

© 2019 г. А.И. ПЕСЧАНСКИЙ, д-р техн. наук (peschansky_sntu@mail.ru)
(Севастопольский государственный университет)

СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕНАДЕЖНОЙ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОТЕРЯМИ И ВРЕМЕННЫМ РЕЗЕРВОМ¹

Рассматривается ненадежная восстанавливаемая многоканальная система обслуживания с потерями, в которой во время обслуживания заявок могут происходить отказы каналов, но обслуживание будет продолжаться за счет случайного временного резерва. Входящий поток считается простейшим, а все остальные случайные величины, описывающие систему, имеют распределения общего вида. Построена полумарковская модель эволюции системы во времени и найдено стационарное распределение вложенной цепи Маркова. Получены выражения для определения стационарных вероятностей и средних стационарных времен пребывания системы в различных физических состояниях, которые позволяют оценить влияние временного резерва на стационарные характеристики системы.

Ключевые слова: многоканальная система обслуживания, временной резерв, полумарковский процесс, стационарное распределение вложенной цепи Маркова, стационарная вероятность состояний, среднее стационарное время пребывания в состояниях.

DOI: 10.1134/S0005231019040044

1. Введение

Анализу систем массового обслуживания посвящены многочисленные публикации. Обзор по ненадежным системам обслуживания можно найти, например, в [1–3]. Для улучшения показателей функционирования систем с отказами возможны различные методы. Так, в [4] исследованы модели с резервированным обслуживанием запросов разными узлами для кластера одноканальных систем с индивидуальными очередями. Для многоканальных систем с общей очередью модели систем с резервированным обслуживанием запросов предложены в [5–7]. В [8–11] рассмотрены модели ненадежной восстанавливаемой системы обслуживания с учетом проведения различных стратегий технического обслуживания. Еще одним методом повышения надежности технических систем является временное резервирование, когда для устранения причины отказа система имеет запас времени, в течение которого она выполняет свои функции (см., например, [12–14]).

Следует отметить, что наиболее полная теория построена для систем обслуживания, эволюция которых описывается марковскими процессами. Для

¹ Работа выполнена в рамках Государственного задания Минобрнауки Российской Федерации (№ 1.10513.2018/11.12), при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00704).

построения моделей таких систем необходимо, чтобы все случайные факторы, влияющие на эволюцию системы во времени, обладали отсутствием последствий, т.е. все случайные времена действия факторов имели бы показательные распределения. Если же некоторые из времен действия факторов имеют произвольные функции распределения, отличные от показательных, то построение и анализ систем обслуживания значительно усложняется. Для исследования таких систем, например, в [15, 16] применяется аппарат теории полумарковских процессов с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний. Этот аппарат используется и в данной статье, поскольку предполагается, что входящий в систему обслуживания поток заявок является простейшим, а все остальные случайные величины, определяющие эволюцию системы во времени, имеют распределения общего вида. Данная статья является обобщением на случай многокомпонентной системы построенной в [17] полумарковской модели однолинейной ненадежной восстанавливаемой системы с временным резервом.

2. Постановка задачи

В ненадежную восстанавливаемую N -компонентную систему обслуживания $M/G/N/0$ поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Время α_k обслуживания заявки k -м каналом имеет произвольную функцию распределения (ФР) $F_k(t) = P\{\alpha_k \leq t\}$ с плотностью распределения (ПР) $f_k(t)$, $k = \overline{1, N}$. Если в момент поступления заявки в систему свободно несколько работоспособных каналов, то с равной вероятностью она начинает обслуживаться любым из них. В момент обслуживания заявки канал может отказать. Длительность промежутка времени с момента начала обслуживания заявки до отказа канала — случайная величина (СВ) γ_k с ФР $\Phi_k(t)$ и ПР $\varphi_k(t)$. Отказ канала обнаруживается мгновенно и сразу начинается его восстановление, которое длится случайное время σ_k с ФР $\Psi_k(t)$ и ПР $\psi_k(t)$. После отказа канала обслуживание заявки продолжается за счет временного резерва с учетом времени уже проведенного обслуживания. Наличие временного резерва для каждого канала может рассматриваться как существование еще одного канала, который продолжает обслуживание заявки на период восстановления неисправного канала (расходуется резервное время) и простаивает во время исправной работы канала (резервное время не расходуется). Величина временного резерва — СВ ξ_k с ФР $R_k(t)$ и ПР $r_k(t)$.

Если во время обслуживания заявки за счет резерва происходит восстановление канала, то ему передается дообслуживание заявки с учетом уже проведенного времени обслуживания (в том числе и за счет временного резерва). Через случайное время γ_k после восстановления канала во время обслуживания все той же заявки вновь может произойти отказ канала. Обслуживание заявки снова продолжается за счет случайного временного резерва ξ_k . Таким образом, при обслуживании одной и той же заявки неоднократно может быть использован временной резерв.

Если во время обслуживания заявки за счет резерва исчерпывается его объем, то обслуживание заявки прерывается, она теряется и на дообслуживание не возвращается. Следующую заявку на обслуживание канал может принять после своего восстановления.

Предполагается, что все СВ, описывающие систему, независимы, имеют конечные математические ожидания $E\alpha_k$, $E\gamma_k$, $E\xi_k$ и $E\sigma_k$ и дисперсии.

Цель статьи — построить математическую модель функционирования системы, найти стационарные вероятности пребывания системы в различных физических состояниях и средние стационарные времена пребывания в этих состояниях, а также оценить влияние временного резерва на указанные характеристики.

3. Полумарковская модель системы

Для построения математической модели используем аппарат теории полумарковских процессов с дискретно-непрерывным множеством состояний [15, 16]. Пусть (E, ζ) — измеримое пространство: E интерпретируется как фазовое пространство состояний стохастической системы, ζ — булева алгебра выделенных подмножеств из E , интерпретируемых как совокупность наблюдаемых подмножеств состояний системы. Полумарковский процесс (ПМП) $S(t)$ определим с помощью процесса марковского восстановления $\{S_n, \Theta_n; n \geq 0\}$, где $\{S_n; n \geq 0\}$ — вложенная цепь Маркова (ВЦМ), Θ_n — времена пребывания полумарковского процесса в состояниях.

Определим фазовое пространство рассматриваемой системы обслуживания и опишем ее физические состояния. Каждый канал может находиться в следующих состояниях: 1_1 — канал в работоспособном состоянии обслуживает заявку; 1_2 — канал восстанавливается, заявка обслуживается за счет временного резерва; 2 — канал восстанавливается, заявка не обслуживается; 0 — канал в работоспособном состоянии ожидает заявку. Физические состояния всей системы описываются N -мерным вектором $\vec{d} = (d_1, \dots, d_N)$, k -я компонента которого указывает на физическое состояние k -го канала, т.е. $d_k = 0, 1_1, 1_2, 2$; $k = \overline{1, N}$. Для того чтобы в моменты изменения физических состояний системы она обладала марковским свойством, расширим фазовое пространство состояний добавлением непрерывных составляющих и перед вектором $\vec{d}$ укажем номер i канала, который изменил свое физическое состояние последним. В результате фазовое пространство состояний будет иметь вид $E = \{i\vec{d}\vec{x}\vec{z}\vec{u}, i = \overline{1, N}\}$, где $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)$ — вектор, координаты которого указывают на время, прошедшее с момента начала обслуживания заявки соответствующим каналом. Очевидно, что $x_k = 0$, если $d_k = 0$ или $d_k = 2$. Кроме того, $x_i = 0$ в момент принятия к обслуживанию заявки i -м каналом. Ненулевые координаты вектора $\vec{z} = (z_1, \dots, z_N)$ указывают на оставшееся время до отказа k -го канала, если $d_k = 1_1$, либо на оставшееся время резерва, если $d_k = 1_2$; для остальных физических состояний каналов соответствующие компоненты равны нулю. Кроме того, в моменты перехода i -го канала в состояния 1_1 и 1_2 компонента $z_i = 0$. Ненулевые компоненты вектора $\vec{u} = (u_1, \dots, u_N)$ — оставшиеся времена до восстановления соответствующих каналов в момент изменения физического состояния i -го канала. Очевидно, что $u_k > 0$, если $d_k = 1_2, 2$, и $u_k = 0$ для $d_k = 1_1, 0$.

Временные диаграммы функционирования k -го канала системы представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1 рассмотрены случаи, когда при обслуживании заявки резерв используется дважды, ни разу не используется и обслуживание

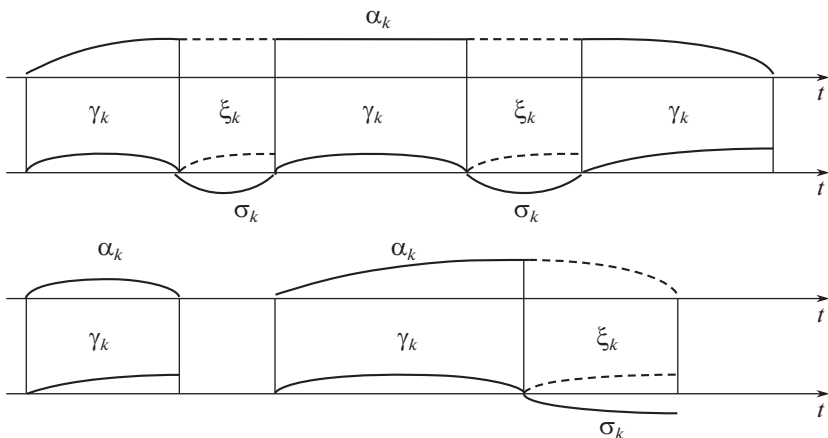


Рис. 1. Заявка обслужена.

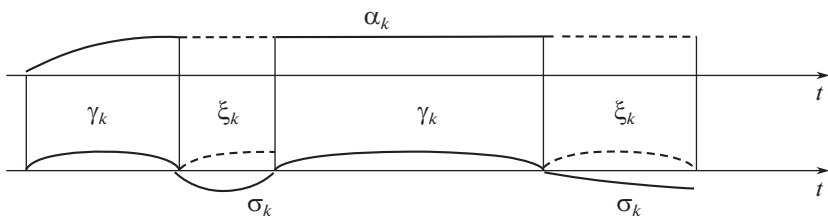


Рис. 2. Потеря заявки при обслуживании.

завершается за счет временного резерва. На рис. 2 представлен случай, когда при втором использовании объем резерва исчерпывается и заявка теряется.

Определим времена пребывания системы в состояниях. Для этого введем обозначения для вектора $i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u}$: $[\alpha_k - x_k]_+$ — остаточное время обслуживания заявки k -м каналом при условии, что время обслуживания превысило величину x_k . Эта СВ имеет ФР

$$P\{[\alpha_k - x_k]_+ \leq t\} = \frac{F_k(x_k + t) - F_k(x_k)}{\overline{F}_k(x_k)}$$

и ПР

$$\frac{f_k(x_k + t)}{\overline{F}_k(x_k)}.$$

В случае $x_k = 0$ будем полагать, что $[\alpha_k]_+$ есть α_k ;

$$\omega = \left(\bigwedge_{u_k > 0} u_k \right) \wedge \left(\bigwedge_{z_k > 0} z_k \right)$$

— минимум положительных компонент вектора $i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u}$ ($\wedge$ — знак минимума); $\Omega_d^{11}, \Omega_d^{12}, \Omega_d^2, \Omega_d^0$ — совокупности номеров вектора $\bar{d}$, равных $1_1, 1_2, 2$ и 0

соответственно; $\Omega_d^{1,1,2} = \Omega_d^{1,1} \cup \Omega_d^{1,2}$; $|\bar{d}|$ — число нулевых компонент вектора $\bar{d}$ (число элементов множества Ω_d^0), т.е. число свободных работоспособных каналов в системе.

С учетом введенных обозначений время пребывания системы в состоянии $i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u}$ в случае $|\bar{d}| \neq 0$ определяется формулой

$$(1) \quad \Theta_{i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u}} = \begin{cases} \beta \wedge \gamma_i \wedge \bigwedge_{k \in \Omega_d^{1,1,2}} [\alpha_k - x_k]_+ \wedge \omega, & d_i = 1_1, \\ \beta \wedge \sigma_i \wedge \xi_i \wedge \bigwedge_{k \in \Omega_d^{1,1,2}} [\alpha_k - x_k]_+ \wedge \omega, & d_i = 1_2, \\ \beta \wedge \bigwedge_{k \in \Omega_d^{1,1,2}} [\alpha_k - x_k]_+ \wedge \omega, & d_i = 0, 2. \end{cases}$$

Если какое-либо из множеств Ω_d^m ($m = 1_1, 1_2, 0, 2$) пустое, то соответствующая составляющая в (1) отсутствует. Так, в случае $\Omega_d^0 = \emptyset$, т.е. $|\bar{d}| = 0$, в (1) будет отсутствовать СВ β — время между поступлениями заявок.

Стохастические соотношения (1) означают, что времена пребывания в состояниях ПМП $S(t)$ задаются минимумом СВ, а события переходов ВЦМ из одного состояния в другие — событиями, которые определяются минимумом этих величин. Опишем переходные вероятности ВЦМ $\{S_n; n \geq 0\}$. Рассмотрим, например, состояние $i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u}$ в случае $d_i = 1_1$, $|\bar{d}| \neq 0$. События переходов из этого состояния определяются минимумом $\beta \wedge \gamma_i \wedge \bigwedge_{k \in \Omega_d^{1,1,2}} [\alpha_k - x_k]_+ \wedge \omega$.

Если $\Theta_{i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u}} = [\alpha_i - x_i]_+$, то система переходит в состояние $i\bar{d}'\bar{x}'\bar{z}'\bar{u}'$ с плотностью вероятности

$$p\{i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u} \rightarrow i\bar{d}'\bar{x}'\bar{z}'\bar{u}'\} = e^{-\lambda y} \bar{\Phi}_i(y) \frac{f_i(x_i + y)}{\bar{F}_i(x_i)} \prod_{\substack{k \in \Omega_d^{1,1,2} \\ k \neq i}} \frac{\bar{F}_k(x_k + y)}{\bar{F}_k(x_k)},$$

где

$$\bar{\Phi}_i(y) = 1 - \Phi_i(y), \quad \bar{F}_k(y) = 1 - F_k(y), \quad d'_i = 0, \quad d'_k = d_k, \quad k \neq i, \quad y < \omega;$$

$$x'_k = \begin{cases} x_k + y, & k \in \Omega_d^{1,1,2}, \quad k \neq i, \\ 0, & k \notin \Omega_d^{1,1,2}, \quad k = i, \end{cases}$$

$$z'_k = \begin{cases} z_k - y, & k \in \Omega_d^{1,1,2}, \quad k \neq i, \\ 0, & k \notin \Omega_d^{1,1,2}, \quad k = i, \end{cases}$$

$$u'_k = \begin{cases} u_k - y, & k \in \Omega_d^{1,2} \cup \Omega_d^2, \\ 0, & k \notin \Omega_d^{1,2} \cup \Omega_d^2. \end{cases}$$

Если $\Theta_{i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u}} = \gamma_i$, то

$$p\{i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u} \rightarrow i\bar{d}'\bar{x}'\bar{z}'\bar{u}'\} = e^{-\lambda y} \varphi_i(y) \prod_{k \in \Omega_d^{1,1,2}} \frac{\bar{F}_k(x_k + y)}{\bar{F}_k(x_k)},$$

где

$$\begin{aligned} d'_i &= 1_2, \quad d'_k = d_k, \quad k \neq i, \quad y < \omega; \\ x'_k &= \begin{cases} x_k + y, & k \in \Omega_d^{1_1, 1_2}, \\ 0, & k \notin \Omega_d^{1_1, 1_2}, \end{cases} \\ z'_k &= \begin{cases} z_k - y, & k \in \Omega_d^{1_1, 1_2}, \quad k \neq i, \\ 0, & k \notin \Omega_d^{1_1, 1_2}, \quad k = i, \end{cases} \\ u'_k &= \begin{cases} u_k - y, & k \in \Omega_d^{1_2} \cup \Omega_d^2, \\ 0, & k \notin \Omega_d^{1_2} \cup \Omega_d^2. \end{cases} \end{aligned}$$

В случае $\Theta_{i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u}} = \beta$ имеем

$$p\{i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u} \rightarrow j\bar{d}'\bar{x}'\bar{z}'\bar{u}'\} = \frac{\lambda}{|\bar{d}|} e^{-\lambda y} \varphi_i(y + z_i) \prod_{k \in \Omega_d^{1_1, 1_2}} \frac{\overline{F_k}(x_k + y)}{\overline{F_k}(x_k)},$$

где

$$\begin{aligned} j &\in \Omega_d^0, \quad d'_j = 1_1, \quad d'_k = d_k, \quad k \neq j, \quad y < \omega, \quad z_i > 0; \\ x'_k &= \begin{cases} x_k + y, & k \in \Omega_d^{1_1, 1_2}, \\ 0, & k \notin \Omega_d^{1_1, 1_2}, \end{cases} \\ z'_k &= \begin{cases} z_k - y, & k \in \Omega_d^{1_1, 1_2}, \quad k \neq i, \\ z_i, & k = i, \\ 0, & k \notin \Omega_d^{1_1, 1_2}, \end{cases} \\ u'_k &= \begin{cases} u_k - y, & k \in \Omega_d^{1_2} \cup \Omega_d^2, \\ 0, & k \notin \Omega_d^{1_2} \cup \Omega_d^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогично выписываются плотности вероятностей переходов в оставшиеся состояния.

Очевидно, что в случае пустого подмножества Ω_d^m ($m = 1_1, 1_2, 0, 2$) соответствующий множитель в выражении для плотности вероятности перехода отсутствует. Например, в случае $|\bar{d}| = 0$ отсутствует множитель $e^{-\lambda y}$.

4. Стационарное распределение вложенной цепи Маркова

Стационарное распределение ВЦМ $\{S_n, n \geq 0\}$ найдем из системы уравнений

$$(2) \quad \rho(B) = \int_E \rho(dx) P(x, B),$$

где $P(x, B)$ — вероятность перехода из состояния x в множество состояний B ; $\rho(\cdot)$ — стационарное распределение ВЦМ [15, 16].

Прежде чем сформулировать теорему о виде стационарного распределения, приведем некоторые сведения из теории процессов восстановления [18]. Функционирование k -го канала во время обслуживания заявки описывается альтернирующим процессом восстановления. Этот процесс образован моментами отказа канала (1_2 -восстановлениями) и следующими за ними моментами устранения неисправности (1_1 -восстановлениями) при условии, что временной резерв канала не исчерпывается. Длительность времени между соседними 1_1 -восстановлением и 1_2 -восстановлением имеет распределение $\Phi_k(x)$, а между 1_2 -восстановлением и 1_1 -восстановлением — несобственное распределение $\int_0^x \psi_k(t) \overline{R_k}(t) dt$. Поток 1_1 -восстановлений этого альтернирующего процесса образует простой обрывающийся процесс восстановления с несобственным распределением, равным свертке распределений $\Phi_k(x)$ и $\int_0^x \psi_k(t) \overline{R_k}(t) dt$. Обозначим через $H_k^{(1)}(x)$ функцию восстановления этого потока, т.е. среднее число восстановлений работоспособности k -го канала за время x . Плотность $h_k^{(1)}(x) = \frac{d}{dx} H_k^{(1)}(x)$ функции восстановления представляется в виде

$$h_k^{(1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_k * \psi_k \overline{R_k})^{*(n)}(x),$$

где $(\varphi_k * \psi_k \overline{R_k})^{*(n)}(x)$ — n -кратная свертка функции $\int_0^x \varphi_k(x-s) \psi_k(s) \overline{R_k}(s) ds$.

Поток 1_2 -восстановлений альтернирующего процесса образует обрывающийся процесс восстановления с запаздыванием, который определяется функциями $\Phi_k(x)$ и $\int_0^x \Phi_k(x-s) \psi_k(s) \overline{R_k}(s) ds$. Обозначим через $H_k^{(2)}(x)$ функцию восстановления этого процесса, т.е. среднее число отказов k -го канала за время x . Плотность $h_k^{(2)}(x)$ этой функции представима в виде

$$h_k^{(2)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_k * (\varphi_k * \psi_k \overline{R_k})^{*(n-1)} \right](x).$$

С рассмотренным альтернирующим процессом восстановления связаны следующие случайные величины. Прямое (остаточное) время восстановления (перескок) работоспособного канала (или остаточное время наработки на отказ) определяется как время от момента x до ближайшего момента 1_2 -восстановления альтернирующего процесса, т.е. до ближайшего отказа канала. Если в момент x канал находится в работоспособном состоянии, эта СВ имеет несобственное распределение с плотностью $v_k^{(1)}(x, z)$:

$$v_k^{(1)}(x, z) = \varphi_k(x+z) + \int_0^x h_k^{(1)}(s) \varphi_k(x+z-s) ds,$$

$$\int_0^{\infty} v_k^{(1)}(x, z) dz = 1 + H_k^{(1)}(x) - H_k^{(2)}(x).$$

Если в момент x канал восстанавливается и обслуживает заявку за счет резерва, то совместное несобственное распределение оставшегося времени до конца резерва и конца восстановления канала имеет плотность $v_k^{(12)}(x, u, z)$:

$$v_k^{(12)}(x, u, z) = \int_0^x h_k^{(2)}(s) \psi_k(x + u - s) r_k(x + z - s) ds;$$

$$\int_0^\infty dz \int_0^\infty v_k^{(12)}(x, u, z) du = H_k^{(2)}(x) - H_k^{(1)}(x) - \int_0^x H_k^{(2)}(x - s) \overline{\Psi}_k(s) r_k(s) ds.$$

Заметим, что

$$\int_0^\infty v_k^{(11)}(x, z) dz + \int_0^\infty dz \int_0^\infty v_k^{(12)}(x, u, z) du = 1 - \int_0^x H_k^{(2)}(x - s) \overline{\Psi}_k(s) r_k(s) ds,$$

где $\int_0^x H_k^{(2)}(x - s) \overline{\Psi}_k(s) r_k(s) ds$ — вероятность обрыва альтернирующего процесса, который не оборвался до момента x .

Теорема 1. Стационарное распределение ВЦМ $\{S_n, n \geq 0\}$ ПМП $S(t)$ определяется выражениями:

$$(3) \quad \rho(i\bar{d} \bar{x} \bar{z} \bar{u}) = \rho a(x_i, z_i, u_i) \prod_{\substack{k \in \Omega_d^{11} \\ k \neq i}} \overline{F}_k(x_k) v_k^{(11)}(x_k, z_k) \times$$

$$\times \prod_{\substack{k \in \Omega_d^{12} \\ k \neq i}} \overline{F}_k(x_k) v_k^{(12)}(x_k, z_k, u_k) \prod_{\substack{k \in \Omega_d^{22} \\ k \neq i}} \overline{V}_k^{(2)}(u_k),$$

$$a(x_i, z_i, u_i) = \begin{cases} 1, & d_i = 0 \text{ и } d_i = 1_1, x_i = z_i = 0, \\ \overline{F}_i(x_i) h_i^{(1)}(x_i), & d_i = 1_1, x_i > 0, \\ \overline{F}_i(x_i) h_i^{(2)}(x_i), & d_i = 1_2, \\ v_i^{(2)}(u_i), & d_i = 2, \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \frac{|\bar{d}|!}{\lambda^{|\bar{d}|}}, & d_i \neq 0, \\ \rho_0 \frac{(|\bar{d}| - 1)!}{\lambda^{|\bar{d}| - 1}}, & d_i = 0, \end{cases} \quad \rho_0 = \text{const},$$

$$\begin{aligned}
v_k^{(2)}(u) &= \int_0^\infty h_k^{(2)}(s) ds \int_0^\infty \psi_k(y+u) [f_k(y+s)\overline{R}_k(y) + \overline{F}_k(y+s)r_k(y)] dy, \\
\overline{V}_k^{(2)}(u) &= \int_u^\infty v_k^{(2)}(t) dt = \\
&= \int_0^\infty h_k^{(2)}(s) ds \int_0^\infty \overline{\Psi}_k(y+u) [f_k(y+s)\overline{R}_k(y) + \overline{F}_k(y+s)r_k(y)] dy.
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1 приводится в Приложении. Заметим, что $v_k^{(2)}(u)$ — плотность несобственного распределения оставшегося времени до конца восстановления k -го канала в момент завершения обслуживания заявки за счет резерва, либо в момент ее потери по причине расходования резерва. Значение постоянной ρ_0 находится из условия нормировки.

5. Стационарные вероятности состояний

Пусть фазовое пространство состояний E представлено в виде объединения непересекающихся подмножеств $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$, $E_i \cap E_j = \emptyset$. Известно, что в случае существования единственного распределения ВЦМ $\{S_n, n \geq 0\}$ стационарные вероятности p_i^* пребывания системы в подмножествах состояний определяются формулами из [15]

$$\begin{aligned}
(4) \quad p_i^* &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) \in E_i / S(0) = x\} = \int_{E_i} m(x) \rho(dx) \left(\int_E m(x) \rho(dx) \right)^{-1}, \\
i &= \overline{1, n},
\end{aligned}$$

где $m(x)$ — среднее время пребывания системы в состоянии $x \in E$, $\rho(\cdot)$ — стационарное распределение вложенной цепи Маркова.

С помощью равенств (4) найдем стационарные вероятности пребывания рассматриваемой системы обслуживания в различных физических состояниях. Обозначим через D множество всех физических векторов $\vec{d}$, описывающих состояния, а через D^* — некоторое его подмножество. Пусть $E_{D^*} = \{i\vec{d}\vec{x}\vec{z}\vec{u}, i = \overline{1, N}, \vec{d} \in D^*\}$ — подмножество фазовых состояний системы, дискретная составляющая которых принадлежит D^* . Найдем выражение для $\int_{E_{D^*}} m(x) \rho(dx) = \sum_{\vec{d} \in D^*} \int_{E_{\vec{d}}} m(x) \rho(dx)$, где $E_{\vec{d}}$ — подмножества фазовых состояний E с фиксированным вектором состояний $\vec{d}$. Заметим, что это подмножество содержит состояния, в которых свое физическое состояние последним изменил любой канал. Кроме этого, если некоторая компонента вектора $\vec{d}$ равна 1, т.е. $d_k = 1$, то $E_{\vec{d}}$ содержит как состояния, в которых $x_k = 0$, так и состояния, в которых $x_k > 0$.

При нахождении выражения для $\int_{E_d} m(x) \rho(dx)$ учтем, что среднее время $E[\Theta_{i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u}}]$ пребывания системы в состоянии $i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u}$ определяется формулами

$$(5) \quad E[\Theta_{i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u}}] = \begin{cases} \int_0^\omega e^{-\lambda t} \bar{\Phi}_i(t) \prod_{k \in \Omega_d^{1,1,2}} \frac{\bar{F}_k(x_k + t)}{\bar{F}_k(x_k)} dt, & i \in \Omega_d^{1,1}, \\ \int_0^\omega e^{-\lambda t} \bar{\Psi}_i(t) \bar{R}_i(t) \prod_{\substack{k \in \Omega_d^{1,1,2} \\ k \neq i}} \frac{\bar{F}_k(x_k + t)}{\bar{F}_k(x_k)} dt, & i \in \Omega_d^{1,2}, \\ \int_0^\omega e^{-\lambda t} \prod_{k \in \Omega_d^{1,1,2}} \frac{\bar{F}_k(x_k + t)}{\bar{F}_k(x_k)} dt, & i \in \Omega_d^0 \cup \Omega_d^2, \end{cases}$$

где $\omega = \left(\bigwedge_{z_k > 0} z_k \right) \wedge \left(\bigwedge_{u_k > 0} u_k \right)$. Если какое-либо из подмножеств $\Omega_d^{1,1}$, $\Omega_d^{1,2}$, $\Omega_d^0 \cup \Omega_d^2$ — пустое, то соответствующее выражение под знаком интеграла в (5) отсутствует.

В результате преобразований, учитывая вид стационарного распределения ВЦМ (3) и (5), получаем (см. Приложение), что

$$(6) \quad \int_{E_d} m(x) \rho(dx) = \rho_0 \frac{|\bar{d}|!}{\lambda^{|\bar{d}|}} \prod_{k \in \Omega_d^{1,1}} T_k^{(1,1)} \prod_{k \in \Omega_d^{1,2}} T_k^{(1,2)} \prod_{k \in \Omega_d^2} T_k^{(2)},$$

где

$$\begin{aligned} T_k^{(1,1)} &= E\alpha_k + \int_0^\infty \bar{F}_k(x) \left[H_k^{(1)}(x) - H_k^{(2)}(x) \right] dx, \\ T_k^{(1,2)} &= \int_0^\infty h_k^{(2)}(s) ds \int_0^\infty \bar{F}_k(y + s) \bar{\Psi}_k(y) \bar{R}_k(y) dy, \\ T_k^{(2)} &= E\sigma_k \int_0^\infty f_k(t) H_k^{(2)}(t) dt - \int_0^\infty h_k^{(2)}(s) ds \int_0^\infty \bar{F}_k(y + s) \bar{\Psi}_k(y) \bar{R}_k(y) dy. \end{aligned}$$

Отметим вероятностный смысл выражений из (6): $T_k^{(1,1)}$, $T_k^{(1,2)}$, $T_k^{(2)}$ — средние времена пребывания k -го канала соответственно в состояниях 1₁, 1₂, 2 между двумя соседними моментами начала обслуживания заявок, а $\int_0^\infty f_k(t) H_k^{(2)}(t) dt$ — среднее число отказов этого канала за время обслуживания заявки.

Таким образом, стационарная вероятность $p^*(D^*)$ того, что по дискретной компоненте $\bar{d}$ система находится в состояниях, принадлежащих подмножеству физических состояний D^* , определяется формулой

$$(7) \quad p^*(D^*) = \lim_{t \rightarrow \infty} P \{S(t) \in E_{D^*}\} = \frac{\sum_{\bar{d} \in D^*} \frac{|\bar{d}|!}{\lambda^{|\bar{d}|}} \prod_{k \in \Omega_d^{11}} T_k^{(11)} \prod_{k \in \Omega_d^{12}} T_k^{(12)} \prod_{k \in \Omega_d^{22}} T_k^{(22)}}{\sum_{\bar{d} \in D} \frac{|\bar{d}|!}{\lambda^{|\bar{d}|}} \prod_{k \in \Omega_d^{11}} T_k^{(11)} \prod_{k \in \Omega_d^{12}} T_k^{(12)} \prod_{k \in \Omega_d^{22}} T_k^{(22)}}.$$

В результате преобразований сумм произведения средних формулу (7) можно записать в виде

$$(8) \quad p^*(D^*) = \frac{\sum_{\bar{d} \in D^*} \frac{|\bar{d}|!}{\lambda^{|\bar{d}|}} \prod_{k \in \Omega_d^{11}} T_k^{(11)} \prod_{k \in \Omega_d^{12}} T_k^{(12)} \prod_{k \in \Omega_d^{22}} T_k^{(22)}}{\sum_{n=0}^N \frac{(N-n)!}{\lambda^{N-n}} \sum_{\{s_1, \dots, s_n\}} \prod_{i=1}^n (T_{s_i}^{(11)} + T_{s_i}^{(12)} + T_{s_i}^{(22)})},$$

где $\{s_1, \dots, s_n\}$ — некоторое сочетание из $\{1, 2, \dots, N\}$ по n ;

$$\begin{aligned} T_{s_i}^{(11)} + T_{s_i}^{(12)} + T_{s_i}^{(22)} = & E\alpha_{s_i} + \int_0^\infty \overline{F_{s_i}}(x) \left[H_{s_i}^{(1)}(x) - H_{s_i}^{(2)}(x) \right] dx + \\ & + E\sigma_{s_i} \int_0^\infty f_{s_i}(t) H_{s_i}^{(2)}(t) dt. \end{aligned}$$

В частности, пусть n — число занятых каналов в системе, тогда число свободных работоспособных каналов равно $|\bar{d}| = N - n$. Обозначим через D_n^* множество векторов, число ненулевых компонент которых равно n . Из (8) вытекает, что стационарная вероятность того, что число занятых каналов в системе равно n , имеет вид

$$(9) \quad p_n^* = P(D_n^*) = \frac{\frac{(N-n)!}{\lambda^{N-n}} \sum_{\{s_1, \dots, s_n\}} \prod_{i=1}^n (T_{s_i}^{(11)} + T_{s_i}^{(12)} + T_{s_i}^{(22)})}{\sum_{n=0}^N \frac{(N-n)!}{\lambda^{N-n}} \sum_{\{s_1, \dots, s_n\}} \prod_{i=1}^n (T_{s_i}^{(11)} + T_{s_i}^{(12)} + T_{s_i}^{(22)})},$$

$$n = \overline{0, N}.$$

Отметим, что стационарные вероятности состояний ненадежной системы обслуживания, в которой отсутствует временной резерв, также находятся

по (9), если полагать, что

$$(10) \quad T_k^{(1_1)} = \int_0^\infty \bar{F}_k(t) \bar{\Phi}_k(t) dt, \quad T_k^{(1_2)} = 0, \quad T_k^{(2)} = E\sigma_k \int_0^\infty \bar{F}_k(t) \varphi_k(t) dt.$$

Для однородной системы обслуживания, в которой все каналы описываются одинаковыми случайными величинами, равенства (9) принимают вид формул Эрланга

$$p_n^* = \frac{\Lambda^n/n!}{\sum_{n=0}^N \Lambda^n/n!},$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda &= \lambda \left[T^{(1_1)} + T^{(1_2)} + T^{(2)} \right] = \\ &= \lambda \left[E\alpha + \int_0^\infty \bar{F}(x) \left[H^{(1)}(x) - H^{(2)}(x) \right] dx + E\sigma \int_0^\infty f(t) H^{(2)}(t) dt \right]. \end{aligned}$$

В частном случае для однородной системы, когда $T^{(1_1)} = E\alpha$ и $T^{(1_2)} = T^{(2)} = 0$, (9) совпадают с известными стационарными вероятностями того, что в системе $M/G/N/0$ с абсолютно надежными каналами обслуживанием занято ровно n каналов [2].

Рассмотрим состояния системы, в которых указана причина занятости канала. Пусть D_{klm}^* — подмножество физических состояний, когда в системе k работоспособных каналов обслуживают заявки, l каналов восстанавливаются и обслуживают заявки за счет резерва, m каналов восстанавливаются и не обслуживают заявки, т.е. $n = k + l + m$. В случае однородной системы (9) принимают вид

$$p_{klm}^* = \frac{\frac{[\lambda T^{(1_1)}]^k}{k!} \frac{[\lambda T^{(1_2)}]^l}{l!} \frac{[\lambda T^{(2)}]^m}{m!}}{\sum_{n=0}^N \frac{\lambda [T^{(1_1)} + T^{(1_2)} + T^{(2)}]^n}{n!}}.$$

Определим вероятность того, что заявка, принятая к обслуживанию, не будет потеряна при обслуживании по причине неисправности канала. Для системы без временного резерва такая вероятность для k -го канала равна

$$\tilde{P}_k = P \{ \alpha_k < \gamma_k \} = \int_0^\infty f_k(t) \bar{\Phi}_k(t) dt.$$

Наличие временного резерва увеличивает эту вероятность до значения

$$(11) \quad P_k = \int_0^{\infty} h_k^{(2)}(s) ds \int_0^{\infty} r_k(t) \bar{\Psi}_k(t) F_k(t+s) dt.$$

Вероятность того, что поступающая в систему с резервом заявка будет обслужена, т.е. принята к обслуживанию и не потеряется при обслуживании, находится по формуле полной вероятности

$$(12) \quad P_{\text{обс}} = \frac{\frac{(N-1)!}{\lambda^N} \sum_{k=1}^N P_k + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(N-n-1)!}{\lambda^{N-n}} \sum_{\{s_1, \dots, s_n\}} \prod_{i=1}^n \left(T_{s_i}^{(1_1)} + T_{s_i}^{(1_2)} + T_{s_i}^{(2)} \right) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \{s_1, \dots, s_n\}}}^N P_k}{\sum_{n=0}^N \frac{(N-n)!}{\lambda^{N-n}} \sum_{\{s_1, \dots, s_n\}} \prod_{i=1}^n \left(T_{s_i}^{(1_1)} + T_{s_i}^{(1_2)} + T_{s_i}^{(2)} \right)}.$$

Вероятность $P_{\text{пот}}$ потери поступающей в систему заявки равна $P_{\text{пот}} = 1 - P_{\text{обс}}$.

Чтобы оценить влияние наличия резерва на данные характеристики нужно сравнить их с аналогичными, определяемыми по таким же формулам, в которых следует полагать, что средние времена пребывания канала в различных состояниях между двумя соседними моментами начала обслуживания заявок определяются равенствами (10), и заменить P_k на $\tilde{P}_k$.

6. Среднее стационарное время пребывания в состояниях

Пусть множество физических состояний системы представимо в виде $D = D_+ \cup D_-$, $D_+ \cap D_- = \emptyset$. Обозначим через D'_+ множество пограничных физических состояний, т.е. множество таких векторов $\bar{d} \in D_+$, для которых изменение некоторой одной из компонент переводит вектор $\bar{d}$ в множество D_- . Для вектора $\bar{d} \in D'_+$ обозначим через $G_m^k(\bar{d})$ множество номеров его компонент, изменение значения каждой из которых с значения m на k ($m, k = 1_1, 1_2, 2, 0$) переводит вектор в множество D_- . Пространство состояний E разобьем на два непересекающихся подмножества $E = E_{D_+} \cup E_{D_-}$, где $E_{D_{\pm}} = \{i\bar{d} \bar{x} \bar{z} \bar{u}, i = \overline{1, N}, \bar{d} \in D_{\pm}\}$. Для определения среднего стационарного времени $T(E_{D_+})$ пребывания ПМП $S(t)$ в подмножестве состояний E_{D_+} используем равенство из [15]

$$T(E_{D_+}) = \int_{E_{D_+}} m(x) \rho(dx) \left[\int_{E_{D_+}} \rho(dx) P(x, E_{D_-}) \right]^{-1}.$$

Теорема 2. Среднее стационарное время пребывания системы в подмножестве состояний E_{D_+} определяется по формуле

$$\begin{aligned}
 (13) \quad T(E_{D_+}) &= \frac{1}{A} \sum_{\bar{d} \in D_+} \frac{|\bar{d}|!}{\lambda^{|\bar{d}|}} \prod_{k \in \Omega_d^{11}} T_k^{(11)} \prod_{k \in \Omega_d^{12}} T_k^{(12)} \prod_{k \in \Omega_d^2} T_k^{(2)}, \\
 A &= \sum_{\bar{d} \in D'_+} \left\{ \frac{(|\bar{d}| - 1)!}{\lambda^{|\bar{d}| - 1}} \sum_{m \in G_0^{11}(\bar{d})} \prod_{k \in \Omega_d^{11}} T_k^{(11)} \prod_{k \in \Omega_d^{12}} T_k^{(12)} \prod_{k \in \Omega_d^2} T_k^{(2)} + \right. \\
 &\quad + \frac{|\bar{d}|!}{\lambda^{|\bar{d}|}} \left[\sum_{m \in G_2^0(\bar{d})} (t_m)_2^0 \prod_{k \in \Omega_d^{11}} T_k^{(11)} \prod_{k \in \Omega_d^{12}} T_k^{(12)} \prod_{\substack{k \in \Omega_d^2 \\ k \neq m}} T_k^{(2)} + \right. \\
 (14) \quad &\quad + \sum_{m \in G_{11}^0(\bar{d})} (t_m)_{11}^0 \prod_{\substack{k \in \Omega_d^{11} \\ k \neq m}} T_k^{(11)} \prod_{k \in \Omega_d^{12}} T_k^{(12)} \prod_{k \in \Omega_d^2} T_k^{(2)} + \\
 &\quad + \sum_{m \in G_{11}^{12}(\bar{d})} (t_m)_{11}^{12} \prod_{\substack{k \in \Omega_d^{11} \\ k \neq m}} T_k^{(11)} \prod_{k \in \Omega_d^{12}} T_k^{(12)} \prod_{k \in \Omega_d^2} T_k^{(2)} + \\
 &\quad \left. + \sum_{m \in G_{12}^2(\bar{d})} (t_m)_{11}^2 \prod_{k \in \Omega_d^{11}} T_k^{(11)} \prod_{\substack{k \in \Omega_d^{12} \\ k \neq m}} T_k^{(12)} \prod_{k \in \Omega_d^2} T_k^{(2)} \right] \Bigg\}, \\
 (t_m)_2^0 &= \int_0^\infty f_m(x) \left[H_m^{(2)}(x) - H_m^{(1)}(x) \right] dx, (t_m)_{11}^0 = \\
 &= 1 + \int_0^\infty f_m(x) \left[H_m^{(1)}(x) - H_m^{(2)}(x) \right] dx, \\
 (t_m)_{11}^2 &= \int_0^\infty r_m(s) \overline{\Psi}_m(s) ds \int_0^\infty h_m^{(2)}(y) \overline{F}_m(s+y) dy, (t_m)_{12}^1 = \\
 &= \int_0^\infty f_m(x) H_m^{(1)}(x) dx.
 \end{aligned}$$

В случае какого-либо пустого из множеств $G_m^k(\bar{d})$ соответствующие слагаемые в (14) следует опустить. Доказательство теоремы 2 приводится в Приложении.

Из (13) с учетом того, что $(t_m)_2^0 + (t_m)_{1_1}^0 = 1$, следует, что среднее время, в течение которого заняты n каналов системы, определяется выражением

$$(15) \quad T_n = T(E_{D_n}^*) = \frac{\frac{(N-n)!}{\lambda^{N-n}} \sum_{\{s_1, \dots, s_n\}} \prod_{i=1}^n \left(T_{s_i}^{(1_1)} + T_{s_i}^{(1_2)} + T_{s_i}^{(2)} \right)}{\sum_{\{s_1, \dots, s_n\}} \left\{ \frac{(N-n)!}{\lambda^{N-n}} \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[T_{s_j}^{(1_1)} + T_{s_j}^{(1_2)} + T_{s_j}^{(2)} \right] + \frac{(N-n)!}{\lambda^{N-n-1}} \prod_{j=1}^n \left[T_{s_j}^{(1_1)} + T_{s_j}^{(1_2)} + T_{s_j}^{(2)} \right] \right\}},$$

где $n = \overline{1, N-1}$; $\{s_1, \dots, s_n\}$ — некоторое сочетание из $\{1, 2, \dots, N\}$ по n .

В частности, среднее время, в течение которого все каналы системы свободны, равно $T_0 = 1/\lambda$, а когда все приборы заняты —

$$T_N = \frac{\prod_{j=1}^N \left[T_j^{(1_1)} + T_j^{(1_2)} + T_j^{(2)} \right]}{\sum_{i=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left[T_j^{(1_1)} + T_j^{(1_2)} + T_j^{(2)} \right]}.$$

Для однородной системы формула (15) принимает вид

$$T_n = \frac{T^{(1_1)} + T^{(1_2)} + T^{(2)}}{n + \lambda[T^{(1_1)} + T^{(1_2)} + T^{(2)}]}.$$

В качестве частного случая выпишем стационарные характеристики для системы обслуживания, в которой все случайные величины, ее описывающие, имеют показательные распределения. Пусть время обслуживания заявки k -м каналом имеет плотность распределения вероятностей $f_k(t) = \mu_k e^{-\mu_k t}$; время γ_k безотказной работы канала — плотность $\varphi_k(t) = \eta_k e^{-\eta_k t}$; время σ_k восстановления канала — плотность $\psi_k(t) = \nu_k e^{-\nu_k t}$; резерв времени ξ_k — плотность $r_k(t) = \kappa_k e^{-\kappa_k t}$. Тогда в (9) и (15) для определения стационарных вероятностей и средних стационарных времен пребывания в состояниях выражения (6) принимают вид

$$T_k^{(1_1)} + T_k^{(1_2)} + T_k^{(2)} = \frac{(\mu_k + \nu_k + \kappa_k)(\nu_k + \eta_k)}{\nu_k[\mu_k^2 + \mu_k(\nu_k + \eta_k + \kappa_k) + \eta_k \kappa_k]}.$$

Заметим, что в частном случае, когда в однородной системе отсутствует временной резерв ($\kappa \rightarrow \infty$), формулы для вычисления финальных вероятностей совпадают с известными формулами из [19]. Для ненадежной системы

без временного резерва вероятность того, что принятая k -м каналом заявка будет обслужена, равна

$$\tilde{P}_k = \frac{\mu_k}{\mu_k + \eta_k},$$

а для системы с временным резервом эта же вероятность принимает значение

$$P_k = \frac{\mu_k^2 + \mu_k(\nu_k + \eta_k + \kappa_k)}{\mu_k^2 + \mu_k(\nu_k + \eta_k + \kappa_k) + \eta_k \kappa_k}.$$

7. Численный пример

Рассмотрим пятиканальную систему обслуживания, в которую поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0,5$ 1/мин. Предполагается, что времена обслуживания заявок, восстановления каналов и временной резерв имеют распределения Эрланга второго порядка, а времена безотказной

Таблица 1. Характеристики каналов обслуживания

Номер канала	Среднее время обслуживания $E\alpha_k$, мин	Среднее время безотказной работы $E\gamma_k$, мин	Среднее время восстановления $E\sigma_k$, мин	Среднее значение временного резерва $E\xi_k$, мин	Вероятность полного обслуживания принятой заявки		
					Без резерва	С резервом	Относительная разница, %
1	4	9	1,111	0,909	0,821	0,9125	+11,17
2	5,714	7,5	1,25	0,8	0,636	0,772	+21,33
3	5	6	1,667	0,714	0,6	0,7133	+18,91
4	4,444	5,455	1,818	0,69	0,609	0,7163	+17,61
5	6,667	8,571	1,333	0,833	0,628	0,7072	+12,661

Таблица 2. Стационарные показатели системы

Состояние каналов системы	Стационарные вероятности			Среднее время пребывания		
	Без резерва	С резервом	Относительная разница, %	Без резерва	С резервом	Относительная разница, %
Все свободны	0,115	0,101	-12,394	2	2	0
Четыре свободных	0,253	0,236	-6,669	1,374	1,401	+1,957
Три свободных	0,276	0,274	-0,69	1,044	1,075	+2,
Два свободных	0,2	0,212	+5,549	0,841	0,871	+3,547
Один свободен	0,109	0,122	+12,053	0,703	0,73	+3,912
Нет свободных	0,047	0,056	+18,83	0,863	0,915	+6,049

работы каналов — распределения Эрланга третьего порядка. Параметры этих случайных величин и вероятности полного обслуживания заявки каналами при наличии резерва и без него, приводятся в табл. 1.

Результаты расчетов в системе компьютерной математики Mathcad-15 стационарных характеристик по формулам (9) и (15) при наличии временного резерва и без него и результаты сравнения этих характеристик помещены в табл. 2.

Стационарная вероятность того, что поступающая в систему заявка будет обслужена, вычисляется по формуле (12) и ее значение равно $P_{\text{обс}} = 0,725$. Такая же вероятность для системы без временного резерва равна $\tilde{P}_{\text{обс}} = 0,63$. Таким образом, наличие временного резерва улучшает данную характеристику системы на 14,958%. Вероятности потери заявки, поступающей в систему с резервом и без резерва, соответственно равны $P_{\text{пот}} = 0,275$ и $\tilde{P}_{\text{пот}} = 0,37$.

8. Заключение

С помощью аппарата полумарковских процессов с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний построена модель эволюции во времени многоканальной системы массового обслуживания $M/G/N/0$, в которой во время обслуживания заявок может произойти отказ канала, но обслуживание некоторое случайное время продолжается за счет резерва. В результате решения системы интегральных уравнений найдено стационарное распределение вложенной цепи Маркова, что позволило определить выражения для расчета стационарных вероятностей пребывания системы в различных физических состояниях и среднего стационарного времени пребывания в этих состояниях, а также оценить влияние резерва на вероятность полного обслуживания заявки. В приведенном численном примере вычислены стационарные характеристики системы и количественно оценено влияние наличия резерва на стационарную вероятность полного обслуживания поступающей в систему заявки.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. В справедливости утверждения теоремы убедимся непосредственной подстановкой выражений (3) в систему интегральных уравнений (2).

Предварительно введем обозначения: если $\bar{z} = (z_1, \dots, z_k, \dots, z_N)$, то векторы $(\bar{z} + t)$, $(\bar{z} + t)_m$, $((\bar{z} + t), t)_i$ определяются так:

$$\begin{aligned} [(\bar{z} + t)]_k &= \begin{cases} z_k + t, & z_k > 0, \\ 0, & z_k = 0, \end{cases} \\ [(\bar{z} + t)_m]_k &= \begin{cases} z_k + t, & z_k > 0, \quad k \neq m, \\ 0, & z_k = 0, \quad k = m, \end{cases} \\ [((\bar{z} + t), t)_i]_k &= \begin{cases} z_k + t, & z_k > 0, \quad k \neq i, \\ 0, & z_k = 0, \quad k \neq i, \\ t, & k = i. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогично определяются векторы $(\bar{x} - t)$, $(\bar{x} - t)_m$, $(\bar{u} + t)$ и $(\bar{u} + t)_m$. Рассмотрим одно из уравнений системы (2):

$$\begin{aligned}
& \rho(i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u}) = \int_0^{x_{\min}} e^{-\lambda t} \varphi_i(t) \times \\
& \times \prod_{j \in \Omega_d^{1_1, 1_2}} \frac{\bar{F}_j(x_j)}{\bar{F}_j(x_j - t)} \rho \left[i\bar{d}'(\bar{x} - t)(\bar{z} + t)(\bar{u} + t) \right] dt + \\
& + \sum_{m \in \Omega_d^{1_1}} \int_0^{x_{\min}} e^{-\lambda t} \varphi_m(z_m + t) \times \\
& \times \prod_{j \in \Omega_d^{1_1, 1_2}} \frac{\bar{F}_j(x_j)}{\bar{F}_j(x_j - t)} \rho \left[m\bar{d}'(\bar{x} - t)((\bar{z} + t)_m, t)_i(\bar{u} + t) \right] dt + \\
& + \sum_{\substack{m \in \Omega_d^{1_2} \\ m \neq i}} \int_0^{x_{\min}} e^{-\lambda t} \psi_m(u_m + t) r_m(z_m + t) \times \\
& \times \prod_{j \in \Omega_d^{1_1, 1_2}} \frac{\bar{F}_j(x_j)}{\bar{F}_j(x_j - t)} \rho \left[m\bar{d}'(\bar{x} - t)((\bar{z} + t)_m, t)_i(\bar{u} + t)_m \right] dt + \\
& + \sum_{m \in \Omega_d^0 \cup \Omega_d^2} \int_0^{x_{\min}} e^{-\lambda t} \prod_{j \in \Omega_d^{1_1, 1_2}} \frac{\bar{F}_j(x_j)}{\bar{F}_j(x_j - t)} \rho \left[m\bar{d}'(\bar{x} - t)((\bar{z} + t), t)_i(\bar{u} + t) \right] dt + \\
& + \begin{cases} \varphi_m(z_m + x_{\min}) e^{-\lambda x_{\min}} \prod_{j \in \Omega_d^{1_1, 1_2}} \frac{\bar{F}_j(x_j)}{\bar{F}_j(x_j - x_{\min})} \times \\ \times \rho \left[m\bar{d}'(\bar{x} - x_{\min})((\bar{z} + x_{\min})_m, x_{\min})_i(\bar{u} + x_{\min}) \right], & x_{\min} = x_m, \quad m \in \Omega_d^{1_1}, \\ \varphi_i(x_{\min}) e^{-\lambda x_{\min}} \prod_{j \in \Omega_d^{1_1, 1_2}} \frac{\bar{F}_j(x_j)}{\bar{F}_j(x_j - x_{\min})} \times \\ \times \rho \left[i\bar{d}'(\bar{x} - x_{\min})_i(\bar{z} + x_{\min})(\bar{u} + x_{\min}) \right], & x_{\min} = x_i, \\ 0, & x_{\min} = x_m, \quad m \in \Omega_d^{1_2}, \quad m \neq i, \end{cases}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
d_i &= 1_2, \quad d'_i = 1_1, \quad d'_k = d_k, \quad k \neq i; \\
x_{\min} &= \bigwedge_{x_k > 0} x_k.
\end{aligned}$$

Подставим выражения (3) для стационарного распределения в правую часть уравнения и учтем тождества

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} v_k^{(11)}(x_k - t, t) &= -h_k^{(1)}(x_k - t) \varphi_k(t), \\ \frac{\partial}{\partial t} v_k^{(11)}(x_k - t, z_k + t) &= -h_k^{(1)}(x_k - t) \varphi_k(z_k + t), \\ \frac{\partial}{\partial t} v_k^{(12)}(x_k - t, z_k + t, u_k + t) &= -h_k^{(2)}(x_k - t) \psi_k(z_k + t) r_k(z_k + t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{V}_k^{(2)}(u_k + t) &= -v_k^{(2)}(u_k + t), v_k^{(11)}(x_k, 0) = h_k^{(2)}(x_k), v_k^{(11)}(0, z_k) = \\ &= \varphi_k(z_k), v_k^{(12)}(0, z_k, u_k) = 0.\end{aligned}$$

В результате преобразований интегральные слагаемые в правой части уравнения приводятся к виду

$$\begin{aligned}& -\rho_0 \frac{|\bar{d}|!}{\lambda^{|\bar{d}|}} \int_0^{x_{\min}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \bar{F}_i(x_i) v_i^{(11)}(x_i - t, t) \prod_{k \in \Omega_d^{11}} \bar{F}_k(x_k) v_k^{(11)}(x_k - t, z_k + t) \times \right. \\ & \quad \times \prod_{\substack{k \in \Omega_d^{12} \\ k \neq i}} \bar{F}_k(x_k) v_k^{(12)}(x_k - t, z_k + t, u_k + t) e^{-\lambda t} \prod_{k \in \Omega_d^2} \bar{V}_k^{(2)}(u_k + t) \left. \right\} dt = \\ & = \rho_0 \frac{|\bar{d}|!}{\lambda^{|\bar{d}|}} \bar{F}_i(x_i) h_i^{(2)}(x_i) \prod_{k \in \Omega_d^{11}} \bar{F}_k(x_k) v_k^{(11)}(x_k, z_k) \prod_{\substack{k \in \Omega_d^{12} \\ k \neq i}} \bar{F}_k(x_k) v_k^{(12)}(x_k, z_k, u_k) \times \\ & \quad \times \prod_{k \in \Omega_d^2} \bar{V}_k^{(2)}(u_k) - \rho_0 \frac{|\bar{d}|!}{\lambda^{|\bar{d}|}} \bar{F}_i(x_i) v_i^{(11)}(x_i - x_{\min}, x_{\min}) \times \\ & \quad \times \prod_{k \in \Omega_d^{11}} \bar{F}_k(x_k) v_k^{(11)}(x_k - x_{\min}, z_k + x_{\min}) \times \\ & \quad \times \prod_{\substack{k \in \Omega_d^{12} \\ k \neq i}} \bar{F}_k(x_k) v_k^{(12)}(x_k - x_{\min}, z_k + x_{\min}, u_k + x_{\min}) e^{-\lambda x_{\min}} \prod_{k \in \Omega_d^2} \bar{V}_k^{(2)}(u_k + x_{\min}).\end{aligned}$$

Очевидно, что выражение в правой части уравнения совпадает с выражением стационарного распределения в левой части, задаваемого формулой (3). Теорема 1 доказана.

Вывод равенства (6). Преобразуем $\int_{E_d^-} m(x) \rho(dx)$ с учетом вида среднего времени пребывания системы в состояниях и стационарного распреде-

ления ВЦМ и тождеств

$$\begin{aligned}
& -\frac{d}{dt} \int_0^\infty \overline{F}_i(x_i+t) dx_i \int_t^\infty v_i^{(1)}(x_i, z_i) dz_i = \overline{F}_i(t) \overline{\Phi}_i(t) + \overline{\Phi}_i(t) \int_0^\infty f_i(t+s) H_i^{(1)}(s) ds, \\
& -\frac{d}{dt} \int_0^\infty \overline{F}_i(x_i+t) dx_i \int_t^\infty dz_i \int_t^\infty v_i^{(12)}(x_i, z_i, u_i) du_i = \overline{\Psi}_i(t) \overline{R}_i(t) \int_0^\infty f_i(t+s) H_i^{(2)}(s) ds.
\end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{E_d} m(x) \rho(dx) = \sum_{i=1}^N \iiint_{R_x^+ R_z^+ R_u^+} \rho(i \overline{d} \overline{x} \overline{z} \overline{u}) E [\Theta_{i \overline{d} \overline{x} \overline{z} \overline{u}}] d\overline{x} d\overline{z} d\overline{u} = \\
& = -\rho_0 \frac{|\overline{d}|!}{\lambda^{|\overline{d}|}} \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left\{ e^{-\lambda t} \prod_{k \in \Omega_d^{11}} \int_0^\infty \overline{F}_k(x_k+t) dx_k \int_t^\infty v_k^{(11)}(x_k, z_k) dz_k \times \right. \\
& \times \prod_{k \in \Omega_d^{12}} \int_0^\infty \overline{F}_k(x_k+t) dx_k \int_t^\infty dz_k \int_t^\infty v_k^{(12)}(x_k, z_k, u_k) du_k \prod_{k \in \Omega_d^2} \int_t^\infty \overline{V}_k^{(2)}(u_k) du_k \left. \right\} dt = \\
& = \rho_0 \frac{|\overline{d}|!}{\lambda^{|\overline{d}|}} \prod_{k \in \Omega_d^{11}} \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_k(x_k) v_k^{(11)}(x_k, z_k) dx_k dz_k \times \\
& \times \prod_{k \in \Omega_d^{12}} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_k(x_k) v_k^{(12)}(x_k, z_k, u_k) dx_k dz_k du_k \prod_{k \in \Omega_d^2} \int_0^\infty \overline{V}_k^{(2)}(u_k) du_k = \\
& = \rho_0 \frac{|\overline{d}|!}{\lambda^{|\overline{d}|}} \prod_{k \in \Omega_d^{11}} T_k^{(11)} \prod_{k \in \Omega_d^{12}} T_k^{(12)} \prod_{k \in \Omega_d^2} T_k^{(2)}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
& \iiint_{R_x^+ R_z^+ R_u^+} d\overline{x} d\overline{z} d\overline{u} = \\
& = \underbrace{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty dx_{s_1} \dots dx_{s_m}}_{x_{s_1} > 0 \dots x_{s_m} > 0} \underbrace{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty dz_{s_1} \dots dz_{s_k}}_{z_{s_1} > 0 \dots z_{s_k} > 0} \underbrace{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty du_{s_1} \dots du_{s_l}}_{u_{s_1} > 0 \dots u_{s_l} > 0}.
\end{aligned}$$

Равенство (6) доказано.

Доказательство теоремы 2. Преобразуем сумму интегралов в выражении $\int_{E_{D+}} \rho(dx) P(x, E_{D-})$, содержащих $\rho(i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u})$, $i = \overline{1, N}$, с фиксированным вектором $\bar{d} \in D'_+$ из пограничного слоя, для которого изменение m -й компоненты с $d_m = 1_1$ на $d'_m = 0$ переводит вектор $\bar{d}$ в множество D_- , т.е. $m \in G_{1_1}^0(\bar{d})$. Из состояния $i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u}$ система переходит в подмножество E_- , если минимум времен пребывания в этом состоянии достигается на СВ α_m (если $x_m = 0$), т.е. $\Theta_{i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u}} = \alpha_m$ или $\Theta_{i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u}} = [\alpha_m - x_m]_+$ (если $x_m > 0$). Вероятности этих переходов соответственно равны

$$\int_0^\omega e^{-\lambda t} f_m(t) \overline{\Phi_m}(t) \prod_{\substack{k \in \Omega_d^{1_1, 1_2} \\ k \neq m}} \frac{\overline{F_k}(x_k + t)}{\overline{F_k}(x_k)} dt$$

и

$$\int_0^\omega e^{-\lambda t} \frac{f_m(x_m + t)}{\overline{F_m}(x_m)} \overline{\Phi_m}(t) \prod_{\substack{k \in \Omega_d^{1_1, 1_2} \\ k \neq m}} \frac{\overline{F_k}(x_k + t)}{\overline{F_k}(x_k)} dt.$$

В результате преобразований, аналогичным преобразованиям, которые использовались при выводе (6), получаем, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \iiint_{R_x^+ R_z^+ R_u^+} \rho(i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u}) P(i\bar{d}\bar{x}\bar{z}\bar{u}, E_-) d\bar{x} d\bar{z} d\bar{u} = \\ & = -\rho_0 \frac{|\bar{d}|!}{\lambda^{|\bar{d}|}} \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left\{ e^{-\lambda t} \int_0^\infty f_m(x_m + t) dx_m \int_t^\infty v_m^{(1_1)}(x_m, z_m) dz_m \times \right. \\ & \quad \times \prod_{\substack{k \in \Omega_d^{1_1} \\ k \neq m}} \int_0^\infty \overline{F_k}(x_k + t) dx_k \int_t^\infty v_k^{(1_1)}(x_k, z_k) dz_k \times \\ & \quad \times \prod_{k \in \Omega_d^{1_2}} \int_0^\infty \overline{F_k}(x_k + t) dx_k \int_t^\infty dz_k \int_t^\infty v_k^{(1_2)}(x_k, z_k, u_k) du_k \prod_{k \in \Omega_d^2} \int_t^\infty \overline{V_k}^{(2)}(u_k) du_k \left. \right\} dt = \\ & = \rho_0 \frac{|\bar{d}|!}{\lambda^{|\bar{d}|}} (t_m)_{1_1}^0 \prod_{\substack{k \in \Omega_d^{1_1} \\ k \neq m}} T_k^{(1_1)} \prod_{k \in \Omega_d^{1_2}} T_k^{(1_2)} \prod_{k \in \Omega_d^2} T_k^{(2)}. \end{aligned}$$

Таким образом, в правую часть (14) входит сумма слагаемых для всех номеров $m \in G_{11}^0(\bar{d})$. Аналогичные выкладки проводятся для других компонент векторов из пограничного слоя. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.
2. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995.
3. Рыков В.В. Управляемые системы массового обслуживания // Итоги науки и техн. Сер. вероят., мат. стат., теор. кибернет. 1975. Т. 12. С. 43–153.
4. Богатырев В.А., Богатырев А.В. Оптимизация резервированного распределения запросов в кластерных системах реального времени // Информационные технологии. 2015. Т. 21. № 7. С. 495–502.
5. Дудин А.Н., Сунь Б. Ненадежная многолинейная система обслуживания с управляемым ширококовещательным обслуживанием // АиТ. 2009. № 12. С. 147–160.
Dudin A.N., Sung V. Unreliable Multi-Server System with Controllable Broadcasting Service // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 12. P. 2073–2084.
6. Kim C.S., Lee M.H., Dudin A.N., Klimenok V.I. Multi-server Queuing Systems with Cooperation of the Servers // Ann. Oper. Res. 2008. V. 162. No. 1. P. 57–68.
7. Богатырев В.А., Сластухин И.А. Эффективность резервированного выполнения запросов в многоканальных системах обслуживания // Науч.-технич. вестн. информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16. № 2. С. 311–317.
8. Гришунина Ю.Б. Исследование полумарковской модели технического обслуживания с целью оптимального выбора вида ремонта // Надежность. 2010. № 2 (33). С. 44–53.
9. Peschansky A.I., Kovalenko A.I. Semi-Markov Model of a Single-Server Queue with Losses and Maintenance of an Unreliable Server // Cybern. Syst. Anal. 2015. V. 51. No. 4. P. 632–643.
10. Песчанский А.И., Коваленко А.И. Полумарковская модель ненадежной однолинейной системы обслуживания с потерями и различными типами восстановления // АиТ. 2016. № 11. С. 112–126.
Peschansky A.I., Kovalenko A.I. A Semi-Markov Model for an Unreliable Single-Line Queueing System with Losses and Different Restoration Types // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 12. P. 2192–2204.
11. Peschansky A.I., Kovalenko A.I. On a Strategy for the Maintenance of an Unreliable Channel of a One-Server Loss Queue // Automatic Control and Computer Sciences. 2016. V. 50. No. 6. P. 397–407.
12. Черкесов Г.Н. Надежность аппаратно-программных комплексов. СПб.: Питер, 2005.
13. Ushakov I.A. Probabilistic Reliability Models. Wiley, 2012.
14. Копн В.Я., Обжерин Ю.Е., Песчанский А.И. Стохастические модели автоматизированных производственных систем с временным резервированием. Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2001.
15. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. К.: Наук. думка, 1982.

16. Корлат А.Н., Кузнецов В.Н., Новиков М.И. и др. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. Кишинев: Штиинца, 1991.
17. Песчанский А.И. Полумарковская модель ненадежной восстанавливаемой резервированной одноканальной системы обслуживания с потерями // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. 2017. № 1 (53). С. 31–41.
18. Beichelt F., Franken P. Zuverlässigkeit und Instandhaltung, Mathematische Methoden. Berlin: VEB Verlag Technik, 1983.
19. Якушев Ю.Ф. Об одной задаче обслуживания потока вызовов ненадежными приборами // Пробл. передачи информации. 1969. Т. 5. Вып. 4. С. 84–88.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневым.

Поступила в редакцию 01.03.2018

После доработки 13.10.2018

Принята к публикации 08.11.2018