

© 2019 г. А.В. ЧЕРНОВ, канд. физ.-мат. наук (chavnn@mail.ru)
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)

О ПРИМЕНЕНИИ ФУНКЦИЙ ГАУССА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ¹

Доказываются утверждения о возможности сколь угодно точной аппроксимации в пространстве непрерывных функций одного переменного на любом фиксированном отрезке с помощью линейных комбинаций сдвигов и сжатий функции Гаусса. На примере задачи о мягкой посадке на Луну описывается методика численного решения задач оптимального управления, основанная на указанном способе аппроксимации управляющей функции. В рамках этого же примера исследуются вопросы чувствительности функционалов ограничений к погрешности задания оптимальных параметров для решения тремя способами: 1) по принципу максимума Л.С. Понтрягина (численно и теоретически); 2) по методу параметризации управления в сочетании с методом подвижных узлов; 3) предлагаемым методом. Проводится соответствующее сравнение, подтверждающее эффективность метода 3).

Ключевые слова: техника параметризации управления, сосредоточенная задача оптимального управления, аппроксимация функциями Гаусса.

DOI: 10.1134/S0005231019060035

1. Введение

Как было отмечено в [1], при дискретизации задач оптимального управления традиционно используется кусочно-постоянная или кусочно-линейная аппроксимация управляющей функции, что даже в случае подвижной (управляемой) сетки приводит к большой размерности аппроксимирующей задачи математического программирования.

В рамках техники параметризации управления (см. [2–6] и приведенную в них библиографию) за счет предположения об однозначной разрешимости управляемой системы для каждого допустимого управления функционалы задачи сводятся к функциям конечного числа переменных — параметров интерполяции управляющей функции, а исходная бесконечномерная задача оптимизации — к конечномерной (аппроксимирующей задаче). Поскольку способы интерполяции могут быть разными, в [1] была обозначена проблема выбора такого класса Ω функций, аппроксимирующих неизвестное управление, который обеспечивал бы качественную аппроксимацию для функций из достаточно обширного множества при сравнительно малом количестве параметров аппроксимации, позволяя кроме того получать близкие к оптимальным

¹ Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации в рамках проектной части Государственного задания в сфере научной деятельности в 2014–2016 гг. (проект № 1727).

гладкие и устойчивые режимы управления. Целью работы [1] было показать, что перечисленным требованиям удовлетворяет класс

$$(1) \quad \Omega = \left\{ \Phi = \Phi_\nu[\alpha, \beta, \gamma] \in C^\infty[a; b] \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu}, \nu \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\Phi_\nu[\alpha, \beta, \gamma](x) = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j \varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x), \quad \varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x) = \exp \left[-\frac{(x - \beta_j)^2}{\varepsilon + \gamma_j^2} \right],$$

где $\varepsilon > 0$ — некоторое достаточно малое число (нужное только для того, чтобы избежать нуля в знаменателе). При использовании аппроксимации управления функциями из класса Ω значения искомого оптимального управления в контрольных точках тому, кто в данный момент решает соответствующую задачу оптимизации, неизвестны (и в этом состоит принципиальное отличие от обычной задачи аппроксимации). В этом случае неизвестные параметры аппроксимации определяются путем минимизации значения целевого функционала, вычисляемого на функциях из класса Ω , если они являются допустимыми по смыслу задачи либо на допустимых суперпозициях, содержащих функции класса Ω (например, в рамках метода синус-параметризации). Указанное принципиальное отличие следует учитывать при сравнении различных подходов к аппроксимации. В рамках обычной задачи аппроксимации (при заданном количестве параметров) на первый план выходят вопросы, связанные с минимизацией расхода времени (и прочих ресурсов) при отыскании неизвестных параметров аппроксимации. В рамках же численного решения задач оптимального управления главное — это повышение точности аппроксимации в отношении произвольной функции (неизвестного управления) в смысле нормы отклонения в том или ином функциональном пространстве при заданном количестве параметров аппроксимации, уменьшение этого количества при сохранении приемлемой точности (по управлению или хотя бы по функционалу) и т.п.

В [1] были представлены результаты численных экспериментов по аппроксимации линейными комбинациями квадратичных экспонент с переменными параметрами для: 1) многочлена пятой степени; 2) ступенчатой функции; 3) элементарной функции, заданной сложной формулой; 4) четырехзвенной ломаной. Эти результаты показали достаточно высокую точность такого способа аппроксимации в смысле максимума модуля отклонения на достаточно плотной сетке. Кроме того, в [1] доказано несколько утверждений о дискретно точном характере изучаемых аппроксимаций (в [1] см. библиографию по вопросу использования квадратичных экспонент для аппроксимации функций одного переменного на всей числовой оси). Тем не менее строгого теоретического обоснования возможности сколь угодно точной аппроксимации указанного вида на любом конечном отрезке в метрике какого-либо функционального пространства в [1] не было представлено. Настоящая статья восполняет этот пробел, а именно: доказывается теорема о возможности сколь угодно точной аппроксимации в метрике пространства $C[a; b]$ линейной комбинацией не более $n + 1$ квадратичных экспонент полиномов n -й степени. В качестве следствия устанавливается всюду плотное вложение класса Ω в пространства $C[a; b]$ и $L_p[a; b]$, $p \geq 1$.

Помимо результатов по аппроксимации функциями Гаусса, в статье на примере известной задачи о мягкой посадке на Луну описывается методика применения Ω -аппроксимаций для численного решения методом параметризации управления и представляются результаты соответствующих численных экспериментов. Устанавливается, что предлагаемый метод решения позволяет существенно снижать размерность аппроксимирующей задачи (по сравнению с методом кусочно-постоянной аппроксимации в сочетании с методом подвижных узлов) и (по крайней мере для указанного примера) в значительной степени понижает чувствительность численного решения к погрешности вычислений. Для задачи о мягкой посадке строится теоретический способ вычисления оптимального момента переключения в рамках решения по принципу максимума Л.С.Понтрягина и устанавливается жесткость системы условий мягкой посадки при использовании соответствующего режима управления. Жесткость системы здесь понимается в смысле единственности ее решения в пространстве параметров и быстрого роста невязки при малом отклонении от решения.

2. Формулировка основных результатов

Теорема. Пусть $[a; b] \subset \mathbb{R}$ — произвольно фиксированный конечный отрезок. Тогда любой полином степени $n \geq 0$ можно сколь угодно точно в метрике $\mathbf{C}[a; b]$ аппроксимировать некоторой функцией вида $\Phi_\nu[\alpha, \beta, \gamma] \in \Omega$ при $\nu \leq n + 1$.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Замечание 1. Фактически при доказательстве теоремы устанавливается, что при любой заданной точности для данного полинома $\mathcal{P}_n(x)$ при всех достаточно больших по модулю числах $\beta \neq 0$ и $\gamma > 0$ имеет место представление

$$(2) \quad \mathcal{P}_n(x) \approx \alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_{\beta, \gamma_j}(x),$$

$$\gamma_j = \gamma / \sqrt{j}, \quad \varphi_{\beta, \gamma}(x) = \exp[-(x - \beta)^2 / \gamma^2]$$

(здесь, очевидно, $\varphi_{\beta, \gamma_j} = \varphi_{\beta, \gamma}^j$). Отсюда ясно, что по сравнению с $n + 1$ параметров, необходимых для описания полинома, количество параметров, необходимых для его разложения по квадратичным экспонентам, больше всего лишь на два параметра β и γ , которые к тому же могут выбираться бесконечным количеством способов. Отметим, что константа α_0 может быть сколь угодно точно аппроксимирована одной квадратичной экспонентой (см. далее лемму П.1). Но, видимо, лучше включить в класс Ω тождественную единицу. Кроме того, из анализа доказательства теоремы становится понятно, что представление в форме (2) — это не единственная возможность. Поэтому представление полиномов функциями из класса Ω обладает некоторой избыточностью. Исходя из этого, можно ожидать, что реально необходимое количество слагаемых ν может оказаться еще меньше. На эту возможность

указывает еще и то, что величины $\varphi_{\beta,\gamma}^j(x)$ быстро убывают с ростом индекса j . Кроме того, при ограничении представления функций полиномами фактически сужаются возможности их представления функциями из класса Ω на форму (2). Поэтому естественно ожидать, что представление функциями из класса Ω открывает больше возможностей по сравнению с представлением полиномами. В принципе, представление функциями из класса Ω имеет ряд общих черт с представлением так называемыми фреймами [7, § 1.8]. Что касается избыточности, то для инженерных приложений она бывает полезна [7, § 1.8].

Любая функция из $C^\infty[a; b]$ может быть сколь угодно точно в метрике пространства $C[a; b]$ аппроксимирована своим многочленом Тейлора. Более того, согласно аппроксимационной теореме Вейерштрасса (см., например, [8, гл. IV, § 1, теорема 1.3, с. 150]), всякую непрерывную функцию в метрике пространства $C[a; b]$ можно сколь угодно точно приблизить многочленом. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. Класс Ω является всюду плотным в $C[a; b]$.

С другой стороны, всякую функцию из $L_p[a; b]$, $p \geq 1$, можно по соответствующей норме сколь угодно точно аппроксимировать непрерывной функцией (см., например, [9, гл. 4, § 6]). Поэтому имеет место следствие 2.

Следствие 2. Класс Ω является всюду плотным в $L_p[a; b]$, $p \geq 1$.

Замечание 2. В качестве следствия теоремы можно получить, что материнский вейвлет “мексиканская шляпа” $\psi(t) = (1 - t^2) \exp[-t^2/2]$ на любом конечном отрезке может быть сколь угодно точно в метрике $C[a; b]$ аппроксимирован функцией вида $\Phi_\nu[\alpha, \beta, \gamma] \in \Omega$ при $\nu \leq 3$. Однако в [10] непосредственным образом (т.е. без использования теоремы и ей подобных) доказано более сильное утверждение о том, что здесь всегда можно считать $\nu = 2$. Этот факт важен в связи со следующими обстоятельствами. Вейвлеты² широко используются при обработке сигналов, в том числе для их аппроксимации и сжатия информации о сигнале, см., например, [7, 11]. Любую функцию из $L_2(\mathbb{R})$ можно при выполнении определенных условий относительно материнского вейвлета сколь угодно точно в $L_2(\mathbb{R})$ аппроксимировать разложением по системе порожденных им вейвлетов. Причем локально (в частности, на фиксированном отрезке), как правило, достаточно ограничиться небольшим количеством членов разложения, за счет присущего им (а также и квадратичным экспонентам) свойства частотно-временной локализации. Материнский вейвлет “мексиканская шляпа” указанным условиям удовлетворяет (подробнее см. [11, гл. 3]). Отдельные вейвлеты представляют собой сдвиги и сжатия материнского вейвлета. Сдвиги и сжатия квадратичной экспоненты — это тоже квадратичные экспоненты. Таким образом, имея разложение данной функции по системе вейвлетов и зная представление материнского вейвлета линейной комбинацией квадратичных экспонент, легко получаем разложение той же функции по квадратичным экспонентам.

² В последнее время в отечественной литературе вместо слова “вейвлет” активно используется термин “всплеск”, предложенный К.И. Осколковым и более точно отражающий его смысл.

Факт, указанный в замечании 2, подтверждается тем, что при $\nu = 2$ минимизация квадратичной невязки аппроксимации упомянутого вейвлета на отрезке $[-\pi; \pi]$ дает

$$\alpha = (50,9715; -49,9715), \quad \beta = (0,2130; 0,2187) \cdot 10^{-14}, \quad \gamma = (1,4003; -1,4283),$$

а достигнутая точность аппроксимации на достаточно мелкой сетке: $\Delta = 4,3262 \cdot 10^{-5}$. Графики визуально полностью совпадают. Здесь, в частности, подтверждается гипотеза об избыточности числа $\nu = n + 1$ для представления полиномов n -й степени.

Основываясь на теореме, ее следствиях и замечании 2, а также на результатах численных экспериментов, представленных в [1, 10], приходим к выводу, что использование параметризации управления путем его представления функцией класса Ω с управляемыми параметрами $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu}$ позволяет существенно снижать размерность соответствующей аппроксимирующей задачи математического программирования. Фактически, речь идет о сжатии информации об управлении. Отличие от обычной проблемы сжатия информации заключается в том, что здесь информация, подлежащая сжатию, тому, кто решает задачу оптимизации, неизвестна, поскольку оптимальное управление и требуется найти. Основная идея состоит в том, что задача об отыскании оптимального управления заменяется задачей об отыскании таких параметров его аппроксимации, которые обеспечивают минимум целевому функционалу при условии выполнения тех или иных ограничений с заданной точностью. На основании изложенного актуальной является разработка методик, позволяющих адаптировать популярные алгоритмы сжатия информации к неизвестному оптимальному управлению. Отметим в связи с этим публикацию [12], где описывается подобная адаптация метода JPEG-кодирования по отношению к управляющим функциям двух переменных.

Далее опишем применение метода параметризации управления с помощью квадратичных экспонент и проведем сравнение с другими способами параметризации на примере известной задачи о мягкой посадке на Луну. Говоря о других способах параметризации, будем иметь в виду два подхода. Первый основан на использовании информации о структуре аналитического решения этой задачи, полученного с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина. Второй основан на применении методики, описанной в [2] и опирающейся на кусочно-постоянную аппроксимацию управления на подвижной (управляемой) сетке. Оказывается, что в рамках первого подхода система условий мягкой посадки является жесткой в том смысле, что она имеет единственное решение в (двумерном) пространстве параметров, причем невязка быстро возрастает при малом отклонении от решения. Поэтому оптимизация целевого функционала теряет смысл, поскольку производится на одноточечном множестве. При учете ограничений путем добавления к целевому функционалу штрафа за их нарушение численная оптимизация штрафного функционала вследствие той же жесткости оказывается неудачной: условия мягкой посадки грубейшим образом нарушаются при наличии погрешности вычисления момента переключения в оптимальном режиме уже в десятом знаке после запятой. Для повышения гибкости системы ограничений в простран-

стве параметров приходится увеличивать их количество. В частности, второй подход оказывается успешным лишь при количестве параметров, равном двадцати. Наконец, подход, предлагаемый в данной статье, хорошо работает уже при четырех параметрах.

3. Постановка задачи о посадке на Луну

Рассмотрим управляемую систему из задачи о мягкой посадке на Луну (здесь h — высота, v — скорость, m — масса, u — расход топлива в единицу времени):

$$(3) \quad h' = v, \quad v' = -g + (k/m)u, \quad m' = -u; \quad h(0) = H, \quad v(0) = V, \quad m(0) = M;$$

$$(4) \quad \begin{aligned} h[u](T) = v[u](T) = 0 & \quad (\text{условие мягкой посадки}); \\ m[u](T) \rightarrow \max & \quad (\text{функционал цели}). \end{aligned}$$

Ограничение на значения управления: $u(t) \in [0; \sigma_*], t \in [0; T]$. Будем считать, что заданы следующие значения параметров: $k = 3000$, $\sigma_* = 7,08$, $g = 1,62$, $H = 190000$, $V = -2650$, $M = 500$. Чтобы обеспечить дифференцируемость правой части по фазовым переменным, переобозначим переменные: $x_1 = h$, $x_2 = v$, $x_3 = 1/m$. Здесь исходим из того, что для искомого оптимального управления масса аппарата $m(t) > 0, t \in [0; T]$ (а с физической точки зрения, $m(t) \geq M_0$, где M_0 — сухая масса спускаемого аппарата). В итоге задача переформулируется следующим образом:

$$(5) \quad \begin{cases} x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -g + kx_3u, \quad x'_3 = (x_3)^2u; \quad x_1(0) = H, \quad x_2(0) = V, \quad x_3(0) = 1/M; \\ x_1[u](T) = x_2[u](T) = 0; \quad x_3[u](T) \rightarrow \min. \end{cases}$$

Из аналитического решения задачи минимизации (5) с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина известна структура оптимального управления:

$$u_*(t) = \{0, \text{ если } t \in [0; \tau]; \quad \sigma_*, \text{ если } t \in (\tau; T]\}.$$

Момент переключения τ и финальное время T , вообще говоря, неизвестны.

В соответствии с информацией о структуре оптимального управления определим набор параметров $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ и произведем параметризацию:

$$\tau = \alpha_1^2, \quad T = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad u[\alpha](t) = \{0, t \in [0; \tau]; \quad \sigma_*, t \in [\tau; T]\}.$$

В результате функционалы задачи преобразуются в функции двух переменных:

$$\begin{aligned} J_0[\alpha] = x_3[u](T) \rightarrow \min, \quad J_i[\alpha] = \tilde{J}_i^2[\alpha] = 0, \quad i = 1, 2; \\ \tilde{J}_i[\alpha] = x_i[u](T), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

$u = u[\alpha], \alpha \in \mathbb{R}^2$. Финальные ограничения будем учитывать с помощью штрафа:

$$f(\alpha) = J_0[\alpha] + \sigma_1 J_1[\alpha] + \sigma_2 J_2[\alpha], \quad \alpha \in \mathbb{R}^2.$$

Решение управляемой задачи Коши из (5) для каждого конкретного управления будем искать численно методом Эйлера. В итоге исходная задача сводится к задаче безусловной минимизации: $f(\alpha) \rightarrow \min, \alpha \in \mathbb{R}^2$. Эту задачу автор решал численно методом Хука–Дживса (написав соответствующий комплекс программ в системе MATLAB). Был получен следующий результат: $\alpha \approx (6,7; 6,7)$, $h(T) = 292,4533$, $v(T) = 0,015$, $m(T) = 197,7173$. Попытка решения оказалась неудачной. И это не случайно. Дело в том, что решение управляемой системы слишком чувствительно к малейшим отклонениям значений параметров α . Так, например, если взять $\alpha = (6,753702689; 6,7)$, то получаем финальные значения: $h(T) = -0,0651$, $v(T) = -25,1076$, $m(T) = 198,7744$. Если же изменить значение α_1 лишь в последнем знаке: $\alpha = (6,753702688; 6,7)$, то получаем: $h(T) = 274,1060$, $v(T) = 233,6999$, $m(T) = 182,1186$. Стало быть, коэффициент k обусловленности значения высоты h погрешностью вычисления параметра α_1 : $|\Delta h| \leq k|\Delta \alpha_1|$ можно оценить как $2 \cdot 10^{11}$.

Примечательно, что в [13, гл. III, § 3, п. 3, с. 126] тоже есть, своего рода, косвенное замечание на эту же тему: “Такое П-управление на практике даст плохие результаты. Пусть момент включения тормозного двигателя $t_{\text{дв}}$ не совпадает с t_1, \dots ” (в статье это τ) “... что в действительности всегда имеет место. Если $t_{\text{дв}} < t_1$, то космический аппарат остановится на некоторой высоте над Луной, а затем улетит от нее. Если же $t_{\text{дв}} > t_1$, то скорость при посадке не будет нулевой и мягкой посадки не произойдет”. В статье роль возмущения, порождаемого отличием реального объекта от модели, принимает погрешность вычислений. Поэтому ситуация наблюдается аналогичная. В разделе 4 приведем строгий анализ, который объясняет, почему так происходит.

В данном случае увеличение количества степеней свободы управляющего режима (т.е. введение дополнительных параметров в шаблон управления) позволяет все-таки найти оптимальное управление, переводящее возмущенную (вследствие погрешностей) управляемую систему в требуемое состояние. А именно разрешим управлению принимать произвольные постоянные значения $v_1, v_2 \in [0; \sigma_*]$ на каждом из промежутков $[0; \tau]$ и $[\tau; T]$, произведя их параметризацию следующим образом:

$$v_i = \tilde{S}(\alpha_{i+2}) = (\sigma_*/2)\{1 + \sin(\alpha_{i+2})\}, \quad \alpha_{i+2} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда функционалы задачи обращаются в функции четырех переменных. Дальше забудем про максимизацию массы остатка топлива и, выбрав в качестве начальных значений уже найденные α_1, α_2 , а также α_3, α_4 из условий $v_1 = 0$, $v_2 = \sigma_*$, минимизируем квадрат нормы невязки выполнения условий мягкой посадки с помощью метода Хука–Дживса. Тогда за 56 итераций получаем (с точностью представления до четырех знаков после запятой):

$$\begin{aligned} \alpha &\approx (6,7141; 6,5941; -1,4807; 1,7631), \\ \tau &\approx 45,0789, \quad T \approx 88,5614, \\ v_1 &\approx 0,0144, \quad v_2 \approx 0,9908 \cdot \sigma_*; \\ h(T) &\approx 6,167 \cdot 10^{-5}, \quad v(T) \approx 6,52 \cdot 10^{-6}; \quad m(T) \approx 197,6789. \end{aligned}$$

В статье [14] описана методика, которая позволяет вычислить градиенты функционалов по совокупности четырех параметров:

$$\begin{aligned}\nabla_{\alpha} J_0 &= (0; 0,0024; 0,0004; -0,0008), \\ \nabla_{\alpha} \tilde{J}_1 &= (-3,7516; 0,0208; 0,7707; -0,6725) \cdot 10^4, \\ \nabla_{\alpha} \tilde{J}_2 &= (-0,0029; 0,1383; 0,0220; -0,0447) \cdot 10^4.\end{aligned}$$

Отсюда ясно, что, например, коэффициент k обусловленности значения высоты h погрешностью вычисления параметра α_1 : $|\Delta h| \leq k|\Delta \alpha_1|$ можно оценить как $3,75 \cdot 10^4$. На самом деле приведенные выше значения $h(T)$ и $v(T)$ получаются, лишь если учитывать 16 знаков после запятой. Если же оставить лишь 4 знака, что соответствует погрешности 10^{-5} , то получаем: $h(T) = 0,5786$ и $v(T) = -0,1151$. Отсюда приходим к оценке коэффициента обусловленности примерно того же порядка. Если запретить варьирование параметров v_1 и v_2 , то ситуация резко ухудшается: $h(T) = 1,1773 \cdot 10^5$ и $v(T) = 5000$, а значения производных по параметрам увеличиваются на порядок.

Отметим, кроме того, следующий интересный факт. Если полученный оптимальный набор параметров (α_3, α_4) подвергнуть последовательно прямому и обратному (через арксинус в смысле главного значения) синус-преобразованию $\tilde{S}(\alpha_i)$, $i = 3, 4$ (что с математической точки зрения не должно ничего изменить), то даже при учете всех четырех параметров с 16 знаками после запятой получим совершенно другой результат: $h(T) = -4,5295 \cdot 10^4$ и $v(T) = -0,2524 \cdot 10^4$. Такое изменение возникает, видимо, из-за погрешности вычисления синуса и арксинуса, а также в силу упомянутой выше обусловленности. Подобное явление, когда математически эквивалентные преобразования за счет несогласованного влияния погрешностей при наличии высокой чувствительности к ним приводят к неожиданным результатам, известно специалистам по вычислительной математике, см., например, [15].

4. Жесткость системы условий мягкой посадки при задании режима управления двумя параметрами

Далее покажем, что система условий мягкой посадки

$$(6) \quad \tilde{J}_i(\alpha_1, \alpha_2) = 0, \quad i = 1, 2,$$

при использовании двухпараметрического режима управления, определяемого из принципа максимума, имеет единственное решение, и, более того, найдем его (с учетом того, что α_1 и α_2 однозначно восстанавливаются по значениям τ и T). Единственность решения означает, что система (6) жестко определяет набор параметров, а задача максимизации массы остатка топлива по этим двум параметрам теряет смысл. Другими словами, в рамках данной парадигмы объект является жестко управляемым в заданную конечную точку, определяемую условиями мягкой посадки. Именно эта жесткость и вызывает проблемы при численном решении задачи оптимизации по двум параметрам. Ясно, что увеличение количества параметров (т.е. степеней свободы)

управления повышает его гибкость, но, как уже было показано на результатах численных экспериментов, при малом количестве параметров высокая чувствительность решения к погрешностям сохраняется. Более того, можно предположить, что для возмущенной (погрешностями) управляемой системы система ограничений (6) перестает иметь решение (задача имеет признаки некорректности).

В качестве предварительного результата установим, что момент включения двигателя τ , обеспечивающий мягкую посадку к некоторому моменту $T > \tau$, существует не более чем один; далее покажем, что один такой момент существует, и найдем его. Более того, по каждому моменту переключения τ определяется лишь один момент времени $T = T(\tau)$, при котором высота $h = h(T) = 0$ при условии, что $v(T) = 0$. Малейшее отклонение от оптимального момента переключения $\tau_* \approx 45$ приводит к тому, что величина $v(T(\tau))$ становится либо отрицательной, либо положительной (причем эти изменения происходят достаточно резко), т.е. условие мягкой посадки нарушается. А это значит, что при данной структуре управления отсутствует устойчивость существования решения двухточечной краевой задачи (3), (4) и, более того, соответствующая неустойчивость является сильной (обычная неустойчивость означает, что в любой окрестности данного управления существуют управления, которым не отвечает ни одно решение управляемой двухточечной краевой задачи; сильная неустойчивость означает, что при любом отклонении от данного управления управляемая задача не имеет решения). Прежде всего найдем решение системы (3) на промежутке $[0; \tau]$ (т.е. при $u \equiv 0$):

$$m(t) \equiv M, \quad v(t) = V - gt, \quad h(t) = H + Vt - (gt^2/2), \quad t \in [0; \tau].$$

Отсюда, кстати, решая соответствующее квадратное уравнение, нетрудно найти время свободного падения: $T_c \approx 70$. Теперь найдем решение системы дифференциальных уравнений на промежутке $[\tau; T)$ (т.е. при $u \equiv \sigma_*$):

$$m' = -\sigma_* \Rightarrow m(t) = M - \sigma_*(t - \tau); \quad h' = v \Rightarrow h(t) = h(\tau) + \int_{\tau}^t v(\xi) d\xi;$$

$$v' = -g + \frac{k\sigma_*}{M - \sigma_*(t - \tau)} \Rightarrow v(t) = v(\tau) - g(t - \tau) - k \ln \left(1 - \frac{\sigma_*}{M} (t - \tau) \right).$$

Вычислим интеграл по частям:

$$\int_{\tau}^t v(\xi) d\xi = \left[\begin{array}{l} d\hat{v} = d\xi \Rightarrow \hat{v} = -(1/\sigma_*) \{ M - \sigma_*(\xi - \tau) \} \\ \hat{u} = v(\xi) \Rightarrow d\hat{u} = v'(\xi) d\xi \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{v(\xi)}{\sigma_*} \{ M - \sigma_*(\xi - \tau) \} \Big|_{\tau}^t + \frac{1}{\sigma_*} \int_{\tau}^t \left[-g + \frac{k\sigma_*}{M - \sigma_*(\xi - \tau)} \right] [M - \sigma_*(\xi - \tau)] d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sigma_*} \left\{ v(\tau)M - v(t)[M - \sigma_*(t - \tau)] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\sigma_*} \left\{ -gM(t - \tau) + g\sigma_* \frac{(t - \tau)^2}{2} + k\sigma_*(t - \tau) \right\}.$$

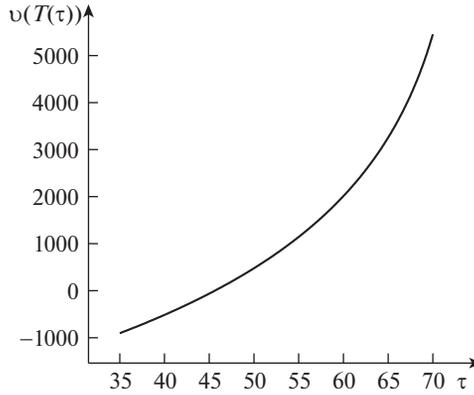


Рис. 1. График функции $v = v(T(\tau))$.

Таким образом, для определения параметров τ и T , обеспечивающих мягкую посадку, получаем систему: $h(T) = v(T) = 0$, где

$$\begin{aligned} h(t) &= h(\tau) + (M/\sigma_*)\{v(\tau) - v(t)\} + \{k - (gM/\sigma_*)\}(t - \tau) + (g/2)(t - \tau)^2, \\ v(t) &= v(\tau) - g(t - \tau) - k \ln [1 - (\sigma_*/M)(t - \tau)]. \end{aligned}$$

Поскольку должно быть $v(T) = 0$, то выражение для высоты несколько упрощается:

$$h(T) = h(\tau) + (M/\sigma_*)v(\tau) + \{k - (gM/\sigma_*)\}(T - \tau) + (g/2)(T - \tau)^2.$$

Положим: $T - \tau = \xi > 0$, $a = g/2$, $b = k - (gM/\sigma_*)$, $c = h(\tau) + (M/\sigma_*)v(\tau)$. Тогда при известном τ момент³ $T = T(\tau)$ определяется из решения квадратного уравнения:

$$a\xi^2 + b\xi + c = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \xi > 0.$$

Непосредственным вычислением устанавливается, что условие $\xi > 0$ выполняется, только если в числителе дроби берется знак $+$. Таким образом, параметр $\xi = \xi(\tau)$ (ясно, что $\tau \in [0; 71]$) определяется однозначно. По нему определяется $T = T(\tau)$. График функции $v = v(T(\tau))$ см. на рис. 1. Видно, что эта функция обращается в 0 лишь в одной точке $\tau = \tau_* \approx 45$. Минимизируя квадрат $v(T(\tau))^2$ по τ методом золотого сечения на отрезке $[45; 46]$, за 48 итераций получаем практически точное значение момента переключения для точной (невозмущенной) системы:

$$\tau = 45,621808458300308, \quad T = T(\tau) = 88,409233510388248,$$

³ Это не есть момент соприкосновения с поверхностью Луны космического аппарата при произвольном τ , поскольку в выражении $h(T)$ в целях его упрощения было принято $v(T) = 0$, что заведомо верно при выполнении условий мягкой посадки в момент времени T , но в противном случае является, вообще говоря, искажением этого выражения. Однако величина $T = T(\tau)$, определяемая из соответствующего условия $h(T) = 0$, достаточно информативна, так как в случае $v(T) \neq 0$ мягкой посадки в момент T не будет.

$h(T) = 0$, $v(T) \approx 2,5389 \cdot 10^{-9}$, $m(T) \approx 197,06$. Разумеется, погрешности численного решения управляемой системы могут привести к отклонениям от этих оптимальных значений как в ту, так и в другую сторону. В частности, в разделе 3 $m(T) \approx 197,68$, т.е. относительная погрешность составляет $0,62/197 \approx 0,003$. По графику также видно, что значения $v(T(\tau))$ в окрестности оптимальной точки переключения меняются очень быстро. Учитывая что при $\tau \in [35; 55]$ график почти прямолинеен, можно получить оценку коэффициента обусловленности $v(T(\tau))$, оценив угловой коэффициент: $k \approx 2000/20 = 100$. Но подчеркнем еще раз, что $v(T(\tau))$ это не есть скорость в момент посадки, поскольку $T(\tau)$ было получено из условия равенства нулю выражения для $h(T)$, в котором было принято $v(T) = 0$. Поэтому величина $v(T(\tau))$ является скоростью в момент посадки, только когда она равна нулю. Обусловленность скорости в момент посадки будет гораздо выше. Именно это и порождает высокую обусловленность функционалов \tilde{J}_i , $i = 1, 2$.

В дополнение к изложенному, ясно, что всегда существует погрешность математической модели как таковой. Поэтому с прикладной и численной точек зрения интересно было бы найти такой способ параметризации управления, который позволил бы сохранять гибкость системы вида (6) даже при малом количестве параметров, обеспечивая тем самым хорошее (приемлемое) приближение к точному решению по функционалу и в смысле выполнения ограничений, нечувствительное к погрешностям вычисления параметров параметризованного управления (т.е. слабо обусловленное погрешностями). В разделе 5 будут представлены некоторые способы параметризации управления, которые по итогам численных экспериментов демонстрируют указанные свойства.

Слово “гибкость” будем понимать в том смысле, что для произвольной точки α из множества решений \mathcal{S} системы ограничений $\tilde{J}_i(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) = 0$, $i = 1, 2$, в пространстве параметров \mathbb{R}^ν существует достаточное количество путей перемещения из этой точки, не выводящих из \mathcal{S} . А это позволяет осуществлять последовательное перемещение вдоль \mathcal{S} в сторону уменьшения значения минимизируемого функционала. В частности, если \mathcal{S} оказывается гладким многообразием размерности больше единицы, то рассматриваемую систему можно, видимо, считать достаточно гибкой.

5. Понижение обусловленности ограничений при численном решении задачи о посадке на Луну

Сравним следующие способы параметризации управления.

1. *Кусочно-постоянная параметризация на подвижной сетке.* Используем методику численного решения задач оптимального управления со свободным временем, описанную в [2]. Этот способ, вообще говоря, никак не использует информацию о структуре точного аналитического решения оптимизационной задачи. По крайней мере в том смысле, что количество узлов сетки берется существенно больше трех (как следовало бы брать в соответствии с указанной информацией). Отметим, что автор пытался брать и меньшее число узлов (ближе к трем), но это не давало достаточно хорошего результата — видимо, чувствительность численного решения управляемой

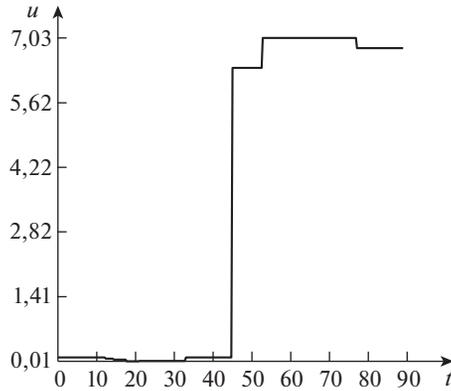


Рис. 2. Метод подвижных узлов.

системы к изменению параметров параметризованного управления оставалась все еще высокой. При увеличении количества узлов наблюдается снижение чувствительности вплоть до приемлемого уровня. Итак, будем использовать набор параметров, состоящий из двух поднаборов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^k$. Параметризацию управления будем производить по правилу:

$$u(t) = \frac{\sigma_*}{2}(1 + \sin \beta_i), \quad t \in [t_{i-1}; t_i), \quad t_0 = 0, \quad t_i = \sum_{j=1}^i \alpha_j^2, \quad i = \overline{1, k}, \quad T = t_k.$$

Для $k = 10$ были получены следующие результаты:

$$h(T) = -2,1136 \cdot 10^{-5}, \quad v(T) = -0,0001, \quad m(T) = 197,6182, \quad T = 88,9913$$

(см. рис. 2).

Таким образом, для успешного численного решения понадобилось использовать 20 параметров.

2. *Использование суперпозиции функций Гаусса.* Для того чтобы удовлетворить ограничению на значения управления, автор использовал параметризацию вида

$$u(t) = \sigma_* \exp\{-\Phi^2(t)\}, \quad \Phi = \Phi_\nu[\alpha, \beta, \gamma], \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^\nu.$$

В качестве базового набора параметров выступает

$$(T, \alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu.$$

В итоге при $\nu = 1$ было получено приближенное решение:

$$\begin{aligned} T &= 88,6066592856881950, & \alpha &= 12,9396289585961490, \\ \beta &= -5,5699194307950597, & \gamma &= 30,4427790686622010, \\ h(T) &= -7,4873 \cdot 10^{-12}, & v(T) &= -9,3436 \cdot 10^{-13}, & m(T) &= 197,6594 \end{aligned}$$

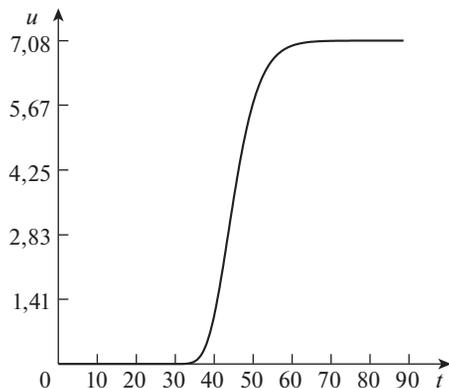


Рис. 3. Метод квадратичных экспонент.

При $\nu = 2$ и $\nu = 3$ результат получается примерно такой же.

В порядке исследования чувствительности рассмотрим таблицу. Здесь представлена зависимость выходных параметров от количества значащих цифр после запятой (запись $e-005$ означает умножение на 10^{-5}). Видим, что некоторая чувствительность выходных данных к точности задания управляемых параметров еще наблюдается, но она уже далеко не столь критична, как при аналитически оптимальном управлении. Из таблицы можно оценить коэффициенты обусловленности. Например, для высоты $k \approx 9 \cdot 10^3$, т.е. по сравнению с двухпараметрическим режимом управления, полученным из принципа максимума, обусловленность понижается примерно в $2 \cdot 10^7$ раз, а по сравнению с методом подвижных узлов при четырех параметрах в рамках решения задачи $\tilde{J}_i(\alpha_1, \dots, \alpha_4) = 0$, $i = 1, 2$, — примерно в 5–6 раз (см. раздел 3). Численные эксперименты позволяют сделать следующие выводы.

1. Подобно обычному методу параметризации управления, предлагаемый в статье подход достаточно прост и позволяет разделить исходную задачу на подзадачи (в частности, конечномерной оптимизации и решения управляемой задачи Коши), для каждой из которых можно использовать как собственные разработки, так и готовые программы, выбирая те, что наиболее эффективны или наиболее просты и доступны. При этом по сравнению с обычным методом параметризации предлагаемый подход позволяет без существенных потерь в смысле близости к оптимуму сокращать количество управляемых параметров в разы (в частности, для задачи о мягкой посадке на Луну — в пять раз (при $\nu = 1$) по сравнению с методом кусочно-постоянной аппрокси-

Анализ чувствительности

Знаков	$h(T)$	$v(T)$	$m(T)$
4	-0,093413	0,00065807	197,6593
8	-1,122e - 005	2,3315e - 008	197,6594
12	9,2098e - 010	1,423e - 011	197,6594
16	-7,4873e - 012	-9,3436e - 013	197,6594

мации в сочетании с методом подвижных узлов при количестве параметров, необходимом для обеспечения устойчивого численного решения).

2. Использование внешней параметризации (в частности, с помощью функции Гаусса) позволяет учитывать ограничения на значения управления, не требуя включения их в число ограничений аппроксимирующей задачи, и в сочетании с предлагаемым подходом оказывается работоспособным и эффективным.

3. Предлагаемый подход позволяет получать хорошее приближение (по крайней мере, по значению функционала) к решению оптимизационной задачи даже при достаточно малом количестве параметров аппроксимации.

4. Предлагаемый подход хорошо работает и в том случае, когда начальное управление находится достаточно далеко от оптимального, причем для решения аппроксимирующей задачи используется метод Хука–Дживса (нулевого порядка) в сочетании с методом штрафа в весьма простой и грубой форме, а для решения управляемой системы при текущем управлении — простейший метод Эйлера.

5. Значение целевого функционала и ограничения задачи оптимизации оказываются мало чувствительными к малым изменениям полученного в результате численного решения набора параметров аппроксимации.

6. Заключение

Поясним связь между установленной в начале статьи возможностью сколь угодно точной аппроксимации функций одного переменного на любом фиксированном отрезке функциями класса Ω и особенностями использования соответствующего способа аппроксимации управляющей функции при численном решении задач оптимального управления со свободным временем на примере задачи о мягкой посадке на Луну. На первый взгляд, может показаться, что возможность сколь угодно точной аппроксимации не требуется, поскольку чем ближе подходим к точному оптимальному управлению, тем труднее будет происходить процесс численного решения. При детальном же рассмотрении (см. разделы 3 и 4) оказалось, что причиной затруднений является жесткость системы ограничений, которая наблюдается именно при двух параметрах, а при увеличении их количества — снимается; в то же время увеличение количества параметров как раз и повышает точность аппроксимации. Вообще, какова бы ни была задача, всегда приходится стремиться прийти к некому балансу между следующими двумя требованиями, противоречащими друг другу. С одной стороны, размерность аппроксимирующей задачи математического программирования должна быть не слишком высокой, чтобы ее не слишком сложно было решать. С другой стороны, количество ν используемых параметров должно быть достаточным для того, чтобы система ограничений была достаточно гибкой в смысле ее разрешимости, и при этом наилучшее значение функционала на множестве аппроксимаций управления (за счет соответствующего расширения этого множества) не слишком сильно отличалось бы от его наилучшего значения на множестве допустимых управлений в исходной задаче. Использование функций Гаусса позволяет удачным образом достигать компромисса между этими двумя тре-

бованиями. С одной стороны, как уже было сказано в разделе 1, такой способ аппроксимации обеспечивает во многих случаях хорошую точность приближения при малом количестве параметров. С другой стороны, в силу того же обстоятельства наилучшее значение функционала в аппроксимирующей задаче не слишком сильно отличается от теоретически оптимального. При этом гибкость системы ограничений, в данном случае системы $\tilde{J}_i(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $i = 1, 2$, обеспечивается за счет следующих обстоятельств. Во-первых, множество решений указанной системы (учитывая, что количество параметров больше двух) оказывается гладким многообразием за счет гладкости левых частей при их независимости. Дело в том, что функционалы аппроксимирующей задачи при достаточной гладкости правой части системы и интегрантов функционалов оказываются тоже гладкими (технику доказательства этого факта можно вычленить из рассуждений [3, 4]) за счет того, что аппроксимации зависят бесконечно дифференцируемым образом от параметров. Во-вторых, возмущенная (за счет погрешностей) управляемая система, скорее всего, имеет (см. рис. 2) оптимальный режим $\tilde{u} \in L_\infty[0; T]$ не совсем такой формы графика, как следует из принципа максимума, но это не мешает тому, что найдется управление \hat{u} , представимое с помощью функций из Ω , аппроксимирующее \tilde{u} сколь угодно точно в норме $L_p[0; T]$, $p \in [1; \infty)$, а на участках непрерывности — в норме \mathbf{C} . А уже в рамках данного способа аппроксимации (при заданном количестве параметров) соответствующая конечномерная аппроксимирующая задача оказывается, как уже сказано, достаточно гладкой, вследствие чего сравнительно легко решается.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы основано на следующих леммах.

Лемма П.1. Для любых $[a; b] \subset \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, а также для $\beta \in \mathbb{R}$ и $\gamma > 0$ та-
ких, что

$$(П.1) \quad \{|\beta| + \max(|a|, |b|)\} / \gamma < \sqrt{\min(\varepsilon, 1)},$$

справедлива оценка: $\max_{x \in [a; b]} \left| \exp[-(x - \beta)^2 / \gamma^2] - 1 \right| < \varepsilon$.

Доказательство. Раскладывая в ряд Маклорена, получаем:

$$e^{-t^2} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Для каждого фиксированного $t \in [-1; 1]$ справа стоит знакопеременный ряд с модулем общего члена, строго убывающим до нуля, т.е. ряд типа Лейбница. Как известно, модуль суммы такого ряда (так же, как его остатка) оценивается модулем своего первого члена. Тогда $|e^{-t^2} - 1| \leq t^2$ при всех $t \in [-1; 1]$. Поэтому чтобы получить нужную оценку, достаточно, чтобы $\{(x - \beta)^2\} / \gamma^2 < \min(\varepsilon, 1)$. Выполнение этого неравенства обеспечивается условием (П.1). Лемма П.1 доказана.

Лемма П.2. Для любых $[a; b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, $C \neq 0$ и $\varepsilon > 0$ найдутся параметры $\alpha, \beta, d \in \mathbb{R}$ и $\gamma > 0$ такие, что

$$Cx = \alpha\varphi_{\beta,\gamma}(x) + d + \sigma(x),$$

где

$$\max_{x \in [a; b]} |\sigma(x)| < \varepsilon, \quad \varphi_{\beta,\gamma}(x) = \exp[-(x - \beta)^2/\gamma^2].$$

В качестве $\beta \neq 0$ и $\gamma > 0$ можно взять любые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$(П.2) \quad |\beta| > \frac{2|C| \max(|a|, |b|)(b - a)}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad \gamma > \frac{|\beta| + \max(|a|, |b|)}{\sqrt{\min(\varepsilon/[2|C|(b - a)], 1)}}.$$

Доказательство. Предварительно, считая параметры $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ и $\gamma > 0$ произвольными, положим $\alpha = C\gamma^2/(2\beta)$ и оценим разность

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= |\alpha\varphi'_{\beta,\gamma}(x) - C| = |\alpha| \left| -2 \exp[-(x - \beta)^2/\gamma^2](x - \beta)\gamma^{-2} - (C/\alpha) \right| \leq \\ &\leq |2\alpha| |x/\gamma^2| + |C| |\varphi_{\beta,\gamma}(x) - 1| = |C| (|x/\beta| + |\varphi_{\beta,\gamma}(x) - 1|). \end{aligned}$$

Обозначим $\varepsilon_1 = \varepsilon/(b - a)$ и выберем $\beta \neq 0$ из условия $|C| \max(|a|, |b|)/|\beta| < \varepsilon_1/2$. После этого выберем число $\gamma > 0$ из условия (П.1) при замене ε на $\varepsilon_1/(2|C|)$. Тогда получим $\sigma_1(x) < \varepsilon_1$ для всех $x \in [a; b]$. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^x \{\alpha\varphi_{\beta,\gamma}(t) - Ct\}' dt = \alpha\varphi_{\beta,\gamma}(x) + d - Cx \equiv -\sigma(x), \quad x \in [a; b],$$

где $d = Ca - \alpha\varphi_{\beta,\gamma}(a)$. Таким образом, получаем

$$|\sigma(x)| \leq \int_a^b \sigma_1(t) dt < \varepsilon_1 (b - a) = \varepsilon \quad \forall x \in [a; b].$$

Лемма П.2 доказана.

Доказательство теоремы. Рассмотрим на отрезке $[a; b]$, $a < b$, произвольный полином степени n :

$$\mathcal{P}_n(x) = K_0 + K_1x + \dots + K_nx^n.$$

Если $n = 0$, то достаточно просто сослаться на лемму П.1. Будем считать, что $n \geq 1$, $C_m = \sqrt[m]{|K_m|}$, $C = 1 + \max_{m=1, n} C_m$, $s_m = \text{sign } K_m$, $m = \overline{1, n}$. Тогда

$$\mathcal{P}_n(x) = K_0 + \sum_{m=1}^n s_m (C_m x)^m.$$

Зафиксируем произвольно число $\varepsilon_1 \in (0; 1)$ и найдем числа $\beta \neq 0$ и $\gamma > 0$ из условий (П.2) при замене ε на ε_1 . Согласно лемме П.2 найдутся числа d_m и $\alpha_m \in \mathbb{R}$, $m = \overline{1, n}$, такие, что

$$\mathcal{P}_n(x) = K_0 + \sum_{m=1}^n s_m (\alpha_m \varphi_{\beta, \gamma}(x) + d_m + \sigma_m(x))^m,$$

$$|\sigma_m(x)| < \varepsilon_1 \quad \forall x \in [a; b],$$

$m = \overline{1, n}$. Пользуясь формулой бинома Ньютона, получаем, что

$$(\alpha_m \varphi_{\beta, \gamma}(x) + d_m + \sigma_m(x))^m = (\alpha_m \varphi_{\beta, \gamma}(x) + d_m)^m + \delta_m(x),$$

$$\delta_m(x) = \sum_{k=1}^m C_m^k (\alpha_m \varphi_{\beta, \gamma}(x) + d_m)^{m-k} \sigma_m^k(x).$$

Заметим, что $|\sigma_m(x)| < \varepsilon_1 < 1$, и, таким образом,

$$|\delta_m(x)| \leq \varepsilon_1 \sum_{k=1}^m C_m^k |C_m x - \sigma_m(x)|^{m-k} \leq \varepsilon_1 \sum_{k=1}^m C_m^k (C|x| + 1)^{m-k} \leq$$

$$\leq \varepsilon_1 C^m \sum_{k=1}^m C_m^k (|x| + 1)^{m-k} \leq \varepsilon_1 C^m (|x| + 2)^m \leq \varepsilon_1 C^m (|x| + 2)^n.$$

Пользуясь теперь произволом в выборе ε_1 , потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\varepsilon_1 C^m (\max(|a|, |b|) + 2)^n < \varepsilon / (2n).$$

Тогда для величины $\delta(x) = \sum_{m=1}^n s_m \delta_m(x)$ получим: $|\delta(x)| < \varepsilon / 2$ для всех $x \in [a; b]$. При этом по построению

$$\mathcal{P}_n(x) = K_0 + \sum_{m=1}^n s_m (\alpha_m \varphi_{\beta, \gamma}(x) + d_m)^m + \delta(x), \quad x \in [a; b].$$

Опять же по формуле бинома Ньютона

$$(\alpha_m \varphi_{\beta, \gamma}(x) + d_m)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k \alpha_m^{m-k} d_m^k \varphi_{\beta, \gamma}^{m-k}(x).$$

Значит, каждое слагаемое не содержит, по сути, ничего, кроме степеней функции $\varphi_{\beta, \gamma}(x)$, максимально возможной из которых является n -я степень, домноженных на некоторые константы. Отсюда вытекает представление полинома в виде

$$\mathcal{P}_n(x) = K_0 + \sum_{j=0}^n f_j \varphi_{\beta, \gamma}^j(x) + \delta(x) =$$

$$= C_0 + \sum_{j=1}^n f_j \varphi_{\beta, \gamma}^j(x) + \delta(x), \quad C_0 = K_0 + f_0.$$

Заметим, что $\varphi_{\beta, \gamma}^j(x) = \varphi_{\beta, \gamma_j}(x)$, $\gamma_j = \gamma/\sqrt{j}$. Пользуясь, наконец, леммой П.1, получаем представление $\mathcal{P}_n(x) = \varphi_{\beta_0, \gamma_0}(x) + \sum_{j=1}^n f_j \varphi_{\beta, \gamma_j}(x) + \sigma(x)$ при некоторых $\beta_0 \in \mathbb{R}$, $\gamma_0 > 0$ и $|\sigma(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [a; b]$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чернов А.В.* Об использовании квадратичных экспонент с варьируемыми параметрами для аппроксимации функций одного переменного на конечном отрезке // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 2. С. 267–282.
2. *Чернов А.В.* О приближенном решении задач оптимального управления со свободным временем // Вестн. Нижегород. гос. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2012. № 6 (1). С. 107–114.
3. *Чернов А.В.* О гладких конечномерных аппроксимациях распределенных оптимизационных задач с помощью дискретизации управления // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 12. С. 2029–2043.
Chernov A. V. Smooth Finite-Dimensional Approximations of Distributed Optimization Problems via Control Discretization // Comput. Math. Math. Phys. 2013. V. 53. No. 12. P. 1839–1852.
4. *Чернов А.В.* О применимости техники параметризации управления к решению распределенных задач оптимизации // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2014. Т. 24. Вып. 1. С. 102–117.
5. *Чернов А.В.* О гладкости аппроксимированной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу на варьируемой области // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 305–321.
6. *Чернов А.В.* О кусочно постоянной аппроксимации в распределенных задачах оптимизации // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21. № 1. С. 264–279.
7. *Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А.* Теория всплесков. М.: Физматлит, 2006.
8. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen. Berlin: Akademie, 1974.
9. *Федоров В.М.* Курс функционального анализа. СПб.: Лань, 2005.
10. *Чернов А.В.* О применении квадратичных экспонент для дискретизации задач оптимального управления // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2017. Т. 27. Вып. 4. С. 558–575.
11. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ РХД, 2001.
Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Philadelphia: Society for Industrial and Appl. Math., 1992.
12. *Чернов А.В.* JPEG-подобный метод параметризации управления для численного решения распределенных задач оптимизации // АИТ. 2017. № 8. С. 145–163.
Chernov A. V. JPEG-Like Method of Control Parametrization for Numerical Solution of the Distributed Optimization Problems // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 8. P. 1474–1488.
13. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003.

14. *Чернов А.В.* О дифференцировании функционалов аппроксимирующих задач в рамках метода подвижных узлов при решении задач оптимального управления со свободным временем // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. 2018. Т. 23. № 124. С. 861–876.
15. *Петров Ю.П., Петров Л.Ю.* Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. СПб.: БХВ-Петербург, 2005.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.И. Васильевым.

Поступила в редакцию 28.08.2017

После доработки 07.12.2018

Принята к публикации 07.02.2019