

© 2019 г. И.А. ЗОРИН (ivan.zorin@skoltech.ru)  
(Сколковский институт науки и технологий, Москва),  
Е.Н. ГРЯЗИНА, канд. физ.-мат. наук (gryazina@gmail.com)  
(Сколковский институт науки и технологий, Москва,  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## ОБЗОР ПОЛУОПРЕДЕЛЕННЫХ РЕЛАКСАЦИЙ ДЛЯ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ ПОТОКОВ МОЩНОСТИ<sup>1</sup>

Дан обзор пяти выпуклых релаксаций для решения задачи AC Optimal Power Flow (AC OPF): полуопределенной, хордальной, конической, релаксации моментами и QC-релаксации. Подробно описано, в чем особенность AC-формулировки и невыпуклости задачи. Подробно разобрано как записать каждую релаксацию для OPF. Основным интерес представляют полуопределенная, хордальная и коническая релаксации. Они реализованы на тестовом примере из четырех узлов.

*Ключевые слова:* энергетические системы, полуопределенное программирование, выпуклые релаксации, потоки в энергетических сетях.

DOI: 10.1134/S0005231019050027

### 1. Введение

Электроэнергия является одним из важнейших ресурсов в современном мире, более того, технологический процесс сталкивается со все большей необходимостью в электроэнергии. Так, за последние несколько лет активно развивается разработка электромобилей, а растущее население Земли потребляет все больше электричества. Генерация электроэнергии связана с высокими денежными издержками, кроме того, сохраняется большое число “грязных генераторов”, на которых сжигается, к примеру, мазут и вырабатывается электроэнергия. Такие станции наносят ощутимый вред экологии Земли, к тому же зависят от запасов ископаемых ресурсов и цен на них. На смену классическим приходят генераторы на возобновляемых источниках энергии — ветряные генераторы и фермы солнечных панелей. К сожалению, такие источники ограничены в своих возможностях и зависят от погодных условий. Все это порождает массу задач перед учеными из разных областей науки.

Одной из таких задач является определение оптимального режима производства электроэнергии для заданной сети. Для ее решения существуют различные постановки, но самым распространенным и точным является задача Optimal Power Flow, которая формулируется на основе физических законов Кирхгофа и Ома. Наиболее распространенные критерии оптимальности — это

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 16-11-10015).

достижение минимальной общей стоимости генерации, или потерь, при удовлетворении инженерных ограничений. Отдельно можно выделить подход, нацеленный на обеспечение устойчивости в работе электросети, так называемый Anti-Blackout подход. Это более сложная задача, в которой требуются дополнительные ограничения, связанные с физической природой задачи. Как правило, устойчивый режим редко является оптимальным в классической формулировке, поэтому объединение этих двух подходов является актуальной задачей для отрасли.

Отличительной особенностью задачи Optimal Power Flow (далее в работе для краткости будет использоваться аббревиатура OPF) в классической постановке является ее невыпуклость, что не позволяет напрямую применить инструментарий выпуклой оптимизации. В связи с этим системные операторы используют линейаризованную версию задачи — DC OPF. Линейаризация позволяет быстрее и легче решать задачу ценой точности полученного решения. Поэтому большой интерес представляют методы решения исходной невыпуклой задачи — AC OPF (далее OPF будет означать именно AC OPF). Достаточно популярным способом справиться с невыпуклостью задачи являются релаксации. С помощью релаксаций можно значительно упростить сложность задачи и решить ее за приемлемое время с достаточной точностью. К сожалению, релаксации не всегда дают точное решение, и на сегодняшний день нет общих формулировок или теорем, которые позволяли бы описать условия существования точного решения для некоторой общей формулировки задачи.

Данная работа нацелена на рассмотрение классической задачи Optimal Power Flow, в частности изучаются различные выпуклые релаксации для решения задачи. Главная цель — это подробный разбор релаксаций на тестовом примере из четырех узлов. В разделе 2 работы предлагается основная формулировка задачи, в разделе 3 приводится обзор существующих релаксаций, в разделе 4 описаны тестовые примеры и численные эксперименты.

## 2. Формулировка задачи Optimal Power Flow

Задача OPF впервые была сформулирована в 1962 г. (историю развития задачи и методов решения можно найти в [1–3] и с тех пор остается важной задачей управления электроэнергетическими сетями, особенно учитывая, что до сих пор не было получено эффективного алгоритма, который мог бы быстро и эффективно ее решать в общей формулировке для систем с тысячами узлов. Например, российская сеть включает более 9000 узлов. Связано это, в первую очередь, с тем, что задача является невыпуклой и NP-сложной. По этой причине в индустрии используется линейаризованная версия задачи, так называемая DC OPF [4]. Данный подход позволяет быстро решать задачу для больших сетей, но ценой точности (в смысле близости к глобальному оптимуму задачи) полученного решения. В связи с ростом потребления и производства электроэнергии индустрия все больше и больше нуждается в точных алгоритмах, так как даже небольшие улучшения в качестве решения позволяют экономить миллиарды долларов ежегодно.

Задача ОРФ может быть переформулирована как квадратичная задача с квадратичными ограничениями (QCQP-формулировка), в такой формулировке и целевая функция, и все ограничения являются квадратичными функциями. К сожалению, при этом задача все еще остается невыпуклой, но в такой постановке можно использовать различные выпуклые релаксации. Данный подход активно развивается в последние годы. Но главным недостатком остается отсутствие гарантий, что метод сработает и даст точное решение. Для некоторых методов можно подобрать класс задач, внутри которого метод будет работать для одних задач и не будет для других. Далее рассмотрим стандартную математическую постановку задачи ОРФ.

Электроэнергетическая сеть представляет собой граф  $G$ , в котором вершины  $N$  соответствуют генераторам и потребителям, а ребра  $E$  — линиям электропередач. Ребра проводятся только между теми вершинами, между которыми в действительности существуют линии. В одной вершине может находиться либо только генератор, либо потребитель, либо оба одновременно.

В основе формулировки задачи ОРФ лежат законы Кирхгофа (1) и Ома (2), связывающие электрический ток  $I$ , напряжение  $V$ , проводимость  $Y$  и мощность  $S$

$$(1) \quad I_j^g - I_j^l = \sum_{(j,k) \in E} I_{jk}, \quad \forall j \in N,$$

$$(2) \quad I_{jk} = Y_{jk}(V_j - V_k), \quad \forall (j, k) \in E,$$

где  $I, V, Y$  и  $S$  — комплексные величины. Здесь и далее верхние индексы  $g$  и  $l$  будут обозначать генерацию и нагрузку соответственно<sup>2</sup>.

Мощность вычисляется по формуле

$$(3) \quad S_{jk} = V_j I_{jk}^H = V_j Y_{jk}^H (V_j^H - V_k^H), \quad \forall (j, k) \in E,$$

где верхний индекс  $H$  означает операцию комплексного сопряжения и транспонирования.

Совмещая (1)–(3), получаем формулу для потоков мощностей и формулу для так называемой “Net Power Injection” (NPI) для узла  $j$ , или разнице генерируемой и потребляемой мощностей

$$(4) \quad S_{jk} = Y_{jk}^H V_j V_j^H - Y_{jk}^H V_j V_k^H, \quad (j, k) \in E,$$

$$(5) \quad s_j = S_j^g - S_j^l = (P_j^g - P_j^l) + i(Q_j^g - Q_j^l) = \sum_{(j,k) \in E} S_{jk}, \quad \forall j \in N.$$

Из (4) и (5) выражаем NPI узла через напряжения в сети:

$$(6) \quad s_j = \sum_{(j,k) \in E} V_j (V_j^H - V_k^H) Y_{jk}^H, \quad \forall j \in N.$$

<sup>2</sup> Далее, если явно не указано иного, одиночный индекс  $j$  будет обозначать узел сети (вершину графа), а пара  $(j, k)$  — линию сети (ребро графа).

Формула (6) является квадратичной относительно напряжения, и именно отсюда возникает “квадратичность” задачи ОПФ.

На узлах могут присутствовать ограничения на  $s_j$ , связанные с потреблением и производительностью генератора

$$(7) \quad \underline{s}_j \leq s_j \leq \bar{s}_j, \quad \forall j \in N,$$

а также ограничения на напряжение на каждом узле

$$(8) \quad \underline{V}_j \leq |V_j| \leq \bar{V}_j, \quad \forall j \in N.$$

Кроме того, вводятся ограничения для линий (9), ограничивающие максимальные допустимые потоки для каждой линии:

$$(9) \quad |S_{jk}| \leq S_{jk}^{\max}, \quad \forall (j, k) \in E,$$

при нарушении этого ограничения линия может выйти из строя, приведя к коллапсу всей сети.

Формула (6) позволяет определять объемы генерации на узлах через напряжения, т.е. можно работать только с переменными, отвечающими за напряжение. Набор условий вида (7)–(9) задает множество допустимых режимов в сети. В зависимости от потребностей на конкретной сети могут вводиться различные целевые функции. Два наиболее распространенных функционала – минимизация общих потерь генерации активной мощности

$$f_1(V) = \sum_{j \in N} \Re(s_j) + P_j^l = \sum_{j \in N} \Re \left( \sum_{k: (j,k) \in E} V_j (V_j^H - V_k^H) Y_{jk}^H + P_j^l \right),$$

и минимизация общей стоимости генерации активной мощности с учетом стоимости генерации  $c_j$  для каждого генератора  $j$ .

$$f_2(V) = \sum_{j \in N} c_j \Re(s_j + P_j^l) = \sum_{j \in N} c_j \Re \left( \sum_{k: (j,k) \in E} V_j (V_j^H - V_k^H) Y_{jk}^H + P_j^l \right).$$

Стоимости также могут быть некоторыми функциями, зависящими от объемов генерации, чаще всего квадратичными. В самом простом случае имеем постоянную стоимость генерации 1 кВт активной мощности.

Здесь  $f_j(V) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Оба функционала – квадратичные функции от вектора напряжений  $V = (V_1, \dots, V_n)$  в сети (здесь и далее  $\Re(\cdot)$  и  $\Im(\cdot)$  используются для обозначения действительной и мнимой частей комплексного числа соответственно).

Теперь можно сформулировать проблему полностью:

$$\begin{aligned} f(V) &\rightarrow \min_V, \\ \underline{s}_j &\leq \sum_{k: (j,k) \in E} V_j (V_j^H - V_k^H) Y_{jk}^H \leq \bar{s}_j, \quad \forall j \in N, \\ \underline{V}_j &\leq |V_j| \leq \bar{V}_j, \quad \forall j \in N, \\ |S_{jk}| &\leq S_{jk}^{\max}, \quad \forall (j, k) \in E. \end{aligned}$$

Здесь функция  $f(V)$  – это любая из функций  $f_1(V)$ ,  $f_2(V)$  или какой-либо иной функционал от напряжения, интересующий решающего задачу.

### 2.1. DC-формулировка

В постановке, описанной выше, все комплексные числа были представлены в алгебраической форме и далее в работе используются именно в этой форме. Те же формулы можно получить и для тригонометрического представления комплексных значений, более привычных для инженеров, и, затем, вводя дополнительные предположения на работу сети, получить линеаризованную версию задачи – DC OPF.

Комплексная проводимость линии  $Y_{jk}$  состоит из активной  $G_{jk}$  и реактивной  $B_{jk}$  проводимостей, т.е.

$$(10) \quad Y_{jk} = G_{jk} + iB_{jk}, \quad \forall (j, k) \in E.$$

Комплексное напряжение можно переписать в тригонометрической форме:

$$(11) \quad V_j = |V_j| \exp(i\delta_j), \quad \forall j \in N.$$

Подставляем (10)–(11) в формулу для мощности (3) и получаем формулы для активной ( $P$ ) и реактивной ( $Q$ ) генераций:

$$\begin{aligned} S_{jk} &= V_j \left( V_j^H - V_k^H \right) Y_{jk}^H = \\ &= |V_j| \exp(i\delta_j) (|V_j| \exp(-i\delta_j) - |V_k| \exp(-i\delta_k)) (G_{jk} - iB_{jk}), \end{aligned}$$

$$(12) \quad P_{jk} = \Re(S_{jk}) = |V_j|^2 G_{jk} + |V_j| |V_k| (G_{jk} \cos(\delta_j - \delta_k) + B_{jk} \sin(\delta_j - \delta_k)),$$

$$(13) \quad Q_{jk} = \Im(S_{jk}) = -|V_j|^2 B_{jk} + |V_j| |V_k| (G_{jk} \sin(\delta_j - \delta_k) - B_{jk} \cos(\delta_j - \delta_k)).$$

Полученные формулы выражают активные и реактивные потоки по линии  $(j, k)$  через напряжение и проводимость. Опуская технические детали, из (12) и (13) легко получаются формулы для потребляемой и генерируемой мощностей на узле  $j$ :

$$(14) \quad P_j = \sum_{k:(j,k) \in E} |V_j| |V_k| (G_{jk} \cos(\delta_j - \delta_k) + B_{jk} \sin(\delta_j - \delta_k)),$$

$$(15) \quad Q_j = \sum_{k:(j,k) \in E} |V_j| |V_k| (G_{jk} \sin(\delta_j - \delta_k) - B_{jk} \cos(\delta_j - \delta_k)).$$

Из (14) и (15) легко получить DC-формулировку задачи, сделав инженерные предположения: в стационарном состоянии энергетической системы верны следующие утверждения:

- 1)  $G_{jk} = 0, \forall (j, k) \in E$ ,
- 2)  $|V_j| \approx 1, \forall j \in N$ ,
- 3)  $(\delta_j - \delta_k) \approx 0 \Rightarrow \cos(\delta_j - \delta_k) \approx 1, \sin(\delta_j - \delta_k) \approx \delta_j - \delta_k$ .

Следовательно, (14) и (15) упрощаются до

$$(16) \quad \begin{aligned} P_j &= \sum_{k:(j,k) \in E} B_{jk}(\delta_j - \delta_k), \\ Q_j &= \sum_{k:(j,k) \in E} -B_{jk} \cdot 1. \end{aligned}$$

Из (16) следует, что в DC-формулировке реактивная мощность  $Q$  определяется однозначно. Ниже представлена DC-формулировка:

$$\begin{aligned} &\min_{\delta} \sum_{j \in N} f(P_j), \\ P_j^g &= P_j^l + \sum_{k:(j,k) \in E} B_{jk}(\delta_j - \delta_k), \quad \forall j \in N : j - \{\text{генератор}\}, \end{aligned}$$

здесь  $f(\cdot)$  — некоторая линейная функция, зависящая от генерации, например  $(c_j P_j)$ , где  $c$  — вектор цен активной генерации. В такой постановке OPF является задачей линейного программирования, которую можно решать очень быстро. Более подробно об инженерной составляющей формулировки DC OPF см. в [5].

### 3. Способы решения задачи Optimal Power Flow

В связи со сложностью и особой важностью задачи для индустрии за последнее время возникло большое количество различных подходов к ее решению. Среди них можно выделить последовательное квадратичное программирование, генетические алгоритмы, подходы, основанные на методе внутренней точки, а также различные релаксационные подходы [6]. Большую популярность набирают полуопределенные релаксации (semidefinite relaxations — SDP). Идея релаксаций заключается в переформулировке исходной задачи таким образом, что исходная невыпуклая задача становится выпуклой после исключения одного невыпуклого условия. После этого решается релаксированная задача любым методом для решения выпуклых задач. Если полученное решение удовлетворяет ранее исключенному условию, то получено точное решение проблемы, в противном же случае релаксация является неточной, но дает нижнюю оценку для оптимального значения целевого функционала.

Главная проблема заключается в том, что не сформулированы условия, при которых релаксация была бы точной для общей задачи. Но сформулированы условия, при которых релаксация является точной для радиальных сетей, т.е. сетей, граф которых — дерево [7]. Бывают ситуации, когда один и тот же метод может работать для одной задачи и “сломаться” для задачи с незначительными изменениями в данных, ограничениях или в функционале такими что они не выводят из класса задачи [8].

Далее будут разобраны некоторые популярные и/или новые релаксирующие методы. Но перед этим необходимо более подробно разобрать, как устроена SDP-релаксация в общем.

### 3.1. Полуопределенное программирование

Полуопределенная релаксация [9] является достаточно популярной и в то же время простой техникой решения невыпуклых задач. Лучше всего SDP-релаксация применяется для квадратичных задач с квадратичными ограничениями (QCQP), каковой и является задача OPF. Для задач из класса QCQP SDP релаксация получается естественным образом. Рассмотрим это на примере. Пусть есть исходная задача из класса QCQP

$$(17) \quad \begin{aligned} x^T C x &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \\ x^T H x &\geq a, \\ x^T G x &= b, \end{aligned}$$

где  $C, G, H$  – симметричные матрицы.

Для любой симметричной матрицы  $A$  имеем

$$x^T A x = \text{Tr}(x^T A x) = \text{Tr}(A x x^T) = \text{Tr}(A X),$$

$x^T A x$  – скаляр, следовательно, можем использовать матричный след, ничего не меняя, далее пользуемся свойством цикличности следа и получаем формулу справа, которая тоже является скаляром, где  $x x^T = X$  –  $(n \times n)$ -матрица. Следовательно, левая часть равна правой, и, заменяя функционал и каждое ограничение задачи (17), получаем задачу:

$$(18) \quad \begin{aligned} \text{Tr}(C X) &\rightarrow \min_{X \in \mathbb{S}^n}, \\ \text{Tr}(H X) &\geq a, \\ \text{Tr}(G X) &= b, \\ X &\succeq 0, \\ \text{rank}(X) &= 1. \end{aligned}$$

Если матрица  $X$  является неотрицательно определенной матрицей ( $X \succeq 0$ ) с единичным рангом, то можно однозначно восстановить исходный вектор  $x$  по заданной матрице  $X$  (используя разложение по собственным числам). Т.е. из решения задачи (18) можно однозначно восстановить решение задачи (17). Значит, задачи эквивалентны.

Проблема заключается в том, что задача (18) также является невыпуклой из-за условия на ранг. Исключая его, получаем полуопределенную релаксацию исходной задачи (17):

$$(19) \quad \begin{aligned} \text{Tr}(C X) &\rightarrow \min_{X \in \mathbb{S}^n}, \\ \text{Tr}(H X) &\geq a, \\ \text{Tr}(G X) &= b, \\ X &\succeq 0. \end{aligned}$$

К сожалению, численные методы могут сходиться к решениям с рангом сильно больше 1 ( $\text{rank}(X^*) \gg 1$ ), даже если существует решение с единичным рангом. В таком случае явно восстановить  $x^*$  невозможно. Существуют различные эвристики для получения допустимого решения исходной задачи (две будут приведены далее), но полученное допустимое решение в общем случае не будет являться оптимальным.

Если полученное решение  $X^*$  имеет единичный ранг, то у него есть только одно ненулевое собственное значение (оно также является неотрицательным), а значит, восстановить оптимальный вектор  $x^*$  можно по формуле

$$x^* = \sqrt{\lambda}u,$$

где  $\lambda$  и  $u$  – собственное значение и соответствующий собственный вектор матрицы  $X^{*3}$ . Когда решение имеет ранг больше одного, можно использовать максимальное собственное значение  $\lambda_1$  и соответствующий собственный вектор  $u_1$ , чтобы получить аппроксимацию оптимального решения:

$$\tilde{x} = \sqrt{\lambda_1}u_1.$$

Другой способ – рандомизация. Вместо задачи (19) решается стохастическая задача

$$(20) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}_{\xi \sim N(0, X)}[\xi^T C \xi] &\rightarrow \min_{X \in \mathbb{S}^n, X \succeq 0}, \\ \mathbb{E}_{\xi \sim N(0, X)}[\xi^T H \xi] &\geq a, \\ \mathbb{E}_{\xi \sim N(0, X)}[\xi^T G \xi] &= b. \end{aligned}$$

Так как  $\mathbb{E}[\xi^T \xi] = X$ , задача (20) эквивалентна задаче (19) (с точностью до набора ограничений).

К сожалению, полученное таким образом приближенное решение чаще всего оказывается недопустимым для исходной задачи, поэтому дополнительно необходимо спроецировать приближенное решение на допустимую область.

### Пример неточной релаксации

Как упоминалось ранее, SDP-релаксация не всегда является точной. Это можно наглядно продемонстрировать на следующем примере в  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x_1, \\ & (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r_1^2, \\ & (x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2 \geq r_2^2, \\ & x_1 = x_2, \end{aligned}$$

здесь  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (b_1, b_2)$  и  $r_1, r_2$  – центры и радиусы двух окружностей.

---

<sup>3</sup>  $xx^T = X = u\lambda u^T$ .

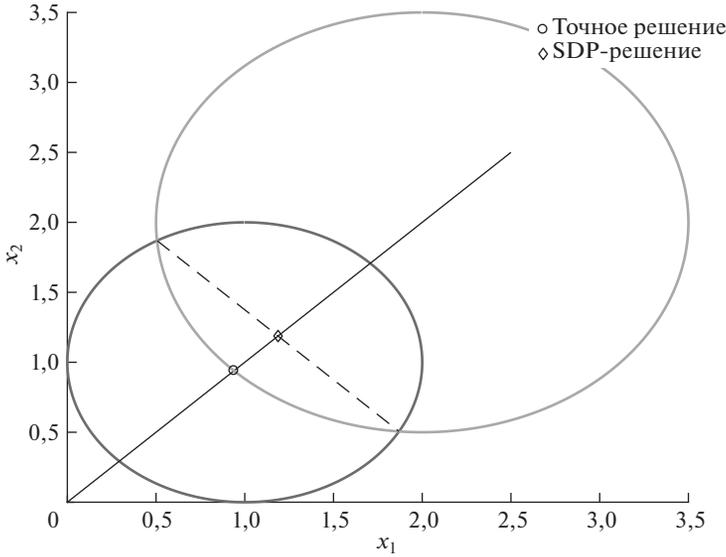


Рис. 1. Допустимая область и выпуклая оболочка.

Введем вектор  $\hat{x} = (x_1, x_2, 1)^\top$  и запишем SDP-релаксацию задачи. Чтобы выразить целевую функцию и ограничения через  $\hat{x}$ , необходимо ввести специальные матрицы и воспользоваться матричным следом:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = Tr(C\hat{x}\hat{x}^\top),$$

$$A = \begin{bmatrix} I & -a \\ -a^\top & a^\top a - r_1^2 \end{bmatrix} \Rightarrow (x - a)^\top (x - a) \leq 0 \rightarrow Tr(A\hat{x}\hat{x}^\top) \leq 0,$$

$$B = \begin{bmatrix} I & -b \\ -b^\top & b^\top b - r_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow (x - b)^\top (x - b) \geq 0 \rightarrow Tr(B\hat{x}\hat{x}^\top) \geq 0,$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \rightarrow Tr(D\hat{x}\hat{x}^\top) = 0.$$

Пусть  $X = \hat{x}\hat{x}^\top$ , тогда  $rank(X) = 1$ . Запишем SDP-релаксацию

$$\begin{aligned} & \min_{X \in \mathbb{S}^3} Tr(CX), \\ & Tr(AX) \leq 0, \\ & Tr(BX) \geq 0, \\ & Tr(DX) = 0, \\ & X \succeq 0. \end{aligned}$$

На рис. 1 проиллюстрирован пример для следующих значений параметров:

$$a = (1; 1), \quad b = (2; 2), \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 1, 5.$$

Оптимальное решение легко найти, не решая задачу, при этом если построить SDP-релаксацию задачи, то ее решение будет отличаться от аналитического и ранг решения релаксированной задачи больше одного.

### 3.2. Эквивалентные релаксации

В этой части будут кратко рассмотрены три эквивалентных релаксации — полуопределенная, хордальная и коническая. В [10] сформулированы теоремы и условия, при которых релаксации эквивалентны между собой. Для более глубокого понимания задачи в AC-формулировке и ее решения с помощью выпуклых релаксаций рекомендуется ознакомиться с [11–13]. Для начала рассмотрим общую идею, которая лежит в основе всех трех релаксаций.

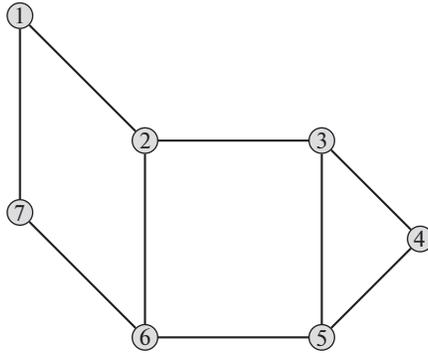


Рис. 2. Граф сети.

В задаче (2) целевыми переменными являются напряжения на каждом узле  $V \in \mathbb{C}^N$ . Для наглядности рассмотрим пример. Пусть сеть представлена графом на рис. 2. Сделаем замену  $W = VV^H$ .

$$W_{jj} = |V_j|^2, \quad \forall j \in N,$$

$$W_{jk} = V_j V_k^H, \quad \forall (j, k) \in E.$$

Таким образом, матрица  $W$  — это эрмитова частично заполненная матрица, и ее паттерн (заполненная часть матрицы) соответствует графу сети  $G$ . Ниже представлена матрица для данного графа

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & - & - & - & - & W_{17} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} & - & - & W_{26} & - \\ - & W_{32} & W_{33} & W_{34} & W_{35} & - & - \\ - & - & W_{43} & W_{44} & W_{45} & - & - \\ - & - & W_{53} & W_{54} & W_{55} & W_{56} & - \\ - & W_{62} & - & - & W_{65} & W_{66} & W_{67} \\ W_{71} & - & - & - & - & W_{76} & W_{77} \end{pmatrix}.$$

В ней прочерк означает, что элемент не определен, т.е. в графе отсутствует соответствующее ребро. В [14, 15] приводится способ дополнения частично заполненной матрицы до полной матрицы с сохранением знакоопределенности и ранга.

Теперь можно переписать исходную задачу через новые переменные – элементы матрицы  $W$ . Если  $\text{rank}(W) = 1$ , то можно однозначно восстановить значения элементов вектора  $V$ . Задача (2) примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in N} \sum_{k: (j,k) \in E} \Re(W_{jj} - W_{jk}) Y_{jk}^H \rightarrow \min_W, \\ \underline{s}_j & \leq \sum_{k: (j,k) \in E} (W_{jj} - W_{jk}) Y_{jk}^H \leq \bar{s}_j, \quad \forall j \in N, \\ \underline{V}_j^2 & \leq W_{jj} \leq \bar{V}_j^2, \quad \forall j \in N, \\ & W \geq 0, \\ & \text{rank}(W) = 1. \end{aligned}$$

**3.2.1. Полуопределенная релаксация.** Данная релаксация самая простая по своей идее. В ней просто исключено невыпуклое ограничение  $\text{rank}(W)$ , и задача решается без него. Если полученное решение  $W^*$  имеет ранг 1, то можно восстановить оптимальный режим  $V^*$ , значит, релаксация является точной. Иначе релаксация является неточной. Здесь и далее под точностью релаксации понимается возможность восстановить исходное решение, т.е. если полученное решение является неотрицательно определенной матрицей с единичным рангом, то можем восстановить решение, и релаксация будет точной. Если хотя бы одно из двух условий не выполнено, то восстановить решение не можем, и релаксация неточная. Ниже представлена возможная формулировка релаксированной задачи:

$$\begin{aligned} & f(W) \rightarrow \min_W, \\ \underline{s}_j & \leq \sum_{k: (j,k) \in E} (W_{jj} - W_{jk}) Y_{jk}^H \leq \bar{s}_j, \\ (\underline{V}_j)^2 & \leq W_{jj} \leq (\bar{V}_j)^2, \\ & W \geq 0. \end{aligned}$$

**3.2.2. Хордальная релаксация.** Данная релаксация, как и последующая, менее очевидна для понимания, но обладает преимуществом для больших разреженных сетей. Идея заключается в том, что изначальный граф сети заменяется на его хордальное расширение [16]. Хордальным называется граф, в котором любой цикл длины четыре и более имеет хорду, соединяющую несмежные вершины. Хордальное расширение графа, следовательно, является приведением исходного графа к хордальному добавлением дополнительных ребер (на рис. 3 изображен пример хордального расширения графа). Затем вместо

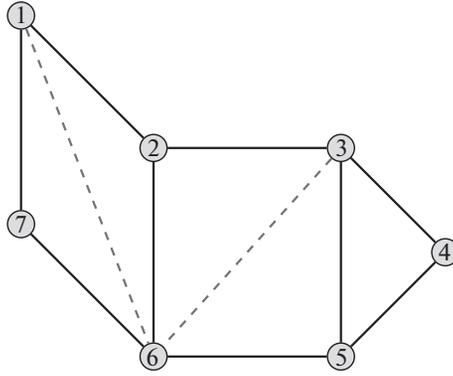


Рис. 3. Хордальное расширение графа.

того чтобы проверять знакоопределенность всей матрицы, нужно проверить знакоопределенность только нескольких неразрезанных подматриц (соответствующих максимальным кликам хордального графа) значительно меньшего размера. Максимальной кликой называется такой полный подграф исходного графа, к которому нельзя добавить еще одну вершину, так чтобы он продолжал оставаться полным. Иными словами, никакая другая клика графа не содержит в себе максимальную клику целиком.

Получаем следующую матрицу для хордального расширения графа

$$W_{ch} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & - & - & - & \mathbf{W}_{16} & W_{17} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} & - & - & W_{26} & - \\ - & W_{32} & W_{33} & W_{34} & W_{35} & \mathbf{W}_{36} & - \\ - & - & W_{43} & W_{44} & W_{45} & - & - \\ - & - & W_{53} & W_{54} & W_{55} & W_{56} & - \\ \mathbf{W}_{61} & W_{62} & \mathbf{W}_{63} & - & W_{65} & W_{66} & W_{67} \\ W_{71} & - & - & - & - & W_{76} & W_{77} \end{pmatrix}.$$

После расширения исходного графа до хордального появляются новые ребра, следовательно, в матрице  $W$  должны появиться новые элементы (соответствующие новым ребрам). Частично заполненную матрицу на основе хордального расширения обозначим через  $W_{ch}$ .

Полученный хордальный граф имеет пять максимальных клик –  $\{1, 6, 7\}$ ,  $\{1, 2, 6\}$ ,  $\{2, 3, 6\}$ ,  $\{3, 5, 6\}$ ,  $\{3, 4, 5\}$ . Значит, необходимо проверить знакоопределенность только пяти подматриц, вместо проверки всей исходной матрицы  $W_{ch}$ . Подматрица для, например, клики  $\{3, 4, 5\}$ :

$$W_{ch} = \begin{pmatrix} W_{33} & W_{34} & W_{35} \\ W_{43} & W_{44} & W_{45} \\ W_{53} & W_{54} & W_{55} \end{pmatrix}.$$

Приведем формулировку хордальной релаксации для исходной задачи:

$$\begin{aligned}
 f(W_{ch}) &\rightarrow \min_{W_{ch}}, \\
 \underline{s}_j &\leq \sum_{k:(j,k) \in E} ([W_{ch}]_{jj} - [W_{ch}]_{jk}) Y_{jk}^H \leq \bar{s}_j, \\
 (\underline{V}_j)^2 &\leq [W_{ch}]_{jj} \leq (\bar{V}_j)^2,
 \end{aligned}$$

$W_{ch}(C) \succeq 0, \forall C : C$  – максимальная клика графа  $W_{ch}$ .

Условия  $W \succeq 0$  и  $\text{rank}(W) = 1$  заменились на  $W_{ch}(C) \succeq 0$  и  $\text{rank}(W_{ch}(C)) = 1$  (последнее условие релаксируется как невыпуклое) по всем максимальным кликам хордального расширения исходного графа  $G$ . Если полученное оптимальное решение релаксированной задачи удовлетворяет этим условиям, то можно однозначно дополнить исходную частично заполненную матрицу до полной матрицы, которая также будет неотрицательно определенной с единичным рангом, а значит, можно восстановить оптимальный режим  $V^*$ .

**3.2.3. Коническая релаксация.** Данная релаксация похожа на предыдущую. Только теперь вместо клик рассматриваются все ребра  $e = (j, k) \in E$  и проверяется знакоопределенность соответствующих подматриц. Общий вид подматрицы для некоторого ребра  $(j, k)$  выглядит так:

$$W(e) = \begin{pmatrix} W_{jj} & W_{jk} \\ W_{kj} & W_{kk} \end{pmatrix}.$$

Только здесь  $\text{rank}(W) = 1$  и  $W \succeq 0$  заменяются на  $\text{rank}(W(e)) = 1$  и  $W(e) \succeq 0$ , где  $e = (j, k) \in E$ , так как  $[W_{jj}][W_{kk}] \geq |W_{jk}|^2, \forall e = (j, k) \in E$  согласно следующим выкладкам:

$$\begin{aligned}
 W_{jk} &= V_j V_k^H, \\
 W_{jk} W_{jk}^H &= V_j V_k^H V_j^H V_k, \\
 |W_{jk}|^2 &= W_{jj} W_{kk}, \\
 |W_{jk}|^2 &\leq W_{jj} W_{kk}. \\
 f(W) &\rightarrow \min_W, \\
 \underline{s}_j &\leq \sum_{k:(j,k) \in E} (W_{jj} - W_{jk}) Y_{jk}^H \leq \bar{s}_j, \\
 (\underline{V}_j)^2 &\leq W_{jj} \leq (\bar{V}_j)^2, \\
 W(e) &\succeq 0, \quad \forall e \in E.
 \end{aligned}$$

Условие  $\text{rank}(W) = 1$  заменяется на условия  $\text{rank}(W(e)) = 1, \forall e = (j, k) \in E$ . Полученное решение должно удовлетворять условиям на неотрицательную определенность и ранг для каждой подматрицы, соответствующей неко-

торому ребру графа. Дополнительно должно выполняться циклическое условие для любого цикла  $(n_1, \dots, n_k)$  в графе  $G$

$$\angle W_{n_1, n_2} + \dots + \angle W_{n_k, n_1} = 0 \pmod{2\pi}.$$

Если эти три условия выполняются, то можно однозначно дополнить частичную матрицу до полной с теми же свойствами (знакоопределенность и ранг) и восстановить  $V^*$ .

Более подробно с тремя рассмотренными релаксациями можно ознакомиться в [17, 18].

### 3.3. Релаксация моментами

Данный подход рассматривается в [19, 20]. Метод заключается в переформулировании исходной задачи OPF (2) с помощью специально сконструированных матриц таким образом, что полученная задача становится так называемой Generalized Moment Problem. Если говорить конкретно о задаче OPF, то она превращается в минимизацию некоторого выпуклого функционала с набором условий, состоящим из неотрицательно определенных матриц.

Формулу (6) можно переписать немного иначе, разбив  $s_j$  отдельно на действительную и мнимую части. Обозначим через  $V_j^d, V_j^q$  действительную и мнимую части напряжения  $V$  соответственно, аналогично разобьем матрицу проводимости  $Y_{adm} = G + iB$ . Тогда

$$(21) \quad \Re(s_j) = V_j^d \sum_{k=1}^n (G_{jk}V_k^d - B_{jk}V_k^q) + V_j^q \sum_{k=1}^n (B_{jk}V_k^d + G_{jk}V_k^q),$$

$$(22) \quad \Im(s_j) = V_j^d \sum_{k=1}^n (-B_{jk}V_k^d - G_{jk}V_k^q) + V_j^q \sum_{k=1}^n (G_{jk}V_k^d - B_{jk}V_k^q).$$

Из (21) и (22) легко получить формулы для активной и реактивной генераций на узлах

$$(23) \quad P_j^g = f_{P_j^g}(V^d, V^q) = V_j^d \sum_{k=1}^n (G_{jk}V_k^d - B_{jk}V_k^q) + V_j^q \sum_{k=1}^n (B_{jk}V_k^d + G_{jk}V_k^q) + P_j^l,$$

$$(24) \quad Q_j^g = f_{Q_j^g}(V^d, V^q) = V_j^d \sum_{k=1}^n (-B_{jk}V_k^d - G_{jk}V_k^q) + V_j^q \sum_{k=1}^n (G_{jk}V_k^d - B_{jk}V_k^q) + P_j^l.$$

Кроме того,

$$(25) \quad |V_j|^2 = f_{V_j}(V^d, V^q) = (V_j^d)^2 + (V_j^q)^2.$$

Сформулируем еще раз задачу OPF в описанных обозначениях. Ограничимся частным случаем, в котором минимизируется генерация на первом узле при ограничениях на напряжение и удовлетворение спроса на остальных узлах.

$$\begin{aligned}
 f_{P_1^g} &\rightarrow \min, \\
 f_{P_k^g} &\geq P_k^l, \quad \forall k \in N, \\
 f_{Q_k^g} &\geq Q_k^l, \quad \forall k \in N, \\
 (V_k^{\min})^2 &\leq f_{V_k}(V^d, V^q) \leq (V_k^{\max})^2, \quad \forall k \in N, \\
 V_1^q &= 0.
 \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим, как из (21)–(25) получается релаксация по методу моментов. Введем вектор  $x$ , который овеществляет вектор напряжений:

$$x = [V_1^d, \dots, V_n^d, V_1^q, \dots, V_n^q]^\top \in \mathbb{R}^{2n},$$

$x^\alpha$  – моном степени  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}]^\top$ ,

$$x^\alpha = (V_1^d)^{\alpha_1} \dots (V_n^q)^{\alpha_n}, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j = \alpha.$$

Тогда полином  $g(x)$  с коэффициентами  $g_\alpha$  равен

$$g(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{2n}} g_\alpha x^\alpha.$$

Мономы  $x^\alpha$  можно заменить на скаляры  $y_\alpha$  и получить линейный функционал

$$L_y\{g\} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{2n}} g_\alpha y_\alpha.$$

Замена происходит на основе степеней мономов, т.е. для двух узлов моном  $(V_1^d)(V_2^d)^2(V_1^q)(V_2^q)^2$  переходит в  $y_{1212}$ . Аналогично будут записываться функционалы, например

$$g(x) = -1 + (V_2^d)^2 + (V_2^q)^2 \rightarrow L_y\{g\} = -y_{000} + y_{020} + y_{002}.$$

Для релаксации методом моментов порядка  $\gamma$  вводится вектор мономов порядка  $\gamma$

$$x_\gamma = [1, V_1^d, \dots, V_n^q, (V_1^d)^2, V_1^d V_2^d, \dots, (V_n^q)^2, (V_1^d)^3, \dots, (V_n^q)^\gamma]^\top.$$

Определим матрицу моментов  $M_\gamma(y) = L_y(x_\gamma x_\gamma^\top)$ . Для этого вначале перемножаются вектор-столбец  $x_\gamma$  на вектор-строку  $x_\gamma^\top$ , в результате получается

матрица, элементами которой являются различные мономы, которые в дальнейшем заменяются на  $y_\alpha$  по вышеописанному правилу. Например, пусть  $x = [1, x_1, x_2]$  и  $\gamma = 1$ , тогда

$$L_y(x_1 x_1^\top) = L_y \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_1^2 & x_1 x_2 \\ x_2 & x_1 x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{00} & y_{10} & y_{01} \\ y_{10} & y_{20} & y_{11} \\ y_{01} & y_{11} & y_{02} \end{pmatrix} = M_1(y).$$

Последнее необходимое понятие – это локализационная матрица, которая строится на основе матрицы моментов для заданного функционала. Если заданный функционал  $f$  имеет степень  $2\beta$  или  $2\beta - 1$ , то сначала строится матрица момента  $\gamma - \beta$ , каждый элемент которой затем умножается на  $f$ , т.е.

$$M_{\gamma-\beta}(f(y)y) = L_y(f(y)x_{\gamma-\beta}x_{\gamma-\beta}^\top).$$

Для примера выше пусть  $f(x) = 1 + x_1^2 + x_2^2$ , тогда

$$\begin{aligned} M_1(f(y)y) &= L_y \begin{pmatrix} 1 + x_1^2 + x_2^2 & x_1 + x_1^3 + x_1 x_2^2 & x_2 + x_1^2 x_2 + x_2^3 \\ x_1 + x_1^3 + x_1 x_2^2 & x_1^2 + x_1^4 + x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2 + x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 \\ x_2 + x_1^2 x_2 + x_2^3 & x_1 x_2 + x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 & x_2^2 + x_1^2 x_2^2 + x_2^4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} y_{00} + y_{20} + y_{02} & y_{10} + y_{30} + y_{12} & y_{01} + y_{21} + y_{03} \\ y_{10} + y_{30} + y_{12} & y_{20} + y_{40} + y_{22} & y_{11} + y_{31} + y_{13} \\ y_{01} + y_{21} + y_{03} & y_{11} + y_{31} + y_{13} & y_{02} + y_{22} + y_{04} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Подробнее теория в основе метода моментов описана в [21, 22].

Используя описанный инструментарий можем сформулировать релаксацию по методу моментов для задачи OPF:

$$\begin{aligned} &\min_y L_y \left( f_{P_1^g} \right), \\ &M_{\gamma-1} \left( \left( f_{P_k^g} - P_k^l \right) y \right) \succeq 0, \quad \forall k \in N, \\ &M_{\gamma-1} \left( \left( f_{Q_k^g} - P_Q^l \right) y \right) \succeq 0, \quad \forall k \in N, \\ &M_{\gamma-1} \left( \left( f_{V_k} - V_k^{\min} \right) y \right) \succeq 0, \quad \forall k \in N, \\ &M_{\gamma-1} \left( \left( V_k^{\max} - f_{V_k} \right) y \right) \succeq 0, \quad \forall k \in N, \\ &M_\gamma(y) \succeq 0, \\ &y_{00\dots 0} = 1, \\ &y_{\cdot p \dots} = 0, \quad \forall p \geq 1. \end{aligned}$$

Условие  $y_{\cdot p \dots} = 0$  – эквивалент условия  $V_1^q = 0$ , можно сказать, что этим условием “задается точка отсчета” для напряжений (точка означает любое число из интервала  $[0, \gamma]$ ), т. е. любой моном, в который входит  $V_1^q$ , равен нулю.

С увеличением  $\gamma$  растет сложность задачи, но при этом увеличивается качество решения. На практике метод оказывается достаточно сложным из-за того, что сильно разрастается количество переменных с ростом  $\gamma$ . Уже для задачи из двух узлов, матрица второго момента  $M_2$  будет размера  $10 \times 10$ , а для задачи из 10 узлов —  $210 \times 210$  (без учета симметричных элементов). Реальные сети могут состоять из тысячи узлов, что делают данную релаксацию ресурсоемкой и затрудняют ее применение на практике.

Пример конструирования данной релаксации хорошо описан в [19].

### 3.4. QC-релаксация

В основе метода лежат ранее рассмотренные формулировки, а невыпуклые ограничения заменяются на их выпуклую оболочку. В частности, речь идет об условии  $W_{jk} = V_j V_k^H$ , которое ранее превращалось в два новых условия  $\text{rank}(W) = 1$  и  $W \succeq 0$ . В [23] авторы метода предлагают использовать тригонометрическое представление для напряжения и использовать выпуклые оболочки.

Воспользовавшись тригонометрическим представлением комплексных напряжений  $V = v(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ , перепишем матрицу  $W = VV^H$  следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{jk} &= V_j V_k^H = v_j v_k (\cos(\theta_j) + i \sin(\theta_j)) (\cos(\theta_k) + i \sin(\theta_k)), \quad \forall (j, k) \in E, \\ \Re(W_{jk}) &= v_j v_k \cos(\theta_j - \theta_k), \quad \forall (j, k) \in E, \\ \Im(W_{jk}) &= v_j v_k \sin(\theta_j - \theta_k), \quad \forall (j, k) \in E, \\ W_{jj} &= v_j^2, \quad \forall i \in E. \end{aligned}$$

Введем выпуклые оболочки для функций  $x^2$ ,  $xy$ ,  $\cos(x)$ ,  $\sin(x)$  на интервалах  $[x^l, x^u]$  и  $[y^l, y^u]$  (подробнее в [24]).

$$\begin{aligned} \text{conv}(x^2) &= \begin{cases} \check{x} \geq x^2 \\ \check{x} \leq (x^l + x^u)x - x^l x^u, \end{cases} \\ \text{conv}(xy) &= \begin{cases} \check{x}y \geq x^l y + y^l x - x^l y^l \\ \check{x}y \geq x^u y + y^u x - x^u y^u \\ \check{x}y \leq x^l y + y^u x - x^l y^u \\ \check{x}y \leq x^u y + y^l x - x^u y^l, \end{cases} \\ \text{conv}(\sin(\theta)) &= \begin{cases} \check{s}\theta \leq \cos\left(\frac{\theta^u}{2}\right) \left(\theta - \frac{\theta^u}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta^u}{2}\right) \\ \check{s}\theta \geq \cos\left(\frac{\theta^u}{2}\right) \left(\theta + \frac{\theta^u}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta^u}{2}\right), \end{cases} \\ \text{conv}(\cos(\theta)) &= \begin{cases} \check{c}\theta \leq 1 - \frac{1 - \cos(\theta^u)}{(\theta^u)^2} \theta^2 \\ \check{c}\theta \geq \cos(\theta^u). \end{cases} \end{aligned}$$

С использованием полученных формул переписывается условие  $W = V_j V_k^H$ .

$$\begin{aligned} W_{jj} = v_j^2 &\rightarrow \text{conv}(v_j^2) \Re(W_{jk}) = v_j v_k \cos(\theta_j - \theta_k) \rightarrow \\ &\rightarrow \text{conv}(\text{conv}(v_j v_k) \text{conv}(\cos(\theta_j - \theta_k))) \Im(W_{jk}) = \\ &= v_j v_k \sin(\theta_j - \theta_k) \rightarrow \text{conv}(\text{conv}(v_j v_k) \text{conv}(\sin(\theta_j - \theta_k))). \end{aligned}$$

Авторы утверждают, что метод не доминируется SDP-релаксацией и доминирует SOCP-релаксацию.

#### 4. Реализация на тестовом примере

В качестве тестового примера была выбрана простая сеть из четырех узлов (см. рис. 4), представленная в библиотеке MATPOWER [25]. Для решения оптимизационных задач используется MatLab и библиотека CVX [26] с солвером Mosek [27].

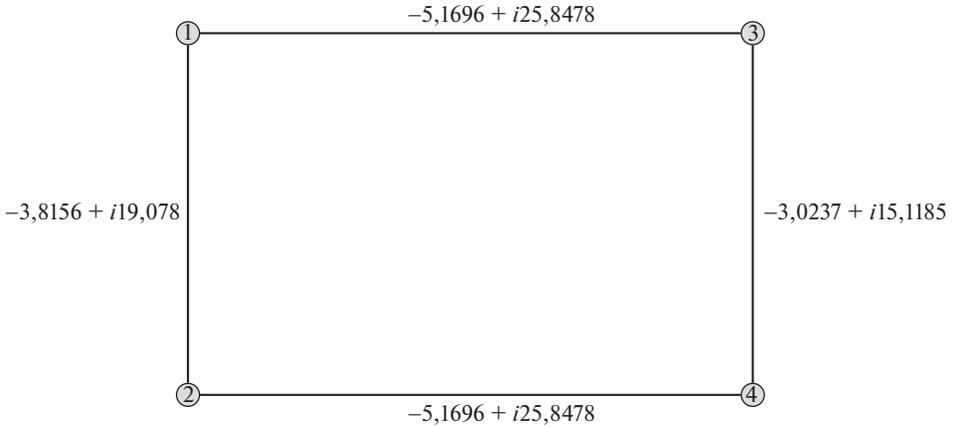


Рис. 4. Граф сети из четырех узлов со значениями проводимости для линий.

В сети имеется два генератора на первом и четвертом узлах, второй и третий узлы являются чистыми потребителями. Граф неориентированный, поэтому если имеется ребро  $(j, k)$ , то также имеется и ребро  $(k, j)$ . Спрос на узлах представлен в табл. 1.

**Таблица 1.** Потребление в сети

Номер узла	Потребление $P_j^l + iQ_j^l$
1	$0,5 + i0,31$
2	$1,7 + i1,05$
3	$2 + i1,23$
4	$0,8 + i0,5$
Суммарное потребление	$5 + i3,09$

$N = \{1, 2, 3, 4\}$  – узлы,

$E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  – ребра (линии электропередач),

$\mathbb{G} = \{1, 4\}$  – множество генераторов.

При этом генерация активной мощности на узле 4 не более чем 2.0 р.и.<sup>4</sup> ( $\overline{P}_4^g \leq 2.0$ ). Значения для  $\underline{V}_j$  и  $\overline{V}_j$  были установлены 0,9 и 1,1 соответственно.

В самой простой формулировке задача заключается в нахождении объемов генерации для удовлетворения заданного спроса на каждом из доступных генераторов при ограничении на напряжение и мощности генераторов.

$$(26) \quad \min_V \sum_{j \in \mathbb{G}} \Re(s_j) + P_j^l,$$

$$(27) \quad \underline{V}_j \leq |V_j| \leq \overline{V}_j, \quad \forall j = \overline{1, n},$$

$$(28) \quad \Re(s_j) + P_j^l = 0, \quad \forall j \notin \mathbb{G},$$

$$\Im(s_j) + Q_j^l = 0, \quad \forall j \notin \mathbb{G},$$

$$\Re(s_4) + P_4^l \leq \overline{P}_4^g.$$

В задаче (26) целевая функция заключается в минимизации генерации суммарной активной мощности на всех генераторах при ограничении (27) на напряжение на каждом узле и отсутствии генерации (28) на узлах-потребителях.

#### 4.1. Полуопределенная релаксация

Делаем замену переменных вида  $W = VV^H$ , перепишем исходную задачу в новых переменных, которыми являются элементы эрмитовой матрицы  $W$ :

$$\min_W \sum_{j \in \mathbb{G}} \Re(s_j) + P_j^l,$$

$$\underline{V}_j^2 \leq W_{jj} \leq \overline{V}_j^2, \quad \forall j = \overline{1, n},$$

$$\Re(s_j) + P_j^l = 0, \quad \forall j \notin \mathbb{G},$$

$$\Im(s_j) + Q_j^l = 0, \quad \forall j \notin \mathbb{G},$$

$$\Re(s_4) + P_4^l \leq \overline{P}_4^g,$$

$$W \succeq 0.$$

Для данного примера SDP-релаксация является точной. Матрица  $W$  имеет одно ненулевое собственное значение ( $rank(W) = 1$ ), и оно положительное ( $W \succeq 0$ ), значит, можно восстановить исходный вектор  $V$  по формуле

<sup>4</sup> per unit – относительные единицы. Все величины (комплексные напряжения, мощности) нормируются делением на базовую величину. Здесь базовое значение для мощности – 100, напряжения сразу вычисляются в относительных единицах.

**Таблица 2.** Оптимальные режимы релаксаций

Номер узла	Напряжение ( $ V  \angle V$ )		
	SDP	Chordal	SOCP
1	1,0488 $\angle$ 1,3843°	1,0488 $\angle$ 1,3839°	1,0488 $\angle$ 1,378°
2	1,0183 $\angle$ - 1,1234°	1,0183 $\angle$ - 1,1236°	1,0183 $\angle$ - 1,121°
3	1,0094 $\angle$ - 1,3536°	1,0094 $\angle$ - 1,3539°	1,0094 $\angle$ - 1,3575°
4	1,0476 $\angle$ 0°	1,0476 $\angle$ 0°	1,0476 $\angle$ 0°

**Таблица 3.** Генерация в оптимальном режиме

Номер узла	Генерация $P_j^g + iQ_j^g$		
	SDP	Chordal	SOCP
1	3,0447 + i1,6009	3,0447 + i1,6016	3,0447 + i1,6007
2	0	0	0
3	0	0	0
4	2 + i1,721	2 + i1,7203	2 + i1,7212
Суммарная генерация	5,0447 + i3,3219	5,0447 + i3,3219	5,0447 + 3,3219i

$V = \sqrt{\lambda}h$ , где  $\lambda$  — ненулевое собственное значение, а  $h$  — соответствующий собственный вектор матрицы  $W$ . Оптимальный режим и генерация в оптимальном режиме представлены в табл. 2 и 3 соответственно.

Потери активной мощности в сети составляют 0,0447 *р.и.*

#### 4.2. Хордальная релаксация

Граф сети не является хордальным, поэтому сначала необходимо найти его хордальное расширение. На рис. 5 представлено одно из трех возможных расширений.

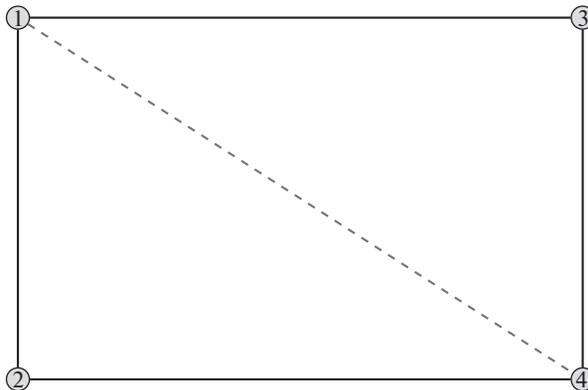


Рис. 5. Хордальное расширение графа сети из четырех узлов.

В этом графе имеются две максимальные клики —  $C_1 = \{1, 2, 4\}$  и  $C_2 = \{1, 3, 4\}$ . И условие  $W \succeq 0$  упрощается до  $W_{C_1} \succeq 0$  и  $W_{C_2} \succeq 0$ .

$$\begin{aligned} \min_W \sum_{j \in \mathbb{G}} \Re(s_j) + P_j^l, \\ \underline{V}_j^2 \leq W_{jj} \leq \overline{V}_j^2, \quad \forall j = \overline{1, n}, \\ \Re(s_j) + P_j^l = 0, \quad \forall j \notin \mathbb{G}, \\ \Im(s_j) + Q_j^l = 0, \quad \forall j \notin \mathbb{G}, \\ \Re(s_4) + P_4^l \leq \overline{P}_4^g, \\ W_{C_1} \succeq 0, \\ W_{C_2} \succeq 0. \end{aligned}$$

Решая задачу, получаем некоторую частичную матрицу  $W$ , ее подматрицы, соответствующие кликам  $C_1$  и  $C_2$ , являются неотрицательно определенными с рангом, равным одному. Следовательно, релаксация является точной и можно дополнить частично определенную матрицу  $W$  до полной неотрицательно определенной матрицы с единичным рангом. Восстанавливая режим, получаем режим, представленный в табл. 2. Режим такой же, как и для полуопределенной релаксации, но со слегка отличными углами. Генерация отличается только реактивной составляющей. Данные приведены в табл. 3.

#### 4.3. Коническая релаксация

В данном случае не надо делать никаких дополнительных преобразований графа. Условие  $W \succeq 0$  заменяется на  $W(e) \succeq 0, \forall (j, k) \in \mathbb{E}$ . Т.е. для каждого ребра графа строится матрица  $(2 \times 2)$  вида

$$W(e) = \begin{bmatrix} W_{jj} & W_{jk} \\ W_{kj} & W_{kk} \end{bmatrix}.$$

Напомним, что матрица  $W$  является эрмитовой, поэтому  $W_{jk} = W_{kj}^H$ . В остальном запись задачи остается похожей на случай хордальной релаксации.

$$\begin{aligned} \min_W \sum_{j \in \mathbb{G}} \Re(s_j) + P_j^l, \\ \underline{V}_j^2 \leq W_{jj} \leq \overline{V}_j^2, \quad \forall j = \overline{1, n}, \\ \Re(s_j) + P_j^l = 0, \quad \forall j \notin \mathbb{G}, \\ \Im(s_j) + Q_j^l = 0, \quad \forall j \notin \mathbb{G}, \\ \Re(s_4) + P_4^l \leq \overline{P}_4^g, \\ W(e) \succeq 0, \forall e = (j, k) \in E. \end{aligned}$$

Все подматрицы, соответствующие ребрам графа, являются неотрицательно определенными с единичным рангом. Также необходимо проверить условие на цикл.

В графе есть один цикл (без учета направления движения) —  $((1, 3), (3, 4), (4, 2), (2, 1))$ . Оптимальное решение релаксированной задачи

$$\begin{pmatrix} 1,1000 + 0i & 1,0670 + 0,0468i & 1,0574 + 0,0505i & - \\ 1,0670 - 0,0468i & 1,0369 + 0,0000i & - & 1,0665 - 0,0209i \\ 1,0574 - 0,0505i & - & 1,0188 + 0,0000i & 1,0571 - 0,0251i \\ - & 1,0665 + 0,0209i & 1,0571 + 0,0251i & 1,0975 + 0i \end{pmatrix}.$$

Прочерки соответствуют неопределенным элементам. Проверяя циклическое условие, получаем

$$\Im(W(1, 3)) + \Im(W(3, 4)) + \Im(W(4, 2)) + \Im(W(2, 1)) \approx 0 \pmod{2\pi}.$$

Следовательно, релаксация точная, можно восстановить оптимальный режим.

Значения  $|V_j|$  для всех узлов восстанавливаются по формуле

$$|V_j| = \sqrt{W_{jj}}.$$

Значения углов восстанавливаются из исходной матрицы  $W^*$  с использованием подматрицы для ребер  $W(e)$ . Пусть генератор на узле 4 будет “слаком”<sup>5</sup>, т.е. зафиксируем  $\angle V_4 = 0$ . Восстановить угол для узла  $k$ , зная угол на смежном узле  $j$ , можно следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{kj} &= V_k V_j^H, \\ |W_{kj}| &= |V_k| |V_j|, \\ \angle W_{kj} &= e^{i(\angle V_k - \angle V_j)}, \\ \angle V_k &= \angle W_{kj} + \angle V_j. \end{aligned}$$

Восстанавливая напряжения описанным способом, получаем режим, аналогичный полуопределенной и хордальной релаксациям (табл. 2 и 3).

В этой главе были подробно разобраны три эквивалентные релаксации для AC-формулировки задачи OPF. На простом примере было показано, как записать релаксированную версию исходной задачи в виде, в котором ее можно будет решить с помощью солвера для выпуклых задач (например, CVX). И было показано, как восстановить оптимальный режим из однорангового решения релаксированной задачи. Если для SDP-релаксации процедура довольно проста и очевидна, то в случае конической релаксации все не так тривиально.

<sup>5</sup> slack bus – специальный узел сети, используемый при решении задач о потоках в энергетических сетях, для балансировки активной и реактивной мощностей в сети.

Для данного простого примера, хотя сеть не является древовидной, все три релаксации оказались точными, полученные решения и восстановленные режимы отличаются лишь незначительно. При этом все различия только в реактивной генерации, точнее в распределении некоторой оптимальной величины реактивной генерации между двумя генераторами, что ведет к отличиям в углах напряжения в оптимальном режиме.

В [10] приводятся численные эксперименты, из которых видно, что с ростом размерности задачи коническая релаксация начинает выигрывать по времени. Для сети из почти 2400 узлов время работы в 6,5 раз меньше, чем у хордальной. А SDP-релаксацию для 2400 узлов авторы даже не запускали.

## 5. Заключение

Для определения оптимального режима работы энергетической сети используются различные подходы, но самым точным режимом является решение задачи AC-OPF. Это достигается за счет включения в формулировку различных инженерных ограничений, которые позволяют очень точно учесть все особенности конкретной электроэнергетической сети. По этой причине задача очень важна для индустрии.

Главной сложностью AC-формулировки является невыпуклость задачи, что создает трудности для быстрого и точного решения. Справиться с этой проблемой позволяют выпуклые релаксации – исходное множество допустимых решений заменяется на его выпуклую оболочку, на которой и решается задача. При этом сохраняется исходная физическая структура задачи. К сожалению, релаксации не всегда оказываются точными. На данный момент сформулированы условия точной релаксации только для древовидных сетей, а в реальных сетях не всегда отсутствуют циклы.

В данной работе были описаны пять различных релаксаций: полуопределенная (SDP), хордальная, коническая (SOCP), релаксация моментов и QC-релаксация. Использование первых трех релаксаций было по шагам разобрано на простом примере. Каждая из них обладает своими преимуществами и недостатками. Например, полуопределенная релаксация очень проста для понимания и использования. Хордальная требует дополнительного построения хордального расширения графа сети и нахождения максимальных клик, что также является нетривиальной задачей, но это необходимо сделать один раз для конкретной сети. За счет перехода от полной матрицы сети к подматрицам клик удается воспользоваться разреженностью сети, не сильно проигрывая полуопределенной релаксации по точности. Коническая релаксация также использует разреженность сети и не требует дополнительных преобразований графа, но является менее точной по сравнению с полуопределенной и хордальной. Релаксация моментов является тем точнее, чем выше ее порядок, но релаксация высокого порядка вводит огромное количество новых переменных, которые при реальных размерах сети могут стать причиной увеличения времени получения решения или вовсе сделать задачу неразрешимой. QC-релаксация достигает точности полуопределенной релаксации, но не требует рангового условия, т.е. всегда можно восстановить напряжения. Кроме того, QC обладает схожей с SDP точностью.

В работе была рассмотрена простая постановка задачи Optimal Power Flow, с классическими генераторами и заданным спросом. Вообще говоря, реальная задача является куда более сложной в силу наличия дополнительных инженерных ограничений. Во-первых, за последние годы существенно увеличилась доля альтернативных генераторов, которые предоставляют очень дешевую энергию, но обладают высокой нестабильностью. Поэтому добавление возобновляемых источников энергии в задачу ведет к появлению разного рода неопределенностей. Помимо возобновляемой генерации, другим существенным источником неопределенностей является спрос, который также является случайной величиной. Добавление неопределенностей в классическую формулировку ведет к задаче Stochastic Optimal Power Flow, решая которую, не хотелось бы оставаться слишком консервативным (что часто бывает при решении стохастических оптимизационных задач), так как незначительные улучшения в решении ведут к значительной экономии денег. Во-вторых, на практике необходимо учитывать большое число различных критериев безопасности или наличия резервов генерации, например  $(N - 1)$ -критерий.<sup>6</sup>

Тем не менее, главным вопросом остается набор условий, при которых релаксации остаются точными для смешанных сетей. Пока не удастся ответить на этот вопрос даже в случае простой AC-формулировки без стохастики и дополнительных инженерных ограничений. Случается так, что небольшие изменения данных приводят к тому, что конкретная задача становится неразрешимой или полученное решение имеет ранг больше 1, что не позволит восстановить оптимальный режим. Помимо сложностей из-за невыпуклости и неточности релаксаций, задача может быть неразрешимой из-за слишком большой размерности, например, Российская сеть включает примерно 9000 узлов, следовательно, в SDP-релаксации будет симметричная  $(9000 \times 9000)$ -матрица переменных. SDP такой размерности практически не решаемы или время нахождения решения превысит доступный лимит времени. Конечно, хордальная и коническая релаксация позволяют снизить размерность за счет разреженности сети, но этого может оказаться недостаточно или они могут оказаться неточными. Для этого необходима разработка численных методов, которые позволят распараллелить задачу.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cain M., O'Neill R., Castillo A.* History of optimal power flow and formulations // Federal Energy Regulatory Commission. 2012. V. 1. P. 1–36.
2. *Stott B., Alsac O.* Optimal Power Flow-Basic Requirements for Real-Life Problems and Their Solutions // SEPOPE XII Sympos., Rio de Janeiro, Brazil, 2012. V. 1. P. 1866–76.
3. *Веников В.А., Суханов Р.П.* Кибернетические модели электрических систем: М.: Энергоиздат, 1982.
4. *Stott B., Jardim J., Alsac O.* DC Power Flow Revisited // IEEE Transact. Power Syst. 2009. V. 24. No. 3. P. 1290–1300.
5. *Momoh J.* Electric Power System Applications of Optimization. Boca Raton: CRC Press, 2009.

---

<sup>6</sup> Оптимальный режим должен оставаться достижимым при выходе из строя одного генератора или линии.

6. *Zhifeng Q., Deconinck G., Belmans R.* A Literature Survey of Optimal Power Flow Problems in the Electricity Market Context // IEEE/PES Power Syst. Conf. Expos. 2009. V. 1. P. 1–6.
7. *Gan L., Li N., Topcu U., Low S.* Exact Convex Relaxation of Optimal Power Flow in Radial Networks // IEEE Transact. Autom. Control. 2015. V. 60. No. 1. P. 72–87.
8. *Zorin I., Vasilyev S., Gryazina E.* Fragility of the semidefinite relaxation for the optimal power flow problem // IEEE Int. Conf. Sci. Electr. Engineer. (ICSEE). 2016. P. 1–5.
9. *Boyd L., Vandenberghe S.* Semidefinite Programming // SIAM Rev. 1996. V. 38. No. 1. P. 49–95.
10. *Bose S., Low S., Teeraratkul T., Hassibi B.* Equivalent Relaxations of Optimal Power Flow // IEEE Transact. Autom. Control. 2015. V. 60. No. 3. P. 729–742.
11. *Lavaei J., Low S.* Zero Duality Gap in Optimal Power Flow Problem // IEEE Transact. Power Syst. 2011. V. 27. P. 92–107.
12. *Capitanescu F.* Critical review of recent advances and further developments needed in AC optimal power flow // Electr. Power Syst. Res. 2016. V. 136. P. 57–68.
13. *Lesieutre B., Molzahn D., Borden A., DeMarco C.* Examining the limits of the application of semidefinite programming to power flow problems // Proc. Allerton Conf. 2011. V. 1. P. 1492–1499.
14. *Robert G., Johnson C., Sa E., Wolkowicz H.* Positive Definite Completions of Partial Hermitian Matrices // Linear Algebra Its Appl. 1984. V. 58. P. 109–24.
15. *Woerdeman H.* Minimal Rank Completions for Block Matrices // Linear Algebra Its Appl. 1989. V. 121. P. 105–22.
16. *Mituhiko F., Kojima M., Murota K., Nakata K.* Exploiting Sparsity in Semidefinite Programming via Matrix Completion I: General Framework // SIAM J. Optim. 2001. V. 11. P. 647–74.
17. *Low S.* Convex Relaxation of Optimal Power Flow-Part I: Formulations and Equivalence // IEEE Transact. Control Net. Syst. 2014. V. 1 No. 1. P. 15–27.
18. *Low S.* Convex Relaxation of Optimal Power Flow-Part II: Exactness // IEEE Transact. Control Net. Syst. 2014. V. 1. No. 2. P. 177–189.
19. *Molzahn D., Hiskens I.* Moment-Based Relaxation of the Optimal Power Flow Problem // Power Syst. Comput. Conf. (PSCC). 2014. V. 1. P. 1–7.
20. *Josz C., Maeght J., Panciatici P., Gilbert J.* Application of the Moment-SOS Approach to Global Optimization of the OPF Problem // IEEE Transact. Power Syst. 2015. V. 30. No. 1. P. 463–470.
21. *Lasserre J.* Global Optimization with Polynomials and the Problem of Moments // SIAM J. Optim. 2006. V. 11 No. 3. P. 796–817.
22. *Lasserre J.* Moments, Positive Polynomials and Their Applications. London: Imperial College Press, 2010.
23. *Coffrin C., Hijazi H., Van Hentenryck P.* The QC Relaxation: A Theoretical and Computational Study on Optimal Power Flow // IEEE Transact. Power Syst. 2016. V. 31. No. 4. P. 3008–3018.
24. *Hijazi H., Coffrin C., Van Hentenryck P.* Convex Quadratic Relaxations for Mixed-Integer Nonlinear Programs in Power Systems // Math. Program. Comput. 2017. V. 9. No. 3. P. 321–367.
25. *Zimmerman R., Murillo-Sanchez C., Thomas R.* MATPOWER: Steady-State Operations, Planning and Analysis Tools for Power Systems Research and Education // IEEE Transact. Power Syst. 2011. V. 26. No. 1. P. 12–19.

26. *Grant M., Boyd S., Ye Y.* CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, <http://cvxr.com/cvx>
27. Mosek Optimization Solver, <https://www.mosek.com>
28. University of Washington, Power Systems Test Case Archive, <http://www.ee.washington.edu/research/pstca>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакиным.*

Поступила в редакцию 21.05.2018

После доработки 02.08.2018

Принята к публикации 08.11.2018