Автоматика и телемеханика, № 6, 2019

© 2019 г. **М.А. МАТАЛЫЦКИЙ, д-р физ.-мат наук (m.matalytski@gmail.com)**
(Ченстоховский университет технологий, Польша),
Д.Я. КОПАТЬ (e-mail: dk80395@mail.ru)
(Гродненский государственный университет, Беларусь)

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ОЖИДАЕМЫХ ДОХОДОВ В ОТКРЫТЫХ МАРКОВСКИХ СЕТЯХ С ЗАЯВКАМИ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ И РАЗЛИЧНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Рассматривается система разностно-дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют ожидаемые доходы открытых марковских сетей массового обслуживания с различными особенностями. Число состояний сети в этом случае и число уравнений в данной системе бесконечно. Потоки поступающих в сеть заявок являются простейшими и независимыми, времена обслуживания заявок распределены по экспоненциальным законам. Доходы от переходов между состояниями сети являются детерминированными функциями, зависящими от ее состояний; доходы систем в единицу времени, когда они не меняют своих состояний, также зависят только от этих состояний. Для решения системы разностно-дифференциальных уравнений предлагается модифицированный метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов. Представлен пример анализа марковской G-сети с сигналами и групповым удалением положительных заявок. Найденные ожидаемые доходы показывают, что они могут быть возрастающими и убывающими функциями времени; могут принимать положительные и отрицательные значения.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, ожидаемые доходы, заявки различных классов, метод последовательных приближений.

DOI: 10.1134/S0005231019060060

1. Введение

Системы массового обслуживания (СМО) с доходами в стационарном режиме были введены в рассмотрение в [1], а сети – в [2]. Обзор результатов, полученных по системам и сетям массового обслуживания (СеМО) с доходами в стационарном режиме, содержатся в [3]. Он посвящен нахождению средних доходов в системах сетей, зависящих только от их состояний и не зависящих от времени, и решению методом динамического программирования задачи нахождения оптимальных интенсивностей обслуживания заявок в системах. Доходы от переходов между состояниями сети при этом не учитывались. СеМО с доходами в нестационарном (переходном) режиме изучались в [4, 5]. Заявка при переходе из одной СМО в другую приносит последней некоторый доход, а доход первой СМО уменьшается на эту величину. При этом доходы от переходов между состояниями сетей зависели от их состояний и времени или являлись случайными величинами (СВ) с заданными моментами первого и второго порядков. В обзорной статье [6] приведены результаты по анализу, оптимизации и выбору оптимальных стратегий управления в марковских сетях с доходами, описаны различные применения их в качестве стохастических моделей прогнозирования ожидаемых доходов в информационно-телекоммуникационных системах и сетях, когда, например, обслуживание заявок на сервере приносит доход обслуживателю, а также в страховых компаниях, логистических транспортных системах, производственных системах и других объектах. Как известно, функционирование любой марковской СеМО можно описать при помощи цепей Маркова с непрерывным временем и, как правило, с большим или счетным числом состояний. В простейшем случае марковские цепи с небольшим числом состояний и доходами от переходов между состоянми, являющимися константами, были рассмотрены в монографии [7].

Марковские СеМО с различными особенностями одного и многих классов без учета доходов рассматривались многими авторами [8–13]. В них же представлены условия существования стационарного режима и показано, что, как и для почти всех марковских сетей, стационарное распределение вероятностей имеет мультипликативный вид (форму произведения). Отметим также, что марковские сети с положительными и отрицательными заявками были введены в рассмотрение E. Gelenbe [8] как модели поведения компьютерных вирусов в информационно-телекоммуникационных системах и сетях и называются ныне G-сетями. Обзор результатов по анализу таких сетей и их применению приведен в [14–16]. G-сети с положительными и отрицательными заявками многих классов в стационарном режиме в случае, когда число классов обоих типов одинаково, рассматривались в [17–18]. Нахождение нестационарных вероятностей состояний марковской G-сети с положительными и отрицательными заявками многих классов модифицированным методом последовательных приближений, совмещенным с методом рядов, изложено в [19], а для G-сети с сигналами и групповым удалением заявок – в [20].

В последние годы большое внимание было уделено исследованию марковских сетей с доходами и различными особенностями: с ограниченным временем ожидания заявок и ненадежными СМО [21, 22]. В случае, когда доходы от переходов между состояниями сети являются случайными величинами с заданными моментами первых двух порядков, для нахождения ожидаемых доходов систем сети и дисперсий доходов был предложен приближенный метод, точность которого возрастает, если СМО сети функционируют в условиях высокой или, наоборот, низкой нагрузки. В [23] рассматривалась марковская сеть с доходами и положительными и отрицательными заявками в случаях, когда доходы от переходов между состояниями детерминированы и могут зависеть от ее состояний. Для сети, допускающей мульпликативное представление для совместного стационарного распределения вероятностей состояний, для ожидаемых доходов систем сети выведена система разностно-дифференциальных уравнений (РДУ), для решения которой также предложено использовать метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов. В данной статье эти результаты обобщены на случай любых марковских сетей с заявками многих классов.

2. Анализ доходов в марковских сетях методом последовательных приближений, совмещенным с методом рядов

На основании ранее полученных результатов [6, 21–27] было замечено, что в общем случае систему РДУ для ожидаемых доходов открытой марковской сети, в которой могут присутствовать положительные и отрицательные заявки и сигналы различных классов, системы обслуживания могут подвергаться поломкам, заявки могут быть "нетерпеливыми" и с иными различными особенностями, можно записать в общем случае в виде

$$\frac{d\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)}{dt} = -\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t) +$$
$$+\sum_{i^*,j^*=0}^{n}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\theta,\eta=0}^{\Psi r}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{1}\Theta_{i^*j^*\alpha m\beta b\gamma\theta\eta}(\vec{d},\vec{k},\vec{l}) \times \tag{1}$$
$$\times \vec{V}\left(\vec{d}+I_{i^*}-I_{j^*},\vec{k}+\tilde{I}_\alpha+m\tilde{I}_\beta-b\tilde{I}_\gamma,\vec{l}+\tilde{I}_\theta-\tilde{I}_\eta,t\right)+\vec{E}(\vec{d},\vec{k},\vec{l}),$$

где $\tilde{I}_\alpha$ – вектор размерности Ψr, состоящий из нулей, за исключением компоненты с номером α, которая равна 1, Ψ – некоторое целое положительное число, r – число типов заявок, I_α – вектор размерности n, состоящий из нулей, за исключением компоненты с номером α, которая равна 1, $\vec{d}$ – вектор размерности n с компонентами d_i, где d_i – количество исправных линий обслуживания в i-той СМО, $\vec{k}$ – вектор размерности Ψr с компонентами k_{ic}, где k_{ic} – количество положительных заявок типа c в i-й СМО, $\vec{l}$ – вектор размерности Ψr с компонентами l_{ic}, где l_{ic} – количество сигналов типа c в i-й СМО, $i=\overline{1,n}$, $c=\overline{1,r}$. Здесь $\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)=(v_1(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t),\dots,v_n(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t))^T$, где T – знак транспонирования, $v_i(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$ – ожидаемый доход, который получает i-я СМО за время t, если в начальный момент времени сеть находится в состоянии $(\vec{d},\vec{k},\vec{l}), \Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l}), \vec{E}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})$ – некоторые функции, различные для каждой сети обслуживания, $\vec{E}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})=(E_1(\vec{d},\vec{k},\vec{l}),\dots,E_n(\vec{d},\vec{k},\vec{l}))^T$.

Будем считать, что ряд

$$\sum_{i^*,j^*=0}^{n}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\theta,\eta=0}^{\Psi r}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{1}\Theta_{i^*j^*\alpha m\beta b\gamma\theta\eta}(\vec{d},\vec{k},\vec{l}) \tag{2}$$

сходится. Для марковских сетей, рассмотренных ранее [25–27], это было доказано.

Вектор $\vec{x}=(\vec{d},\vec{k},\vec{l})$ является вектором $(2\Psi r+n)$-мерного пространства с неотрицательными целочисленными компонентами. Поставим в соответствие каждой точке этого пространства одновалентный тензор

$$\Xi_\chi(\vec{d},\vec{k},\vec{l})=\Theta_{i^*j^*\alpha m\beta b\gamma\theta\eta}(\vec{d},\vec{k},\vec{l}),$$

где

$$\chi=m(n+1)^2(\Psi r+1)^5+\beta(n+1)^2(\Psi r+1)^4+i^*(n+1)(\Psi r+1)^4+$$
$$+j^*(\Psi r+1)^4+\alpha(\Psi r+1)^3+\gamma(\Psi r+1)^2+\theta(\Psi r+1)+\eta$$

и двухвалентный тензор

$$\Delta_{i\nu}\left(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)\right) = v_i\left(\vec{d}+I_{i^*}-I_{j^*},\vec{k}+\tilde{I}_\alpha+m\tilde{I}_\beta-b\tilde{I}_\gamma,\vec{l}+\tilde{I}_\theta-\tilde{I}_\eta,t\right),$$

где

$$\nu = m*(n+1)^2(\Psi r+1)^5+\beta^*(n+1)^2(\Psi r+1)^4+\bar{i}(n+1)(\Psi r+1)^4+ \\ +\bar{j}(\Psi r+1)^4+\alpha^*(\Psi r+1)^3+\gamma^*(\Psi r+1)^2+\theta^*(\Psi r+1)+\eta^*,$$

$m^*,\beta^*,\bar{i},\bar{j},\alpha^*,\gamma^*,\theta^*,\eta^*$ – некоторые фиксированные, но не обязательно им равные, значения индексов $m,\beta,i^*,j^*,\alpha,\gamma,\theta,\eta$ соответственно. Будем считать, что $\Xi_0(\vec{d},\vec{k},\vec{l}) = -\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})$. Кроме того, образуем трехвалентный тензор [28]

$$T_{i\nu\chi}\left(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)\right) = \Delta_{i\nu}\left(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)\right)\Xi_\chi(\vec{d},\vec{k},\vec{l}).$$

Свернем данный тензор по второму и третьему индексу и обозначим полученную свертку через $T^*_{i\nu\chi}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$. Тогда система РДУ (1) примет вид

$$\frac{d\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)}{dt} = T^*_{i\nu\chi}\left(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)\right)+\vec{E}(\vec{d},\vec{k},\vec{l}). \tag{3}$$

Как следует из системы (3), ее решение можно представить в виде

$$\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t) = e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}\left(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0)+\int_0^t e^{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})x}T^*_{i\nu\chi}\left(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},x)\right)dx+ \right. \\ \left. +\frac{\vec{E}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}\left[1-e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}\right]\right). \tag{4}$$

Обозначим через $\vec{V}_q(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$ приближение $\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$ на q-й итерации, и пусть $\vec{V}_{q+1}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$ – решение системы (3), полученное методом последовательных приближений. Тогда из (4) вытекает, что

$$\vec{V}_{q+1}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t) = e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}\left(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0)+\int_0^t e^{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})x}T^*_{i\nu\chi}\left(\vec{V}_q(\vec{d},\vec{k},\vec{l},x)\right)dx+ \right. \\ \left. +\frac{\vec{E}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}\left[1-e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}\right]\right). \tag{5}$$

В качестве начального приближения возьмем стационарное значение дохода $\vec{V}_0(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t) = \vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l}) = \lim\limits_{t\to\infty}\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$, которое удовлетворяет соотношению

$$\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l}) = T^*_{i\nu\chi}\left(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)\right)+\vec{E}(\vec{d},\vec{k},\vec{l}). \tag{6}$$

Для последовательных приближений справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Последовательные приближения $\vec{V}_q(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$, $q = 0,1,2,\ldots$, сходятся при $t \to \infty$ к стационарному решению системы уравнений (3).

Теорема 2. Последовательность $\vec{V}_q(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$, $q = 0,1,2,\ldots$, построенная по схеме (5), при любом ограниченном по t нулевом приближении $\vec{V}_0(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$ сходится при $q \to \infty$ к единственному решению системы уравнений (3).

Теорема 3. Каждое последовательное приближение $\vec{V}_q(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$, $q \geqslant 1$, представимо в виде сходящегося степенного ряда

$$\vec{V}_q(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t) = \sum_{l=0}^{\infty} \vec{g}_{ql}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t^l, \tag{7}$$

коэффициенты которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$\begin{gathered}\vec{g}_{q+1l}(\vec{d},\vec{k},\vec{l}) = \\ = \frac{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})^l}{l!}\left\{\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0) - \frac{\vec{E}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})} + \sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})^{u+1}}T^*_{i\nu\chi}(\vec{g}_{ql}(\vec{d},\vec{k},\vec{l}))\right\}, \\ \vec{g}_{q0}(\vec{d},\vec{k},\vec{l}) = \vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0), \vec{g}_{0l}(\vec{d},\vec{k},\vec{l}) = \vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0)\delta_{l0}.\end{gathered} \tag{8}$$

Доказательство теорем 1–3 приведено в Приложении 1.

Система уравнений (3) может быть сведена к системе счетного числа линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которая в матричной форме может быть записана в виде

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = Q_i(t) + AU_i(t),$$

где $U_i^T(t) = (U_i(1,t),\, U_i(2,t),\, \ldots,\, U_i(L,t), \ldots)$ – искомый вектор ожидаемых доходов i-той системы, L – номер переобозначенного состояния сети. Данную систему можно решить прямым методом, используя матричную экспоненту $U_i(t) = e^{At}U_i(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Q_i(\tau)d\tau$, или численными методами. Но необходимо помнить, что из-за неограниченности размерности матриц $D, Q_i(t)$ на практике такой способ можно применить только в частных случаях, когда они имеют специфический вид [24].

Аналогично, как в [22], можно показать, что если вектор $Q_i(t)$ не зависит от времени, т.е. $Q_i(t) = Q_i$, то при больших t

$$U_i(t) = (DU_i(t) + Q_i)t = g_i t + U_i(0),$$

т.е. доход i-й системы линейно зависит от времени. Стационарное решение для дохода i-системы существует и равно $U_i(0)$, если $DU_i(t) + Q_i$ – нулевой вектор.

3. Нахождение ожидаемых доходов G-сети с сигналами и групповым удалением заявок

Будем рассматривать открытую G-сеть массового обслуживания с n однолинейными системами обслуживания (СМО). В i-ю СМО из внешней среды поступает простейший поток обычных заявок (положительных) с интенсивностью λ_{0i}^{+} и дополнительный поток сигналов, который также является простейшим с интенсивностью $\lambda_{0i}^{(c)}$, $i=\overline{1,n}$. Все поступающие потоки независимы. Положительная заявка при переходе из одной СМО в другую приносит ей некоторый доход, а доход первой СМО уменьшается соответственно на эту величину. Длительности обслуживания положительных заявок в i-й СМО распределены по экспоненциальному закону с параметром μ_i, $i=\overline{1,n}$. После окончания обслуживания положительной заявки в i-й СМО она направляется в j-ю СМО с вероятностью p_{ij}^{+} опять как положительная заявка, а с вероятностью p_{ij}^{-} как отрицательная заявка, и с вероятностью $p_{i0}=1-\sum\limits_{j=1}^{n}(p_{ij}^{+}+p_{ij}^{-})$ уходит из сети, $i,j=\overline{1,n}$.

Если в некоторый момент времени в i-й СМО находится $k_i \geqslant B_i$ положительных заявок, где B_i – целочисленная случайная величина, то при поступлении в эту систему сигнала, действующего как отрицательная заявка, число положительных заявок в ней уменьшается на B_i (уничтожается сразу B_i положительных заявок). Если $k_i \leqslant B_i$, то в i-й СМО не остается заявок. Случайная величина B_i определяет максимальный размер уничтожаемой группы заявок в i-й СМО и подчиняется произвольному дискретному закону распределения: $P\{B_i=m\}=\pi_{im}$, $m\geqslant 1$, $\pi_{im}=0$, $m\leqslant 0$.

В сети циркулируют не только положительные заявки, но и сигналы. Сигнал, поступающий в i-ю СМО, в которой нет положительных заявок, уходит из сети, не оказывая на нее никакого влияния. В противном случае, когда в нее поступает сигнал, могут произойти следующие события: поступающий сигнал мгновенно перемещает положительную заявку из i-й СМО в j-ю СМО с вероятностью q_{ij}, в этом случае сигнал называют триггером; или с вероятностью $q_{i0}=1-\sum\limits_{j=1}^{n}q_{ij}$ сигнал срабатывает как отрицательная заявка и уничтожает в i-й СМО группу положительных заявок.

Под состоянием сети в момент времени t будем понимать вектор $(\vec{k},t)=(k_1,\ldots,k_n,t)$, где k_i – количество положительных заявок в i-й СМО, который образует однородную цепь Маркова с непрерывным временем и счетным числом состояний. Требуется найти ожидаемые доходы систем сети в переходном режиме, зависящие от времени.

Пусть I_i – нулевой вектор размерности n, состоящий из нулей, за исключением компоненты с номером i , которая равна 1; $u(x)$ – единичная функция Хевисайда,

$$u(x)=\begin{cases}1, x>0,\\ 0, x\leqslant 0.\end{cases}$$

Опишем возможные переходы цепи Маркова в состояние $(\vec{k}, t)$ за время Δt:

1) из состояния $(\vec{k} - I_j, t)$, $j \neq i$: в этом случае в j-ю СМО за время Δt поступит положительная заявка с вероятностью $\lambda^{+}_{oj} u(k_j)\Delta t + o(\Delta t)$, $j = \overline{1,n}$, доход системы S_i в этом случае составит $r_i(\vec{k})\Delta t + v_i(\vec{k} - I_j, t)$; если $i = j$, то доход системы S_i составит $r_{0i}(\vec{k} - I_i) + v_i(\vec{k} - I_i, t)$, где $r_{0i}(\vec{k} - I_i)$ – доход i-й системы от данного перехода;

2) из состояния $(\vec{k} + I_j, t)$, $j \neq i$: при этом положительная заявка уходит из сети во внешнюю среду или после завершения обслуживания переходит в m-ю СМО как сигнал, если в ней не было заявок, вероятность такого события равна $(\mu_j p_{j0} + \mu_j p^{-}_{jm}(1 - u(k_m)))\Delta t + o(\Delta t)$, $m, j = \overline{1,n}$, доход системы S_i в этом случае составит $r_i(\vec{k})\Delta t + v_i(\vec{k} + I_j, t)$; если $i = j$, то доход системы S_i составит $-R_{i0}(\vec{k} + I_i) + v_i(\vec{k} + I_i, t)$, где $R_{i0}(\vec{k} + I_i)$ – доход i-й системы от данного перехода;

3) из состояния $(\vec{k} + I_m - I_d, t)$, $m \neq i$, $d \neq j$: в данном случае после окончания обслуживания положительной заявки в m-й СМО она направляется в d-ю СМО снова как положительная заявка или поступивший в m-ю СМО сигнал мгновенно перемещает положительную заявку из системы m-й СМО в l-ю СМО, вероятность этого события равна $(\mu_m p^{+}_{md} u(k_d) + \lambda^{(c)}_{om} q_{md} u(k_d))\Delta t + {}+o(\Delta t)$, $m, d = \overline{1,n}$, доход системы S_i в этом случае составит $r_i(\vec{k})\Delta t + {}+v_i(\vec{k} + I_m - I_d, t)$; если $m = j$, $i = d$, то доход S_i составит $-r_{ji}(\vec{k} + I_j - I_i) + {}+v_i(\vec{k} + I_j - I_i, t)$; если $k = i$, $j = d$, то доход S_i составит $r_{ij}(\vec{k} - I_j + I_i) + {}+v_i(\vec{k} - I_j + I_i, t)$;

4) из состояния $(\vec{k} + I_j + I_s - I_c, t)$, $s, c, j \neq i$: в этом случае после окончания обслуживания заявки в j-й СМО она направляется в s-ю СМО как сигнал, который мгновенно перемещает положительную заявку из s-й СМО в СМО с номером с; вероятность такого события равна $\mu_j p^{-}_{js} q_{sc} u(k_c)\Delta t + o(\Delta t)$, доход системы S_i в этом случае составит $r_i(\vec{k})\Delta t + v_i(\vec{k} + I_j + I_s - I_c, t)$; при $j = i$ доход составит $-r_{ics}(\vec{k}) + v_i(\vec{k} + I_j + I_s - I_c, t)$; при $s = i$ доход составит $r_{jci}(\vec{k}) + v_i(\vec{k} + I_j + I_s - I_c, t)$; при $c = i$ доход составит $r_{jis}(\vec{k}) + v_i(\vec{k} + I_j + I_s - {}- I_c, t)$;

5) из состояния $(\vec{k} + mI_j, t)$, $j \neq i$: в данном случае сигнал извне поступает в j-ю СМО и уничтожает в ней группу положительных заявок величиной m; вероятность такого события равна $\lambda^{(c)}_{oj} q_{j0} \pi_{jm} \Delta t + o(\Delta t)$; доход системы S_i в этом случае составит $r_i(\vec{k})\Delta t + v_i(\vec{k} + mI_j, t)$; если $i = j$, то доход системы S_i составит $-r_i(\vec{k} + mI_i)\Delta t + v_i(\vec{k} + mI_i, t)$, где $-R_i(\vec{k} + mI_i)$ – доход i-й системы от данного перехода;

6) если сигнал поступает извне в j-ю СМО, $j \neq i$, в которой нет заявок, то он может дождаться любой группы заявок и уничтожить ее; вероятность этого события равна

$$\lambda^{(c)}_{oj} q_{j0}(1 - u(k_j))\pi_{jm} \sum_{r=1}^{m-1} P(\vec{k} + rI_j)\Delta t + o(\Delta t), \quad i, j = \overline{1,n},$$

доход системы S_i в этом случае составит $\sum\limits_{r=1}^{m-1} r_i(\vec{k}+rI_j)\Delta t + v_i(\vec{k}+rI_j,t)$; если $i=j$, то $\sum\limits_{r=1}^{m-1} R_i(\vec{k}+rI_j)\Delta t + v_i(\vec{k}+rI_j,t)$;

7) из состояния $(\vec{k}+I_j+mI_s,t)$, $j,s\neq i$: в этом случае после окончания обслуживания заявки в j-й СМО она направляется в s-ю СМО как сигнал, который уничтожает случайную группу положительных заявок; вероятность такого события равна $\mu_j p_{js}^- q_{s0}\pi_{sm}\Delta t + o(\Delta t)$, $j,s=\overline{1,n}$, доход системы S_i в этом случае составит $-r_i(\vec{k}+I_j+mI_s)\Delta t + v_i(\vec{k}+I_j+mI_i,t)$, при $i=j$ он будет равен $r_{is}(\vec{k}+I_i+mI_s)\Delta t + v_i(\vec{k}+I_j+mI_i,t)$, а при $s=i$ равен $R_{ji}(\vec{k}+$ $+I_j+mI_i)\Delta t + v_i(\vec{k}+I_j+mI_s,t)$;

8) если же после окончания обслуживания заявки в j-й СМО она направляется в s-ю СМО как сигнал, который не застает в этой СМО заявок, то она дожидается любого числа заявок и уничтожает их; вероятность этого события равна

$$\mu_j p_{js}^-(1-u(k_j))q_{s0}\pi_{sm}\sum_{r=1}^{m-1} P(\vec{k}+I_j+rI_s)\Delta t + o(\Delta t), \quad i,j,s=\overline{1,n};$$

доход системы S_i в этом случае при $j=i$ составит $\sum\limits_{r=1}^{m-1}[r_{is}(\vec{k}+I_i+rI_s)\Delta t+$ $+v_i(\vec{k}+I_i+mI_s,t)]$, при $s=i$ он составит $\sum\limits_{r=1}^{m-1}[-R_{ji}(\vec{k}+I_i+rI_s)\Delta t+v_i(\vec{k}+$ $+I_i+mI_s,t)]$;

9) из состояния $(\vec{k},t)$ при этом в каждую СМО S_i не поступают положительные сигналы и в них за время Δt не обслужилось ни одной положительной заявки или сигнал поступает в пустую систему; вероятность этого события равна

$$1-\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda_{oj}^{+}+\left(\lambda_{oj}^{(c)}+\mu_j\right)u(k_j)\right]\Delta t + o(\Delta t),$$

доход системы S_i в этом случае составит $r_i(\vec{k})\Delta t + v_i(\vec{k},t)$,

10) из остальных состояний: с вероятностью $o(\Delta t)$.

В данном случае система РДУ для ожидаемых доходов имеет вид (3), где

$$E_i(\vec{d},\vec{k},\vec{l}) = E_i(\vec{k}) = r_i(\vec{k}) + \lambda_{oi}^{+}u(k_i)r_{0i}(\vec{k}-I_i) -$$
$$-\left(\mu_i p_{i0} + \mu_i p_{im}^{-}(1-u(k_m))\right)R_{i0}(\vec{k}+I_i) -$$
$$-\left(\mu_i p_{is}^{+}u(k_s) + \lambda_{oi}^{(c)}q_{is}u(k_s)\right)r_{is}(\vec{k}+I_i-I_s) -$$

$$
-\mu_i p_{is}^- q_{sc} u(k_c) r_{ics}(\vec{k}) - \lambda_{oj}^{(c)} q_{j0} \sum_{m=0}^{\infty} \pi_{jm} R_i(\vec{k} + mI_i) -
$$

$$
-\lambda_{oj}^{(c)} q_{j0} (1 - u(k_i)) \sum_{m=0}^{\infty} \pi_{jm} \sum_{r=1}^{m-1} R_i(\vec{k} + rI_i) -
$$

$$
-\mu_i p_{is}^- q_{s0} \sum_{m=0}^{\infty} \pi_{sm} R_{ji}(\vec{k} + I_j + mI_i) +
$$

$$
+\mu_j p_{js}^- (1 - u(k_j)) q_{s0} \sum_{m=0}^{\infty} \pi_{sm} \sum_{r=1}^{m-1} r_{is}(\vec{k} + I_i + rI_s, t) -
$$

$$
-\sum_{j,s=1}^{n} \mu_i p_{is}^- q_{sc} u(k_c) r_{jsi}(\vec{k}) - \mu_j p_{js}^- q_{s0} \sum_{m=0}^{\infty} \pi_{sm} \sum_{r=1}^{m-1} r_{is}(\vec{k} + mI_s),
$$

$$
T_{i\nu\chi}\left(\vec{V}(\vec{d}, \vec{k}, \vec{l}, t)\right) = \delta_{i*j*} \delta_{\vec{d}\vec{1}_n} \delta_{\theta\eta} \delta_{\vec{l}\vec{0}} \left(\delta_{b1} \delta_{\alpha i} \delta_{\gamma j} \left(\lambda_{0j}^{+} u(k_j) + \right.\right.
$$

$$
\left. + \left(\mu_j p_{ji}^{+} u(k_i)\right) (1 - \delta_{ij}) + \sum_{s=1}^{n} (1 - \delta_{si})(\mu_i p_{i0} + \mu_i p_{is}^- (1 - u(k_s))) \right) +
$$

$$
+\sum_{j=1}^{n} (1 - \delta_{ij}) \lambda_{0j}^{(c)} q_{j0} \pi_{jm} + \sum_{s=1}^{n} (1 - \delta_{js}) \mu_j p_{js}^- q_{s0} \pi_{sm} +
$$

$$
\left. + u(m+1) \mu_i p_{is}^- (1 - u(k_s)) q_{s0} \pi_{sm} + \delta_{b1} \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \delta_{\gamma s} \mu_i p_{ij}^- q_{js} u(k_s) \right) \times
$$

$$
\times v_i \left(\vec{d} + I_{i^*} - I_{j^*}, \vec{k} + \tilde{I}_\alpha + m\tilde{I}_\beta - b\tilde{I}_\gamma, \vec{l} + \tilde{I}_\theta - \tilde{I}_\eta, t \right),
$$

где $\vec{1}_n$ – вектор размерности n, состоящий из единиц, δ_{ij} – символ Кронекера.

Сходимость ряда (2) следует из неравенства

$$
\left(\Xi_\chi(\vec{d}, \vec{k}, \vec{l}) \vec{1}_{2\Psi r+n} \right)^* =
$$

$$
= \delta_{i*j*} \delta_{\vec{d}\vec{1}_n} \delta_{\theta\eta} \delta_{\vec{l}\vec{0}} \left(\delta_{b1} \delta_{\alpha i} \delta_{\gamma j} \delta_{m1} \left(\lambda_{0j}^{+} u(k_j) + \left(\mu_j p_{ji}^{+} u(k_i) \right) (1 - \delta_{ij}) + \right.\right.
$$

$$+\delta_{m1}\sum_{s=1}^{n}(1-\delta_{si})\left(\mu_i p_{i0}+\mu_i p_{is}^{-}(1-u(k_s))\right)\Bigg)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(1-\delta_{ij})\lambda_{0j}^{(c)}q_{j0}\pi_{jm}+\sum_{s=1}^{n}(1-\delta_{js})\mu_j p_{js}^{-}q_{s0}\pi_{sm}+$$

$$+\mu_i p_{is}^{-}(1-u(k_s))q_{s0}u(m+1)\pi_{sm}+\delta_{b1}\delta_{\alpha i}\delta_{\beta j}\delta_{\gamma s}\mu_i p_{ij}^{-}q_{js}u(k_s)\Bigg)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\alpha,\beta,\gamma,}^{\Psi r}\Bigg(\delta_{\alpha i}\delta_{\gamma j}\Bigg(\lambda_{0j}^{+}u(k_j)+\left(\mu_j p_{ji}^{+}u(k_i)\right)(1-\delta_{ij})+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}(1-\delta_{si})\left(\mu_i p_{i0}+\mu_i p_{is}^{-}(1-u(k_s))\right)\Bigg)+$$

$$+\sum_{\alpha,\beta,\gamma,}^{\Psi r}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{1}\sum_{j=1}^{n}(1-\delta_{ij})\lambda_{0j}^{(c)}q_{j0}\pi_{jm}+\sum_{s=1}^{n}(1-\delta_{js})\mu_j p_{js}^{-}q_{s0}\sum_{m=1}^{\infty}\pi_{sm}+$$

$$+\mu_i p_{is}^{-}(1-u(k_s))q_{s0}\sum_{m=1}^{\infty}\pi_{sm}+\delta_{b1}\delta_{\alpha i}\delta_{\beta j}\delta_{\gamma s}\mu_i p_{ij}^{-}q_{js}u(k_s)\Bigg).$$

Но $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\pi_{sm}=1$, так как сигнал, действующий как отрицательная заявка, всегда уничтожает какое-то ненулевое количество положительных заявок. Поэтому последнее выражение ограничено.

Пример 1. Рассмотрим открытую G-сеть с $n=5$ однолинейными СМО. Вероятности поступления положительных и отрицательных заявок в i-ю систему p_{0ic}^{+}, p_{0ic}^{-} равны соответственно $p_{01}^{-}=0{,}3$; $p_{02}^{-}=0{,}1$; $p_{0i}^{-}=0{,}3$; $i=\overline{3,5}$, $p_{0i}^{+}=0{,}2$, $i=\overline{1,5}$, $\sum\limits_{i=1}^{5}p_{0i}^{-}=1$, $\sum\limits_{i=1}^{5}p_{0i}^{+}=1$. Интенсивности входного потока положительных заявок равны $\lambda^{+}=120$, $\lambda^{-}=100$. Интенсивности обслуживания заявок различных классов равны: $\mu_1=35$, $\mu_2=42$, $\mu_3=51$, $\mu_4=\mu_5=50$. Пусть вероятности p_{ij}^{+} равны соответственно: $p_{ij}^{+}=p_{ij}^{-}=0{,}12$; $i\neq j$; $p_{i0}=0{,}04$, $i=\overline{1,5}$.

Доходы i-й системы равны соответственно $r_i(\vec{k})=2$, $r_{0ic}(\vec{k})=2$, $R_{ic0}(\vec{k})=4$, $r_{icjs}(\vec{k})=4$, $i,j=\overline{1,7}$, $s,c=\overline{1,3}$. На рисунке изображено изменение доходов первой СМО сети в зависимости от времени, полученное с помощью компьютера с использованием (7), (8), при этом начальным состоянием сети было $(1,1,1,1,1)$. Вектор доходов в начальный момент времени $\vec{V}(\vec{k},0)$ был нулевым. Размер удаляемой группы имеет показательное распределение с параметром 5 для всех СМО.

Для нахождения последовательных приближений расчеты проводились до итерации l^*, при которой выполняется условие $|d^{(d)}_{q^*l}(\vec{k^*})| \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-6}$. $\vec{k^*}: d^{(d)}_{ql}(\vec{k^*}) = \max\limits_{\vec{k}} |d^{(d)}_{ql}(\vec{k})|$. Согласно теоремам 1 и 2 решение системы (1) можно получить методом последовательных приближений на итерации q^*, при которой $|\vec{V}_{q^*+1}(\vec{k}, t) - \vec{V}_{q^*}(\vec{k}, t)|$, где $|\vec{V}_{q^*+1}(\vec{k}, t) - \vec{V}_{q^*}(\vec{k}, t)|$ – вектор-столбец размерности n с компонентами $|v_{iq^*+1}(\vec{k}, t) - v_{iq^*}(\vec{k}, t)|$, $v_{iq^*}(\vec{k}, t)$ – приближение ожидаемого дохода i-й СМО, полученное на итерации q^*.

Замечание 1. Отметим, что в [29] описывается метод решения бесконечных систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, основанный на применений преобразования Лапласа к построению решений. В [30] предложено для нахождения решения дифференциального уравнения бесконечного порядка с полиноминальными коэффициентами использовать метод последовательных приближений, но сами приближения находятся достаточно сложно. В данной статье для нахождения ожидаемых доходов в системах открытых марковских СеМО предложена методика решения бесконечных систем дифференциальных уравнений методом последовательных приближений, совмещенным с методом рядов. Показано, что каждое приближение представимо в виде сходящегося степенного ряда, коэффициенты которого связаны рекуррентными соотношениями, поэтому их удобно находить с помощью компьютера. Это позволяет находить ожидаемые доходы систем сети за приемлемое процессорное время. В [31] с помощью разработанной имитационной модели функционирования сети с отрицательными и положительными заявками и доходами показано, что данный алгоритм обладает достаточно высокой точностью.

4. Заключение

Проведено исследование в переходном (нестационарном) режиме открытых марковских СеМО с различными особенностями в случае, когда доходы от переходов между состояниями сети зависят от ее состояний. Рассмотрена обобщенная система РДУ для ожидаемых доходов в системах сети, состоящая из счетного числа таких уравнений. Для решения системы предложено применить метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов.

Доказано, что последовательные приближения с течением времени сходятся к стационарному ожидаемому доходу, вид которого указан в статье, а сама последовательность приближений сходится к единственному решению системы РДУ. Любое последовательное приближение представимо в виде сходящегося степенного ряда с бесконечным радиусом сходимости, коэффициенты которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям, что является удобным при расчетах на компьютерах. Полученные результаты проиллюстрированы примером.

Дальнейшие исследования могут быть связаны с нахождением ожидаемых доходов в случае, когда доходы от переходов между состояниями сети являются случайными величинами с заданными моментами первых двух порядков.

Доказательство теоремы 1. Доказательство проведем методом математической индукции. Для первого приближения имеем:

$$\vec{V}_1(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t) = e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}\left(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0) + \int\limits_0^t e^{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})x} T^*_{0i\nu\chi}\left(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},x)\right)dx\right) +$$
$$+\frac{\vec{E}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}\left[1 - e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}\right] =$$
$$= e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}\left(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0) + T^*_{0i\nu\chi}\left(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})\right)\int\limits_0^t e^{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})x}dx\right) +$$
$$+\frac{\vec{E}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}\left[1 - e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}\right] =$$
$$= e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}\left(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0) + T^*_{0i\nu\chi}\left(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},x)\right)\frac{1 - e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})} +\right.$$
$$\left. + \frac{\vec{E}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}\left[1 - e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}\right]\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow}$$
$$\underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}\left(T^*_{0i\nu\chi}\left(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},x)\right) + \vec{E}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})\right) = \vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l}).$$

Отсюда следует, что при $q = 1$ теорема выполняется. Предположим, что утверждение теоремы справедливо до q-й итерации. Используя (4) и правило Лопиталя, будем иметь:

$$\lim_{t\to\infty}\vec{V}_{q+1}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t) =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}}\left(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0) + \int\limits_0^t e^{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})x} T^*_{qi\nu\chi}\left(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},x)\right)dx\right) + \frac{\vec{E}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})} =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{e^{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})x} T^*_{qi\nu\chi}(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t))}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})e^{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}} + \frac{\vec{E}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})} =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{T^*_{qi\nu\chi}(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t))}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})} + \frac{\vec{E}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})} = \vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l}).$$

Поэтому теорема справедлива и для $q+1$. Тогда, используя метод математической индукции, получаем утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 2. Поскольку $\vec{V}_0(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$ – ограниченная по t функция, то в силу (4) $\vec{V}_1(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$ также ограничена, поэтому

$$\left|\vec{V}_1(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t) - \vec{V}_0(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)\right| \leqslant \vec{C}(\vec{d},\vec{k},\vec{l}), \tag{П.1}$$

где $|\vec{V}_1(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)-\vec{V}_0(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)|$ – вектор-столбец размерности n с компонентами $|v_{i1}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)-v_{i0}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)|$, $v_{i1}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$, $v_{i0}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$ – приближение ожидаемого дохода i-й СМО на первой и нулевой итерациях соответственно, $i=\overline{1,n}$, $\vec{C}(\vec{k})$ – некоторый не зависящий от t вектор-столбец размерности, как и $\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$, равный n.

Покажем, что выполняется неравенство

$$\text{(П.2)}\qquad \left|\vec{V}_q(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)-\vec{V}_{q-1}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)\right|\leqslant \vec{C}^*\eta^{q-1}\frac{t^{q-1}}{(q-1)!},$$

где

$$\max_{\vec{d},\vec{k},\vec{l}}\eta(\vec{d},\vec{k},\vec{l})=\eta,\quad \max_{\vec{d},\vec{k},\vec{l}}\vec{C}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})=\vec{C}^*,\quad \eta(\vec{d},\vec{k},\vec{l})=\left(\Xi_\chi(\vec{d},\vec{k},\vec{l})\vec{1}_{2\Psi r+n}\right)^*.$$

Здесь и нужна сходимость ряда (2).

Из (П.1) следует, что при $q=1$ это неравенство выполняется. Предположим, что оно выполняется при $q=N$, и покажем, используя (4), его справедливость при $q=N+1$. Имеем:

$$\text{(П.3)}\qquad \left|\vec{V}_{N+1}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)-\vec{V}_N(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)\right|\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}\left(\int_0^t e^{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})x}\left(\Xi_\chi(\vec{d},\vec{k},\vec{l})\left(\left|\Delta_{Ni\nu}\left(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)\right)-\Delta_{N-1i\nu}\left(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)\right)\right|\right)^*dx\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant \vec{C}^*\eta^N\left(e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}\int_0^t e^{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})x}\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}dx\right).$$

Из неравенства $e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})x}\leqslant 1$, $x\in[0,t]$, следует, что

$$e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}\int_0^t e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})x}\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}dx\leqslant\int_0^t\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}dx=\frac{t^N}{N!},$$

поэтому из (П.3) получаем, что неравенство (П.2) имеет место. Поскольку

$$\lim_{q\to\infty}\vec{V}_q(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)=\lim_{q\to\infty}\left(\vec{V}_0(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)+\sum_{n=0}^{m-1}\left(\vec{V}_{q+1}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)-\vec{V}_q(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)\right)\right)=$$

$$=\vec{V}_0(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)+\sum_{q=0}^{\infty}\left(\vec{V}_{q+1}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)-\vec{V}_q(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\vec{V}_0(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)+\sum_{q=0}^{\infty}\vec{C}^*\eta^q\frac{t^q}{q!}=\vec{C}^*e^{\eta t},$$

то предел последовательности $\vec{V}_q(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$, $q=0,1,2,\dots$, существует. Обозначим его через $\vec{V}_\infty(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$. Подставляя $\vec{V}_\infty(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$ в (2) вместо $\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$, видим, что $\vec{V}_\infty(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$ является решением системы уравнений (1), удовлетворяющим начальным условиям $\vec{V}_\infty(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0)=\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0)$ согласно предыдущей теореме.

Предположим, что существует другое решение системы уравнений (1) $\vec{W}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$. Тогда для него справедливо соотношение (4), если заменить в нем $\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$, $T^*_{i\nu\chi}(\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t))$ соответственно на $\vec{W}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$, $T^*_{i\nu\chi}(\vec{W}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t))$. Аналогично, как при доказательстве неравенства (П.2), можно показать, что выполняется неравенство $\left|\vec{V}_q(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)-\vec{W}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)\right|\leqslant M\eta^{q-1}\dfrac{t^{q-1}}{(q-1)!}$, где M – некоторая константа. Правая часть этого неравенства стремиться к нулю, как общий член сходящегося ряда $\sum\limits_{q=0}^{\infty} M\eta^q\dfrac{t^q}{q!}=Me^{\eta t}$, поэтому $\lim\limits_{q\to\infty}\vec{V}_q(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)=$ $=\vec{W}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$. Но ранее уже получили, что $\lim\limits_{q\to\infty}\vec{V}_q(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)=\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$, поэтому $\vec{W}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)=\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$, что и доказывает единственность решения системы уравнений (3).

Доказательство теоремы 3. Покажем, что коэффициенты степенного ряда (7) удовлетворяют рекуррентным соотношениям (8). Подставим последовательные приближения (7) в соотношение (4). Тогда с учетом того, что

$$e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}\int\limits_0^t e^{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})x}x^l dx=\left[\frac{1}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}\right]^{l+1} l!\sum_{j=l+1}^{\infty}\frac{[-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})]^l}{j!},\quad l=0,1,2,\ldots,$$

получаем

$$\sum_{l=0}^{\infty}\vec{g}_{ql}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t^l=e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0)+$$
$$+\frac{\vec{E}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}\left[1-e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}\right]+T^*_{i\nu\chi}\left(\vec{g}_{ql}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})\right).$$

Используя (8), этот ряд можно записать в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty}T_{i\nu\chi}\left(\vec{g}_{ql}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})\right)\vec{g}_{ql}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t^l=$$
$$=e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}\vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0)-\frac{\vec{E}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}\left[1-e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}\right]+$$
$$+\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}\right]^{l+1} l!\sum_{u=l+1}^{\infty}\frac{[-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})]^u}{u!}t^u.$$

Поменяв местами индексы суммирования и разлагая $e^{-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t}$ в ряд по степеням t, будем иметь

$$\sum_{l=0}^{\infty} \vec{g}_{ql}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})t^l = \frac{\vec{E}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})} + \tag{П.4}$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left[-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})\right]^l}{l!} \left\{ \vec{V}(\vec{d},\vec{k},\vec{l},0) - \frac{\vec{E}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})}{\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})} + \right.$$

$$\left. + \sum_{u=0}^{l-1} \frac{(-1)^{u+1}u!}{\left[-\Lambda(\vec{d},\vec{k},\vec{l})\right]^u} T^*_{i\nu\chi}\left(\vec{g}_{ql}(\vec{d},\vec{k},\vec{l})\right) t^l \right\}.$$

Если в выражении (П.4) приравнять коэффициенты при t^l, то получим соотношения (8) для коэффициентов ряда (7).

Доказательство того, что радиус сходимости степенного ряда (7) равен $+\infty$, можно провести, используя формулу Коши–Адамара, аналогично как в [32].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Crabil T.* Optimal Control of a Service Facility with Varible Exponential Service Times and Constant Arrival Rate // Manage. Sci. 1972. No. 18. P. 560–566.
2. *Foschini G.* On Heavy Traffic Diffusion Analysis and Dynamic Routing in Packet Switched Networks // Comput. Perfomance. 1977. No. 10. P. 499–514.
3. *Stidham S., Weber R.* A Survey of Markov Decision Models for Control of Networks of Queue // Queueing Syst. 1993. No. 3. P. 291–314.
4. *Matalytski M., Pankov A.* Analysis of the Stochastic Model of the Changing of Incomes in the Open Banking Network // Comput. Sci. 2003. V. 3. No. 5. P. 19–29.
5. *Matalytski M., Pankov A.* Incomes Probabilistic Models of the Banking Network // Scientific Res. Institute Math. Comput. Sci. Czestochowa Univers. Technol. 2003. V. 1. No. 2. P. 99–104.
6. *Маталыцкий М.А.* О некоторых результатах анализа и оптимизации сетей Маркова с доходами и их применении // АиТ. 2009. № 10. С. 97–113.

   Matalytski M. On Some Results in Analysis and Optimization of Markov Networks with Incomes and Their Application // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 10. P. 1683–1697.
7. *Ховард Р.* Динамическое программирование и марковские процессы. М.: Сов. радио, 1964.
8. *Gelenbe E.* Product form Queueing Networks with Negative and Positive Customers // J. App. Probab. 1991. V. 28. P. 656–663.
9. *Jackson J.R.* Networks of Waiting Lines // Oper. Res. 1957. V. 5. No. 4. P. 518–521.
10. *Башарин Г.П., Бочаров П.П., Коган Я.А.* Анализ очередей в вычислительных сетях. М.: Наука, 1989.
11. *Ивницкий В.А.* Теория сетей массового обслуживания. М.: Физматлит, 2004.

12. *Малинковский Ю.В.* Критерий представимости стационарного распределения состояний открытой марковской сети обслуживания с несколькими классами заявок в форме произведения // АиТ. 1991. № 4. С. 75–83.

   Malinkovsky Yu.V. A Criterion for the Representability of the Stationary Distribution of the States an Open Markov Queueing Network with Different Customer Classes in the Form of a Product // Autom. Remote Control. 1991. V. 52. No. 4. P. 503–509.

13. *Serfozo R.* Introduction to stochastic networks. N.Y.: Springer-Verlag, 1999.

14. *Gelenbe E., Schassberger R.* Stability of G-networks // Prob. Engin. Inform. Sci. 1992. V. 6. Is. 1. P. 271–276.

15. *Gelenbe E.* G-networks: A Unifying Model for Neural and Queueing Networks // Ann. Oper. Res. 1994. V. 48. P. 433–461.

16. *Бочаров П.П., Вишневский В.М.* G-сети: развитие теории мультипликативных сетей // АиТ. 2003. № 5. С. 46–74.

   Bocharov P.P., Vishnevski B.M. G-networks: Development of the Theory of Multiplicative Networks // Autom. Remote Control. 2003. V. 84. No. 5. P. 714–739.

17. *Fourneau J.N., Gelenbe E., Suros R.* G-networks with Multiple Classes of Negative and Positive Customers // Theor. Comp. Sci. 1996. V. 155. P. 141–156.

18. *Gelenbe E., Labed A.* G-networks with Multiple Classes of Signals and Positive Customers // Eur. J. of Oper. Res. 1998. V. 108. No. 2. P. 293–305.

19. *Matalytski M.* Analysis of G-network with Multiple Classes of Customers at Transient Behavior // Prob. Engin. Inform. Sci. 2018. P. 1–14. doi:10.1017/S0269964818000086

20. *Matalytski M.* Finding Non-Stationary State Probability of G-networks with Signal and Customers Batch Removal // Prob. Engin. Inform. Sci. 2017. V. 31. No. 4. P. 346–412.

21. *Маталыцкий М.А.* Анализ и прогнозирование ожидаемых доходов в марковских сетях с ограниченным временем ожидания заявок // АиТ. 2015. № 6. С. 75–90.

   Matalytski M. Analysis and Forecasting of Expected Incomes in Markov Networks with Bounded Waiting Time for Claims // Autom. Remote Control. 2015. No. 6. P. 1005–1017.

22. *Маталыцкий М.А.* Анализ и прогнозирование ожидаемых доходов в марковских сетях с ненадежными системами обслуживания // АиТ. 2015. № 12. С. 108–120.

   Matalytski M. Analysis and Forecasting of Expected Incomes in Markov Networks with Unreable Servicing Systems // Autom. Remote Control. 2015. No. 12. P. 2179–2189.

23. *Маталыцкий М.А.* Прогнозирование ожидаемых доходов в марковских сетях с положительными и отрицательными заявками // АиТ. 2017. № 5. С. 56–70.

   Matalytski M. Forecasting Anticipated Incomes in the Markov Networks with Positive and Negative Customers // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 5. P. 815–825.

24. *Копать Д.Я., Маталыцкий М.А.* Нахождение ожидаемых доходов в сети с положительными и отрицательными заявками различных типов // Вестн. ГрГУ. Сер. 2. 2018. № 1. С. 132–144.

25. *Копать Д.Я., Науменко В.В., Маталыцкий М.А.* Нахождение ожидаемых доходов в сети массового обслуживания со случайным временем ожидания положительных и отрицательных заявок // Вестн. ГрГУ. Сер. 2. 2017 . Т. 7. № 1. С. 147–153.

26. *Маталыцкий М.А., Копать Д.Я.* Нахождение ожидаемых доходов в сети с разнотипными положительными и отрицательными заявками // Вестн. ГрГУ. Сер. 2. 2018. Т. 8. № 2. С. 129–140.

27. *Matalytski M., Kopats D.* Analysis of the Network with Multiple Classes of Positive Customers and Signals at a Non-Stationary Regime // Prob. Engin. Inform. Sci. 2018. P. 1–13. doi:10.1017/S0269964818000219

28. *Рашевский П.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.

29. *Валеев К.Г., Жаутыков О.А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата: Наука, 1974.

30. *Коробейник Ю.Ф.* Дифференциальные уравнения бесконечного порядка и бесконечные системы дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1970. Т. 34. № 4. P. 881–922.

31. *Matalytski M., Naumenko V.* Simulation Modeling of HM-networks with Consideration of Positive and Negative Messages // J. Appl. Math. Comput. Mechan. 2015. V. 14. No. 2. P. 49–60.

32. *Маталыцкий М.А., Науменко В.В.* Стохастические сети с нестандартным перемещением заявок. Гродно: Изд-во ГрГУ, 2016.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 28.12.2017

После доработки 24.01.2019

Принята к публикации 07.02.2019