© 2019 г. **В.В. ПОДИНОВСКИЙ, д-р. техн. наук (podinovski@mail.ru)**
(Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва),
М.А. ПОТАПОВ, канд. физ.-мат. наук (potapov@icad.org.ru)
(Институт автоматизации проектирования РАН, Москва)

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПО ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ЧАСТИЧНЫМ ОТНОШЕНИЯМ ПРЕДПОЧТЕНИЯ[1]

Дается обзор методов анализа чувствительности недоминируемых альтернатив к изменению параметров частичных квазипорядков, описывающих предпочтения. В качестве таких параметров могут выступать значения коэффициентов важности критериев или границы интервальных оценок степеней превосходства в важности одних критериев над другими, границы интервалов неопределенности замещений критериев и другие.

Ключевые слова: многокритериальные задачи принятия решений, частичные квазипорядки, анализ чувствительности, теория важности критериев.

DOI: 10.1134/S0005231019070079

1. Введение

При анализе и выборе многокритериальных решений широко используются параметрические модели предпочтений. Самый известный пример — аддитивная функция ценности (в частности, линейная «свертка») с весами (коэффициентами важности) критериев. Так как назначение точных значений параметров по целому ряду причин (из-за наличия неопределенных факторов, неточности исходных данных, неполноты сведений о предпочтениях лица, принимающего решения, и т.п.) — непростая проблема, то такие значения оказываются недостаточно надежными и могут содержать ошибки. Поэтому важным этапом анализа прикладных задач является оценка чувствительности результатов выбора к изменению назначенных величин параметров, т.е. выяснение пределов, в которых можно изменять исходные значения параметров так, чтобы результаты выбора оставались неизменными. Например, в руководстве по подаче предложений по политическому анализу (policy analysis) для Европейской комиссии Европейского союза в контексте по оценке влияния [1] записано: «Если допущения, лежащие в основе базового сценария, могут изменяться в результате воздействия внешних факторов, необходимо провести анализ чувствительности, чтобы оценить, существенно ли различаются последствия вариантов политики для различных значений ключевых переменных».

[1] Исследования проводились в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации “5-100” и Госпрограммы исследований Института автоматизации проектирования РАН.

С другой стороны, следует отметить, что результаты анализа чувствительности могут прояснить и требования к точности оценок параметров.

Методы анализа чувствительности хорошо развиты для однокритериальных задач оптимизации (см., например, [2]) и особенно для задач линейного программирования [3, 4]. Для многокритериальных задач методы анализа чувствительности первоначально разрабатывались применительно к моделям предпочтений в виде аддитивной функции ценности (в том числе для методов анализа иерархий и TOPSIS), в которой параметрами являлись веса критериев, а затем и значения частных функций ценности [5–13]. Однако разработанные для параметрических функций ценности подходы к анализу чувствительности в принципе не годятся для моделей с частичными бинарными отношениями, ибо при фиксированных значениях параметров функция ценности позволяет сравнивать по предпочтительности любые варианты, а частичное отношение предпочтения этого не позволяет. Поэтому здесь требуются иные методы, основанные на новых идеях.

Анализу чувствительности для параметрических полных транзитивных отношений предпочтения, возникающих при использовании метода PROMETEE II, посвящены статьи [14, 5]. Метод из [15] учитывает изменения весов критериев и основан на решении смешанной целочисленной задачи линейного программирования.

Методы анализа чувствительности для частичных отношений предпочтения вначале были разработаны для моделей, базирующихся на отношениях превосходства (outranking relations) и использующихся в таких методах решения многокритериальных задач, как ELECTRE (разных видов) [16–18]. Следует иметь в виду, что отношения превосходства не являются транзитивными. В [16] для метода ELECTRE I предложены аналитические методы расчета границ интервалов, в пределах которых изменение весов отдельных критериев, а также отдельных уровней согласия или несогласия не меняют множество недоминируемых альтернатив. В [17] для метода ELECTRE III, который используется для упорядочения альтернатив по предпочтительности на основании конструируемого нечеткого отношения превосходства (outranking relation), предложен метод оценки «устойчивости» полученного упорядочения при помощи трех показателей, имеющих вероятностный смысл и определяемых для каждой пары альтернатив: индекс приемлемости рангов (альтернатив в их итоговой упорядоченности), индекс парного выигрыша (превосходства в предпочтительности) и индекс несравнимости. При этом предполагается, что для параметров отношения превосходства (весов критериев и пороговых уровней), а также и для значений критериев заданы области (обычно интервалы), в которых истинные значения этих параметров распределены равномерно. Значения указанных индексов рассчитываются методом Монте Карло. В [18] применительно к задаче выбора места логистического центра проведен сравнительный анализ чувствительности результатов выбора, полученных методом ELECTRE I, а также методами TOPSIS, COPRAS и VIKOR, к изменению весов критериев, значений критериев и формулировок критериев. Для этого задача выбора (с 11 критериями и 8 альтернативами) решалась при нескольких различных значениях весов, двух — исходных и полученных аффинным преобразованием — значениях критериев (шкалы которых полагались интервальными), а также двух формулировок критериев (одна имела смысл «позитивного результата», а другая — «негативного»). А затем сравнивались полученные в результате решения задачи выбранными методами упорядочения альтернатив по предпочтительности.

В многоцелевом линейном программировании (multi-objective linear programming — MOLP) разработаны методы анализа чувствительности отдельной оптимальной по Парето или Слейтеру альтернативы к изменению коэффициентов целевых функций. С обзором этих методов можно познакомиться по [19].

Для параметрических частичных транзитивных отношений предпочтения методы анализа чувствительности были созданы лишь в последнее десятилетие, причем, насколько известно авторам статьи, только в России. Обзору публикаций, в которых изложены эти методы, и посвящена данная статья. Изложение методов ведется в рамках единой концепции.

2. Математическая модель

Для анализа задач принятия решений о выборе наилучшей альтернативы (варианта решения) используется следующая математическая модель проблемной ситуации:

$$\mathcal{M} =< X, f, Z, \mathcal{P} >, \tag{2.1}$$

где:

X — множество альтернатив (стратегий, планов, вариантов выбора) x;

$f = (f_1, \ldots, f_m)$ — векторный критерий, где f_i: $X \to Z_i$ — частные, или локальные критерии ($m \geq 2$), $Z_i \subseteq (-\infty, +\infty)$ — область значений («шкала») критерия f_i;

$Z = Z_1 \times \ldots \times Z_m$ — множество векторных оценок, или область значений векторного критерия f;

$\mathcal{P}$ — математическая модель предпочтений лица, принимающего решение (ЛПР).

Векторный критерий $f = (f_1, \ldots, f_m)$ служит для оценки последствий, к которым приводит выбор альтернативы $x \in X$. Сравнение альтернатив x по предпочтительности осуществляется путем сопоставления их векторных оценок $y = f(x) = (f_1(x), \ldots f_m(x))$.

Далее рассматривается случай, когда модель предпочтений $\mathcal{P}$ представляет собой параметрическое отношение строгого предпочтения $P^0(\gamma)$ на множестве Z: при фиксированном значении параметра γ из области его значений Γ запись $yP^0(\gamma)z$ означает, что векторная оценка y предпочтительнее, чем z. Предполагается, что при любом $\gamma \in \Gamma$ отношение $P^0(\gamma)$ является строгим частичным порядком: оно иррефлексивно ($yP^0(\gamma)y$ неверно) и транзитивно (из $yP^0(\gamma)z$ и $zP^0(\gamma)u$ следует $yP^0(\gamma)u$). Это отношение является частичным: если $y \neq z$, то могут не выполняться ни $yP^0(\gamma)z$, ни $zP^0(\gamma)y$. Оно задается на основе накопленной информации о предпочтениях ЛПР при помощи подходящего решающего правила. Отношение $P^0(\gamma)$ порождает на множестве альтернатив X аналогичное по смыслу отношение $P(\gamma)$ — строгий частичный порядок:

$$x'P(\gamma)x'' \Leftrightarrow f(x')P^0(\gamma)f(x'').$$

Последнее выделяет из X подмножество недоминируемых (по $P(\gamma)$) альтернатив $X(\gamma)$: альтернатива x^* называется недоминируемой (по $P(\gamma)$), если не существует альтернативы x такой, что верно $xP(\gamma)x^*$. Анализ чувствительности может проводиться как для отдельных недоминируемых альтернатив, так и для всего их множества $X^*(\gamma)$ в целом.

Далее считается, что множество альтернатив конечно: $X = \{x^1, \dots, x^n\}$. В анализе чувствительности базовую роль играет понятие потенциального доминирования: альтернатива x^j называется потенциально доминирующей над x^t, если найдется такое значение $\gamma \in \Gamma$, при котором верно $x^j P(\gamma)x^t$. В [20, 21] доказывается ряд общих утверждений, упрощающих поиск потенциально доминирующих альтернатив.

Пусть фиксировано значение $\gamma^* \in \Gamma$ и $X^* = \{x^{*^1}, \dots, x^{*^l}, \dots, x^{*^L}\}$ — множество альтернатив, недоминируемых по $P(\gamma^*)$. Целью анализа чувствительности отдельной альтернативы x^{*^l} или всего множества X^* в целом является получение оценки такого максимально возможного изменения значения параметра γ^* до значений $\gamma \in \Gamma$, при котором остается недомируемой по $P(\gamma)$ эта альтернатива или все указанное множество. Для этого следует ввести меру (степени) изменения значений параметра; такая мера может вводиться по-разному, с учетом специфики исходной задачи выбора (см. ниже).

3. Анализ чувствительности для моделей с однородными параметрами

Во множестве многокритериальных моделей предпочтений, основанных на частичных бинарных отношениях, можно выделить модели с однородными (обычно безразмерными) параметрами и модели с неоднородными (имеющими разную «физическую» размерность) параметрами. Примерами моделей первого из указанных классов являются модели из теории (симметрической, или истинной) важности (однородных, т.е. имеющих общую шкалу, а потому и единую область значений $Z_0 = Z_1 = \dots = Z_n$) критериев [22, 23]. Примерами моделей второго класса служат модели из теории параметрической важности неоднородных критериев и, в частности, из теории интервальных замещений критериев [24, 25].

Чувствительность выбора к изменению оценок (коэффициентов) важности α_i однородных критериев f_i с порядковой шкалой или шкалой первой порядковой метрики и конечным множеством значений Z_0 изучена в [20, 21, 26–29]. Множество $\mathrm{A}^\Omega = \Gamma$ — область значений вектора важности $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \gamma$ — формируется как «техническими» ограничениями:

$$\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_m > 0; \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1, \tag{3.1}$$

так и ограничениями, основанными на качественной информации о важности Ω, состоящей из сообщений типа «Один критерий важнее другого» $(i \succ j)$ и «Оба критерия равноважны» $(i \sim j)$:

$$\alpha_i > \alpha_j \quad \text{при} \quad i \succ j \in \Omega; \quad \alpha_i = \alpha_j \quad \text{при} \quad i \sim j \in \Omega. \tag{3.2}$$

(В теории качественной важности имеются строгие определения понятий равенства и превосходства важности одних критериев над другими, а в теории количественной важности имеется строгое определение понятия превосходства важности в h раз [22, 30, 31]. Эти определения здесь не приводятся, так как в дальнейшем изложении они непосредственно не используются.)

В теории важности критериев аналитические решающие правила могут задаваться системами линейных равенств и неравенств. Далее полагается, что множество (область значений критериев) Z_0 конечно: $Z_0 = \{1, \ldots, q\}$, а шкала критериев порядковая. Для количественной информации о важности Θ, согласованной с полной качественной информацией Ω (все критерии упорядочены по важности и выполнены условия (3.2)) и однозначно определяющей количественные коэффициенты важности α_i (так как по определению $h_{ij} = \alpha_i/\alpha_i$, где h_{ij} степень превосходства в важности критерия f_i над критерием f_j), решающее правило, задающее на X соответствующее отношение строгого предпочтения $P(\alpha)$, представляет собой систему линейных неравенств [30, 31]:

$$x^j P(\alpha) x^t \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{m} c_{ik}^{j} \alpha_i \geq \sum_{i=1}^{m} c_{ik}^{t} \alpha_i, \quad k = 2, \ldots, q, \tag{3.3}$$

причем среди $q-1$ нестрогих неравенств хотя бы одно выполняется как строгое. В (3.3) коэффициенты равны: $c_{ik}^{j} = 1$ при $f_i(x^j) \geq k$ и $c_{ik}^{j} = 0$ при $f_i(x^j) < k$.

В [20, 21] рассматривается случай точечной оценки важности, когда задается точное значение $\alpha^* \in \mathrm{A}^{\Omega}$. При этом решением задачи выбора является множество $X^* = \{x^{*^1}, \ldots, x^{*^l}, \ldots, x^{*^L}\}$ альтернатив, недоминируемых по $P(\alpha^*)$. Оно непусто и, более того, внешне устойчиво: если альтернатива x^j не входит в X^*, то найдется более предпочтительная альтернатива x^{*l}, т.е. такая, что верно $x^{*l} P(\alpha^*) x^j$.

Согласно общему определению альтернатива x^j является потенциально доминирующей над альтернативой x^t, если не пусто множество A^{jt} значений α, удовлетворяющих системе линейных ограничений, состоящей из $q-1$ неравенств (3.3), среди которых должно быть хотя бы одно строгое, а также ограничений (3.1)–(3.2). Совместность этой системы практически можно проверить при помощи методов линейного программирования. Для этого надо учесть, что после удаления равенства из (3.1) получим систему однородных линейных неравенств, которая совместна тогда и только тогда, когда совместна исходная система. А последняя эквивалентна по совместности системе из линейных равенств и нестрогих неравенств, получаемой заменой всех строгих неравенств в (3.1) и (3.3) нестрогими с добавлением в правые их части произвольного положительного числа e (например, единицы):

$$\alpha_1 \geq e, \ldots, \alpha_m \geq e; \quad \alpha_i - \alpha_j \geq e \quad \text{при} \quad i \succ j \in \Omega,$$
$$\alpha_i = \alpha_j \quad \text{при} \quad i \sim j \in \Omega$$

и добавлением неравенства

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{k=2}^{q} \left(c_{ik}^j - c_{ik}^t \right) \geq e.$$

Степень чувствительности недоминируемой по $P(\alpha^*)$ альтернативы x^{*l} относительно потенциально доминирующей над ней альтернативы x^k оценивается при помощи расстояния d^{kl} от точки α^* до множества A^{kl}, т.е. $d^{kl} = \inf_{\alpha \in \mathrm{A}^{kl}} d(\alpha, \alpha^*)$, где $d(\alpha, \alpha^*)$ — это расстояние между точками α и α^*. Последнее определяется одной из следующих формул:

$$d^\sigma(\alpha, \alpha^*) = \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i - \alpha_i^*|, \quad d^\mu(\alpha, \alpha^*) = \max_{i \in \{1, \ldots, m\}} |\alpha_i - \alpha_i^*|.$$

Используя известные приемы (см., например, [30]), за счет введения дополнительных переменных оптимизационная задача нахождения d^{kl} сводится к задаче с линейной целевой функцией и линейными ограничениями. Наконец, учитывая, что множество A^{jl} не пусто, можно все строгие однородные неравенства, входящие в состав определяющей это множество системы линейных ограничений, заменить нестрогими и в итоге получить задачу линейного программирования.

Пусть N^l — множество номеров альтернатив, потенциально доминирующих над x^{*l}. Степень чувствительности отдельной альтернативы x^{*l} характеризуется наименьшим относительным значением δ^l величин d^{kl} для всех потенциально доминирующих над ней альтернатив: $\delta^l = d^l/D$, где $D = \sup_{\alpha \in \mathrm{A}^\Omega} d(\alpha, \alpha^*)$ и $d^l = \min_{k \in N^l} d^{kl}$.

Для оценки степени устойчивости множества X^* недоминируемых по $P(\alpha^*)$ альтернатив в целом можно использовать показатель $\delta^* = \min_{l \in \{1, \ldots, L\}} \delta^l$.

Пусть теперь все критерии упорядочены по важности согласно качественной информации о важности Ω, перенумерованы в порядке невозрастания их важности и имеется количественная информация о важности Θ, согласованная с Ω. Такая информация включает величины степеней h_i превосходства в важности критериев f_i над следующими в упорядочении критериями f_{i+1}, т.е. $h_i = \alpha_i/\alpha_{i+1}$, $i = 1, \ldots, m-1$, так что $h_i > 1$ при $i \succ i+1$ и $h_i = 1$ при $i \sim i+1, i = 1, \ldots, m-1$. Числа h_i составляют вектор $h = (h_1, \ldots, h_{m-1})$. Этот вектор однозначно задает коэффициенты важности:

$$\text{(3.4)} \quad \alpha_i(h) = \nu(h) \cdot h_{m-1} \cdot h_{m-2} \cdot \ldots \cdot h_i, \quad i = 1, \ldots, m-1, \quad \alpha_m(h) = \nu(h),$$

где $\nu(h)$ — положительный нормирующий множитель, обеспечивающий выполнение равенства в (3.1). С учетом (3.4) решающее правило (3.3) можно переписать в виде:

$$x^j P(h) x^t \;\Leftrightarrow\; \nu(h) \sum_{i=1}^{m} \delta_{ik}^{jt} \alpha_i(h) \geq 0, \quad k = 2, 3, \ldots, q, \tag{3.5}$$

причем среди $q - 1$ нестрогих неравенств хотя бы одно выполняется как строгое. В (3.5) коэффициенты $\delta_{ik}^{jt} = c_{ik}^j - c_{ik}^t \in \{-1, 0, 1\}$.

В [26, 27] рассматривается случай интервальной информации о важности критериев Δ, состоящей из интервальных оценок степеней превосходства в важности:

$$1 \leq a_i \leq h_i \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m - 1 \tag{3.6}$$

(если $i \sim i + 1$, то $a_i = b_i = 1$). Интервальной оценкой важности является вектор $\tau = (a_1, b_1, \ldots, a_{m-1}, b_{m-1})$ величин границ интервалов из (3.6). Множество H^{Δ} возможных значений вектора h задается ограничениями (3.6). Решающее правило, задающее отношение $P(\tau)$ на основе интервальной информации Δ, таково: $x^j P(\tau) x^t$ верно тогда и только тогда, когда (3.5) выполнено для всех значений $h \in H^{\Delta}$. Поскольку множитель $\nu(h) > 0$, то это решающее правило можно представить в оптимизационной форме:

$$x^j P(\tau) x^t \;\Leftrightarrow\; \inf_{h \in H^{\Xi}} \sum_{i=1}^{m} \delta_{ik}^{jt} \alpha'_i(h) \geq 0, \quad k = 2, 3, \ldots, q, \tag{3.7}$$

где величины $\alpha'_i(h)$, $i < m$, определяются согласно (3.4), но без $\nu(h)$, и $\alpha'_m(h) = 1$.

Здесь при анализе чувствительности роль компонент векторного параметра γ играет вектор $\tau = (a_1, b_1, \ldots, a_{m-1}, b_{m-1})$ с областью возможных значений $\mathrm{T} = \Gamma$, задаваемой условиями (3.6).

Пусть задана интервальная оценка важности критериев $\tau^* = (a_1^*, b_1^*, \ldots, \ldots, a_{m-1}^*, b_{m-1}^*)$. Анализ чувствительности недоминируемых по $P(\tau^*)$ альтернатив оказался весьма непростым, требующим решения сложных нелинейных оптимизационных задач. Поэтому в [27, 28] предложен аналитический метод оценки чувствительности результатов сравнения альтернатив по предпочтительности, т.е. метод сохранения истинности соотношения $x^j P(\tau^*) x^t$ при изменении границ отдельно взятого r-го интервала из (3.6).

Область возможных значений вектора τ, в котором все компоненты, кроме a_r и b_r, равны соответствующим компонентам вектора s^*, обозначим через T^r. Это — многомерный многогранник, и он отличается от многогранника T только границами для r-й компоненты: вместо границ a_r^* и b_r^* он задается границами a_r и b_r, которые и надо найти. Для этого можно в разных комбинациях подставлять в условие $\sum_{i=1}^{m} \delta_{ik}^{jt} \alpha'_i(h) \geq 0$ (см. (3.5)) для всех $i \neq r$ крайние значения h_i для интервала из (3.6), т.е. числа a_i^* и b_i^*. В результате получится система линейных неравенств относительно одной переменной h_r. Из этих неравенств с учетом (3.6) несложно получить ограничения на эту переменную. А потом рассчитать модули изменений границ a_r^* и b_r^*, являющиеся искомыми характеристиками чувствительности.

4. Анализ чувствительности для моделей с неоднородными параметрами

В [31, 32] рассматриваются параметрические модели предпочтений, возникающие при использовании методов параметрической (пропорциональной) важности (неоднородных) критериев. Предпочтения представляются в форме интервалов неопределенности замещения (ИНЗ) критерия f_i критерием f_j:

$$\lambda_{ij} = (\lambda_{ij}^{-}, \lambda_{ij}^{+}), \quad \text{где} \quad 0 < \lambda_{ij}^{-} < \lambda_{ij}^{+}, \tag{4.1}$$

которые обладают следующими характеристическими свойствами:

$$\left(y \, \| y_i - t \, , \, y_j + \lambda_{ij}^{+} t\right) Py, \ \forall y \in Z, \quad t > 0, \quad y_i - t \in Z_i, \quad y_j + \lambda_{ij}^{+} t \in Z_j;$$

$$yP \left(y \, \| y_i - t \, , \, y_j + \lambda_{ij}^{-} t\right), \ \forall y \in Z, \quad t > 0, \ y_i - t \in Z_i, \quad y_j + \lambda_{ij}^{-} t \in Z_j.$$

Здесь под $(y \, \| y_i - t, y_j + bt)$ понимается векторная оценка, полученная из векторной оценки y заменой ее компонент y_i и y_j соответственно на $y_i - t$ и $y_j + bt$.

Пусть $\{\lambda_{ij}\}$ — произвольный набор ИНЗ. Для такого, общего случая интервальной информации о замещениях критериев решающие правила представляют собой системы неравенств, линейных относительно некоторых дополнительных переменных, причем величины λ_{ij}^{-} и λ_{ij}^{+} являются коэффициентами при этих переменных [25, 33]. В силу указанного обстоятельства при анализе чувствительности к изменению этих величин возникают достаточно сложные нелинейные задачи оптимизации [31]. Поэтому целесообразно изучать случаи таких наборов ИНЗ, для которых можно получить аналитические решающие правила.

В [32] рассмотрен наиболее интересный для приложений случай, когда ИНЗ заданы для каждого из $m-1$ критериев $f_2, \ldots, f_m$ и критерия f_1 и образуют вектор $\lambda = (\lambda_{21}^{-}, \lambda_{21}^{+}, \ldots, \lambda_{m1}^{-}, \lambda_{m1}^{+})$. Вводятся следующие обозначения:

$$\delta^{jt} = f(x^j) - f(x^t); \quad \hat{M} = \{2, \ldots, m\};$$

$$M^{+}(\delta^{jt}) = \left\{ i \in \hat{M} \middle| \delta_i^{jt} > 0 \right\}, \quad M^{-}(\delta^{jt}) = \left\{ i \in \hat{M} \middle| \delta_i^{jt} < 0 \right\};$$

$$a^{jt} = \delta_1^{jt} + \sum_{i \in M^{+}(\delta^{jt})} \lambda_{i1}^{-} \delta_i^{jt} + \sum_{i \in M^{-}(\delta^{jt})} \lambda_{i1}^{+} \delta_i^{jt}, \tag{4.2}$$

$$b^{jt} = \delta_1^{jt} + \sum_{i \in M^{+}(\delta^{jt})} \lambda_{i1}^{+} \delta_i^{jt} + \sum_{i \in M^{-}(\delta^{jt})} \lambda_{i1}^{-} \delta_i^{jt}.$$

Если одно из множеств $M^{+}(\delta^{jt})$ или $M^{-}(\delta^{jt})$ пусто, то соответствующая сумма в (4.2) равна нулю. Заметим, что $a^{jt} \le b^{jt}$, причем $a^{jt} = b^{jt}$ только при $f(x^j) = f(x^t)$.

Решающее правило формулируется так [25, 34]:

Если $f_i(x^j) \neq f_i(x^t)$ для некоторого $i > 1$ и выполнено одно из следующих условий:

— все критерии континуальны (т.е. все m множеств Z_i — числовые промежутки);

— базовый критерий континуален и неограничен или ограничен только с одной стороны,

то

$$(4.3) \quad x^j P(\lambda) x^t \Leftrightarrow a^{jt} \geq 0; \quad x^t P(\lambda) x^j \Leftrightarrow b^{jt} \leq 0; \quad x^j N(\lambda) x^t \Leftrightarrow a^{jt} < 0 < b^{jt}$$

(здесь $N(\lambda)$ — это отношение несравнимости).

Интервальной оценкой замещений критериев является вектор ИНЗ $\lambda^* = (\lambda_{21}^{*-}, \lambda_{21}^{*+}, \ldots, \lambda_{m1}^{*-}, \lambda_{m1}^{*+})$. Целью анализа чувствительности отдельной недоминируемой по $P(\lambda^*)$ альтернативы или множества таких альтернатив в целом к изменению параметра $\gamma = \lambda$ является получение оценок максимально возможных изменений λ^*, при которых недоминируемость сохраняется. Область возможных значений $\Gamma = \Lambda$ параметра λ определяется системой неравенств из (4.1).

При расширении ИНЗ изменением соответствующего отношения предпочтения может быть только его сужение, так что недоминируемые по $P(\lambda^*)$ альтернативы останутся недоминируемыми. Следовательно, для оценки чувствительности достаточно исследовать возможности сужения ИНЗ. Но «физическая» размерность критериев может быть разной. Поэтому для соизмерения степеней сужения разных ИНЗ из λ^* до λ, где $(\lambda_{i1}^-, \lambda_{i1}^+) \subseteq (\lambda_{i1}^{*-}, \lambda_{i1}^{*+})$, $i \in \hat{M}$, вводятся величины $d_i = \lambda_{i1}^{*+} - \lambda_{i1}^{*-}$, где $\lambda_{i1}^- = \lambda_{i1}^{*-} + r_i^- d_i$, $\lambda_{i1}^+ = \lambda_{i1}^{*+} - r_i^+ d_i$, $r_i^- \geq 0$, $r_i^+ \geq 0$, $i \in \hat{M}$. Переменные r_i^- и r_i^- согласно (4.1) должны удовлетворять условиям

$$(4.4) \qquad r_i^- \geq 0, \quad r_i^+ \geq 0, \quad r_i^- + r_i^+ < 1, \quad i \in \hat{M}.$$

Относительная длина суженного ИНЗ равна $(\lambda_{i1}^+ - \lambda_{i1}^-)/d_i = 1 - (r_i^+ + r_i^-) > 0$. Поэтому для оценки степени сужения ИНЗ можно использовать показатели r_i^- и r_i^+: чем они больше, тем сильнее сужение соответствующего ИНЗ. В итоге приходим к многокритериальной задаче максимизации с $2(m-1)$ равноважными критериями r_i^- и r_i^+ (задачи с равноважными критериями изучались в [35]). Полагается, что увеличение больших значений одних величин r_i^- и r_i^+ не компенсирует уменьшение меньших значений других таких величин. Иначе говоря, вначале желательно максимизировать наименьшую из величин r_i^- и r_i^+, $i \in \hat{M}$, затем следующую в порядке их возрастания (точнее, неубывания) и т.д. Такие задачи называются SL-(симметрически-лексикографическими) задачами, или лексиминными задачами оптимизации. Решение поставленной лексиминной задачи сводится к решению последовательности задач максимизации вначале наименьшей из указанных $2(m-1)$ величин r_i^- и r_i^+ при соответствующих ограничениях на переменные r_i^- и r_i^+, $i = 2, \ldots, m$, затем следующей по величине (в порядке возрастания) и т.д. Кратко представим указанную последовательность задач.

Альтернатива x^j будет потенциально доминирующей над альтернативой x^t, если найдутся числа r_i^- и r_i^+, $i \in \hat{M}$, такие что будет верно

$f(x^j)P(\lambda)f(x^t)$, т.е., согласно (4.3), если справедливо неравенство $a^{jt} \geq 0$. С учетом (4.2) это неравенство в развернутом виде оказывается линейным относительно переменных r_i^- и r_i^+:

$$\sum_{i \in M^+(\delta^{jt})} \delta_i^{jt} d_i r_i^- - \sum_{i \in M^-(\delta^{jt})} \delta_i^{jt} d_i r_i^+ < -a^{jt*}, \tag{4.5}$$

где a^{jt*} — величина a^{jt}, рассчитанная для $\lambda = \lambda^*$.

Рассмотрим задачу оценки чувствительности недоминируемой по $P(\lambda^*)$ альтернативы X^{*l}. Пусть N^l — множество номеров альтернатив, потенциально доминирующих над X^{*l}. (Это множество будем полагать непустым, иначе анализ чувствительности теряет смысл.) Условие, что неверно $f(x^j)P(\lambda^*)f(x^{*^l})$, выполнено, когда согласно (4.3) справедливо неравенство $a^{jl} < 0$. Поэтому система ограничений, обеспечивающих недоминируемость X^{*l}, состоит из таких неравенств для всех j из N^l, т.е. (см. (4.5))

$$\sum_{i \in M^+(\delta^{jl})} \delta_i^{jl} d_i r_i^- - \sum_{i \in M^-(\delta^{jl})} \delta_i^{jl} d_i r_i^+ < -a^{jl*}, \quad j \in N^l. \tag{4.6}$$

Итак, первой оптимизационной задачей является задача максимизации целевой функции $\min_{i \in M'} \min\{r_i^-, r_i^+\}$ при ограничениях (4.4), (4.6). Для получения оптимизационной задачи в стандартной формулировке заменим строгие неравенства в (4.4) и (4.6) нестрогими (этот факт далее учитывается тем, что полученные границы для ИНЗ полагаются недостижимыми). Используя известный стандартный прием замены нелинейной целевой функции линейной за счет введения дополнительной переменной u (ее можно считать неотрицательной) [30], в итоге получим задачу линейного программирования с ограниченной целевой функцией и непустым множеством допустимых решений:

$$u_1 \to \max \text{ при ограничениях } u_1 \leq r_i^-,\ u_2 \leq r_i^+,\ i \in \hat{M} \ \text{ и (4.4), (4.6).} \tag{4.7}$$

Пусть u_1^*, $\{r_i^{-*}, r_i^{+*}\}$ — любое решение задачи (4.7), M_1 — совокупность номеров i таких, что $u_1^* = r_i^{-*}$ и соответствующие двойственные переменные равны нулю, и M_2 — совокупность номеров i таких, что $u_1^* = r_i^{+*}$ и соответствующие двойственные переменные равны нулю. Если оба множества M_1 и M_2 пусты, то решение SL-задачи найдено.

В противном случае переходим ко второй задаче линейного программирования: максимизировать u_2 при ограничениях $u_2 \leq r_i^-$, $i \in \hat{M}/M_1$; $u_2 \leq r_i^+$, $i \in \hat{M}/M_2$, а также неравенствах (4.4) и (4.6) при фиксированных значениях $r_i^- = r_i^{-*}$ для $i \in M_1$ и $r_i^+ = r_i^{+*}$ для $i \in M_2$. (Неравенства из (4.6) и $r_i^- + r_i^+ \leq 1$, в которых значения всех переменных оказались фиксированными, можно опустить.) Если для решения второй задачи все неравенства $u_2 \leq r_i^-$ и $u_2 \leq r_i^+$ выполняются как равенства и все соответствующие им двойственные переменные положительны, то решение SL-задачи найдено. В противном случае аналогичным путем формируем третью задачу линейного программирования и т.д.

Пусть $\{\vec{r}_i^{\,-}, \overleftarrow{r}_i^{\,+}\}$ — решение SL-задачи, т.е. последней из описанной последовательности задач линейного программирования. Тогда искомыми минимальными ИНЗ, при которых альтернатива остается недоминируемой, будут открытые интервалы с концами $\vec{\lambda}_{i1}^{-} = \lambda_{i1}^{-} + \vec{r}_i^{\,-} d_i$ и $\overleftarrow{\lambda}_{i1}^{+} = \lambda_{i1}^{+} - \overleftarrow{r} s_i^{+} d_i$, $i \in \hat{M}$.

Для оценки чувствительности множества X^* недоминируемых альтернатив в целом с учетом изложенного выше нужно решить SL-задачу, отличающуюся от рассмотренной выше тем, что вместо множества N^l для фиксированного номера l нужно использовать объединение N^* всех множеств N^l номеров альтернатив.

Для грубой оценки чувствительности можно обойтись лишь одним обобщенным показателем чувствительности: $\min_{i\in\hat{M}} \min\{r_i^-, r_i^+\}$, и тогда придется решать лишь одну — первую — из описанной выше последовательности задач линейного программирования.

5. Заключение

Проведение анализа чувствительности выбора к изменению значений параметров модели предпочтений является необходимым этапом корректного решения многокритериальных задач. Методы такого анализа первоначально были разработаны для задач, в которых предпочтения описывались аддитивной функцией ценности с параметрами (весами критериев, а затем и значениями частных функций ценности). Для анализа чувствительности выбора в задачах, когда предпочтения описываются частичными отношениями предпочтения с параметрами, эти методы не подходят, и для таких задач были созданы специальные методы.

Методы анализа чувствительности разработаны для моделей предпочтений в виде частичных квазипорядков, которые представлены теорией важности критериев как однородных, так и неоднородных. Однако даже для таких моделей решены далеко не все проблемы. Можно указать следующие направления дальнейших теоретических исследований:

— создание методов анализа чувствительности к изменению нескольких (в частности, всех) границ интервальных оценок степеней превосходства в важности, причем для шкал критериев разных типов;

— разработка методов анализа чувствительности к изменению границ интервальных оценок «скорости» роста предпочтений вдоль шкалы однородных критериев;

— «изобретение» эффективных методов анализа чувствительности для общего случая — при произвольном наборе ИНЗ или параметров важности неоднородных критериев.

В качестве приложения теоретических результатов планируется реализация разработанных методов анализа чувствительности для многокритериальных задач выбора в компьютерной системе поддержки принятия решений DASS [23, 36].

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания, направленные на улучшение изложения материалов статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Impact assessment guidelines. http://ec.europa.eu/smart-regulation/impact/commission_guidelines/docs/iag_2009_en.pdf
2. Handbook of Sensitivity Analysis / *Saltelli A., Chan K., Scott M.* (Eds.). N.Y: Wiley, 2009.
3. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. М.: Физматлит, 1981.
4. *Gal T., Greenberg H.J.* Advances in Sensitivity Analysis and Parametric Programming. N.Y.: Kluwer, 1997.
5. *Rios-Insua D., French S.* A Framework for Sensitivity Analysis in Discrete Multi-Objective Decision-Making // Eur. J. Oper. Res. 1991. V. 54. P. 176–190.
6. *Wolters W.T.M., Mareschal B.* Novel Types of Sensitivity Analysis for Additive MCDM Methods // Eur. J. Oper. Res. 1995. V. 81. P. 281–290.
7. *French S.* Mathematical Programming Approaches to Sensitivity Calculations in Decision Analysis // J. Oper. Res. Soc. 1992. V. 43. P. 813–819.
8. *Triantaphyllou E., Sánchez A.* A Sensitivity Analysis Approach for Some Deterministic Multi-Criteria Decision Making Methods // Decision Sci. 1997. V. 28. P. 151–194.
9. *Erkut E., Tarimcilar M.* On Sensitivity Analysis in the Analytic Hierarchy Process // IMA J. Manage. Math. 1991. V. 3. P. 61–83.
10. *Triantaphyllou E.* Sensitivity Analysis Approach for MCDM methods. Ch. 8. Multi-Citeria Decision Making Method: a Comparative Study. N.Y.: Kluver, 2000.
11. *Huang Y.-F.* Enhancement on Sensitivity Analysis of Priority in Analytic Hierarchy Process // Int. J. General Syst. 2002. V. 31. P. 531–542.
12. *Delgado M.G., Sendra J.B.* Sensitivity Analysis in Multicriteria Spatial Decision-Making: A Review // Human Ecologic. Risk Assesment. 2004. V. 10. P. 1173–1187.
13. *May J.H., Shang J., Tjader Y.C., Vargas L.G.* A New Methodology for Sensitivity and Stability Analysis of Analytic Network Models // Eur. J. Oper. Res. 2013. V. 224. P. 180–188.
14. *Genc T.* Sensitivity Analysis on PROMETHEE and TOPSIS Weights // Int. J. Manage. Decision Making. 2014. V. 13. P. 403–421.
15. *Doan N.A.V., De Smet Y.* An Alternative Weight Sensitivity Analysis for PROMETHEE II Rankings // Omega. 2018. V. 80. P. 166–174.
16. *Vetschera R.* Sensitivity Analysis for the ELECTRE Multicriteria Method // Zeitschrift Oper. Res. 1986. V. 30. Is. 4. P. B99–B117.
17. *Tervonen T., Figueira J.R., Lahdelma R., Salminen P.* SMAA-III. A Simulation-Based Approach for Sensitivity Analysis of ELECTRE III / Real-Time and Deliberative Decision Making: Application to Emerging Stressors / *Linkov I., Ferguson E., Magar V.S.* (Eds.). Springer, 2008. P. 241–253.
18. *Pamučar D.S., Božanić D., Ranđelović A.* Multi-Criteria Decision Making: An Example of Sensitivity Analysis // Serb. J. Management. 2017. V. 12. No. 1. P. 1–27.
19. *Sitarz S.* Approaches to Sensitivity Analysis in MOLP / I. J. Inform. Technol. Comput. Sci. 2014. No. 03. P. 54–60.
20. *Подиновский В.В.* Анализ устойчивости результатов выбора при частичном отношении предпочтения // Искусственный интеллект и принятие решений. 2009. № 4. С. 45–52.
21. *Podinovski V.V.* Sensitivity Analysis for Choice Problems with Partial Preference Relations // Eur. J. Oper. Res. 2012. V. 221. P. 198–204.

22. *Подиновский В.В.* Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / Уч. пособие. М.: Физматлит, 2007.

23. *Подиновский В.В., Потапов М.А.* Важность критериев в многокритериальных задачах принятия решений: теория, методы, софт и приложения // Открытое образование. 2012. № 2. С. 55–61.

24. *Подиновский В.В.* Об относительной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / Многокритериальные задачи принятия решений. Под ред. С.В. Емельянова. М.: Машиностроение, 1978. С. 48–82.

25. *Подиновский В.В.* Параметрическая важность критериев и интервалы неопределенности замещений в анализе многокритериальных задач // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 2008. Т. 48. № 11. С. 1979–1998.

26. *Нелюбин А.П.* Анализ устойчивости многокритериального выбора методами теории важности критериев при изменении интервальных оценок важности // Открытое образование. 2012. № 2. С. 47–51.

27. *Nelyubin A.P.* Criteria Importance Theory: Sensitivity Analysis of Multicriterial Choice Using Interval Importance Information // Amer. J. Control Syst. Inform. Technol. 2013. No. 1. P. 13–17.

28. *Подиновский В.В.* Количественная важность критериев // АиТ. 2000. № 5. С. 110–123.

    Podinovskii V.V. Quantitative Importance of Criteria // Autom. Remote Control. 2000. V. 61. No. 5. P. 817–828.

29. *Podinovski V.V.* The Quantitative Importance of Criteria for MCDA // J. Multi-Criteria Decision Anal. 2002. V. 11. P. 1–15.

30. *Charnes A., Cooper W.W.* Management Models and Industrial Applications of Linear Programming. N.Y.: Wiley, 1961.

31. *Подиновский В.В.* Чувствительность многокритериального выбора к изменению оценок важности неоднородных критериев // Информ. технологии в науке, образовании и управлении. 2017. № 4. С. 23–27.

32. *Подиновский В.В.* Анализ чувствительности многокритериального выбора к изменению интервальных оценок замещений критериев // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 2018. Т. 58. № 3. С. 485–494.

33. *Меньшикова О.Р., Подиновский В.В.* Построение отношения предпочтения и ядра в многокритериальных задачах с упорядоченными по важности неоднородными критериями // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1988. № 5. С. 647–659.

34. *Passy U., Levanon Y.* Analysis of Multi-Objective Decision Problems by the Indifference Band Approach // J. Optim. Theory Appl. 1984. V. 43. P. 205–235.

35. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1975. № 2. С. 330–344.

36. *Подиновский В.В., Потапов М.А., Нелюбин А.П. и др.* Система для выбора и анализа многокритериальных решений с неполными предпочтениями // Информ. технологии в науке, образовании и управлении. 2017. № 2. С. 50–57.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 12.08.2018

После доработки 12.12.2018

Принята к публикации 07.02.2019