

© 2019 г. А.В. ПЕСТЕРЕВ, д-р физ.-мат. наук (a.pesterev@javad.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ ЗАМКНУТОЙ ЛИНЕАРИЗУЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВЕКТОРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ¹

Рассматриваются представимые в каноническом (нормальном) виде нелинейные аффинные системы с ограниченным векторным управлением, замкнутые обратными связями специального вида, линеаризующими систему в окрестности начала координат. Ставится задача построения оценки области притяжения положения равновесия замкнутой нелинейной системы. Предложен метод нахождения оценки области притяжения, основанный на результатах теории абсолютной устойчивости. Оценка области притяжения ищется в виде декартового произведения положительных инвариантных множеств составляющих систему подсистем. В случае эллипсоидальных инвариантных множеств построение оценки области притяжения сведено к решению систем линейных матричных неравенств. Изложение иллюстрируется численными примерами.

Ключевые слова: нелинейные аффинные системы с ограниченным векторным управлением, линеаризация с помощью обратной связи, область притяжения, теория абсолютной устойчивости, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.1134/S0005231019050040

1. Введение

Ограниченность ресурсов управления в реальных системах автоматического регулирования приводит к тому, что орган управления выходит на насыщение, когда сигнал обратной связи превышает некоторое предельное значение. Функционирование системы, спроектированной без учета этого обстоятельства, в режиме насыщения может приводить к существенному снижению эффективности регулирования и часто к потере устойчивости. Таким образом, требуется, с одной стороны, проектировать контроллер с учетом возможного выхода органа управления на насыщение и, с другой стороны, иметь оценку области притяжения рассматриваемой нелинейной системы управления с насыщением для гарантированного вывода ее на желаемый режим работы.

Преодолению негативных эффектов, вызванных насыщением в органах управления, посвящены многочисленные публикации (см., например, [1–6])

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00531а) и Президиума РАН (Программа № 29 “Актуальные проблемы робототехнических систем”).

и приведенные там ссылки). В подавляющем большинстве публикаций рассматриваются линейные системы, для которых ставится либо задача синтеза контроллера, учитывающего возможность насыщения в органах управления, либо задача разработки отдельного компонента контроллера, который активизируется только при выходе на насыщение, в дополнение к линейному контроллеру, спроектированному без учета ограничений. Учет ограниченности управления в нелинейных системах представляет собой значительно более сложную задачу, и число публикаций на эту тему не так велико. В большей части их делается попытка адаптировать методы, разработанные для линейных систем, на нелинейный случай. В ряде публикаций для разработки специальных контроллеров используются методы адаптивного управления и нейронных сетей, а также методы, основанные на линеаризации с помощью обратной связи (например, [7, 8]).

В статье рассматриваются представимые в нормальном (каноническом) виде [9, 10] n -мерные аффинные системы управления с m ограниченными по величине входами. Для стабилизации систем используются линеаризующие обратные связи [10]. Ограничения на управления реализуются применением к соответствующим сигналам обратной связи функций насыщения (сатураторов). Из-за ограниченности ресурса управления полученная замкнутая система линейна только в некоторой окрестности положения равновесия и нелинейна во всей области определения. Для замкнутой нелинейной системы ставится задача нахождения оценки области притяжения (ОП) нулевого решения. Задача разработки контроллера, учитывающего ограничения, не ставится, так что коэффициенты обратной системы предполагаются заранее известными.

Предлагаемый в настоящей статье подход к построению оценок ОП основан на результатах теории абсолютной устойчивости и является обобщением на случай векторного управления разработанного в [11] метода нахождения эллипсоидальных оценок ОП аффинных систем с ограниченным скалярным управлением. В свою очередь, указанный метод опирается на результаты работ [5, 12], в которых теория абсолютной устойчивости применялась для нахождения оценок ОП для некоторых аффинных систем малой размерности (см. также обсуждение в [11]). Например, в [12] строилась эллипсоидальная оценка ОП для нелинейной системы второго порядка, возникающей в задаче стабилизации колесного робота вдоль прямого или кругового целевого пути. Модификации предложенного в [12] подхода применительно к различным моделям колесных роботов, описываемых аффинными системами 2-го и 3-го порядков, и произвольным допустимым целевым путям рассматривались в [13–15].

2. Постановка задачи

Рассмотрим многомерную аффинную систему управления с векторным входом, представленную в виде совокупности m связанных подсистем вида

$$(1) \quad \dot{x}_1^i = x_2^i, \dots, \dot{x}_{r_i-1}^i = x_{r_i}^i, \dot{x}_{r_i}^i = f_i(x) + g_i(x)u_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Здесь x — n -мерный вектор состояний, $x \equiv (x^1, \dots, x^m) \in D_x \subseteq \mathbb{R}^n$, $x^i \in \mathbb{R}^{r_i}$, $f_i(x)$ и $g_i(x) \neq 0$ — непрерывные функции,

$$(2) \quad r_1 + \dots + r_m = n,$$

u_i — непрерывные управления, удовлетворяющие двусторонним ограничениям

$$(3) \quad -\bar{u}_i \leq u_i \leq \bar{u}_i.$$

Система (1) называется каноническим представлением [9] или нормальной формой [10] аффинной системы управления с m -мерными входом и выходом². К виду (1) приводятся аффинные системы управления с векторной относительной степенью выхода $\{r_1, \dots, r_m\}$, удовлетворяющей условию (2) [10]. Легко видеть, что если ресурс управления не ограничен, то система линеаризуется с помощью обратной связи

$$(4) \quad u_i(x) = -(\sigma_i(x) + f_i(x))/g_i(x),$$

где $\sigma_i(x) \equiv \sigma_i(x^i) = c_i^T x^i$, $c_i^T = [c_{i1}, \dots, c_{ir_i}]$, $c_{ij} > 0$. При этом замкнутая система распадается на m независимых подсистем $\dot{x}_1^i = x_2^i, \dots, \dot{x}_{r_i-1}^i = x_{r_i}^i$, $\dot{x}_{r_i}^i = -\sigma_i(x^i)$, или в матричном виде $\dot{x}^i = A_i x^i$, $i = 1, \dots, m$, где

$$(5) \quad A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -c_{i1} & -c_{i2} & -c_{i3} & \dots & -c_{ir_i} \end{bmatrix}.$$

Решение $x = 0$ системы (1) с обратной связью (4) глобально асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда матрицы A_i всех подсистем гурвицевы. Всюду далее будем полагать, что это условие выполнено.

Ограниченность ресурсов управления делает невозможной линеаризацию системы (1) с помощью обратной связи (4) во всей области определения системы. Определим в этом случае управления формулой

$$(6) \quad u_i(x) = -\text{sat}_{\bar{u}_i}[(\sigma_i(x) + f_i(x))/g_i(x)],$$

получающейся применением функции насыщения к правой части формулы (4), определяющей линеаризующую обратную связь.

Замыкание системы (1) обратной связью (6) дает систему m нелинейных подсистем вида

$$(7) \quad \dot{x}_1^i = x_2^i, \dots, \dot{x}_{r_i-1}^i = x_{r_i}^i, \dot{x}_{r_i}^i = -\Phi_i(\sigma_i, x), \quad i = 1, \dots, m,$$

² В общем случае нормальной формы правая часть i -й подсистемы может зависеть от всех управлений [10]. Вводя новые управления, всегда можно записать нормальную форму системы в виде (1). Если управления не ограничены, то оба представления, очевидно, эквивалентны. Однако в случае ограниченного ресурса управления новые управления удовлетворяют более сложным ограничениям, не рассматриваемым в настоящей статье, так что исследуемая система (1) является частным случаем общей нормальной формы.

связанных друг с другом через правые части $\Phi_i(\sigma_i, x)$, которые при выходе управлений на ограничения в общем случае зависят от всех компонент вектора x :

$$(8) \quad \Phi_i(\sigma_i, x) = -f_i(x) + |g_i(x)|\bar{u}_i \operatorname{sign}(\sigma_i(x^i) + f_i(x)).$$

В некоторой же окрестности начала координат, где управление не выходит на насыщение, $\Phi_i(\sigma, x) = \sigma_i(x^i)$ и подсистемы линейны и независимы. Включение σ_i в число аргументов функций Φ_i подчеркивает, что правая часть системы зависит не только от текущих значений переменных состояния, но и от значения линейной функции $\sigma_i(x^i)$.

Ставится задача нахождения оценки области притяжения нулевого решения системы (7). Для того чтобы $x = 0$ было устойчивым положением равновесия системы (7), необходимо выполнение условий

$$(9) \quad \left| \frac{f_i(0)}{g_i(0)} \right| < \bar{u}_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Заметим, что если $x = 0$ – положение равновесия разомкнутой системы, т.е. $f_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, m$, то условия (9) заведомо выполняются.

Всюду далее будем полагать, что область определения системы (1) в общем случае не совпадает со всем пространством, $D_x \subseteq \mathbb{R}^n$, и что ее правая часть удовлетворяет условиям (9).

3. Система сравнения

Наряду с системой (7) рассмотрим m линейных нестационарных систем

$$(10) \quad \dot{x}_1^i = x_2^i, \dots, \dot{x}_{r_i-1}^i = x_{r_i}^i, \dot{x}_{r_i}^i = -\beta_i(t)\sigma_i(x^i), \quad i = 1, \dots, m,$$

где

$$(11) \quad 0 < \beta_{i0} < \beta_i(t) \leq 1,$$

и будем называть систему (10) *системой сравнения* для нелинейной системы (7).

Пусть подсистемы системы сравнения абсолютно устойчивы в секторах $(\beta_{i0}, 1]$, $i = 1, \dots, m$, соответственно. Напомним, что линейная нестационарная система называется абсолютно устойчивой в секторе (угле) $(\beta_{i0}, 1]$, если ее нулевое решение асимптотически устойчиво при любых измеримых функциях $\beta_i(t)$, удовлетворяющих неравенствам (11) [16, 17].

Если бы правая часть i -й подсистемы в (7) при любых $x \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяла “секторному” условию

$$(12) \quad 0 < \beta_{i0}\sigma_i^2 < \Phi_i(\sigma_i, x)\sigma_i \leq \sigma_i^2,$$

то $x^i = 0$ было бы асимптотически устойчивым решением этой подсистемы в целом (из абсолютной устойчивости линейной нестационарной системы в

угле $(\beta_{i0}, 1]$ следует абсолютная устойчивость соответствующей нелинейной подсистемы в (7) в угле $(\beta_{i0}, 1]$ [17]. Соответственно выполнение условий (12) при всех $i = 1, \dots, m$ означало бы абсолютную устойчивость состоящей из m подсистем n -мерной нелинейной системы (7).

Для одномерных подсистем ($r_i = 1$) в (7) нулевое решение соответствующей (скалярной) системы сравнения асимптотически устойчиво при любых $\beta_i(t) > 0$, т.е. $\beta_{i0} = 0$, и секторное условие (12) принимает вид $\Phi_i(x^i, x)x^i > 0$.

Условия (12), однако, в общем случае не выполняется во всем координатном пространстве \mathbb{R}^n (не говоря уже о том, что система (1) определена не во всем координатном пространстве). Однако и в этом случае исследование устойчивости нулевого решения нелинейной системы (7) можно свести к исследованию абсолютной устойчивости линейных нестационарных систем (10), если потребовать выполнение секторных условий (12) не во всем координатном пространстве, а только в *положительной инвариантной области* (далее просто *инвариантной области*) n -мерной системы (7) [11], т.е. в таком множестве в \mathbb{R}^n , которое вместе с любой принадлежащей ей точкой содержит всю полутраекторию системы (7), начинающуюся в этой точке [4]. Возникает вопрос: “Как найти инвариантную область системы (7)?”

4. Инвариантная область нелинейной системы

В [11] доказано, что в случае скалярного управления ($m = 1$) в качестве инвариантной области исходной нелинейной системы можно взять инвариантную область абсолютно устойчивой системы сравнения, если правая часть нелинейного уравнения удовлетворяет секторному условию в этой области. Покажем, что указанный результат может быть обобщен на случай многомерного управления. А именно будем искать инвариантную область нелинейной системы в виде декартова произведения инвариантных областей систем сравнения $\Upsilon = \Upsilon_1 \times \dots \times \Upsilon_m$, где Υ_i – (положительная) инвариантная область i -й системы сравнения (10), и докажем (теорема 1), что для того чтобы Υ было инвариантной областью, достаточно чтобы правые части системы удовлетворяли секторным условиям в Υ . Прежде чем доказать это, найдем необходимые условия выполнения секторных условий в заданной области Υ .

Областью насыщения $N_i \subset \Upsilon$ i -й нелинейной подсистемы (7) будем называть множество точек $x \in \Upsilon$, в которых управление (6) принимает предельные значения $\pm \bar{u}_i$. Выполнение i -го секторного условия достаточно проверять только в области N_i , так как в области линейности подсистемы секторное условие тривиально выполняется: $\Phi_i(\sigma_i, x)\sigma_i = \sigma_i^2$.

Лемма 1. Пусть в области $\Upsilon \subseteq D_x$ выполняется i -е секторные условия (12). Тогда: а) множество N_i не имеет пересечений с гиперплоскостью $\sigma_i(x) = 0$ и б) знак i -го насыщенного управления в области Υ определяется только знаками функций $g_i(x)$ и $\sigma_i(x)$

$$(13) \quad u_i(x) = -\bar{u}_i \operatorname{sign}(g_i(x)\sigma_i(x)) \quad \forall x \in N_i.$$

Доказательство леммы 1. Докажем утверждение а). Предположим противное: найдется точка $x_* \in \Upsilon$, в которой i -е управление достигает насы-

щения, и при этом $\sigma_i(x_*) = 0$. Пусть для определенности $u_i(x_*) = +\bar{u}_i$. В силу (6) при этом должно выполняться неравенство $\sigma_i(x_*) + f_i(x_*) < -g_i(x_*)\bar{u}_i$. Отсюда с учетом определения функций Φ_i имеем

$$\Phi_i(\sigma_i(x_*), x_*) = -f_i(x_*) - g_i(x_*)\bar{u}_i > \sigma_i(x_*) = 0.$$

В силу непрерывности функции $\Phi_i(\sigma_i, x)$ по x найдется окрестность точки x_* , в которой $\Phi_i(\sigma_i(x), x) > 0$. С другой стороны, линейная функция $\sigma_i(x)$ в окрестности x_* может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Во втором случае секторное условие (12), очевидно, не выполняется. Аналогично доказывается, что секторное условие не выполняется, если $u_i(x^*) = -\bar{u}_i$.

б) Из сравнения (6) и (13) видно, что условие (13) эквивалентно условию

$$(14) \quad \text{sign}(\sigma_i(x) + f_i(x)) = \text{sign}(\sigma_i(x)) \quad \forall x \in N_i.$$

Докажем это утверждение. Так как $g_i(x) \neq 0$ в D_x , $g_i(x)$ — знакоопределенная функция. Пусть для определенности $g_i(x) > 0$. Предположим, что найдется точка $x_* \in N_i$ такая, что $\sigma_i(x_*) > 0$ и $\sigma_i(x_*) + f_i(x_*) < 0$. Тогда в силу (8) $\Phi_i(\sigma_i, x_*) = -f_i(x_*) - g_i(x_*)\bar{u}_i$. В силу (6) $u_i(x_*) = \bar{u}_i$ и $f_i(x_*) + \sigma_i(x_*) < -g_i(x_*)\bar{u}_i$, или $-g_i(x_*)\bar{u}_i - f_i(x_*) > \sigma_i > 0$, т.е. $\Phi_i(\sigma_i, x_*)\sigma_i > \sigma_i^2 > 0$, что противоречит предположению о том, в Ω выполнены секторные условия (12). Аналогично доказывается, что не найдется точки, в которой $\sigma_i(x) < 0$ и $\sigma_i(x) + f_i(x) > 0$. Случай отрицательного $g_i(x)$ рассматривается аналогично. Лемма 1 доказана.

Утверждения леммы 1 означают, что при выполнении i -го секторного условия в Υ i -я подсистема (7) линейна на пересечении Υ и гиперплоскости $\sigma_i(x) = 0$, а область N_i состоит из двух несвязных компонент, лежащих по разные стороны от гиперплоскости, знак управления в которых (с учетом знакопостоянства функции $g_i(x)$) определяется только знаком линейной функции $\sigma_i(x)$. Формула (8) для правых частей системы (7) в области, удовлетворяющей секторному условию, принимает более простой вид

$$(15) \quad \Phi_i(\sigma_i, x) = -f_i(x) + |g_i(x)|\bar{u}_i \text{sign}(\sigma_i).$$

Теорема 1. Пусть система сравнения (10) абсолютно устойчива при любых измеримых функциях $\beta_i(t)$, удовлетворяющих неравенствам (11). Пусть $\Upsilon_i \subseteq \mathbb{R}^{r_i}$ — инвариантные области подсистем такие, что $\Upsilon = \Upsilon_1 \times \dots \times \Upsilon_m \subseteq D_x$. Если правые части нелинейной системы (7) удовлетворяют секторным условиям (12) в области Υ , то Υ — инвариантная область системы (7).

Доказательство теоремы 1. Предположим, что утверждение теоремы неверно: область Υ удовлетворяет условиям теоремы 1 и не является инвариантной для системы (7). Тогда найдется точка $x_0 \in \Upsilon$ такая, что решение $x(t)$ системы (7), соответствующее начальному условию $x(t_0) = x_0$, выходит за пределы области Υ , т.е. найдется $t_* > t_0$ такое, что $x_* \equiv x(t_*) \notin \Upsilon$. Последнее означает, что для некоторого l l -я компонента вектора x_* не принадлежит l -му инвариантному множеству, $x_*^l \notin \Upsilon_l$. Рассмотрим участок

траектории между точками x_0 и x_* . Обозначим через $\tilde{\sigma}_l(t)$ и $\tilde{\Phi}_l(t)$ определенные на $[t_0, t_*]$ функции, получающиеся подстановкой $x^l(t)$ и $x(t)$ вместо x^l и x в $\sigma_l(x^l)$ и в правую часть l -й подсистемы (7) соответственно: $\tilde{\sigma}_l(t) = \sigma_l(x^l(t))$, $\tilde{\Phi}_l(t) = \Phi(\tilde{\sigma}(t), x(t))$. Определим функцию $\tilde{\beta}_l(t)$ на отрезке $[t_0, t_*]$ как $\tilde{\beta}_l(t) = \tilde{\Phi}_l(t)/\tilde{\sigma}_l(t)$. Так как в силу леммы 1 на участках насыщения $\tilde{\sigma}_l(t) \neq 0$, а в области линейности, очевидно, $\tilde{\beta}_l(t) = 1$, функция $\tilde{\beta}_l(t)$ удовлетворяет условию существования непрерывного решения системы (10) и $x_l(t)$ является решением этой системы при $\beta_l(t) = \tilde{\beta}_l(t)$. Так как функция Φ_l по условию утверждения удовлетворяет секторному ограничению (12), то функция $\tilde{\Phi}_l(t)$ удовлетворяет неравенствам $\beta_0 \tilde{\sigma}_l^2(t) \leq \tilde{\Phi}_l(t) \tilde{\sigma}_l(t) \leq \tilde{\sigma}_l^2(t)$, откуда следует, что функция $\tilde{\beta}_l(t)$ удовлетворяет условию (11). Так как Υ_l — инвариантная область системы (10) при любых $\beta_l(t)$, удовлетворяющих неравенствам (11) и $x_0^l \in \Upsilon_l$, то траектория $x^l(t)$ должна целиком лежать в Υ_l и $x_*^l \in \Upsilon_l$, что противоречит полученному выше условию $x_*^l \notin \Upsilon_l$. Теорема 1 доказана.

Установим теперь достаточные условия выполнения секторных неравенств в произвольном множестве $\Upsilon \in \mathbb{R}^n$. Введем обозначения $\Sigma_i(\sigma_0) = \{x^i \in \mathbb{R}^{r_i} : |\sigma_i(x^i)| < \sigma_0\}$ и $\tilde{\Sigma}_i(\sigma_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |\sigma_i(x)| < \sigma_0\}$ (расширение $\Sigma_i(\sigma_0)$ на все пространство \mathbb{R}^n).

Лемма 2. Пусть а) $\forall x \in \Upsilon$

$$(16) \quad U_i(x) \geq U_{i0} > 0,$$

где

$$(17) \quad U_i(x) = |g_i(x)|\bar{u}_i - |f_i(x)|,$$

и б) $\Upsilon \subseteq \tilde{\Sigma}_i(U_{i0}/\beta_{i0})$. Тогда в области Υ выполнено i -е секторное условие (12).

Доказательство леммы 2. Легко проверить, что из определений насыщенного управления (6) и функций $\Phi_i(\sigma_i, x)$ следует, что если $g_i(x) > 0$ и $u_i = -\bar{u}_i$ или $g_i(x) < 0$ и $u_i = \bar{u}_i$, то $\sigma_i + f_i(x) > |g_i(x)|\bar{u}_i$ и $\Phi_i(\sigma_i, x) = -f_i(x) + |g_i(x)|\bar{u}_i$, т.е. $\Phi_i(\sigma_i, x) < \sigma_i$. С другой стороны, в силу условий леммы 2 имеем $\Phi_i(\sigma_i, x) = -f_i(x) + |g_i(x)|\bar{u}_i \geq |g_i(x)|\bar{u}_i - |f_i(x)| \geq U_{i0} > 0$. Откуда следует, что $\sigma_i > 0$ и $\Phi_i \sigma_i \geq U_{i0} \sigma_i$. Аналогично при $g_i(x) > 0$ и $u_i = \bar{u}_i$ или при $g_i(x) < 0$ и $u_i = -\bar{u}_i$, $\sigma_i + f_i(x) < -|g_i(x)|\bar{u}_i$ и $\Phi_i(\sigma_i, x) = -f_i(x) - |g_i(x)|\bar{u}_i$, т.е. $\Phi_i(\sigma_i, x) > \sigma_i$. В силу условия леммы 2 $\Phi_i(\sigma_i, x) = -f_i(x) - |g_i(x)|\bar{u}_i \leq -(|g_i(x)|\bar{u}_i - |f_i(x)|) \leq -U_{i0} < 0$. Отсюда $\sigma_i < 0$ и $\Phi_i \sigma_i \geq U_{i0} |\sigma_i|$. Из полученных неравенств следует выполнение правого неравенства (12) и строгая положительность $\Phi_i \sigma_i$ в N_i (функции Φ_i и σ_i имеют одинаковые знаки в Υ).

Далее, для любых $x \in \Upsilon$, для которых i -е управление достигает насыщения, справедлива цепочка неравенств

$$(18) \quad \Phi_i \sigma_i \geq U_{i0} |\sigma_i| \geq \frac{U_{i0} \sigma_i^2}{|\sigma_i|} > \frac{U_{i0}}{\sigma_{i0}} \sigma_i^2,$$

где σ_{i0} — максимум функции $|\sigma_i(x^i)|$ в Υ . В силу условия б) леммы 2 и по определению множества $\tilde{\Sigma}_i(\sigma_0)$, $\sigma_{i0} \leq U_{i0}/\beta_{i0}$ и, таким образом, $\Phi_i \sigma_i > \beta_{i0} \sigma_i^2$. Лемма 2 доказана.

Из теоремы 1 и леммы 2 очевидным образом следуют достаточные условия инвариантности декартового произведения инвариантных множеств систем сравнения.

Теорема 2. Пусть в области $\Upsilon = \Upsilon_1 \times \dots \times \Upsilon_m \subseteq D_x$, где Υ_i – инвариантная область i -й системы сравнения (10), для любого i : а) выполнены условия (16) и б) $\Upsilon_i \subset \Sigma_i(U_{i0}/\beta_{i0})$. Тогда Υ – инвариантная область нелинейной системы (7).

Таким образом, построение оценки области притяжения нелинейной системы (7) сводится, по существу, к: а) определению секторов $(\beta_{i0}, 1]$, $i = 1, \dots, m$, в которых абсолютно устойчивы подсистемы системы сравнения (10); б) нахождению семейств инвариантных множеств подсистем системы сравнения; в) выбору (возможно с применением некоторого критерия оптимальности) из этих семейств таких множеств Υ_i , для которых выполняются условия (16) и $\Upsilon_i \subset \Sigma_i(U_{i0}/\beta_{i0})$.

Первая задача является стандартной задачей теории абсолютной устойчивости и в статье не рассматривается. Для решения второй задачи достаточно найти функции Ляпунова подсистем системы сравнения (10), (11). Решение третьей задачи, как будет видно из дальнейшего, может быть сведено к вписыванию инвариантных множеств в некоторые области в \mathbb{R}^{r_i} . В настоящей статье ограничимся квадратичными функциями Ляпунова $\mathcal{L}_i(x^i) = (x^i)^T P_i x^i$, где P_i – положительно определенная матрица порядка r_i , т.е. будем искать оценку ОП нелинейной системы (7) в виде декартова произведения

$$(19) \quad \Omega = \Omega_1(P_1) \times \dots \times \Omega_m(P_m)$$

инвариантных эллипсоидов [18, 19] подсистем системы сравнения (10), (11)

$$(20) \quad \Omega_i(P_i) = \{x^i : (x^i)^T P_i x^i \leq 1\}.$$

5. Построение оценок областей притяжения в виде декартова произведения инвариантных эллипсоидов систем сравнения

5.1. Инвариантные эллипсоиды систем сравнения

Перепишем i -е уравнение в (10) при $r_i > 1$ в эквивалентном матричном виде

$$(21) \quad \dot{x}^i = A_{\beta_i}(t)x^i,$$

где

$$(22) \quad A_{\beta_i}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\beta_i(t)c_{i1} & -\beta_i(t)c_{i2} & -\beta_i(t)c_{i3} & \dots & -\beta_i(t)c_{ir_i} \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $A_{\beta_{i0}}$ постоянную матрицу, получающуюся из (22) подстановкой $\beta_i(t) \equiv \beta_{i0}$. При $\beta_i(t) \equiv 1$ имеем матрицу A_i , определенную формулой (5).

Известно [20], что для того чтобы система (21) была абсолютно устойчива в секторе $[\beta_{i0}, 1]$, достаточно, чтобы существовала общая квадратичная функция Ляпунова у линейных систем $\dot{x}^i = A_i x^i$ и $\dot{x}^i = A_{\beta_{i0}} x^i$.

В свою очередь, чтобы у этих систем существовала общая квадратичная функция Ляпунова $\mathcal{L}_i = (x^i)^T P_i x^i$, необходимо и достаточно [18, 20], чтобы имела решение система линейных матричных неравенств (л.м.н.)

$$(23) \quad P_i A_i + A_i^T P_i < 0, \quad P_i A_{\beta_{i0}} + A_{\beta_{i0}}^T P_i < 0.$$

Следовательно, чтобы линейная нестационарная система (21) была абсолютно устойчива в секторе $[\beta_{i0}, 1]$, достаточно, чтобы существовала положительно определенная матрица P_i , удовлетворяющая неравенствам (23). Эллипсоид (20), матрица которого удовлетворяет л.м.н. (23), будем называть *инвариантным эллипсоидом i -й подсистемы системы сравнения* или просто *инвариантным эллипсоидом*. Искомые матрицы P_i находятся независимо для каждой из подсистем системы сравнения.

При $r_i = 1$ i -я (одномерная) подсистема системы сравнения абсолютно устойчива при любых положительных $\beta_i(t) > 0$ и ее инвариантным множеством будет любой содержащий нулевую точку отрезок оси x^i , при этом инвариантный эллипсоид вырождается в симметричный относительно нулевой точки отрезок ($P_i > 0$ – скаляр).

В соответствии с теоремой 1 декартово произведение эллипсоидов (19), матрицы которых являются решениями л.м.н. (23), будет инвариантным множеством замкнутой системы (7), если в области Ω выполняются секторные неравенства (12).

5.2. Обеспечение выполнения секторных условий

Согласно теореме 2 для выполнения секторных условий (12) в Ω достаточно, чтобы $\forall i$ выполнялись условия а) $U_i(x) \geq U_{i0} > 0 \quad \forall x \in \Omega$ и б) $\Omega_i \subset \Sigma_i(U_{i0}/\beta_{i0})$.

Обеспечить выполнение первого условия можно следующим образом. Будем искать эллипсоиды Ω_i в некоторых, более простых, областях $\Pi_i \subseteq \mathbb{R}^{r_i}$, таких что $\Pi \equiv \Pi_1 \times \dots \times \Pi_m \subseteq D_x$ и при любых $x \in \Pi$ выполняются условия $U_i(x) > 0$, $i = 1, \dots, m$. Условия (16) в этом случае будут естественным образом выполнены и на декартовом произведении эллипсоидов Ω_i , если в качестве U_{i0} взять нижнюю грань функции $U_i(x)$ на множестве Π . Такие области заведомо существуют в силу условий (9) и непрерывности функций $f_i(x)$ и $g_i(x)$. При этом возникает задача вписывания эллипсоида в заданную область Π_i , которая решается наиболее просто, когда эта область выпукла, а ее граница образована поверхностями первого и/или второго порядков. Принадлежность эллипсоида $\Omega_i(P_i)$ такой области может быть записана в виде системы л.м.н. [11]

$$(24) \quad l_j^i(P_i) \leq 0, \quad j = 1, \dots, s_i,$$

где $l_j^i(P_i)$ – линейная форма от матрицы P_i . Область Π_i , условия принадлежности к которой эллипсоида $\Omega_i(P_i)$ могут быть записаны в виде системы л.м.н. (24), будем называть *областью с простой границей* (всюду далее обозначение Π_i используется только для областей с простой границей). Области Π_i могут быть выбраны, вообще говоря, не единственным образом. Конкретный вид области Π_i выбирается с учетом специфики рассматриваемой задачи и зависит от вида функций в правой части системы (1).

Чтобы на построенном множестве Ω выполнялись секторные ограничения, остается ограничить диапазоны изменения функций σ_i , что достигается вписыванием i -го эллипсоида в слой $|\sigma_i| \leq \sigma_0$, $\sigma_0 = U_{i0}/\beta_{i0}$. Покажем, что для этого достаточно, чтобы матрица P_i удовлетворяла одному дополнительному л.м.н.

Лемма 3. Эллипсоид $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^r$ целиком лежит в области $\Sigma_i(\sigma_0)$, $\sigma_0 > 0$, тогда и только тогда, когда матрица P_i эллипсоида удовлетворяет л.м.н.

$$(25) \quad P_i \geq \frac{c_i c_i^T}{\sigma_0^2}.$$

Доказательство леммы 3. Пусть выполнено неравенство (25). Умножая обе части неравенства слева на $c_i^T P_i^{-1}$ и справа на $P_i^{-1} c_i$, получаем

$$c_i^T P_i^{-1} c_i \geq \frac{(c_i^T P_i^{-1} c_i)(c_i^T P_i^{-1} c_i)}{\sigma_0^2},$$

откуда $c_i^T P_i^{-1} c_i \leq \sigma_0^2$. С учетом формулы $\max_{x^i \in \Omega_i} \sigma_i(x^i) = \sqrt{c_i^T P_i^{-1} c_i}$ [12], из последнего неравенства следует неравенство $\sigma_i^2(x^i) \leq \sigma_0^2 \forall x^i \in \Omega_i$, т.е. $\Omega_i \subset \Sigma_i(\sigma_0)$.

Обратно. Предположим, что $\Omega_i \subset \Sigma_i(\sigma_0)$ и при этом условие (25) не выполняется. Тогда найдется вектор y такой, что

$$y^T P_i y < \frac{y^T c c^T y}{\sigma_0^2} = \frac{\sigma^2(y)}{\sigma_0^2}.$$

Выберем длину y так, чтобы конец вектора y принадлежал поверхности эллипсоида, т.е. $y^T P_i y = 1$. Тогда из предыдущего неравенства следует, что $\sigma^2(y) > \sigma_0^2$, а это противоречит предположению о том, что $\Omega_i \subset \Sigma_i(\sigma_0)$. Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 следует, что условие $\Omega_i \subset \Sigma_i(U_{i0}/\beta_{i0})$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$(26) \quad P_i \geq c_i c_i^T \frac{\beta_{i0}^2}{U_{i0}^2}.$$

5.3. Алгоритм построения оценки области притяжения

Из изложенного следует, что задача построения оценки области притяжения, по существу, решается в два этапа. На первом этапе строится принадлежащая области определения системы подобласть $\Pi \subseteq D_x \subseteq \mathbb{R}^n$ вида $\Pi = \Pi_1 \times \dots$

$\dots \times \Pi_m$, где $\Pi_i \subseteq \mathbb{R}^{r_i}$ – области с простой границей, в которых выполняются условия (16). Если $D_x = \mathbb{R}^n$ и $\forall i U_{i0} = \inf_{x \in D_x} U_i(x) > 0$, то можно положить $\Pi_i = \mathbb{R}^{r_i}$ и $\Pi = \mathbb{R}^n$. Как только указанные области Π_i построены, задача распадается на m независимых задач нахождения вписанных в области Π_i эллипсоидальных оценок областей притяжения составляющих систему (7) подсистем со скалярным управлением, т.е. к задаче, рассмотренной в [11].

Напомним, как находится оценка области притяжения системы со скалярным управлением, когда известна аппроксимация области определения системы областью с простой границей (в данном случае это – области Π_i , $i = 1, \dots, m$). Выбирается некоторое значение $\beta_{i0} \in (\beta_{i0}^*, 1]$, где $(\beta_{i0}^*, 1]$ – наибольший сектор, в котором система (10), во-первых, абсолютно устойчива и, во-вторых, имеет квадратичную функцию Ляпунова, производная которой в силу системы отрицательна при любых $\beta_i(t)$, принадлежащих сектору. Для малых размерностей r_i и/или при специальном выборе коэффициентов обратной связи величина β_{i0}^* может быть найдена аналитически. Так, например, для $r_i = 1$ система сравнения, очевидно, абсолютно устойчива при любых положительных функциях $\beta_i(t)$, т.е. $\beta_{i0}^* = 0$. При $r_i > 1$ если матрица A_i имеет одно кратное собственное значение $\lambda < 0$, то величина β_{i0}^* не зависит от λ [21] и, в частности, для $r_i = 2$ $\beta_{i0}^* = 1/9$ [22]. Численное нахождение оценки границы сектора устойчивости в общем случае произвольного распределения собственных значений гурвицевой матрицы A_i не представляет трудностей. Для этого достаточно решить систему (23) для нескольких значений β_{i0} и выбрать в качестве оценки наименьшего значения β_{i0}^* минимальное из этих значений, при котором система имела решения [11]. Далее, решается система л.м.н. (23), (24), (26) и строится эллипсоид $\Omega_i(\beta_{i0})$.

Следует отметить, что для одномерных подсистем ($r_i = 1$) необходимость во втором этапе отпадает. Действительно, в этом случае соответствующая система сравнения абсолютно устойчива при любых положительных $\beta_i(t)$ и ее (положительным) инвариантным множеством является любой содержащий нулевую точку отрезок оси x^i . С другой стороны, областью с простой границей Π_i в одномерном случае может быть только отрезок (в общем случае – неограниченный), на котором выполняется условие (16). Так как условие (16) выполняется в любой точке Π_i , то в качестве Ω_i можно взять любой принадлежащий Π_i отрезок оси x^i и, в частности, весь отрезок Π_i . Из приведенных выше рассуждений также следует, что полученная оценка области притяжения не зависит от конкретных значений (положительных) коэффициентов обратной связи в одномерных подсистемах.

Построенная таким образом оценка области притяжения, очевидно, будет зависеть от выбранных размеров областей Π_i и нижних границ β_{i0} секторов. Варьируя указанные параметры, можно получать различные оценки ОП. Нахождение “наилучшей” в том или ином смысле оценки области притяжения – сложная задача, требующая отдельного исследования. Здесь же заметим, что при определенных допущениях построение “наилучшей” оценки ОП может быть сведено к решению задачи конечномерной условной оптимизации аналогично тому, как это было сделано в случае скалярного управления в [11], где нахождение матрицы эллипсоида с наименьшим следом сведено к ми-

нимизации функции двух переменных при интервальных ограничениях на переменные.

В заключение отметим, какую форму может принимать искомая оценка Ω для рассматриваемых в статье канонических систем при малых n и $m > 1$ (при $m = 1$ Ω — n -мерный эллипсоид [11]). При $n = m = 2$ (аффинная система с векторной относительной степенью $\{1, 1\}$ [10]) роль “инвариантных эллипсоидов” играют отрезки двух осей координат, так что оценка области притяжения системы — прямоугольник (декартово произведение двух отрезков). При $n = 3$, существуют две нормальные формы с относительными степенями $\{1, 1, 1\}$ ($m = 3$) и $\{2, 1\}$ ($m = 2$). В первом случае имеем три одномерных подсистемы, а оценка области притяжения — параллелепипед. Во втором случае (одномерная и двумерная подсистемы) оценкой служит эллиптический цилиндр (декартово произведение эллипса и отрезка). Отметим также, что при произвольном n и $m = n$ оценкой служит n -мерный параллелепипед.

6. Численные примеры

Пример 1. Рассмотрим представленную в нормальной форме двумерную управляемую систему с двумя входами:

$$(27) \quad \dot{x}_1 = f_1(x) + u_1, \quad \dot{x}_2 = f_2(x) + u_2,$$

где $x \equiv [x_1, x_2]^T$, $D_x = \mathbb{R}^2$,

$$(28) \quad f_1(x) = 3x_1^2 \operatorname{sign}(x_1) + x_2^2 \operatorname{sign}(x_2), \quad f_2(x) = x_1^3 + 3x_2^3.$$

Разомкнутая система имеет одно неустойчивое положение равновесия в начале координат. Будем стабилизировать систему в нуле с помощью ограниченных управлений $|u_1| \leq 1$ и $|u_2| \leq 1$ в виде обратной связи

$$(29) \quad u_i(x) = -\operatorname{sat}_1(f_i(x) + \mu_i x_i), \quad \mu_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

В соответствии с описанным алгоритмом ищем области с простой границей Π_1 и Π_2 такие, что $U_i(x) > 0$, $i = 1, 2$, $\forall x \in \Pi = \Pi_1 \times \Pi_2$, где $U_1(x) = 1 - |3x_1^2 \operatorname{sign}(x_1) + x_2^2 \operatorname{sign}(x_2)|$ и $U_2(x) = 1 - |x_1^3 + 3x_2^3|$. Так как подсистемы одномерны, кандидатами на роль Π_1 и Π_2 могут быть только содержащие нулевую точку отрезки осей x_1 и x_2 , длины которых не зависят от коэффициентов обратной связи μ_1 и μ_2 (см. подраздел 5.3), при этом область Π — прямоугольник. Из соображений симметрии положим $\Pi_1(\alpha_1) = \{x_1 : -\alpha_1 < x_1 < \alpha_1\}$ и $\Pi_2(\alpha_2) = \{x_2 : -\alpha_2 < x_2 < \alpha_2\}$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Минимум функций $U_1(x)$ и $U_2(x)$ на множестве $\Pi_1(\alpha_1) \times \Pi_2(\alpha_2)$, очевидно, достигается в углах прямоугольника с координатами (α_1, α_2) и $(-\alpha_1, -\alpha_2)$. Подставляя α_1 и α_2 вместо x_1 и x_2 в функции $U_1(x)$ и $U_2(x)$, находим условия, которым должны удовлетворять длины отрезков Π_1 и Π_2 для того, чтобы прямоугольник $\Pi = \Pi_1(\alpha_1) \times \Pi_2(\alpha_2)$ был оценкой области притяжения системы:

$$(30) \quad 1 - 3\alpha_1^2 - \alpha_2^2 \geq 0, \quad 1 - \alpha_1^3 - 3\alpha_2^3 \geq 0.$$

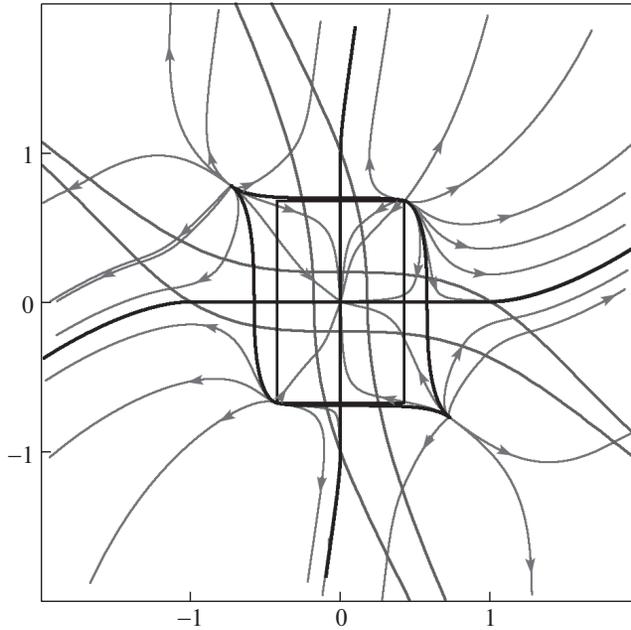


Рис. 1. Фазовый портрет замкнутой системы (27)–(29) и наилучшая прямоугольная оценка области притяжения.

Оценка с наибольшей площадью находится решением задачи условной оптимизации: найти максимум функции $\max F(\alpha_1, \alpha_2)$, где $F(\alpha_1, \alpha_2) = 4\alpha_1\alpha_2$, при ограничениях (30). Нетрудно показать, что максимум достигается в точке, в которой оба неравенства выполняются как равенства. Решение полученной системы из двух нелинейных уравнений легко находится численно: $\alpha_1^* = 0,426$ и $\alpha_2^* = 0,675$. Можно показать, что найденный прямоугольник $\Pi_1(\alpha_1^*) \times \Pi_2(\alpha_2^*)$ имеет не только наибольшую площадь среди всех инвариантных прямоугольников, но и наибольший периметр.

Фазовый портрет замкнутой системы (с коэффициентами $\mu_1 = \mu_2 = 5$) изображен на рис. 1. Жирными линиями на рисунке показаны сепаратрисы, две из которых служат границами ОП нулевого решения, и две пары кривых, ограничивающих области линейности подсистем. Из рис. 1 также видно, что, кроме устойчивой точки равновесия в начале координат, замкнутая система имеет восемь неустойчивых положений равновесия: четыре седла, лежащих на пересечении границы области устойчивости с осями координат и четыре фокуса в “углах” границы области устойчивости. Оптимальный инвариантный прямоугольник показан тонкой линией. Из рис. 1 видно, что полученная оценка намного больше области линейности системы (пересечение двух криволинейных полос, в которых одна из подсистем линейна) и довольно хорошо аппроксимирует область притяжения.

Пример 2. Рассмотрим задачу стабилизации в вертикальном положении двух перевернутых маятников. Обозначим через x_1 и x_2 угловые отклонения маятников от вертикальной оси, а через y_1 и y_2 – их угловые скорости. Маятники связаны друг с другом угловой пружиной жесткости μ , создающей

момент $\mu(x_1 - x_2)$, пропорциональный относительно угловому отклонению маятников. Входами системы служат приложенные к маятникам моменты u_1 и u_2 . Для простоты рассмотрим одинаковые маятники и обозначим $a = g/l$, где g – ускорение свободного падения и l – длина подвеса маятника. Деля обе части уравнений колебаний маятников на момент инерции и оставляя прежние обозначения для управлений и жесткости угловой пружины, получим уравнения движения системы в виде:

$$(31) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \quad \dot{y}_1 = a \sin x_1 - \mu(x_1 - x_2) + u_1, \\ \dot{x}_2 &= y_2, \quad \dot{y}_2 = a \sin x_2 + \mu(x_1 - x_2) + u_2. \end{aligned}$$

Легко показать, что разомкнутая система имеет в области $|x_i| < 2\pi$, $i = 1, 2$, одно устойчивое положение равновесия в точке $x_1 = x_2 = \pi$, $y_1 = y_2 = 0$ и одно неустойчивое положение равновесия в начале координат. Пусть ресурсы управления ограничены $|u_1| \leq \bar{u}_1$ и $|u_2| \leq \bar{u}_2$. Будем стабилизировать систему в нуле с помощью линеаризующей обратной связи с насыщением вида (6):

$$(32) \quad \begin{aligned} u_1 &= -\text{sat}_{\bar{u}_1}[\sigma_1(x_1, y_1) + a \sin x_1 - \mu(x_1 - x_2)], \\ u_2 &= -\text{sat}_{\bar{u}_2}[\sigma_2(x_2, y_2) + a \sin x_2 + \mu(x_1 - x_2)]. \end{aligned}$$

Для простоты возьмем одинаковые коэффициенты в линейных функциях σ_1 и σ_2 , $c_{11} = c_{21} = c_1$ и $c_{12} = c_{22} = c_2$, и будем считать, что ресурсы управления одинаковы $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{u}$ и удовлетворяют условию $\bar{u} < a$ (в противном случае система может быть стабилизирована из любой начальной точки).

Замыкая систему (31) обратной связью (32), получим нелинейную динамическую систему 4-го порядка:

$$(33) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= a \sin x_1 - \mu(x_1 - x_2) - \text{sat}_{\bar{u}}[\sigma(x_1, y_1) + a \sin x_1 - \mu(x_1 - x_2)], \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= a \sin x_2 + \mu(x_1 - x_2) - \text{sat}_{\bar{u}}[\sigma(x_2, y_2) + a \sin x_2 + \mu(x_1 - x_2)]. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что, кроме нулевого решения, замкнутая система (33) будет иметь от двух до восьми (в зависимости от жесткости угловой пружины) устойчивых положений равновесия и столько же неустойчивых положений. При любой жесткости пружины система имеет два неустойчивых положения равновесия $x_1 = x_2 = \pm \arcsin(\bar{u}/a)$, $y_1 = y_2 = 0$ и два устойчивых положения $x_1 = x_2 = \pi \pm \arcsin(\bar{u}/a)$, $y_1 = y_2 = 0$. Если ресурс управления недостаточен для приведения системы из заданного начального положения в начало координат, то маятники будут совершать (в общем случае – довольно сложные) незатухающие колебания вдали от положения равновесия. Если добавить вязкое трение, то система “свалится” в одно из устойчивых положений равновесия, отличное от желаемого.

Напомним вкратце, как строится оценка ОП для системы

$$(34) \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = a \sin x - \text{sat}_{\bar{u}}[\sigma(x, y) + a \sin x],$$

описывающей колебания одного маятника, стабилизируемого с помощью линейризирующей обратной связи с насыщением вида (6), в рамках предложенного в [11] подхода для систем со скалярным управлением. Сначала ищется область с простой границей, такая что в ней выполняется условие $U_0 = \inf U(x, y) > 0$, где $U(x, y) = \bar{u} - |a \sin x|$. Так как $U(x, y)$ зависит только от первой координаты, то естественно в качестве такой области взять полосу $|x| \leq x_0$, где $x_0 \leq \arcsin((\bar{u} - U_0)/a)$. Для заданных $0 < U_0 < \bar{u}$ и $\beta_0^* < \beta_0 \leq 1$, где β_0^* – минимальное значение β_0 , при котором система (23) имеет решение, оценка области притяжения ищется в виде вписанного в полосу инвариантного эллипса системы, который находится путем решения системы линейных матричных неравенств (см. [11]). Если требуется как можно большая (в том или ином смысле) оценка, то решается задача условной оптимизации функции двух переменных U_0 и β_0 [11].

Вернемся к системе (33). Согласно рассмотренному алгоритму на первом этапе требуется найти области с простой границей Π_1 и Π_2 в подпространствах переменных (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , такие что на множестве $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2$ выполняются условия $U_{i0} = \inf_{x \in \Pi} U_i(x) > 0$, $i = 1, 2$, где x обозначает точку 4-мерного пространства состояний, $x = [x_1, y_1, x_2, y_2]^T$, $U_1(x) = \bar{u} - |a \sin x_1 - \mu(x_1 - x_2)|$ и $U_2(x) = \bar{u} - |a \sin x_2 + \mu(x_1 - x_2)|$. После того как области Π_1 и Π_2 найдены, задача распадается на две независимые задачи нахождения вписанных в Π_1 и Π_2 инвариантных эллипсов Ω_1 и Ω_2 двумерных систем со скалярными входами [11] (см. также предыдущий абзац). Искомая же оценка ОП нулевого решения системы (33) строится в виде декартова произведения эллипсов Ω_1 и Ω_2 .

Как и в случае одного маятника, логично выбрать области Π_i , $i = 1, 2$, в виде полос $|x_i| \leq x_{i0}$. Для удобства иллюстраций возьмем полосы одинаковыми для обоих маятников: $x_{10} = x_{20} = x_0$. Нетрудно показать, что если жесткость пружины, связывающей маятники, не слишком велика, а именно

$$(35) \quad \mu \leq a \cos \left(\arcsin \frac{\bar{u}}{a} \right),$$

то минимум функций $U_i(x)$, $i = 1, 2$, на множестве $\Pi_1 \times \Pi_2$ достигается при $x_1 = x_2 = x_0$ и не зависит от μ и при этом совпадает с минимумом функции $U(x_1, y_1)$ в полосе $|x_1| \leq x_0$ в случае одного маятника: $U_{10} = U_{20} = U_0 = \bar{u} - |a \sin x_0|$. Т.е. при выполнении условия (35) оценка ОП для двух связанных одинаковых маятников находится как декартово произведение оценок для двух несвязанных маятников. Нахождение оценки в случае более жесткой пружины и/или различных маятников также не представляет трудностей, но приводит к более громоздким формулам.

В качестве численной иллюстрации найдем оценку ОП для системы (33) со следующими значениями параметров: $a = 1$, $\bar{u} = 0,5$ ($a \cos(\arcsin(\bar{u}/a)) \approx 0,87$), $\mu = 0,25$, $c_1 = \lambda^2$, $c_2 = 2\lambda$, $\lambda = 2$. Легко видеть, что при таком выборе коэффициентов обратной связи в области, где управление не достигает насыщения, матрицы линейных подсистем имеют кратные корни $(-\lambda)$. В [22] доказано, что в этом случае система л.м.н. (23) имеет решения при любых $1/9 < \beta_0 \leq 1$.

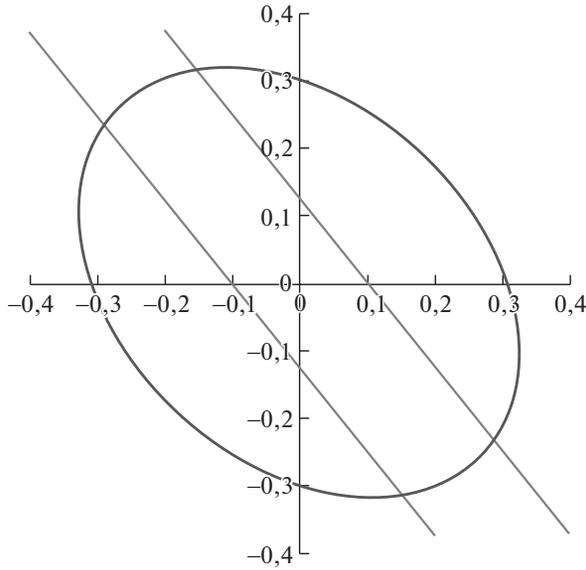


Рис. 2. Эллипсоидальная оценка области притяжения системы (34).

На рис. 2 показан инвариантный эллипс $\Omega(P)$ системы (34), найденный в результате решения задачи условной оптимизации (см. [11])

$$\text{tr } P(U_0, \beta_0) \rightarrow \min, \quad 0 < U_0 < 0,5, \quad 1/9 < \beta_0 \leq 1,$$

где $P(U_0, \beta_0)$ – решение системы л.м.н. (23), (26) и неравенства

$$(36) \quad P \geq \begin{pmatrix} 1/x_0^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

обеспечивающего принадлежность эллипса полосе $|x| \leq x_0$, $x_0 = \arcsin(0,5 - U_0)$. Оптимальная матрица

$$P = \begin{pmatrix} 10,63 & 3,66 \\ 3,66 & 11,08 \end{pmatrix}$$

была получена при $\beta_0 = 0,121$ и $U_0 = 0,18$ ($x_0 \approx 0,32$). Эллипс $\Omega(P)$ является наилучшей (в смысле указанного критерия) эллипсоидальной оценкой ОП для системы (34) (один маятник). Две пересекающие эллипс линии, заданные уравнениями $|a \sin x + \sigma(x, y)| = \pm \bar{u}$, ограничивают область линейности системы (34). Как установлено выше, при заданных значениях параметров системы множество $\Omega(P) \times \Omega(P)$ принадлежит ОП системы (33) (два связанных маятника), т.е. принадлежность каждой из точек $(x_1(0), y_1(0))$ и $(x_2(0), y_2(0))$ эллипсу $\Omega(P)$ гарантирует стабилизацию системы в положении равновесия.

К сожалению, в отличие от случая системы второго порядка (см., например, [11] и пример 1 выше), не представляется возможным сравнить полученную оценку с истинной ОП системы, так как численное нахождение ОП

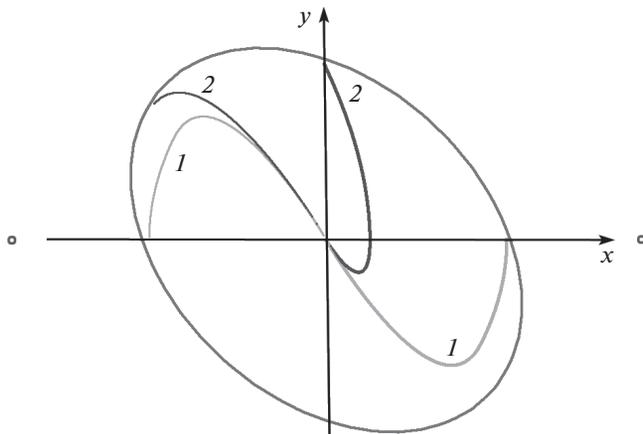


Рис. 3. Фазовые траектории маятников с начальными точками, принадлежащими найденной оценке области притяжения системы (33).

требует значительных вычислительных затрат, связанных с перебором точек 4-мерного пространства и решением системы уравнений (33) для каждой из них. Другая нетривиальная задача, возникающая в этой связи, связана с визуализацией полученных численных результатов. Действительно, любое сечение (не представимой в виде декартова произведения) 4-мерной ОП плоскостью, перпендикулярной осям x_i и y_i , где $i = 1$ или $i = 2$, дает множество гарантирующих стабилизацию системы начальных значений одного из маятников только при одном фиксированном начальном значении фазовых координат второго маятника и поэтому мало информативно.

В последующих иллюстрациях (рис. 3 и 4) 4-мерная траектория системы визуализирована в виде двух плоских кривых $(x_1(t), y_1(t))$ и $(x_2(t), y_2(t))$, фазовых траекторий маятников, изображенных на одном рисунке. Так как в действительности кривые принадлежат разным подпространствам, на каждом из рис. 3 и 4 показаны две фазовые плоскости с совмещенными осями x_1 и x_2 (ось x на рис. 3 и 4) и осями y_1 и y_2 (ось y).

Целью проведенных численных экспериментов было проверить, действительно ли попадание начальных точек каждой из подсистем в соответствующий эллипс $\Omega(P)$ гарантирует стабилизацию системы в нулевой точке, и показать, что найдутся не принадлежащие найденной оценке начальные точки, из которых система не может быть стабилизирована. Многочисленные эксперименты со случайным размещением двух пар начальных точек как в области $\Omega(P)$, так и вне ее подтвердили корректность полученной оценки.

На рис. 3 показаны две начинающиеся внутри области $\Omega(P)$ траектории с начальными условиями $x(0) = (0, 3; 0; -0, 3; 0)$ и $x(0) = (0; 0, 3; -0, 28; 0, 23)$ (обозначены цифрами 1 и 2 соответственно). Фазовые траектории первого и второго маятников нарисованы жирными и тонкими линиями соответственно. Заметим, что в обоих случаях в начале движения управления достигают насыщения и, соответственно, правые части систем нелинейны. Символами \circ

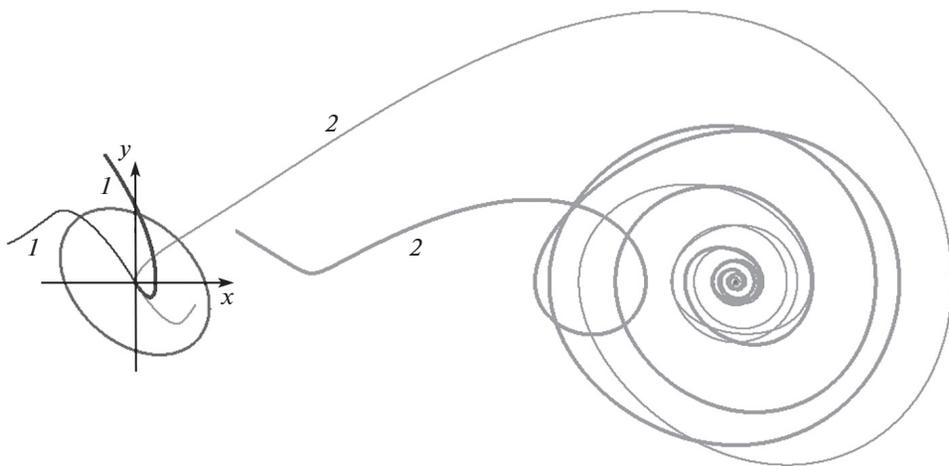


Рис. 4. Фазовые траектории маятников с начальными точками, не принадлежащими найденной оценке области притяжения системы (33).

на оси x обозначены ближайшие к нулю точки неустойчивого равновесия системы $(-0,52; 0)$ и $(0,52; 0)$.

На рис. 4 показаны две траектории системы, начальные точки которых не принадлежат найденной оценке ОП $\Omega(P) \times \Omega(P)$. Первая начальная точка $x(0) = (-0,13; 0,55; -0,55; 0,17)$ тем не менее принадлежит ОП системы, так как начинающаяся из нее траектория (обозначена цифрой 1) стремится к нулю. Вторая точка $x(0) = (0,44; 0,22; 0,26; -0,10)$, из которой начинается траектория, обозначенная цифрой 2, как видно из рис. 4, не принадлежит ОП (при этом начальная точка фазовой траектории второго маятника принадлежит эллипсу $\Omega(P)$). Ресурса управления в данном случае недостаточно и система “сваливается” в положение устойчивого равновесия системы (33) с координатами $x_1 = x_2 = \pi - \arcsin(\bar{u}/a) \approx 2,62$, $y_1 = y_2 = 0$, при этом в окрестности этой точки $u_1 = u_2 = \bar{u}^3$.

7. Заключение

Рассмотрена задача нахождения оценки области притяжения аффинной системы со многими входами, замкнутой линеаризующей обратной связью, при ограниченном ресурсе управления. Предлагаемый подход к построению оценок областей притяжения основан на результатах теории абсолютной устойчивости и является обобщением на случай векторного управления разработанного ранее автором метода нахождения эллипсоидальных оценок ОП аффинных систем с ограниченным скалярным управлением [11]. Оценка области притяжения ищется в виде декартового произведения положительных инвариантных множеств составляющих систему подсистем. В случае эллипсоидальных инвариантных множеств построение оценки области притяжения

³ В численных экспериментах чтобы сделать картину колебаний более наглядной, в правые части уравнений колебаний маятников были добавлены слагаемые $\alpha \dot{y}_1$ и $\alpha \dot{y}_2$, $\alpha = 0,1$, моделирующие небольшое вязкое трение.

сведено к решению систем линейных матричных неравенств. Приведенные численные примеры иллюстрируют применение предлагаемого метода для построения оценок области притяжения положения равновесия неустойчивых систем второго и четвертого порядков с двумя входами, стабилизируемых с помощью ограниченной линеаризующей обратной связи.

Отметим некоторые возможные направления дальнейшего развития предлагаемого в статье метода. Представляет интерес исследование возможности использования неквадратичных функций Ляпунова с целью получения неэллипсоидальных инвариантных областей подсистем и тем самым более точных аппроксимаций областей притяжения. Актуально также обобщение предлагаемого метода на более общий случай нормальной формы, когда правая часть каждой подсистемы зависит от нескольких, в общем случае всех, управлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tarbouriech S., Garcia G., Gomes da Silva Jr. J.M., Queinnec I.* Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators. London: Springer, 2011.
2. *Tarbouriech S., Turner M.* Anti-Windup Design: An Overview of Some Recent Advances and Open Problems // IET Control Theor. Appl. 2009. V. 3. No. 1. P. 1–19.
3. *Turner M.C., Herrmann G., Postlethwaite I.* Anti-windup compensation and the control of input-constrained systems. Mathematical Methods for Robust and Nonlinear Control / Turner M.C., Bates D.G., Eds. Berlin: Springer, 2007. P. 143–174.
4. *Blanchini F., Miani S.* Set-theoretic Methods in Control. Boston: Birkhauser, 2008.
5. *Формальский А.М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974.
6. *Rapoport L.B.* Estimation of an Attraction Domain for Multivariable Lur'e Systems Using Looseless Extension of the S-Procedure // Proc. Am. Control Conf., San Diego, 1999. P. 2395–2396.
7. *Herrmann G., Turner M.C., Menon P.P., Bates D.G., Postlethwaite I.* Anti-windup Synthesis for Nonlinear Dynamic Inversion Controllers // Proc. IFAC Robust Controller Design Symp. (ROCOND). Toulouse, 2006.
8. *Kapoor N., Daoutidis P.* An Observer Based Anti-windup Scheme for Nonlinear Systems with Input Constraints // Int. J. Control. 1999. V. 72. No. 1. P. 18–29.
9. *Жевнин Ф.Ф., Крищенко А.П.* Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258. № 4. С. 805–809.
10. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. London: Springer, 1995.
11. *Пестереv А.В.* Оценка области притяжения нулевого решения для аффинных систем с ограниченным управлением // АиТ. 2017. № 4. С. 3–20.
Pesterev A.V. Attraction Domain Estimate for Single-Input Affine Systems with Constrained Control // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 4. P. 581–594.
12. *Rapoport Л.В.* Оценка области притяжения в задаче управления колесным роботом // АиТ. 2006. № 9. С. 69–89.
Rapoport L.B. Estimation of Attraction Domain in a Wheeled Robot Control Problem // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 9. P. 1416–1435.

13. *Пестерев А.В., Рапопорт Л.Б.* Построение инвариантных эллипсоидов в задаче стабилизации движения колесного робота вдоль криволинейного пути // *АиТ.* 2009. № 2. С. 52–67.
Pesterev A.V., Rapoport L.B. Construction of Invariant Ellipsoids in the Stabilization Problem for a Wheeled Robot Following a Curvilinear Path // *Autom. Remote Control.* 2009. V. 70. No. 2. P. 219–232.
14. *Пестерев А.В.* Алгоритм построения инвариантных эллипсоидов в задаче стабилизации движения колесного робота // *АиТ.* 2009. № 9. С. 100–112.
Pesterev A.V. Algorithm to Construct Invariant Ellipsoids in the Problem of Stabilization of Wheeled Robot Motion // *Autom. Remote Control.* 2009. V. 70. No. 9. P. 1528–1539.
15. *Pesterev A.V.* Maximum-volume Ellipsoidal Approximation of Attraction Domain in Stabilization Problem for Wheeled Robot // *Proc. 18th IFAC World Congr., Milan, 2011.* CD ROM.
16. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
17. *Пятницкий Е.С.* Абсолютная устойчивость нестационарных нелинейных систем // *АиТ.* 1970. № 1. С. 5–15.
Pyatnitskij E.S. Absolute Stability of Nonstationary Nonlinear Systems // *Autom. Remote Control.* 1970. No. 1. P. 1–9.
18. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управляемость. М.: Наука, 2002.
19. *Чернуоусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
20. *Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear matrix inequalities in system and control theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
21. *Pesterev A.V.* Absolute Stability Analysis for a Linear Time Varying System of Special Form // 2016 Int. Conf. “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conf.), June 1–3, 2016. DOI: 10.1109/STAB.2016.7541213
22. *Пестерев А.В.* Построение наилучшей эллипсоидальной аппроксимации области притяжения в задаче стабилизации движения колесного робота // *АиТ.* 2011. № 3. С. 51–68.
Pesterev A.V. Construction of the Best Ellipsoidal Approximation of the Attraction Domain in Stabilization Problem for a Wheeled Robot // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 3. P. 512–528.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.П. Крищенко.

Поступила в редакцию 25.07.2018

После доработки 25.07.2018

Принята к публикации 08.11.2018