Автоматика и телемеханика, № 7, 2019

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2019 г. **А.В. ПАНЮКОВ, д-р физ.-мат. наук (paniukovav@susu.ru)**
(ФГАО ВО "Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)", Челябинск)

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ РЕЛАКСИРОВАННОЙ ЗАДАЧИ ВЕБЕРА ДЛЯ ДРЕВОВИДНОЙ СЕТИ[1]

Рассмотрена задача нахождения оптимального размещения вершин древовидной сети в монтажном пространстве, представляющем конечное множество. Критерием оптимальности является минимизация общей стоимости размещения в точках пространства и стоимости коммуникаций. Допускается размещение разных вершин дерева в одной точке монтажного пространства. Рассматриваемая проблема известна как задача Вебера. Дано представление задачи Вебера как задачи линейного программирования. Доказано, что множество оптимальных решений соответствующей релаксированной задачи Вебера для древовидной сети содержит целочисленное решение. Этот факт может быть использован для повышения эффективности алгоритмов для задач, отличающихся от задачи Вебера наличием дополнительных ограничений, так как позволяют найти оптимальное значения целевой функции, что существенно сокращает сложность поиска оптимального решения, например, методом ветвей и границ.

Ключевые слова: задача размещения, задача целочисленного линейного программирования, релаксированная задача, вычислительная сложность, полиномиальный алгоритм.

DOI: 10.1134/S0005231019070067

1. Введение

Рассматривается задача нахождения оптимального размещения вершин древовидной сети в монтажном пространстве, представляющем конечное множество [1, 2]. Критерием оптимальности является минимизация общей стоимости размещения и стоимости связи. Допускается размещение разных вершин дерева в одной точке пространства. Данная задача известна как задача Вебера. Возможное применение таких задач на практике приведено в [2]. В общем случае задача Вебера является NP-трудной. Для случая размещения древовидной сети известен полиномиальный алгоритм [3].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности 5-100-2020 (постановление № 211 Правительства Российской Федерации, Государственный контракт № 02.A03.21.0006).

В [4] доказана квазицелочисленность релаксационного многогранника задачи Вебера, т.е. показано, что вершины и ребра многогранника задачи Вебера являются также вершинами и ребрами релаксационного многогранника. Это позволяет для ее решения применять целочисленную версию симплекс-метода. Для случая размещения древовидной сети [5] анонсировано свойство релаксационного многогранника, состоящее в том, что множество оптимальных решений релаксированной задачи содержит оптимальное решение исходной задачи. В статье изложено доказательство данного результата.

Данный результат может быть использован при доказательстве существования оптимального целочисленного решения в задачах, отличающихся от задачи Вебера для древовидной сети наличием дополнительных ограничений.

В первом разделе с целью введения обозначений и сохранения целостности изложения приведена формальная постановка задачи Вебера. Во втором разделе дана постановка задачи Вебера в виде задачи целочисленного линейного программирования, построена релаксированная задача Вебера и отмечены свойства ее многогранника. В третьем разделе с целью введения дополнительных обозначений, используемых при доказательстве основного результата, приведен полиномиальный алгоритм [3] решения задачи Вебера в случае размещения древовидной сети. В четвертом разделе приведен пример задачи, отличающейся от задачи Вебера наличием дополнительного ограничения и имеющей целочисленное оптимальное решение. Это позволяет решать задачи, подобные рассмотренной, применяя полиномиальные алгоритмы линейного программирования.

2. Формальная постановка задачи

Рассматриваемая экстремальная задача $\Theta(G, V, b, c, \Phi)$ имеет вид

$$C(\varphi) = \sum_{j \in J} c(j, \varphi(j)) + \sum_{[i,j] \in E} b([i,j], \varphi(i), \varphi(j)) \to \min_{\varphi \in \Phi} \tag{1}$$

для данных графа $G = (J, E)$, *конечного* множества V, отображения $b: \ E \times V^2 \to \mathbf{Z}$, отображения $c: \ J \times V \to \mathbf{Z}$ и множества Φ допустимых размещений элементов множества J в точках множества V.

В случае $\Phi = \Phi_W = \{\varphi : \ J \to V\}$ (т.е. представляет множество всех однозначных отображений) задача $\Theta = \Theta_W$ известна как *задача Вебера.* В случае, когда граф $G(J, E)$ является деревом, для ее решения известен [3] полиномиальный алгоритм с вычислительной сложностью $O(|J||V|^2)$.

3. Представление задачи Вебера в виде задачи ЦЛП

Рассмотрим задачу целочисленного линейного программирования (ЦЛП)

$$C(y, z) = \sum_{j \in J, \ v \in V} y_v^j c(j, v) + \sum_{[i,j] \in E, \ v,u \in V} z_{vu}^{ij} b([i,j], v, u) \ \to \min_{(y,z) \in M_W}, \tag{2}$$

допустимое множество M_W которой определяется системой ограничений

$$(3)\qquad (\forall i \in J)\left(\sum_{v\in V} y_v^i = 1,\right);$$

$$(4)\qquad (\forall [i,j] \in E,\ \forall v \in V)\left(\sum_{u\in V} z_{vu}^{i\,j} = y_v^i,\ \sum_{u\in V} z_{uv}^{i\,j} = y_v^j,\right);$$

$$(5)\qquad (\forall i \in J,\ \forall v \in V)\left(y_v^i \in \{0,1\}\right);\quad (\forall [i,j] \in E,\ \forall v,u \in V)\left(z_{vu}^{ij} \in \{0,1\}\right).$$

Задача (2)–(5) является трансляцией задачи Вебера (1) в комбинаторной постановке как задачи линейного программирования. Покажем, что имеется взаимно однозначное соответствие между множеством допустимых решений задачи (2)–(5) и задачи Θ_W, сохраняющее значение целевой функции.

Пусть $\varphi \in \Phi_W$. Определим (y,z) следующим образом:

$$(6)\qquad (\forall i \in J,\ v \in V)\left(y_v^i = \chi_{\{v\}}(\varphi(i))\right),$$

$$(7)\qquad (\forall [i,j] \in E,\ v,u \in V)\left(z_{vu}^{ij} = \chi_{\{(v,u)\}}(\varphi(i),\varphi(j))\right),$$

где $\chi_X(\cdot)$ – характеристическая функция множества X. Равенство $C_W(\varphi) = C_W(y,z)$ в данном случае очевидно. Включение $(y,z) \in M_W$ следует из однозначности отображения φ.

Обратно, если $(y,z) \in M_W$, то в соответствии с (3) и (5) функция $\varphi:\ J \to V : \varphi(i) = v :\ y_v^i = 1$ является однозначной. Кроме того, из (4) следует, что $z_{vu}^{ij} = 1$ в том и только том случае, если $y_v^i = y_u^j = 1$. Следовательно, имеет место равенство $C_W(\varphi) = C_W(y,z)$.

Итак, возможна формулировка Θ_W как задачи целочисленного линейного программирования (2)–(5). В дальнейшем задачу (2)–(5) будем также называть задачей Вебера Θ_W, а функции $\varphi:\ J \to V$ – ее решениями, имея в виду переменные (y,z), определяемые в соответствии с (6)–(7).

4. Релаксированная задача Вебера

Одним из подходов к решению задач ЦЛП является переход к решению непрерывной релаксированной задачи. В данном случае это достигается заменой в задаче (2)–(5) условий целочисленности (5) условиями неотрицательности

$$(8)\qquad (\forall i \in J,\ \forall v \in V)\left(y_v^i \geq 0\right),\quad (\forall [i,j] \in E,\ \forall v,u \in V)\left(z_{vu}^{ij} \geq 0\right).$$

Далее допустимое множество релаксированной задачи Вебера будем обозначать через $\tilde{M}_W$. Очевидно, что $M_W \subset \tilde{M}_W$. В [4] доказана квазицелочисленность многогранника $\tilde{M}_W$, т.е. что вершины и ребра многогранника M_W являются также вершинами и ребрами многогранника $\tilde{M}_W$. В случае задачи Вебера для древовидной сети имеет место еще одно свойство многогранника $\tilde{M}_W$, анонсированное в [5]:

Т е о р е м а 1. *Если G – дерево, то оптимальное решение задачи Вебера Θ_W является также оптимальным решением соответствующей релаксированной задачи Вебера $\tilde{\Theta}_W$.*

Доказательство теоремы дано в Приложении. С целью введения дополнительных обозначений, используемых при доказательстве теоремы, приведем полиномиальный алгоритм [3] решения задачи Вебера в случае размещения древовидной сети.

5. Алгоритм решения задачи Вебера для древовидной сети

Пусть N – мощность множества J, т.е. $N = |J|$, $j_N \in J$ – висячая вершина дерева (J, E). Выбор вершины j_N в качестве корня дерева (J, E) индуцирует на J отношение частичного порядка

$$P = \{(i,j):\ i,j \in J,\ j \text{ принадлежит цепи в } (J,E) \text{ между } i \text{ и } j_N\}.$$

В дальнейшем будем считать, что $J = \{k\}_{k=1}^N$ и удовлетворяет условию $(l, m) \in P \Rightarrow l < m$. Прямой предок вершины l будем обозначать через $F(l)$, т.е. $F(l) = m:\ [l, m] \in E,\ l < m$.

Ниже представлен псевдокод алгоритма решения задачи Вебера Θ_W.

TreeVebPrbAlg (**input:** $N,\ F,\ V,\ c,\ b$; **output:** $\tilde{c},\ A,\ \varphi$)
begin
  for each $(i, v) \in J \times V$ **do** $\tilde{c}(i, v) := c(i, v)$
  for $i := 1$ **up to** $N - 1$ **do**
    for each $v \in V$ **do**
      begin
        $\tilde{c}(F(i), v) := \tilde{c}(F(i), v) + \min\limits_{u \in V} \{\tilde{c}(i, u) + b([F(i), i], v, u)\}$;
        $A(i, v) := \arg\min\limits_{u \in V} \{\tilde{c}(i, u) + b([F(i), i], v, u)\}$;
      end
    $\varphi(N) := \arg\min\limits_{u \in V}[\tilde{c}(N, u)]$;
    for $i := N - 1$ **down to** 1 **do** $\varphi(i) := A(i, \varphi(F(i)))$;
  stop;
end.

Первый этап выполнения алгоритма заключается в последовательном вычислении для всех $v \in V$ псевдостоимостей

$$\tilde{c}(i, v) := c(i, v) + \sum_{j:\ i = F(j)} \min_{u \in V} [\tilde{c}(j, u) + b([i, j], v, u)], \quad i = 1, \ldots, N, \tag{9}$$

и псевдоразмещений

$$A(i, v) = \arg\min_{u \in V} [\tilde{c}(i, u) + b([F(i), i], u, v)], \quad i = 1, \ldots, N, \tag{10}$$

а второй этап – в последовательном вычислении оптимального размещения вершин дерева

$$\varphi(N) := \arg\min_{u \in V}[\tilde{c}(N, u)], \quad \varphi(j) = A(j, \varphi(F(j))),\ j = N - 1, \ldots, 1. \tag{11}$$

Оптимальное значение задачи Вебера равно $\min_{u\in V}[\tilde{c}(N,u)]$. Вычислительная сложность алгоритма **TreeVebPrbAlg** составляет величину $O(|J||V|^2)$. Более подробные описания и доказательства приведены в [3].

Несмотря на наличие полиномиального алгоритма решения задачи Вебера для древовидной сети доказанная теорема дает возможность установить полиномиальную разрешимость задач, отличающихся от нее наличием дополнительных ограничений, для которых непосредственное применение алгоритма невозможно.

6. Пример

Рассмотрим задачу, отличающуюся от задачи Вебера (2)–(5) наличием дополнительных ограничений

$$(\forall i \in J,\ v \in V)\left(\sum_{i\in J} y_v^i = 1\right). \tag{12}$$

Покажем, что задача линейного программирования (2)–(4), (8), (12) имеет целочисленное оптимальное решение. Действительно, применение к группе ограничений (12) лагранжевых релаксаций приводит к задаче

$$\lambda^* = \arg\max_{\lambda}\left\{\min_{(y,z)\in\tilde{M}_W}\left\{\sum_{j\in J,\ v\in V} y_v^j\left(c(j,v)+\lambda_v\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{[i,j]\in E,\ v,u\in V} z_{vu}^{ij} b([i,j],v,u)\right\} - |J|\sum_{v\in V}\lambda_v\right\}, \tag{13}$$

при этом оптимальное решение задачи (2)–(4), (8), (12) будет оптимальным решением релаксированной задачи Вебера

$$\sum_{j\in J,\ v\in V} y_v^j\left(c(j,v)+\lambda_v^*\right) + \sum_{[i,j]\in E,\ v,u\in V} z_{vu}^{ij} b([i,j],v,u) \to \min_{(y,z)\in\tilde{M}_W}. \tag{14}$$

Таким образом, из существования целочисленного решения задачи Вебера следует существование целочисленного решения задачи (2)–(4), (8), (12). Поэтому для нахождения оптимального значения задачи (2)–(4), (8), (12) можно применять полиномиальные алгоритмы линейного программирования. Знание оптимального значения целевой функции позволяет существенно сократить поиск оптимального решения, например методом ветвей и границ [6].

7. Заключение

Множество оптимальных решений релаксированной задачи Вебера для древовидной сети содержит целочисленное оптимальное решение. Этот факт позволяет исследовать полиномиальную разрешимость задач, отличающихся от задачи Вебера для древовидной сети наличием дополнительных ограничений. Знание оптимального значения целевой функции позволяет существенно сократить поиск оптимального решения, например, методом ветвей и границ.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. Задача $\tilde{\Theta}^*_W$, двойственная к релаксированной задаче Вебера $\tilde{\Theta}_W$, имеет вид

$$\tilde{C}^*_W(x,w) = \sum_{j\in J} x_j \to \max_{(x,w)\in \tilde{M}^*_W} \tag{П.1}$$

с допустимым множеством $\tilde{M}^*_W$, определяемым соотношениями

$$(\forall (i,v)\in J\times V)\left(x_i - \sum_{j:\ i=F(j)} w^{i\,j}_{v\bullet} - w^{F(i)\,i}_{\bullet\,v} \leqslant c(i,v)\right), \tag{П.2}$$

$$(\forall ([i,j],v,u)\in E\times V^2)\left(w^{i\,j}_{v\bullet} + w^{i\,j}_{\bullet u} \leqslant b([i,j],v,u)\right). \tag{П.3}$$

Здесь и далее для пустого нижнего парного индекса в группе w двойственных переменных используется символ $\bullet$.

Для доказательства теоремы достаточно построить допустимое решение задачи (П.1)–(П.3), удовлетворяющее условиям дополняющей нежесткости относительно решения $\varphi\in\Phi_V$ задачи $\Theta(G,V,b,c,\Phi_V)$, построенного алгоритмом **TreeVebPrbAlg**.

Положим

$$(\forall (i,v)\in J\times V)\left(w^{F(i)\,i}_{v\,\bullet} = \min_{u\in V}\left[\tilde{c}(i,u) + b([F(i),i],v,u)\right]\right). \tag{П.4}$$

Из (11) и (П.4) следует

$$w^{F(i)\ i}_{\varphi(F(i))} = \tilde{c}(i,\varphi(i)) + b([F(i),i],\varphi(F(i)),\varphi(i)). \tag{П.5}$$

Поскольку в оптимальном решении

$$z^{i\ \ j}_{\varphi(i)\,\varphi(j)} = 1,$$

то соответствующие ограничения (П.3) должны быть активными. Это позволяет определить

$$(\forall i\in J)\left(w^{F(i)\ i}_{\bullet\varphi(i)} = b([F(i),i],\varphi(F(i)),\varphi(i)) - w^{F(i)\ i}_{\varphi(F(i))\,\bullet} = -\tilde{c}(i,\varphi(i))\right). \tag{П.6}$$

Полагая

$$(\forall i\in J,\ v\in V\setminus\{\varphi(j)\})\left(w^{F(i)\,i}_{\bullet\ v} = \min_{u\in V}\left\{b([F(i),i],u,v) - w^{F(i)\,i}_{u\ \bullet}\right\}\right), \tag{П.7}$$

получим вектор w, удовлетворяющий всем ограничениям (П.3). Условие активности ограничений, соответствующих переменным $y^i_{\varphi(i)}$, позволяет для всех $i \in J$ определить

$$x_i = c(i,\varphi(i)) + \sum_{j:\ i=F(j)} w^{i\ j}_{\varphi(i)\ \bullet} + w^{F(i)\ i}_{\bullet\ \varphi(i)} = \tilde{c}(i,\varphi(i)) + w^{F(i)\ i}_{\bullet\ \varphi(i)} =$$

(П.8)

$$= \begin{cases} \tilde{c}(N,\varphi(N)), & i = N; \\ 0, & \forall i \in J \setminus \{N\}. \end{cases}$$

Второе равенство в данной цепочке является следствием (9) и (П.5), а последнее – следствием (П.6) и отсутствия у вершины N предка. Для остальных значений $v \in V \setminus \varphi(J)$ в системе ограничений (П.2) имеем

$$c(i,v) + \sum_{j:\ i=F(j)} w^{i\ j}_{v\ \bullet} + w^{F(i)\ i}_{\bullet\ v} =$$

$$= \tilde{c}(i,v) + w^{F(i)\ i}_{\bullet\ v} = \tilde{c}(i,v) + \min_{u\in V}\left\{b([F(i),i],u,v) - w^{F(i)\ i}_{u\ \bullet}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \min_{v\in V}\left\{\tilde{c}(i,v) + b([F(i),i],l^*,v)\right\} - w^{F(i)i}_{l^*\ \bullet} = 0.$$

В данной цепочке первое равенство является следствием (9) и (П.5), второе равенство – следствием (П.7). Неравенство очевидно при

$$l^* = \arg\min_{l\in V}\left(b([i,F(i)],v,l) - w^{F(i)i}_{l\ \bullet}\right),$$

последнее равенство следует из (П.4).

Таким образом, решение (x,w), построенное в соответствии с (П.4)–(П.8), является допустимым решением задачи (П.1)–(П.3), удовлетворяющим условиям дополняющей нежесткости относительно решения $\varphi \in \Phi_W$ задачи для $\Theta(G,V,b,c,\Phi_W)$, построенного алгоритмом **TreeVebPrbAlg**. Следовательно, оно является оптимальным решением задачи (П.1)–(П.3). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Береснев В.Л.* Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. Новосибирск: Изд-во ин-та мат. СО РАН, 2005.
2. *Nickel S., Puerto J.* Location Theory. Springer-Verlag, 2005.
3. *Panyukov A.V., Pelzwerger B.V.* Polynomial algorithms to finite Weber problem for a tree network // J. Comput. Appl. Math. Elsevier Publ. 1991. V. 35. P.291–296. https://doi.org/10.1016/0377-0427(91)90215-6
4. *Panyukov A.V.* The relaxation polyhedron of Weber problem / Non-smooth and discontinuous problems of control and optimization. Chelyabinsk State Univ. 1998. P. 171–174.

5. *Panyukov A.V.* Location of a tree network for a finite set // Abstracts of the Seventh Czech-Slovak International Symposium on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications (Kosice, Slovakia). Safary University. 2013. P. 64–65.
6. *Knuth D.E.* Estimating the Efficiency of Backtracking Programs // Math. Comput. 1975. V. 29. P. 121–136.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 21.12.2018

После доработки 04.02.2019

Принята к публикации 07.02.2019