

© 2019 г. А.В. ЛЕБЕДЕВ, д-р физ.-мат. наук (avlebed@yandex.ru)
(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова)

ПРОБЛЕМА НЕТРАНЗИТИВНОСТИ ДЛЯ ТРЕХ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Изучается проблема нетранзитивности отношения стохастического предшествования для трех независимых случайных величин с распределениями из заданного класса непрерывных распределений. Первоначально этот вопрос был поставлен в связи с задачей из теории прочности. В дальнейшем тема нетранзитивности стала популярной на примере так называемых нетранзитивных (игральных) костей. Представлены критерии, с помощью которых доказано, что нетранзитивности не может быть для многих классических непрерывных распределений (равномерного, показательного, нормального, логистического, Лапласа, Коши, Симпсона, однопараметрического Вейбулла и др.). Отдельно рассмотрен случай распределений с полиномиальной плотностью на единичном отрезке. Определены интересные направления дальнейших исследований по тематике работы.

Ключевые слова: нетранзитивность, нетранзитивные кости, стохастическое предшествование, непрерывные распределения.

DOI: 10.1134/S0005231019060059

1. Введение

Пусть заданы три независимые случайные величины X , Y и Z , такие что

$$(1) \quad \mathbf{P}(X < Y) > \frac{1}{2}$$

и

$$(2) \quad \mathbf{P}(Y < Z) > \frac{1}{2}.$$

Может показаться, что из (1) и (2) должно следовать

$$\mathbf{P}(X < Z) > \frac{1}{2},$$

однако существуют примеры, когда это не так, а напротив,

$$(3) \quad \mathbf{P}(Z < X) > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, отношение (1) между случайными величинами *нетранзитивно* и может идти по кругу, как в игре «камень, ножницы, бумага».

Далее для определенности под нетранзитивностью будем понимать ситуацию, когда

$$p_{XYZ} = \min\{\mathbf{P}(X < Y), \mathbf{P}(Y < Z), \mathbf{P}(Z < X)\} > \frac{1}{2}.$$

Первой попыткой изучения этого явления стало исследование С. Трыбулы, начатое совместно с Г. Штейнгаузом [1, 2]. Было показано, что

$$\max_{X,Y,Z} p_{XYZ} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618,$$

причем максимум достигается, например, на тройке случайных величин

$$(4) \quad \begin{aligned} X &= \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p, \\ 4, & \text{с вероятностью } 1-p, \end{cases} \\ Y &= 2, \\ Z &= \begin{cases} 0, & \text{с вероятностью } 1-p, \\ 3, & \text{с вероятностью } p, \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$p = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

тогда

$$\mathbf{P}(X < Y) = \mathbf{P}(Y < Z) = \mathbf{P}(Z < X) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Далее в [3, 4] был рассмотрен случай n независимых случайных величин, получены некоторые оценки максимума вероятностей, однако явное выражение было выведено лишь недавно в [5]. Оказалось, что

$$(5) \quad \begin{aligned} \max_{X_1, \dots, X_n} \min\{\mathbf{P}(X_1 < X_2), \dots, \mathbf{P}(X_{n-1} < X_n), \mathbf{P}(X_n < X_1)\} = \\ = 1 - \left(4 \cos^2 \frac{\pi}{n+2}\right)^{-1}, \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

В качестве возможного приложения в [2] речь идет о прочности материалов. Пусть в лаборатории сравнивают попарно на прочность железные бруски одинакового размера и формы, помещая их в одну рамку и прилагая к ним одинаковую силу путем закручивания винта, пока один из брусков не сломается. Предположим, что бруски производятся на трех разных заводах (которые дают разное распределение прочности), и сравниваются бруски с первого и второго, второго и третьего, первого и третьего заводов. Тогда теоретически может сложиться парадоксальная ситуация, что бруски с первого завода «хуже» (т.е. чаще ломаются раньше) брусков со второго завода, бруски со второго «хуже» брусков с третьего, а бруски с третьего «хуже» брусков с первого.

Понятно, что если сравнение производится с целью принять какое-то управленческое решение, например продукцию с какого завода лучше покупать, такой результат вызывает недоумение. Конкретно в приведенном примере можно поступить иначе: не сравнивать прочности брусков друг с другом, а измерять их явно, численно, затем выбирать лучший завод по средней прочности брусков или другой числовой характеристике распределения. Тогда парадокса нетранзитивности не возникает (может, правда, оказаться, что характеристики в пределах точности равны и выбор опять-таки сделать нельзя, но это уже другой вопрос).

Однако на практике бывают и ситуации, когда какая-то величина просто не измеряется в явном виде и нет другого способа выявить ее соотношения, кроме парных сравнений. В биологии речь может идти о парных взаимодействиях животных в борьбе за пищу, территорию, размножение или доминирование в группе. Для людей речь может идти о сравнительных оценках различных товаров и услуг, голосовании и др. Проблема нетранзитивности предпочтений здесь была известна с XVIII в. (*парадокс Кондорсе*).

Общим вопросам нетранзитивности отношения превосходства в природе, технике и обществе (главным образом, детерминированного, а не вероятностно-статистического характера) посвящен ряд научных и научно-популярных статей А.Н. Поддьякова, в частности [6–9].

Проблема нетранзитивности возникает в теории кооперативных игр [10], многокритериальных задачах индивидуального выбора [11], задачах векторной оптимизации [12], оптимизации бинарных опросников [13] и др.

Методам сравнения вероятностных распределений на основе статистических данных (гистограмм) посвящена недавняя работа [14], где рассматривались различные стохастические порядки.

Отношение (1) также называют *стохастическим предшествованием* (stochastic precedence). В [15, 16] оно применялось в задачах статистического анализа. В [17] оно использовалось в задачах ранжирования и называлось доминированием по вероятности.

Появляются также работы, где проводятся различные обобщения понятия транзитивности, и относительно этих более общих понятий стохастическое предшествование может быть «транзитивным» [18], однако практический смысл таких обобщений не вполне ясен.

Тема нетранзитивности стохастического предшествования получила большую популярность на примере так называемых *нетранзитивных костей* (nontransitive, intransitive dice). Имеются в виду наборы игральных костей, на грани которых числа нанесены специальным образом, чтобы создать нетранзитивные отношения соответствующих случайных величин. Например, *кости Эфрона*, изобретенные Б. Эфроном в 1960-е гг., представляют собой набор из четырех костей A, B, C, D , которые имеют на своих гранях следующие числа:

$A : 4, 4, 4, 4, 0, 0;$

$B : 3, 3, 3, 3, 3, 3;$

$C : 6, 6, 2, 2, 2, 2;$

$D : 5, 5, 5, 1, 1, 1.$

Тогда результат броска каждой кости из набора больше результата бросания следующей кости (по кругу) с вероятностью, большей $1/2$:

$$\mathbf{P}(A > B) = \mathbf{P}(B > C) = \mathbf{P}(C > D) = \mathbf{P}(D > A) = \frac{2}{3},$$

что соответствует максимуму (5) при $n = 4$.

Для $n = 3$ можно предложить кости [19, §1.13e]

$A : 3, 3, 3, 3, 3, 6;$

$B : 2, 2, 2, 5, 5, 5;$

$C : 1, 4, 4, 4, 4, 4.$

Тогда

$$\mathbf{P}(A > B) = \mathbf{P}(B > C) = \frac{7}{12} \approx 0,583, \quad \mathbf{P}(C > A) = \frac{25}{36} \approx 0,694.$$

В принципе, можно рассматривать кости с произвольным числом граней, но максимум (5) достигим на них только при $n = 4$ [5].

Нетранзитивные кости были популяризованы М. Гарднером [20, 21], им посвящена обширная (зарубежная) литература, например, [22–25]. К сожалению, оборотной стороной популярности стало, во-первых, сужение темы (до дискретных случайных величин, принимающих целочисленные значения с равными или кратными вероятностями), во-вторых, не слишком серьезное отношение со стороны ученых, зачастую относящих эту тему к игровой, развлекательной математике (mathematical games, recreational math).

Между тем изначально С. Трыбулой была затронута вполне серьезная проблема теории вероятностей с возможными приложениями на практике. Прочность материалов, конечно, имеет непрерывное распределение, как и многие другие характеристики объектов в природе, технике и обществе. И при попарных сравнениях объектов из нескольких разных совокупностей (категорий) теоретически может возникать нетранзитивность. Таким образом, вполне закономерно задаться вопросом, в каких классах непрерывных распределений она бывает, а в каких нет. Также интересно, насколько велики в рамках класса могут быть максимумы вероятностей. Далее ограничимся случаем $n = 3$ независимых случайных величин (X , Y и Z).

2. Когда нетранзитивности не может быть

Еще в [2, теорема 2] было показано, что если распределения случайных величин X , Y и Z относятся к одному сдвиговому семейству, то нетранзитивности быть не может. Понятно, что этот вывод также распространяется на масштабные семейства распределений на положительной или отрицательной полупрямой (путем логарифмирования).

В частности, прочность материалов часто описывается распределением Вейбулла

$$(6) \quad F(x) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{x - a}{b} \right)^\alpha \right\}, \quad x \geq a, \quad a, b, \alpha > 0,$$

предложенным еще в книге [26]. Таким образом, сразу можно сделать вывод, что если случайные величины (прочности железных брусьев с разных заводов) имеют распределение Вейбулла с постоянными a и α и разными b или с постоянными b и α и разными a , то нетранзитивность невозможна.

Обозначим общий класс распределений X , Y и Z через K .

Теорема. Пусть случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют распределения F_1 и F_2 из K . Если существует такая характеристика распределения $\gamma(F)$ для $F \in K$, что $\gamma(F_1) < \gamma(F_2)$ верно тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}(X_1 < X_2) > 1/2$, то нетранзитивности не может быть.

Будем обозначать хвост распределения F через $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. Введем отношение (строгого) стохастического порядка распределений: $F_1 \prec F_2$, если $\bar{F}_1(x) \leq \bar{F}_2(x)$ везде и $\bar{F}_1(x) < \bar{F}_2(x)$ на некотором интервале $I = I(F_1, F_2)$. Очевидно, это отношение транзитивно.

Назовем однопараметрическое семейство распределений $\{F_\theta\}$ стохастически возрастающим по параметру θ , если из $\theta_1 < \theta_2$ следует $F_{\theta_1} \prec F_{\theta_2}$.

Следствие 1. Если K представляет собой однопараметрическое семейство распределений, стохастически возрастающее по параметру, то нетранзитивности не может быть.

Очевидно, аналогично можно определить однопараметрические семейства, стохастически убывающие по параметру, и для них будет верно аналогичное следствие.

Помимо ранее упомянутых случаев, к числу семейств, покрываемых следствием 1, относятся, например, семейство степенных распределений $F_\theta(x) = x^\theta$, $x \in [0, 1]$, $\theta > 0$, гамма-распределения с постоянным параметром масштаба и др. Однако этим область действия теоремы не исчерпывается.

Утверждение 1. Пусть $F_\alpha(x) = 1 - \exp\{-x^\alpha\}$, $x \geq 0$, $\alpha > 0$, тогда нетранзитивности не может быть.

Это семейство (распределений Вейбулла с $a = 0$, $b = 1$) не является стохастически возрастающим или убывающим по α , поскольку при $\alpha_1 < \alpha_2$ верно $\bar{F}_{\alpha_1}(x) < \bar{F}_{\alpha_2}(x)$ при $0 < x < 1$, но $\bar{F}_{\alpha_1}(x) > \bar{F}_{\alpha_2}(x)$ при $x > 1$. Тем не менее при этом

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1 < X_2) &= \int_0^\infty \exp\{-x^{\alpha_2}\} d(1 - \exp\{-x^{\alpha_1}\}) = \\ &= \int_0^\infty \exp\left\{-u^{\alpha_2/\alpha_1} - u\right\} du > 1/2 \end{aligned}$$

и теорема выполняется.

Следовательно, для распределений Вейбулла с постоянными a и b и разными α нетранзитивность также невозможна.

Напомним понятие *типа* распределения. Распределения F_1 и F_2 называются относящимися к одному типу, если существуют такие $a > 0$ и $b > 0$, что

$F_1(x) = F_2(a + bx)$. Тип удобно задавать одним его представителем — распределением F_0 , которое называют *стандартным*, а все остальные выражаются через него, т.е. для любого F существуют такие $a > 0$ и $b > 0$, что

$$F(x) = F_0\left(\frac{x - a}{b}\right).$$

Следствие 2. Если K состоит из одного или более типов распределений, в которых стандартные распределения симметричны относительно нуля, то нетранзитивности не может быть.

Доказательства теоремы, утверждения 1 и следствий см. в Приложении.

Следствие 2 применимо к типам равномерного, нормального, логистического распределения, распределений Лапласа, Коши, Симпсона и др.

Поскольку отношение нетранзитивности инвариантно относительно любого непрерывного строго возрастающего преобразования (применяемого ко всем случайным величинам), то этот вывод можно также распространить на логнормальные распределения.

К некоторым семействам распределений приходится применять специальные методы.

3. Распределения с полиномиальной плотностью на отрезке

Рассмотрим непрерывные распределения, заданные многочленами степени $N \geq 2$ на отрезке $[0, 1]$:

$$(7) \quad F(x) = \sum_{k=1}^N f_k x^k, \quad \sum_{k=1}^N f_k = 1, \quad x \in [0, 1],$$

при этом на коэффициенты f_k , $1 \leq k \leq N$, накладываются также ограничения, обусловленные неотрицательностью плотности распределения F .

Изучение подобных распределений имеет, например, тот смысл, что любое непрерывное распределение на отрезке приближается многочленами. Однако от степени приближения зависит не только погрешность в оценке функции, но и то, насколько это приближение способно передать характерные свойства отдельного распределения или их соотношений, в данном случае — свойство нетранзитивности.

При $N = 2$ можно провести параметризацию

$$(8) \quad F_\theta(x) = (1 - \theta)x + \theta x^2, \quad \theta \in [-1, 1],$$

семейство стохастически возрастает по θ , и по следствию 1 нетранзитивности не может быть.

Утверждение 2. В случае $N = 3$ нетранзитивности не может быть.

Это утверждение требует уже нетривиального доказательства (см. Приложение).

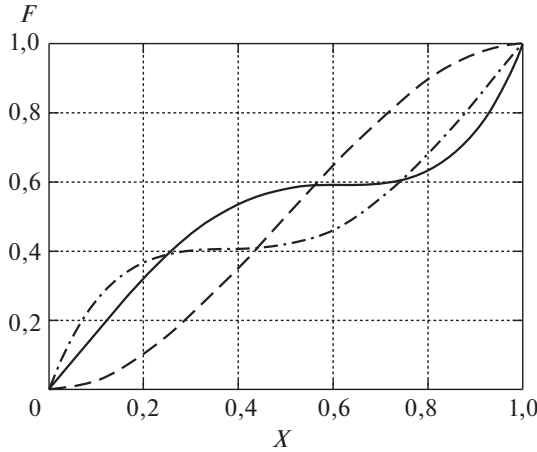


Рис. 1. Графики функций распределения к примеру (9).

При $N = 4$ нетранзитивность возможна. Это выяснилось только численным поиском в девятимерном пространстве коэффициентов с учетом ограничений на неотрицательность плотности. Поскольку регулярный поиск был затруднен, решено было использовать метод Монте-Карло и следующие эвристические соображения.

Заметим, что в классической тройке (4) преобразование $x \mapsto 4 - x$ сохраняет $Y = 2$ и переводит друг в друга X и Z (по распределению). Аналогом такого преобразования на отрезке $[0, 1]$ является $x \mapsto 1 - x$. Поэтому в качестве полиномиального аналога распределения, сосредоточенного в точке 2, логично взять распределение Y , симметричное на отрезке $[0, 1]$, с максимальным значением плотности в точке $1/2$ и минимальным на остальном отрезке, в том числе на его концах, где плотность может быть равна нулю, откуда получаем $p_Y(x) = 6x(1 - x)$ и $F_Y(x) = 3x^2 - 2x^3$. Для функций распределения X и Z логично положить $F_Z(x) = 1 - F_X(1 - x)$. Это сужает пространство поиска до трехмерного пространства.

В качестве примера тройки распределений с заметно большим $1/2$ значением $p_{XYZ} \approx 0,527$ можно привести следующий:

$$\begin{aligned}
 (9) \quad F_X(x) &= 1,511x + 1,726x^2 - 7,470x^3 + 5,233x^4, \\
 F_Y(x) &= 3x^2 - 2x^3, \\
 F_Z(x) &= 3,486x - 10,716x^2 + 13,463x^3 - 5,233x^4.
 \end{aligned}$$

На рис. 1 представлены графики функций распределения X (сплошная линия), Y (пунктир) и Z (штрих-пунктир).

Отметим интересную топологическую особенность: значения функций распределения меняют свое взаимное расположение четыре раза, графики F_X и F_Z имеют две точки пересечения, а график F_Y пересекается с каждым из них по одному разу. Можно предположить, что такая картина характерна при нетранзитивности.

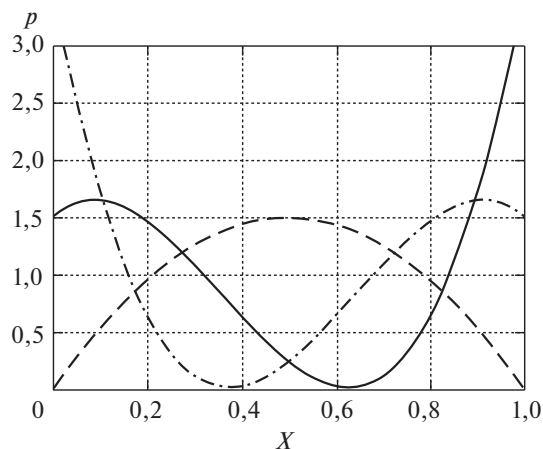


Рис. 2. Графики плотностей распределений к примеру (10).

Укажем также плотности, соответствующие функциям распределения (9):

$$\begin{aligned}
 p_X(x) &= 1,511 + 3,452x - 22,410x^2 + 20,932x^3, \\
 p_Y(x) &= 6x - 6x^2, \\
 p_Z(x) &= 3,486 - 21,432x + 40,389x^2 - 20,932x^3.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

На рис. 2 представлены графики плотности распределения X (сплошная линия), Y (пунктир) и Z (штрих-пунктир).

В настоящее время для данной модели продолжаются поиски оптимального набора (с максимальным значением p_{XYZ}), и в любом случае хотелось бы доказать его оптимальность аналитически.

Интересно также, как это максимальное значение растет с ростом N (при $N \rightarrow \infty$ оно, очевидно, стремится к $(\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0,618$).

4. Заключение

В работе представлены критерии, с помощью которых доказано, что для многих классических распределений нетранзитивности не может быть¹. В случае распределений с полиномиальной плотностью на отрезке показано, что нетранзитивность появляется начиная со степени $N = 4$.

Если рассматривать нетранзитивность как вредное явление, затрудняющее принятие решения при сравнении каких-либо альтернатив, то практическую ценность имеет, во-первых, установление границ, в которых ее заведомо не может быть, а значит, можно быть спокойным на этот счет, либо установление признаков, когда она может быть, и надо быть начеку, в том числе по

¹ Отдельно для равномерного, нормального, показательного и квадратичного (8) распределений это было ранее доказано студентом автора А.Ш. Изариповым в курсовой работе 2017/2018 учебного года.

возможности отказаться от использования отношения стохастического предшествования и метода попарных сравнений либо дополнить их другими отношениями и методами для большей уверенности.

Кроме того, на практике часто используются различные приближения реальных распределений (которые могут просто никак не выражаться аналитически), и важен вопрос, насколько хорошо эти приближения отражают характерные свойства исходных распределений, в том числе, возможную нетранзитивность.

Отметим следующие интересные направления теоретических исследований по тематике работы.

1. Дальнейшее изучение возможности нетранзитивности в различных классах непрерывных распределений. В частности, для распределений Вейбулла с двумя или тремя произвольными параметрами в (6) вопрос остается открытым. В случаях, когда нетранзитивность возможна, интересно также, насколько могут быть велики максимумы типа (5) при различных ограничениях на распределения.

2. Помимо отношения стохастического порядка $\prec$, в теории вероятностей и ее приложениях (в частности, в теории риска [27, гл. 2, 3]) рассматриваются различные транзитивные отношения распределений. Если удастся найти другие, возможно более слабые, транзитивные отношения, чем $\prec$, из которых следует стохастическое предшествование (1), это позволит обобщить следствие 1. Интересно также, существует ли самое слабое транзитивное отношение, из которого следует (1).

3. Отношение $\mathbf{P}(X < Y) > 1/2$ можно представить в виде $\mathbf{E} \text{sign}(Y - X) > 0$. С другой стороны, отношение $\mathbf{E}(Y - X) > 0$ транзитивно. Возникает вопрос, при каких нечетных функциях f отношение $\mathbf{E}f(Y - X) > 0$ транзитивно, а при каких нет. Подобные функции могут описывать нелинейные эффекты взаимодействия объектов с характеристиками X и Y .

4. Можно далее рассмотреть случай $n > 3$ непрерывных случайных величин.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. Из (1) и (2) следует $\gamma(F_X) < \gamma(F_Y)$, $\gamma(F_Y) < \gamma(F_Z)$, откуда $\gamma(F_X) < \gamma(F_Z)$, следовательно, $\mathbf{P}(X < Z) > 1/2$, так что имеет место транзитивность.

Доказательство следствия 1. Пусть случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют распределения F_{θ_1} и F_{θ_2} из K . Тогда из $\theta_1 < \theta_2$ следует

$$\mathbf{P}(X_1 < X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}_{\theta_2}(x) dF_{\theta_1}(x) > \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}_{\theta_1}(x) dF_{\theta_1}(x) = 1/2.$$

В обратную сторону, пусть $\mathbf{P}(X_1 < X_2) > 1/2$. Если предположить, что $\theta_1 > \theta_2$, то $\mathbf{P}(X_1 < X_2) < 1/2$, а если предположить, что $\theta_1 = \theta_2$, то $\mathbf{P}(X_1 < X_2) = 1/2$, в обоих случаях приходим к противоречию, значит, из $\mathbf{P}(X_1 < X_2) > 1/2$ следует $\theta_1 < \theta_2$.

Таким образом, параметр θ здесь играет роль характеристики $\gamma(F)$.

Доказательство следствия 2. Случайные величины X_1 и X_2 можно представить в виде:

$$X_1 = a_1 + b_1 W_1, \quad X_2 = a_2 + b_2 W_2,$$

где W_1, W_2 — независимые случайные величины с некоторыми стандартными распределениями F_{01}, F_{02} , симметричными относительно нуля. Обозначим распределение $b_1 W_1 - b_2 W_2$ через G_{12} , оно тоже симметрично относительно нуля. Тогда

$$\mathbf{P}(X_1 < X_2) = \mathbf{P}((a_1 + b_1 W_1) - (a_2 + b_2 W_2) < 0) = G_{12}(a_2 - a_1),$$

где правая часть больше $1/2$ при $a_2 - a_1 > 0$ и меньше $1/2$ при $a_2 - a_1 < 0$.

Таким образом, параметр сдвига a здесь играет роль характеристики $\gamma(F)$.

Доказательство утверждения 1. Достаточно показать, что

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \exp\{-x^\alpha - x\} du > 1/2, \quad \alpha > 1.$$

Проблема в том, что подынтегральная функция возрастает по α при $0 < x < 1$ и убывает при $x > 1$.

Пусть $\alpha \geq 2$, тогда

$$\begin{aligned} I(\alpha) &> \int_0^1 \exp\{-x^\alpha - x\} du \geq \int_0^1 \exp\{-x^2 - x\} du = \\ &= \sqrt{\pi} e^{1/4} \left(\Phi\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right) \approx 0,507 > 1/2. \end{aligned}$$

Пусть $1 < \alpha < 2$, тогда функция $x^{\alpha-1}$, $x > 0$, является вогнутой и ее график лежит ниже касательной в точке $x = 1$:

$$x^{\alpha-1} \leq (\alpha-1)x + (2-\alpha),$$

поэтому

$$x^\alpha \leq (\alpha-1)x^2 + (2-\alpha)x,$$

что используем для оценки интеграла:

$$\begin{aligned} (II.1) \quad I(\alpha) &\geq \int_0^{\infty} \exp\{-(\alpha-1)x^2 - (3-\alpha)x\} dx = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha-1}} \exp\left\{\frac{(3-\alpha)^2}{4(\alpha-1)}\right\} \left(1 - \Phi\left(\frac{3-\alpha}{\sqrt{2(\alpha-1)}}\right)\right). \end{aligned}$$

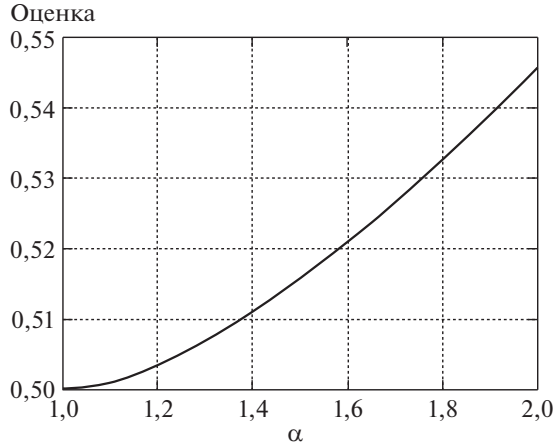


Рис. 3. График оценки (П.1) к утверждению 1.

График правой части неравенства (П.1) представлен на рис. 3. Видно, что она больше $1/2$. Отметим, что на концах отрезка $[1, 2]$ это неравенство обращается в равенство.

Доказательство утверждения 2. Обозначим:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= a_1x + a_2x^2 + (1 - a_1 - a_2)x^3, \\ F_Y(x) &= b_1x + b_2x^2 + (1 - b_1 - b_2)x^3, \\ F_Z(x) &= c_1x + c_2x^2 + (1 - c_1 - c_2)x^3. \end{aligned}$$

Тогда получаем

$$\mathbf{P}(X < Y) = \int_0^1 F_X(x) dF_Y(x) = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{60} + \frac{1}{2},$$

и таким образом, условие $\mathbf{P}(X < Y) > 1/2$ эквивалентно

$$(П.2) \quad a_1b_2 - a_2b_1 > 0.$$

Введем полярные координаты:

$$\begin{aligned} a_1 &= \rho \cos \alpha, & a_2 &= \rho \sin \alpha, \\ b_1 &= \nu \cos \beta, & b_2 &= \nu \sin \beta, \end{aligned}$$

тогда условие (П.2) принимает вид

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \rho\nu(\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) = \rho\nu \sin(\beta - \alpha) > 0.$$

Скажем, что точка (b_1, b_2) следует за точкой (a_1, a_2) , если угол против часовой стрелки от радиус-вектора к точке (a_1, a_2) до радиус-вектора к точке (b_1, b_2) меньше 180° . Получается, что условие $\mathbf{P}(X < Y) > 1/2$ в точности эквивалентно условию следования (b_1, b_2) за (a_1, a_2) .

Выполнение условий нетранзитивности (1)–(3) эквивалентно существованию точек (a_1, a_2) , (b_1, b_2) , (c_1, c_2) , следующих друг за другом (по кругу). Это возможно тогда и только тогда, когда начало координат O находится внутри образованного ими треугольника, т.е. некоторая ε -окрестность O входит в область допустимых коэффициентов (f_1, f_2) в (7). Однако это не так, поскольку из неотрицательности плотности в нуле следует $f_1 \geq 0$. Следовательно, нетранзитивности здесь не может быть.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Steinhaus H., Trybula S.* On a paradox in applied probabilities // Bull. de l'Acad. Polon. Sci. 1959. V. 7. P. 67–69.
2. *Trybula S.* On the paradox of three random variables // Zastos. Matem. 1961. V. 5. No. 4. P. 321–332.
3. *Trybula S.* On the paradox of n random variables // Zastos. Matem. (Appl. Math.) 1965. V. 8. No. 2. P. 143–156.
4. *Usyskin Z.* Max–min probabilities in the voting paradox // Ann. Math. Stat. 1964. V. 35. No. 2. P. 857–862.
5. *Богданов И.И.* Нетранзитивные рулетки // Мат. просвещение. 2010. Сер. 3. Вып. 14. С. 240–255.
6. *Поддьяков А.Н.* Непереходность (нетранзитивность) отношений превосходства и принятие решений // Психология. Журн. ВШЭ. 2006. № 3. С. 88–111.
7. *Пермогорский М.С., Поддьяков А.Н.* Отношение превосходства между объектами и нетранзитивность их предпочтений человеком // Вопросы психологии. 2014. № 2. С. 3–14.
8. *Поддьяков А.Н.* Нетранзитивность — кладезь для изобретателей // Троицкий вариант. № 242 от 21.11.2017.
9. *Poddiakov A.* Intransitive machines. Available at: <https://arxiv.org/abs/1809.03869> (accessed September 8, 2018)
10. *Васильев В.А.* О k -достижимости ядер TU -кооперативных игр // Мат. теория игр и ее приложения. 2016. Т. 8. № 2. С. 3–27.
11. *Ларичев О.И.* Свойства методов принятия решений в многокритериальных задачах индивидуального выбора // АиТ. 2002. № 2. С. 146–158.
Larichev O.I. Properties of the Decision Methods in the Multicriteria Problems of Individual Choice // Autom. Remote Control. 2002. V. 63. No. 2. P. 304–315.
12. *Гороховик В.В., Трофимович М.А.* Условия оптимальности первого и второго порядка в задачах векторной оптимизации с нетранзитивным отношением предпочтения // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 81–96.
13. *Аржениенко А.Ю., Казакова О.Г., Чугаев Б.Н.* Оптимизация бинарных опросников // АиТ. 1985. № 11. С. 138–144.
Arzhenenko A.Yu., Kazakova O.G., Chugaev B.N. Optimization of Binary Questionnaires // Autom. Remote Control. 1985. V. 46. P. 1466–1472.
14. *Ленский А.Е.* Стохастическое и нечеткое упорядочивание методом минимальных преобразований // АиТ. 2017. № 1. С. 59–79.
Lepskiy A.E. Stochastic and Fuzzy Ordering with the Method of Minimal Transformations // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 1. P. 50–66.
15. *Boland P.J., Singh H., Cukic B.* The stochastic precedence ordering with applications in sampling and testing // J. Appl. Probab. 2004. V. 41. No 1. P. 73–82.

16. *Arcones M.A., Kvam P.H., Samaniego F.J.* Nonparametric estimation of a distribution subject to a stochastic precedence constraint // J. Amer. Stat. Assoc. 2002. V. 97. No. 457. P. 170–182.
17. *Шахнов И.Ф.* Задачи ранжирования интервальных величин при многокритериальном анализе сложных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 1. С. 37–44.
18. *Martinetti D., Montes I., Diaz S., Montes S.* A study on the transitivity of probabilistic and fuzzy relations // Fuzzy Sets Syst. 2011. V. 184. P. 156–170.
19. *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.–Ижевск: Ин-т компьютер. исслед. 2003.
20. *Gardner M.* The paradox of the nontransitive dice and the elusive principle of indifference // Sci. Amer. 1970. V. 223. No. 6. P. 110–114.
21. *Gardner M.* On the paradoxical situations that arise from nontransitive relations // Sci. Amer. 1974. V. 231. No. 6. P. 120–125.
22. *Savage R.* The paradox of nontransitive dice // Amer. Math. Montly. 1994. V. 101. No. 5. P. 429–436.
23. *Bozoki S.* Nontransitive dice sets releasing the Paley tournament for solving Shütte's tournament problem // Miskolc Math. Notes. 2014. V. 15. No. 1. P. 39–50.
24. *Conrey B., Gabbard J., Grant K., Liu A., Morrison K. E.* Intransitive dice // Math. Mag. 2016. V. 89. P. 133–143.
25. *Buhler I., Graham R., Hales A.* Maximally nontransitive dice // Amer. Math. Montly, 2018. V. 125. No. 5. P. 387–399.
26. *Weibull W.* A statistical theory of the strength of materials. Stockholm: Generalstabens litografiska anstalts förlag, 1939.
27. *Булinskая Е.В.* Теория риска и перестрахование. М.: ООО «Мэйлер», 2008.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 05.10.2018

После доработки 18.01.2019

Принята к публикации 07.02.2019