеративного обучения к анализу устойчивости частного вида 2D-моделей – повторяющихся процессов [13]. В свою очередь условия устойчивости выводятся на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова [14, 15]. Это множество включает в себя нелинейные управления. В частном случае кусочно-линейных управлений конечные соотношения формулируются в терминах линейных матричных неравенств. Приводится пример, показывающий, что в классе кусочно-линейных управлений можно гибко изменять скорость сходимости процесса итеративного обучения в зависимости от достигнутой точности.

2. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную систему, функционирующую в повторяющемся режиме, модель которой на k -м повторении имеет вид:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_k(p+1) &= Ax_k(p) + Bu_k(p), \quad 0 \leq p \leq N-1, \\ y_k(p) &= Cx_k(p), \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояния, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ – вектор управления, $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор выходных переменных, k – номер повторения. Пусть $y_{ref}(p)$ – желаемый профиль повторения и на каждом повторении измерению доступен только вектор профиля $y_k(p)$. Введем в рассмотрение ошибку воспроизведения профиля

$$(2.2) \quad e_k(p) = y_{ref}(p) - y_k(p), \quad k = 0, 1, \dots$$

Задача состоит в нахождении такой последовательности управлений $u_k(p)$, $k = 0, 1, \dots$, которая обеспечивает достижение заданной точности воспроизведения профиля ϵ за конечное число повторений k_f и сохранение этой точности при дальнейших повторениях, т.е.

$$(2.3) \quad |e_k(p)| \leq \epsilon, \quad k \geq k_f, \quad 0 \leq p \leq N.$$

3. Подход к решению

Последовательность $u_k(p)$, $k = 1, \dots$, при заданном граничном условии $u_0(p)$ будем формировать в соответствии с общим алгоритмом управления с итеративным обучением

$$(3.1) \quad u_{k+1}(p) = u_k(p) + \Delta u_{k+1}(p),$$

задавая корректирующую поправку $\Delta u_{k+1}(p)$ как функцию ошибки и приращения состояния

$$(3.2) \quad \Delta u_{k+1}(p) = \phi(\xi_{k+1}(p+1), e_k(p+1)), \quad \phi(0, 0) = 0,$$

где $\xi_{k+1}(p+1) = x_{k+1}(p) - x_k(p)$.

Замечание 1. В отличие от управления с обратной связью для управления с итеративным обучением синтезу подлежит корректирующая поправка $\Delta u_{k+1}(p)$, которая далее синтезируется как обычное управление с обратной связью для вводимой далее в рассмотрение вспомогательной системы относительно приращений переменных. В связи с этим возникает естественный вопрос о непосредственном построении управления с обратной связью, решающего поставленную задачу, который детально обсуждался в [1, 16–18]. Управление (3.1) и (3.2) относится к так называемым непричинным управлениям, характерным признаком которых является то, что $u_{k+1}(p)$ зависит от $e_k(h)$, где $h > p$. Непричинные законы управления с упреждением реагируют на повторяющиеся помехи. Исключая особые случаи, не существует эквивалентного регулятора с обратной связью, который может обеспечить такое же качество управления, как и непричинное управление с итеративным обучением, поскольку управление с обратной связью реагирует на текущие ошибки и не обладает свойством упреждения.

Поскольку вектор состояния недоступен для измерения, будем использовать оценку вектора состояния, полученную на основе измеренных значений $y_k(p)$. Для нахождения этой оценки используем наблюдатель полного порядка со структурой, аналогичной структуре фильтра Калмана

$$(3.3) \quad \hat{x}_k(p+1) = A\hat{x}_k(p) + Bu_k(p) + F(y_k(p) - C\hat{x}_k(p)).$$

Введем в рассмотрение ошибку оценивания и приращения оценки и ошибки оценивания

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \tilde{x}_k(p) &= x_k(p) - \hat{x}_k(p), \\ \hat{\xi}_{k+1}(p+1) &= \hat{x}_{k+1}(p) - \hat{x}_k(p), \quad \tilde{\xi}_{k+1}(p+1) = \tilde{x}_{k+1}(p) - \tilde{x}_k(p), \end{aligned}$$

тогда динамику системы с наблюдателем относительно приращений можно описать уравнениями:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \tilde{\xi}_{k+1}(p+1) &= (A - FC)\tilde{\xi}_{k+1}(p), \\ \hat{\xi}_{k+1}(p+1) &= FC\tilde{\xi}_{k+1}(p) + A\hat{\xi}_{k+1}(p) + Bv_{k+1}(p), \\ e_{k+1}(p) &= -CA\tilde{\xi}_{k+1}(p) - CA\hat{\xi}_{k+1}(p) + e_k(p) - CBv_{k+1}(p), \end{aligned}$$

где $v_{k+1}(p) = \Delta u_{k+1}(p-1)$.

Обозначим $\eta_k(p) = [\tilde{\xi}_k(p)^T \hat{\xi}_k(p)^T]^T$, $A_{11} = \begin{bmatrix} A - FC & 0 \\ FC & A \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}$, $A_{12} = 0$, $A_{21} = [-CA \ -CA]$, $A_{22} = I$, $B_2 = -CB$ и запишем (3.5) в виде стандартной модели дискретного повторяющегося процесса [13]:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \eta_{k+1}(p+1) &= A_{11}\eta_{k+1}(p) + A_{12}e_k(p) + B_1v_{k+1}(p), \\ e_{k+1}(p) &= A_{12}\eta_{k+1}(p) + A_{22}e_k(p) + B_2v_{k+1}(p). \end{aligned}$$

Поскольку $x_k(p) = \hat{x}_k(p) + \tilde{x}_k(p)$, то корректирующую поправку (3.2) можно выразить в виде новой функции доступных для формирования управления переменных

$$(3.7) \quad \Delta u_{k+1}(p-1) = v_{k+1}(p) = \varphi(\eta_{k+1}(p), e_k(p)), \quad \varphi(0, 0) = 0.$$

Если для всех $0 \leq p \leq N$ $e_k(p) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то существует k_f , при котором выполняются условия (2.3). Таким образом, поставленная задача будет решена, если найдется последовательность $v_k(p)$, такая что

$$(3.8) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} e_k(p) = 0, \quad |u_\infty(p)| < \infty, \quad 0 \leq p \leq N,$$

при условии, что норма ошибки ограничена сверху монотонно убывающей функцией, где $u_\infty(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(p)$. Ясно, что в этом случае существует k_f , начиная с которого будет выполнено условие (2.3).

4. Основной результат

Решение будем искать на основе теории устойчивости и диссипативности повторяющихся процессов [14].

Определение 1 [14]. Система (3.6), (3.7) называется экспоненциально устойчивой, если существуют числа $\kappa > 0$ и $0 < \rho < 1$, такие что

$$(4.1) \quad |\eta_k(p)|^2 + |e_k(p)|^2 \leq \kappa \rho^{k+p},$$

где κ и ρ не зависят от N .

Заметим, в случае выполнения (4.1) гарантируется указанная в разделе 3 ограниченность нормы ошибки монотонно убывающей функцией, что, в свою очередь, обеспечивает достижение заданной точности.

Система (3.6), (3.7) в общем случае нелинейна. Универсальным методом анализа устойчивости нелинейных систем является второй метод Ляпунова. Однако уравнения рассматриваемой системы не разрешены относительно полных приращений переменных состояния, и применить этот метод непосредственно невозможно. Для преодоления этой трудности авторами разработан так называемый дивергентный метод векторных функций Ляпунова, в котором, в отличие от классической версии, устойчивость устанавливается на основе свойств дивергенции (дискретного аналога дивергенции) указанных векторных функций. В рассматриваемом случае введем векторную функцию Ляпунова так:

$$(4.2) \quad V(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) = \begin{bmatrix} V_1(\eta_{k+1}(p)) \\ V_2(e_k(p)) \end{bmatrix},$$

где $V_1(x_{k+1}(p)) > 0$, $x_{k+1}(t) \neq 0$, $V_2(e_k(p)) > 0$, $y_k(p) \neq 0$, $V_1(0) = 0$, $V_2(0) = 0$. Аналог дивергенции этой функции определим как

$$(4.3) \quad \mathcal{D}V(\eta_{k+1}(p), y_k(p)) = \Delta_p V_1(\eta_{k+1}(p)) + \Delta_k V_2(e_k(p)),$$

где $\Delta_p V_1(\eta_{k+1}(p)) = V_1(\eta_{k+1}(p+1)) - V_1(\eta_{k+1}(p))$, $\Delta_k V_2(e_k(p)) = V_2(e_{k+1}(p)) - V_2(e_k(p))$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 [14]. Система (3.6), (3.7) является экспоненциально устойчивой, если существует функция (4.2) и положительные скаляры c_1, c_2 и c_3 , такие что

$$\begin{aligned} c_1|\eta_{k+1}(p)|^2 &\leq V_1(\eta_{k+1}(p)) \leq c_2|\eta_{k+1}(p)|^2, \\ c_1|e_k(p)|^2 &\leq V_2(e_k(p)) \leq c_2|e_k(p)|^2, \\ DV(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) &\leq -c_3(|\eta_{k+1}(p)|^2 + |e_k(p)|^2). \end{aligned}$$

Для получения корректирующей последовательности (3.7), обеспечивающей экспоненциальную устойчивость, используем подход на основе теории диссипативности по Виллемсу [19]. Эта теория была эффективно применена в [20] для синтеза нелинейного стабилизирующего управления с использованием частного вида диссипативности – пассивности. В русле этой теории в [21] было введено удобное для решения задач стабилизации понятие экспоненциальной пассивности. В [14, 15] эти результаты были распространены на 2D-системы в форме повторяющихся процессов и разработана соответствующая теория стабилизации.

Введем в рассмотрение вспомогательный вектор

$$(4.4) \quad z_{k+1}(p) = C_1\eta_{k+1}(p) + C_2e_k(p) + Dv_{k+1}(p),$$

где C_1, C_2 и D – постоянные матрицы согласованных размеров.

Определение 2 [14]. Дискретный повторяющийся процесс (3.6) называется экспоненциально диссипативным относительно входной переменной $v_{k+1}(t)$ и выходной переменной $z_{k+1}(t)$, определенной в (4.4), если существуют векторная функция (4.2) и положительные скаляры c_1, c_2 и c_3 такие, что

$$\begin{aligned} c_1|\eta_{k+1}(p)|^2 &\leq V_1(\eta_{k+1}(p)) \leq c_2|\eta_{k+1}(p)|^2, \\ c_1|e_k(p)|^2 &\leq V_2(e_k(p)) \leq c_2|e_k(p)|^2, \\ DV(\eta_{k+1}(t), e_k(t)) &\leq S(z_{k+1}(p), v_{k+1}(p)) - \\ &\quad - c_3(|\eta_{k+1}(t)|^2 + |e_k(t)|^2), \end{aligned}$$

где S – скалярная функция, такая что $S(0, 0) = 0$.

В теории диссипативности по Виллемсу функции S и V называются функцией запаса и функцией накопления. Нетрудно видеть, что если при некотором выборе z последовательность (3.7) удовлетворяет условию $S(z_{k+1}(p), v_{k+1}(p)) \leq 0$, то система (3.6), (3.7) в соответствии с теоремой 1 будет экспоненциально устойчива. Таким образом, окончательно задача сводится к нахождению стабилизирующей тройки $\{V, z, v\}$. Обозначим $\zeta_{k+1}(p) = \begin{bmatrix} \eta_{k+1}(p) \\ e_k(p) \end{bmatrix}$, $\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $\bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$. Определим блочно-диагональную матрицу $P = \text{diag}[P_1 \ P_2] \succ 0$ как решение неравенства Риккати

$$(4.5) \quad \bar{A}^T P \bar{A} - (1 - \sigma)P - \bar{A}^T P \bar{B} [\bar{B}^T P \bar{B} + R]^{-1} \bar{B}^T P \bar{A} + Q \preceq 0,$$

где $0 < \sigma < 1$ – положительный скаляр, $Q \succ 0$ и $R \succ 0$ – весовые матрицы. Нетрудно видеть, что если линейное матричное неравенство

$$(4.6) \quad \begin{bmatrix} (1 - \sigma)X & X\bar{A}^T & X \\ \bar{A}X & X + \bar{B}R^{-1}\bar{B}^T & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad X \succ 0,$$

разрешимо относительно $X = \text{diag}[X_1 \ X_2] \succ 0$, то $P = X^{-1}$.

Следующая теорема предлагает одно из возможных множеств стабилизирующих троек.

Теорема 2. Дискретный повторяющийся процесс (3.6) является экспоненциально диссипативным с функцией запаса

$$(4.7) \quad \begin{aligned} S(v_{k+1}(p), z_{k+1}(p)) &= z_{k+1}^T(p)(\bar{B}^T P \bar{B} + R)^{-1} z_{k+1}(p) + \\ &+ 2z_{k+1}(p)^T v_{k+1}(p) + v_{k+1}(p)^T [\bar{B}^T P \bar{B} + R] v_{k+1}(p) \end{aligned}$$

относительно входной переменной $v_{k+1}(p)$ и выходной переменной

$$(4.8) \quad z_{k+1}(p) = \bar{B}^T P \bar{A} \zeta_{k+1}(p),$$

где $P = \text{diag}[P_1 \ P_2] \succ 0$ – решение (4.5). Множество последовательностей корректирующих поправок (3.7), обеспечивающих экспоненциальную устойчивость системы (3.6), (3.7), определяется соотношением

$$(4.9) \quad v_{k+1}(p) = -[\bar{B}^T P \bar{B} + R]^{-1} \bar{B}^T P \bar{A} \Theta(\zeta_{k+1}(p)) \zeta_{k+1}(p),$$

где $\Theta(\zeta)$ – симметричная матричная функция, удовлетворяющая соотношению

$$(4.10) \quad M - 2M\Theta(\zeta) + \Theta(\zeta)M\Theta(\zeta) - Q - (\sigma - \mu)P \prec 0$$

для всех $\zeta \in \mathbb{R}^{2n_x + n_y}$, где $M = \bar{A}^T P \bar{B} [\bar{B}^T P \bar{B} + R]^{-1} \bar{B}^T P \bar{A}$, $0 < \mu < \sigma$.

Доказательство. Выберем компоненты векторной функции накопления (4.2) в виде квадратичных форм:

$$V_1(\eta_{k+1}(p)) = \eta_{k+1}(p)^T P_1 \eta_{k+1}(p), \quad V_2(e_k(p)) = e_k(p)^T(t) P_2 e_k(p),$$

где $P_1 \succ 0$ и $P_2 \succ 0$ – диагональные блоки матрицы P , представляющей собой решение (4.5). Вычисляя аналог дивергенции (4.2) вдоль траекторий (3.6), получим, что

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}V(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) &= \\ &= \zeta_{k+1}(p)^T \left(\bar{A}^T P \bar{A} - (1 - \sigma)P - \bar{A}^T P \bar{B} [\bar{B}^T P \bar{B} + R]^{-1} \bar{B}^T P \bar{A} + Q \right) \zeta_{k+1}(p) + \\ &+ \zeta_{k+1}(p)^T \bar{A}^T P \bar{B} [\bar{B}^T P \bar{B} + R]^{-1} \bar{B}^T P \bar{A} \zeta_{k+1}(p) - \zeta_{k+1}(p)^T (Q + \sigma P) \zeta_{k+1}(p) + \\ &+ 2\zeta_{k+1}(p)^T \bar{A}^T P \bar{B} v_{k+1}(p) + v_{k+1}(p)^T \bar{B}^T P \bar{B} v_{k+1}(p) \leq \\ &\leq \zeta_{k+1}(p)^T \bar{A}^T P \bar{B} [\bar{B}^T P \bar{B} + R]^{-1} \bar{B}^T P \bar{A} \zeta_{k+1}(p) + 2\zeta_{k+1}(p)^T \bar{A}^T P \bar{B} v_{k+1}(p) + \\ &+ v_{k+1}(p)^T [\bar{B}^T P \bar{B} + R] v_{k+1}(p) - \zeta_{k+1}(p)^T (Q + \sigma P) \zeta_{k+1}(p). \end{aligned}$$

Из (4.11) следует, что (3.6) экспоненциально диссипативна относительно входной переменной $v_{k+1}(p)$ и выходной переменной (4.8) с функцией запаса (4.7). Из (4.11) также следует, что если последовательность (3.7) определяется соотношением (4.9), то

$$\mathcal{D}V(\eta_{k+1}(p), e_k(p)) \leq -\mu \lambda_{\min}(P) (|\eta_{k+1}(p)|^2 + |e_k(p)|^2)$$

и в соответствии с теоремой 1 нелинейная система (4.9), (3.6) является экспоненциально устойчивой. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Если Θ выбрать в виде единичной матрицы, то условие (4.10) заведомо будет выполнено и доказанная теорема 2 дает линейную последовательность корректирующих поправок. Учитывая то, что эта матрица зависит от изменения ошибки относительно повторений, можно пытаться уменьшать значения коэффициентов корректирующих поправок после достижения требуемой точности и, наоборот, увеличивать эти коэффициенты, когда ошибка велика, другими словами, вводить адаптацию к величине ошибки. Такой подход позволит найти разумный компромисс между скоростью обучения и энергозатратами на управление. Наиболее просто это можно сделать за счет кусочно-постоянного выбора Θ , см. приведенный далее пример. Более общие рекомендации здесь сделать затруднительно.

5. Решение в классе дифференциальных моделей

Исходная модель системы для рассматриваемого класса задач обычно задается в виде (1.1). Перейти от нее к дискретной модели (2.1) не составляет труда. С другой стороны, можно искать требуемую последовательность корректирующих поправок, не переходя к (2.1), а непосредственно используя (1.2). Рассмотрим такой подход подробно. Предположим, что в (1.1) измерению доступен вектор выходных переменных $y_k(t)$ и $CB \neq 0$. Последнее ограничение может быть снято, но при этом усложнятся последующие построения. Для получения оценки состояния используем наблюдатель полного порядка

$$(5.1) \quad \frac{d\hat{x}_k(t)}{dt} = A\hat{x}_k(t) + Bu_k(t) + F(y_k(t) - C\hat{x}_k(t))$$

и введем вспомогательные переменные

$$(5.2) \quad \hat{\xi}_{k+1}(t) = \int_0^t [\hat{x}_{k+1}(\tau) - \hat{x}_k(\tau)] d\tau, \quad \tilde{\xi}_{k+1}(t) = \int_0^t [\tilde{x}_{k+1}(\tau) - \tilde{x}_k(\tau)] d\tau,$$

где $\tilde{x}_k(t) = x_k(t) - \hat{x}_k(t)$ – ошибка оценивания. В терминах этих переменных динамика системы (1.1), (1.2) опишется так:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \frac{d\tilde{\xi}_k(t)}{dt} &= (A - FC)\tilde{\xi}(t), \\ \frac{d\hat{\xi}_k(t)}{dt} &= A\hat{\xi} + FC\tilde{\xi} + B \int_0^t \Delta u_{k+1}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

С учетом (5.3) изменение ошибки обучения (1.3) в зависимости от числа повторений опишется уравнением

$$(5.4) \quad e_{k+1}(t) = -CA\tilde{\xi}_{k+1}(t) - CA\hat{\xi}_{k+1}(t) + e_k(t) - CB \int_0^t \Delta u_{k+1}(\tau) d\tau.$$

Обозначим $v_{k+1}(t) = \int_0^t \Delta u_{k+1}(\tau) d\tau$ и запишем уравнения системы в стандартной форме дифференциального повторяющегося процесса:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \dot{\eta}_{k+1}(t) &= A_{11}\eta_{k+1}(t) + A_{12}e_k(t) + B_1v_{k+1}(t), \\ e_{k+1}(t) &= A_{21}\eta_{k+1}(t) + A_{22}e_k(t) + B_2v_{k+1}(t), \end{aligned}$$

где обозначения соответствуют принятым ранее с той разницей, что переменная ζ и элементы матриц в правой части (5.5) должны выбираться из (1.1), (5.1) и дискретная переменная p заменяется на непрерывную t . Корректирующую поправку к управлению в (1.3) зададим соотношением

$$(5.6) \quad v_{k+1}(t) = \int_0^t \Delta u_{k+1}(\tau) d\tau = \varphi(\eta_{k+1}(t), e_k(t)),$$

где $\varphi(0, 0) = 0$ и при подстановке (5.6) в (5.5) правая часть первого уравнения в (5.5) удовлетворяет условию Липшица по переменным η и e . Задача состоит в нахождении такой последовательности управлений $u_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$, которая обеспечивает достижение заданной точности воспроизведения профиля ϵ за конечное число повторений k_f и сохранение этой точности при дальнейших повторениях, т.е.

$$(5.7) \quad |e_k(t)| \leq \epsilon, \quad k \geq k_f, \quad 0 \leq p \leq T.$$

В рамках модели (5.5) эта задача эквивалентна нахождению соответствующей последовательности $v_k(t)$, которая в соответствии с (5.6) определяет последовательность корректирующих поправок.

Определение 3 [14]. Система (5.5), (5.6) называется экспоненциально устойчивой, если существуют вещественные числа $\kappa > 0$, $\lambda > 0$ и $0 < \rho < 1$ такие, что

$$(5.8) \quad |\eta_k(t)|^2 + |e_k(t)|^2 \leq \kappa e^{-\lambda t} \rho^k,$$

где κ , ρ и λ не зависят от T .

Если система (5.5), (5.6) экспоненциально устойчива, то последовательность (5.5) дает решение поставленной задачи. Такую последовательность найдем на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова и теории диссипативности дифференциальных повторяющихся процессов.

Условия устойчивости системы (5.5), (5.6) дает аналог теоремы 1, который получается заменой переменной p на t и оператора \mathcal{D} на

$$(5.9) \quad \mathcal{D}_c V(\eta_{k+1}(t), e_k(t)) = \frac{dV_1(\eta_{k+1}(t))}{dt} + \Delta_k V_2(e_k(t)),$$

где $\Delta_k V_2(e_k(t)) = V_2(e_{k+1}(t)) - V_2(e_k(t))$. Для получения аналога определения диссипативности такие же замены следует провести в определении 2.

Определим матрицу $P = \text{diag}[P_1 \ P_2]$, $P_1 \succ 0$, $P_2 \succ 0$, как решение модифицированного неравенства Риккати

$$(5.10) \quad \bar{A}^T P I^{(1,0)} + P I^{(1,0)} \bar{A} + \bar{A}^T P I^{(0,1)} \bar{A} - (1 - \sigma) P I^{(0,1)} + \gamma P I^{(1,0)} - \\ - [P I^{(1,0)} \bar{B} + \bar{A}^T P I^{(0,1)} \bar{B}] [B^T P I^{(0,1)} \bar{B} + R]^{-1} [\bar{B}^T P I^{(1,0)} + \bar{B}^T P I^{(0,1)} \bar{A}] + Q \preceq 0,$$

где $I^{(1,0)} = \text{diag}[I_{2n_x} \ 0]$, $I^{(0,1)} = \text{diag}[0 \ I_{n_y}]$, $0 < \sigma < 1$ и $\gamma > 0$ – скалярные параметры, $Q \succ 0$ и $R \succ 0$ – весовые матрицы. Следующая теорема определяет множество последовательностей (5.6), которые обеспечивают экспоненциальную устойчивость системы (5.5), (5.6)

Теорема 3. Дифференциальный повторяющийся процесс (5.5) является экспоненциально диссипативным с функцией запаса

$$(5.11) \quad S(v, z) = 2z^T v + z^T \left(\bar{B}^T P I^{(0,1)} \bar{B} + R \right)^{-1} z + v^T \left(\bar{B}^T P \bar{B} + R \right) v$$

относительно входа $v_{k+1}(t)$ и выхода

$$(5.12) \quad z_{k+1}(t) = \left[\bar{B}_1^T P I^{(1,0)} + \bar{B}^T P I^{(0,1)} \bar{A} \right] \zeta_{k+1}(t).$$

Множество последовательностей (5.6), которые обеспечивают экспоненциальную устойчивость системы (5.5), (5.6), определяется соотношением

$$(5.13) \quad v_{k+1}(t) = \\ = - \left[\bar{B}^T P I^{(0,1)} \bar{B} + R \right]^{-1} \left[\bar{B}^T P I^{(1,0)} + \bar{B}^T P I^{(0,1)} \bar{A} \right] \Gamma(\zeta_{k+1}(t)) \zeta_{k+1}(t),$$

где P – решение неравенства (5.10) и $\Gamma(\zeta)$ – симметричная матричная функция, удовлетворяющая неравенству

$$(5.14) \quad N - 2N\Gamma(\zeta) + \Gamma(\zeta)N\Gamma(\zeta) - Q - (\gamma - \mu_1)P I^{(1,0)} - (\sigma - \mu_2)P I^{(0,1)} \prec 0$$

для всех $\zeta \in \mathbb{R}^{2n_x+n_y}$, где

$$N = \left[P I^{(1,0)} \bar{B} + \bar{A}^T P I^{(0,1)} \bar{B} \right] \left[\bar{B}^T P I^{(0,1)} \bar{B} + R \right]^{-1} \left[\bar{B}^T P I^{(1,0)} + \bar{B}^T P I^{(0,1)} \bar{A} \right],$$

$0 < \mu_1 < \gamma$, $0 < \mu_2 < \sigma$ и при подстановке (5.13) в (5.5) правая часть первого уравнения в (5.5) удовлетворяет условию Липшица по переменным η и e .

Доказательство. Выберем компоненты векторной функции (4.2) в виде квадратичных форм

$$V_1(\eta_{k+1}(t)) = \eta_{k+1}^T(t) P_1 \eta_{k+1}(t), \quad V_2(e_k) = e_k^T(t) P_2 e_k(t),$$

где $P_1 \succ 0$ и $P_2 \succ 0$ – диагональные блоки матрицы P , представляющей собой решение неравенства (5.10). Вычисляя аналог дивергенции функции (4.2), в силу (5.5) в результате последовательных оценок получим, что

$$\begin{aligned}
(5.15) \quad & \mathcal{D}_c V(\eta_{k+1}(t), e_k(t)) = \\
& = \zeta_{k+1}(t)^T \left[\bar{A}^T P I^{(1,0)} + P I^{(1,0)} \bar{A} + \bar{A}^T P I^{(0,1)} \bar{A} - P I^{(0,1)} \right] \zeta_{k+1}(t) + \\
& + 2\zeta_{k+1}(t)^T \left[P I^{(1,0)} \bar{B} + \bar{A}^T P I^{(0,1)} \bar{B} \right] v_{k+1}(t) + v_{k+1}(t)^T \bar{B}^T P I^{(0,1)} \bar{B} v_{k+1}(t) \leq \\
& \leq \zeta_{k+1}(t)^T \left[\bar{A}^T P I^{(1,0)} + P I^{(1,0)} \bar{A} + \bar{A}^T P I^{(0,1)} \bar{A} - (1 - \sigma) P I^{(0,1)} + \gamma P I^{(1,0)} - \right. \\
& - \left. \left(\bar{A}^T P I^{(0,1)} \bar{B} + \bar{B}^T P I^{(1,0)} \right) \left(B^T P I^{(0,1)} \bar{B} + R \right)^{-1} \left(\bar{B}^T P I^{(1,0)} + \bar{B}^T P \bar{A} \right) + \right. \\
& + Q \left. \right] \zeta_{k+1}(t) + \zeta_{k+1}(t)^T \left[P I^{(1,0)} \bar{B} + \bar{A}^T P I^{(0,1)} \bar{B} \right] \left[\bar{B}^T P I^{(0,1)} \bar{B} + R \right]^{-1} \left[\bar{B}^T P I^{(1,0)} + \right. \\
& + \left. \bar{B}^T P I^{(0,1)} \right] \zeta_{k+1}(t) + 2\zeta_{k+1}(t)^T \left[P I^{(1,0)} \bar{B} + \bar{A}^T P I^{(0,1)} \bar{B} \right] v_{k+1}(t) + \\
& + v_{k+1}(t)^T \left[\bar{B}^T P I^{(0,1)} \bar{B} + R \right] v_{k+1}(t) - \zeta_{k+1}(t)^T \left[Q + \sigma P I^{(0,1)} + \right. \\
& + \left. \gamma P I^{(1,0)} \right] \zeta_{k+1}(t) \leq S(v_{k+1}(t), z_{k+1}(t)) - \\
& - \zeta_{k+1}(t)^T \left[Q + \sigma P I^{(0,1)} + \gamma P I^{(1,0)} \right] \zeta_{k+1}(t) \leq \\
& \leq S(v_{k+1}(t), z_{k+1}(t)) - \mu \lambda_{\min}(P) |\zeta_{k+1}(t)|^2,
\end{aligned}$$

где $S(v, z)$ определяется соотношениями (5.11), (5.12) и $\mu = \min\{\mu_1, \mu_2\}$. Из (5.15) следует, что (5.5) – экспоненциально диссипативна относительно входной переменной v и выходной переменной (5.12) с функцией запаса (5.11). Выбирая $v_{k+1}(t)$ из множества (5.13), в силу (5.14) получим, что

$$\mathcal{D}_c V(\eta_{k+1}(t), e_k(t)) \leq -\mu \lambda_{\min}(P) |\zeta_{k+1}(t)|^2,$$

и в соответствии с аналогом теоремы 1 система (5.5), (5.13) экспоненциально устойчива. Теорема 3 доказана.

Замечание 3. В теореме 3 остается справедливым замечание 1 относительно выбора матрицы Θ . Существенно отметить, что возникающее в этом случае модифицированное неравенство Риккати (5.10) и соответствующее ему уравнение в известных публикациях не изучались, и для их решения пока можно предложить лишь эвристические итерационные методы.

6. Пример

Рассмотрим модель портального робота из [6]. В [6] траектория движения исполнительного органа, который схватывает предметы из определенной области и ставит их на конвейер, разделена на составляющие по трем ортогональным осям, и по каждой из осей экспериментально получена передаточная функция. Ограничимся построением управления с итеративным обучением

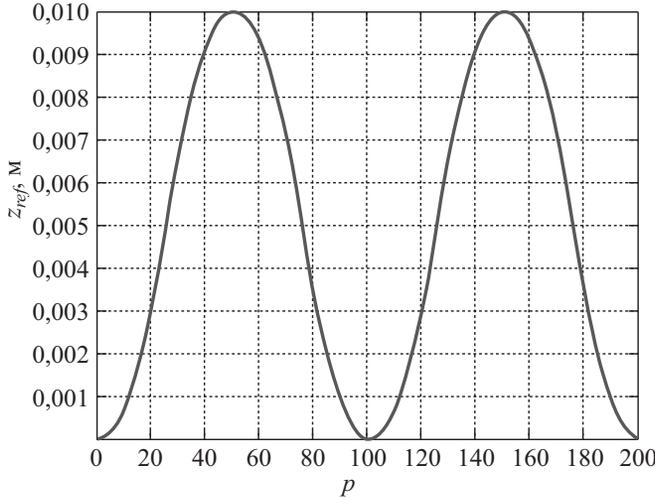


Рис. 1. Желаемая траектория движения по вертикальной оси.

по вертикальной оси. Передаточная функция от управления к вертикальному перемещению имеет вид

$$(6.1) \quad G_z(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{15,8869(s + 850,3)}{s(s^2 + 707,6s + 3,377 \cdot 10^5)}.$$

Управление будем строить в рамках дискретной модели состояния. В рассматриваемом случае период дискретности $T_s = 0,01$ с. Параметры дискретной модели состояния получим с помощью стандартных функций `ss` и `c2d` пакета `MATLAB`. Желаемая траектория движения по вертикальной оси представлена на рис. 1.

В качестве меры точности воспроизведения желаемой траектории введем в рассмотрение среднеквадратическую ошибку обучения

$$(6.2) \quad E(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{p=0}^N |\hat{e}_k(p)|^2}.$$

Поскольку число повторений велико, целесообразно при соблюдении условия (4.10) на первых повторениях увеличить коэффициент при ошибке в корректирующей поправке, чтобы ускорить достижение требуемой точности, а когда эта точность будет достигнута, уменьшить этот коэффициент. Этого можно достичь подходящим выбором функции Θ в (4.9). Выбирая эту функцию кусочно-постоянной так, чтобы при каждом ее значении выполнялось условие (4.10), получим кусочно-линейное управление. Как и в большинстве методов проектирования, здесь нельзя дать точных рекомендаций по выбору, он получается методом проб и ошибок. Обозначим

$$(6.3) \quad K = -[\bar{B}^T P \bar{B} + R]^{-1} \bar{B}^T P \bar{A}$$

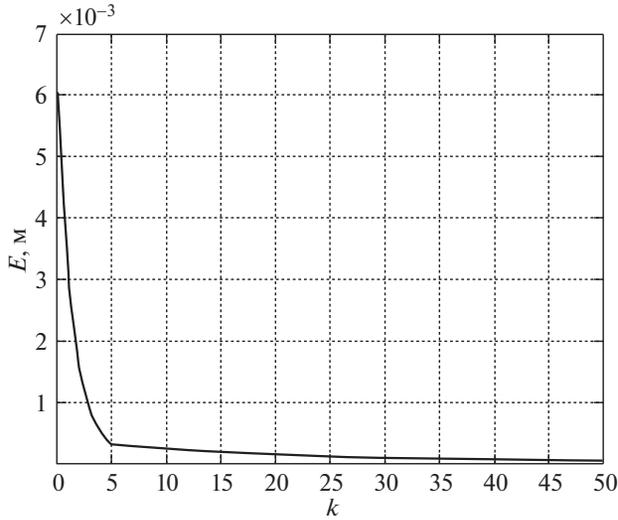


Рис. 2. Изменение среднеквадратической ошибки обучения в зависимости от числа повторений.

и зададим Θ в виде диагональной матрицы. Тогда в соответствии с теоремой 2 управление с итеративным обучением для рассматриваемой системы запишется в виде

$$(6.4) \quad u_k(p) = u_{k-1}(p) + K_1 \Theta_1 (\tilde{x}_k(p) - \tilde{x}_{k-1}(p)) + K_2 \Theta_2 (\hat{x}_k(p) - \hat{x}_{k-1}(p)) + K_3 \Theta_3 (z_{ref}(p+1) - Cx_{k-1}(p+1)),$$

где K_1 , K_2 , K_3 – соответствующие блоки матрицы (6.3). Пусть требуемая точность составляет $0,5 \cdot 10^{-3}$ м. Поскольку переменная $\tilde{x}_k(p)$ недоступна для измерения, выберем Θ_1 в виде нулевой матрицы, Θ_2 выберем в виде единичной матрицы, а Θ_3 попытаемся увеличить на начальных повторениях, а затем уменьшить при достижении указанной точности, не нарушая выполнение неравенства (4.10). Оказывается, что справедливость этого неравенства сохраняется при увеличении Θ_3 в два раза на начальных повторениях и при последующем уменьшении в 10 раз при достижении требуемой точности. Таким образом, кусочно линейное управление

$$(6.5) \quad u_k(p) = u_{k-1}(p) + K_2 (\hat{x}_k(p) - \hat{x}_{k-1}(p)) + K_3 \Theta_3 (z_{ref}(p+1) - Cx_{k-1}(p+1)),$$

где

$$\Theta_3 = \begin{cases} 2, & \text{если } |E(k)| > 0,5 \cdot 10^{-3}, \\ 0,25, & \text{если } |E(k)| \leq 0,5 \cdot 10^{-3}, \end{cases}$$

в соответствии с теоремой 2 является стабилизирующим с дополнительной функцией снижения энергозатрат при достижении требуемой точности. Зависимость среднеквадратической ошибки обучения от числа повторений представлена на рис. 2. Требуемая точность достигается за пять повторений, после

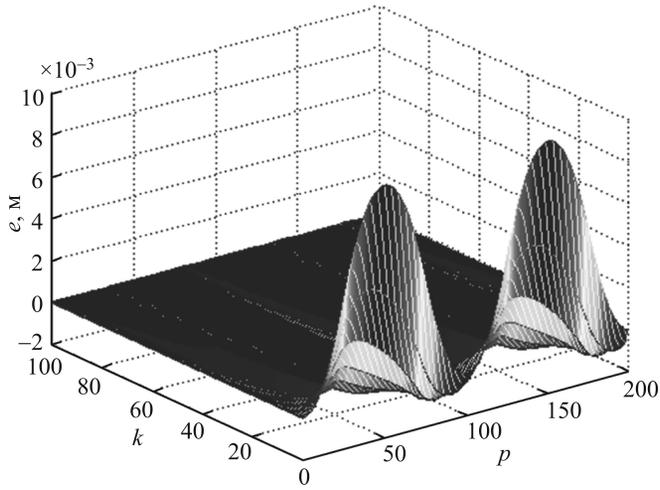


Рис. 3. Изменение ошибки обучения в зависимости от числа повторений.

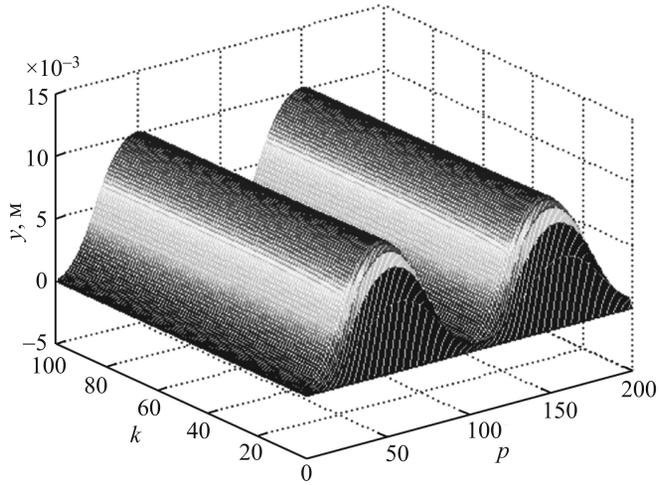


Рис. 4. Изменение выходной переменной в зависимости от числа повторений.

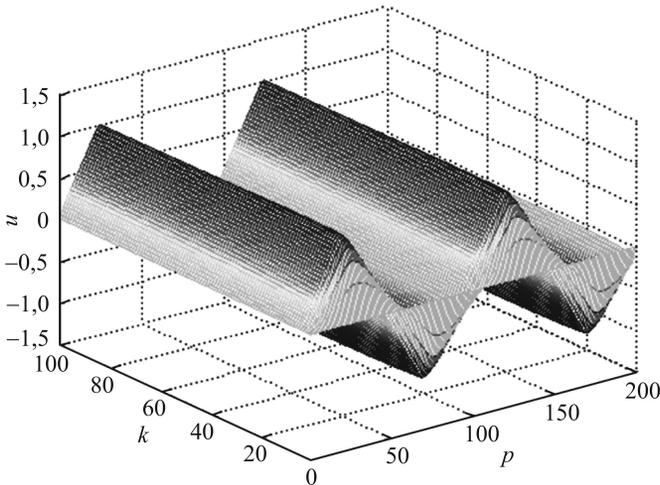


Рис. 5. Изменение управления в зависимости от числа повторений.

чего ошибка продолжает монотонно уменьшаться. На рис. 3–5 для большей наглядности представлены графики изменения ошибки, выходной переменной и управления в зависимости от числа повторений.

7. Заключение

Полученные алгоритмы управления с итеративным обучением позволяют гибко изменять скорость сходимости процесса обучения в зависимости от величины ошибки, но построение регулярной процедуры настройки алгоритма это отдельная задача, требующая дальнейших самостоятельных исследований. В данной статье продемонстрирован лишь простейший подход с элементами эвристики, использующий кусочно-линейное управление. Кроме того, частный случай линейного управления, который вытекает из теорем 2 и 3, также является новым результатом. Естественным дальнейшим развитием полученных результатов является разработка алгоритмов управления с итеративным обучением стохастическими системами, в которых на объект управления действуют случайные возмущения, а измерения проводятся с шумами. Представляет также интерес изучение свойств модифицированного неравенства Риккати (5.10) и нахождение эффективного метода его решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bristow D.A., Tharayil M., Alleyne A.G.* A survey of Iterative Learning Control // *IEEE Control Syst. Magazine*. 2006. V. 23. No. 3. P. 96–114.
2. *Ahn Hyo-Sung, Chen Yang Quan, Moore K.L.* Iterative Learning Control: Brief Survey and Categorization // *IEEE Trans. Syst., Man, Cybernet. Part C: Applications and Reviews*. 2007. V. 37. No. 6. P. 1099–1121.
3. *Ahn Hyo-Sung, Moore K.L., Chen Yang Quan.* Iterative Learning Control. Robustness and Monotonic Convergence for Interval Systems. London: Springer-Verlag, 2007.
4. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering Operation of Dynamic Systems by Learning: A New Control Theory for Servomechanism or Mechatronic Systems // *Proc. 23rd Conf. Decision Control*. 1984. P. 1064–1069.
5. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering Operation of Robots by Learning // *J. Robot. Syst.* 1984. V. 1. No. 2. P. 123–140.
6. *Hladowski L., Galkowski K., Cai Z., Rogers E., Freeman C., Lewin P.* Experimentally Supported 2D Systems Based Iterative Learning Control Law Design for Error Convergence and Performance // *Control Eng. Pract.* 2010. V. 18. P. 339–348.
7. *Shen D., Wang Y.* Survey on Stochastic Iterative Learning Control // *J. Process Control*. 2014. V. 24. P. 64–77.
8. *Shen D.* A Technical Overview of Recent Progresses on Stochastic Iterative Learning Control // *Unmanned Syst.* 2018. V. 6. No. 3. P. 147–164.
9. *Jayawardhana R.N., Ghosh B.K.* Observer Based Iterative Learning Controller Design for MIMO Systems in Discrete Time // *Proc. 2018 Ann. Amer. Control Conf. (ACC)*. 2018. P. 6402–6408.
10. *Jayawardhana R.N., Ghosh B.K.* Kalman Filter Based Iterative Learning Control for Discrete Time MIMO Systems // *Proc. 30th Chinese Control and Decision Conf. (2018 CCDC)*. 2018. P. 2257–2264.

11. *Saab S.S.* A discrete-Time Stochastic Learning Control Algorithm // IEEE Trans. Autom. Control. 2001. V. 46. P. 877–887.
12. *Paszke W., Rogers E., Patan K.* Observer-Based Iterative Learning Control Design in the Repetitive Process Setting // IFAC-PapersOnline. 2017. V. 50. No. 1. P. 13390–13395.
13. *Rogers E., Galkowski K., Owens D.H.* Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes // Lect. Notes Control Inform. Sci. Berlin: Springer-Verlag, 2007. V. 349.
14. *Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Galkowski K., Rogers E.* Dissipativity and Stabilization of Nonlinear Repetitive Processes // Syst. & Control Lett. 2016. V. 91. P. 14–20.
15. *Галковский К., Емельянов М.А., Пахшин П.В., Роджерс Э.* Векторные функции Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации дифференциальных повторяющихся процессов // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2016. № 4. С. 5–17.
Galkowski K., Emelianov M., Pakshin P., Rogers E. Vector Lyapunov Functions for Stability and Stabilization of Differential Repetitive Processes // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2016. V. 55. P. 503–514.
16. *Goldsmith P.B.* On the Equivalence of Causal LTI Iterative Learning Control and Feedback Control // Automatica. 2002. V. 38. No. 4. P. 703–708.
17. *Goldsmith P.B.* Author’s reply to “On the Equivalence of Causal LTI Iterative Learning Control and Feedback Control” // Automatica. 2004. V. 40. No. 5. P. 899–900.
18. *Owens D.H., Rogers E.* Comments on “On the Equivalence of Causal LTI Iterative Learning Control and Feedback Control” // Automatica. 2004. V. 40. No. 5. P. 895–898.
19. *Willems J.C.* Dissipative Dynamical Systems part I: General Theory // Arch. Ration. Mech. Anal. 1972. V. 45. P. 321–351.
20. *Byrnes C.I., Isidori A., Willems J.C.* Passivity, Feedback Equivalence and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. P. 1228–1240.
21. *Fradkov A.L., Hill D.J.* Exponential Feedback Passivity and Stabilizability of Nonlinear Systems // Automatica. 1998. V. 34. P. 697–703.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиньым.

Поступила в редакцию 19.07.2018

После доработки 30.08.2018

Принята к публикации 08.11.2018